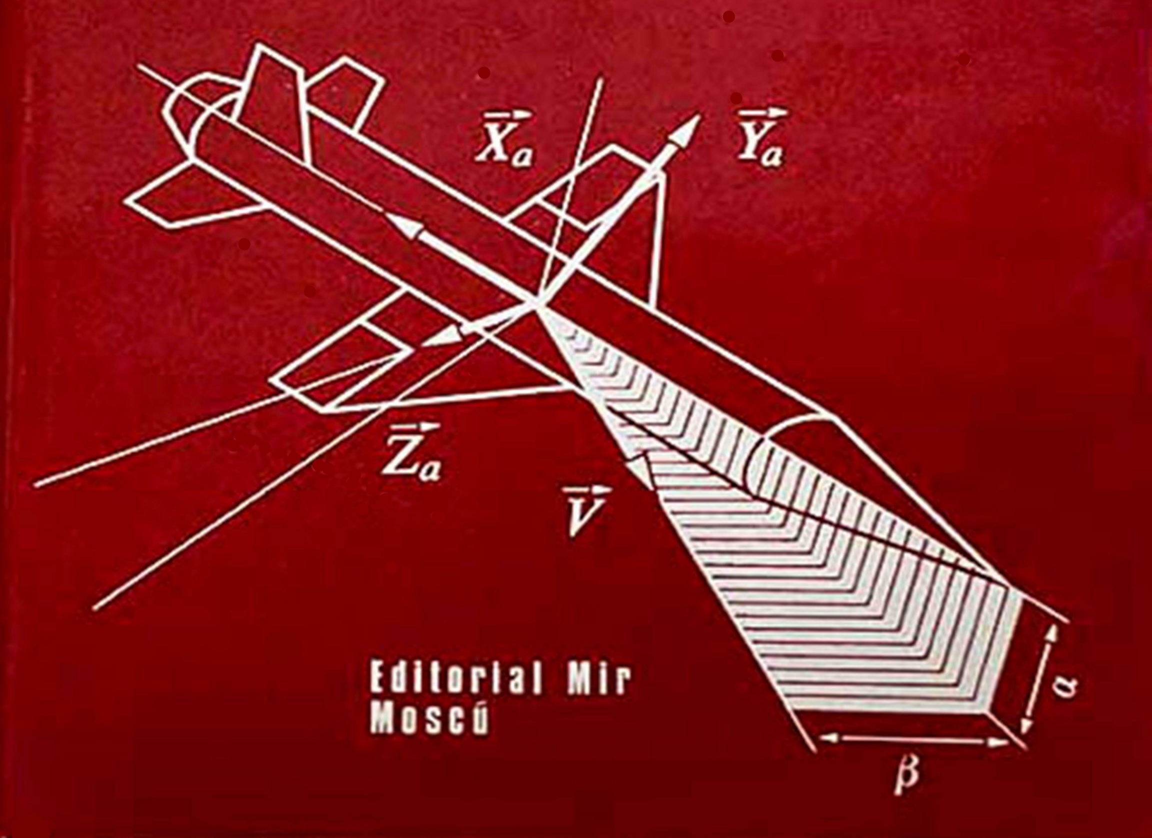
Aerodinámica en preguntas y problemas



Editorial Mir
Moscú

Aerodinámica en preguntas y problemas



Editorial Mir
Moscú

AERODINAMICA EN PREGUNTAS Y PROBLEMAS

АЭРОДИНАМИКА В ВОПРОСАХ И ЗАДАЧАХ

Под редакцией лауреата Государственной премии СССР, доктора технических наук, профессора Н. Ф. Краснова

Москва «Высшая школа»

Aerodinámica en preguntas y problemas

Dirigido por
el Prof. N.F. Krasnov, Doctor en Ciencias Técnicas



Editorial Mir
Moscú

Traducido del ruso por el ingeniero
Antonio Ballesteros Elías

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-000665-6

Índice

Prólogo

Las crecientes escalas, la elevación del nivel científico y el significado práctico de las investigaciones de los procesos y fenómenos de dinámica de los gases (gasodinámica), el aumento de la atención que se presta a su enseñanza y estudio en la escuela superior, están estrechamente ligados con la resolución de los problemas relacionados con el posterior fomento del transporte aéreo, con la conquista del espacio cósmico. Se refieren, asimismo, a dichos problemas los trabajos encaminados a la creación de diversos tipos de vehículos volantes (aeronaves), a fin de desarrollar la técnica aeronáutica de la URSS. La aerodinámica constituye la segura base teórica de la aviación y cohetería espacial.

El desarrollo de la aerodinámica en los últimos años, junto con la profundización de las investigaciones fundamentales, se caracteriza por la creación y extensa introducción de métodos eficaces de cálculo de los parámetros de la corriente (alrededor, a lo largo) de los cuerpos por un medio líquido o gaseoso. La aparición de los ordenadores creó la posibilidad de resolver complicados problemas de aerodinámica por el procedimiento de cálculos numéricos. Con esto, el empleo de los ordenadores contribuyó no sólo a la aceleración de los cálculos, sino también, lo que es de suma importancia, a una variación y perfeccionamiento considerables de la metodológica de las investigaciones, lo que se ha manifestado en la creación de una orientación, realmente nueva, en la aerodinámica aplicada, el llamado experimento de cálculo. Potentes sistemas de ordenadores pueden ser utilizados y ya se utilizan para realizar importantes programas aerodinámicos. Las escalas de semejantes trabajos crecen en alto grado, aumenta la eficacia de aprovechamiento de los ordenadores, lo que constituye una considerable aportación en la aceleración del programa tecnocientífico en la cohetería espacial.

Con la extensa aplicación de los ordenadores y las matemáticas de cálculo, los métodos analíticos no pierden su valor en aerodinámica. A pesar de que el número de estos métodos es relativamente pequeño (análisis cuantitativo de dimensiones, métodos asintóticos, método de características y de pequeñas dimensiones, linealización de las ecuaciones de movimiento), con su ayuda es posible resolver muchos problemas de aplicación. Es de suma importancia para la práctica de ingeniería el hecho de que la solución analítica determina las correspondientes dependencias de los parámetros en forma explícita, mientras que en el experimento de cálculo es preciso realizar un considerable número de cálculos de un mismo tipo, que permiten establecer relaciones cuantitativas correctas entre las características gasodinámicas.

Unos métodos analíticos proporcionan resultados suficientemente buenos en lo que atañe a la precisión, otros nos permiten obtener una singular información inicial, hasta cierto punto aproximada, acerca del carácter cualitativo del fenómeno. Con ello, las soluciones analíticas halladas son también necesarias como puntos de referencia o características de prueba para estimar y verificar la calidad de los algoritmos de cálculo.

La realización de los métodos analíticos está, asimismo, ligada con la profusa aplicación de dispositivos electrónicos de cálculo de diversos tipos. En todos los casos, prácticamente, debe y han de ser usados microcalculadores (de ingeniería y programables), así como miniordenadores de uso personal que son un conjunto de dispositivos en el que entran el microprocesador, la pantalla, el trazador de curvas y el dispositivo de impresión.

En la presente obra se consideran, principalmente, los métodos analíticos de investigaciones, obtenidos en aerodinámica teórica y aplicada. El contenido de estos métodos se revela con el planteamiento de los correspondientes problemas (preguntas) y su posterior resolución. La elección de esta forma de composición del libro corresponde a la más importante tesis de didáctica moderna, de acuerdo con la cual el material teórico se asimila de forma sólida y eficaz si él se utiliza permanentemente para la solución independiente de problemas prácticos concretos.

Al mismo tiempo, la familiarización con el material del libro, el carácter de las preguntas y los problemas puede contribuir a inculcar determinada experiencia de investigaciones, cuya realización exitosa requiere saber elegir correctamente, plantear y formular uno u otro problema, tema o bien, incluso, un problema científico en su totalidad.

Los problemas y las preguntas enunciados reflejan un determinado círculo de problemas de aerodinámica de aplicación. Su elección fue realizada de forma que ayudara a los estudiantes a asimilar las partes fundamentales de nuestro curso. Con ello, la resolución de los problemas y las respuestas a las correspondientes preguntas, aunque acaban con una ilustración numérica o con el examen de un fenómeno concreto (dependencia de cálculo), no obstante no son particulares, sino que tienen carácter general y abarcan un determinado complejo de información didáctica y, por lo tanto, favorecen el enfoque creador hacia el estudio de la asignatura.

La sucesividad de las preguntas y problemas, el contenido de las respuestas y soluciones corresponden, en lo fundamental, al programa del curso de estudios. Con esto, algunas preguntas y problemas son de carácter complejo; parece como si ellos se «desviaran» de semejante sucesividad, lo que ha de proporcionar un «impulso adicional» a la generalización de la información científica, su sintetización al buscar respuesta a complicadas preguntas y problemas.

En los caps. 1—3 del libro, en forma de preguntas y problemas, se consideran los datos fundamentales de aerodinámica, cinemática y dinámica del medio gaseoso que permiten estudiar profundamente los más importantes modelos matemáticos de aerodinámica (las ecuaciones de Euler, de Navier—Stokes, de continuidad, etc.). En los caps. 4—5 se aduce la información necesaria sobre los procesos a salto y el cálculo de parámetros con el flujo supersónico del gas (método de características). Un amplio círculo de preguntas y problemas en los caps. 6—8 se refiere a una de las orientaciones fundamentales de aerodinámica, es decir, la teoría y los métodos de circulación alrededor del perfil del ala, así como la superficie sustentadora (portadora) como uno de los elementos del vehículo volante.

En la obra se ha incluido el cap. 9, de considerable volumen, dedicado a las características aerodinámicas de las aeronaves con el movimiento inestabilizado. Junto con los conceptos y definiciones generales, en él se examinan los resultados de las investigaciones de la circulación no estacionaria alrededor de las alas con una amplia banda de números de Mach.

Las preguntas y los problemas del cap. 10 están relacionados con la aerodinámica de los sólidos de revolución (fuselajes, células). Junto con la corriente uniforme se aducen datos sobre sus características aerodinámicas no estacionarias. El cap. 11 contiene preguntas y problemas relacionados con la aerodinámica de los

vehículos volantes constituidos por una combinación de distintos elementos, tales como el fuselaje, el ala, el empenaje, los dispositivos de mando. Fundamentalmente, en él se estudian los fenómenos de interferencia que determinan el carácter aerodinámico de las interacciones entre distintos elementos y la magnitud del efecto sumario de las fuerzas del medio circundante sobre el vehículo volante en su totalidad. Sobre la base de los datos de la corriente inuniforme alrededor de alas aisladas y sólidos de revolución se consideran las características inuniformes sumarias en forma de derivadas aerodinámicas.

Al problema de rozamiento y transferencia de calor, así como a la aerodinámica de un medio enrarecido, están dedicados los dos últimos capítulos del libro (12 y 13). En ellos se ofrecen los métodos de cálculo de las fuerzas superficiales y los correspondientes flujos térmicos cuando alrededor (a lo largo) de un cuerpo circula tanto un medio continuo, como un flujo de moléculas libres. Al examinar el efecto de fuerza o térmico de un medio gaseoso sobre el cuerpo, que se mueve en su seno, se acentúa la atención no sólo en los esquemas de cálculo, sino también en la esencia física de los los procesos para los que se hallan las características cuantitativas.

Todos los problemas y las preguntas se acompañan con las soluciones y respuestas suficientemente detalladas, cuyo fundamental objetivo es exponer los principios sobre los que ellos se basan, así como indicar cierto punto de referencia que ayude al estudiante a buscar la vía correcta si él intenta resolver el problema planteado de modo independiente y en otro orden del que se propone en el libro.

La exposición del material de esta obra se basa en el manual «Aerodinámica» [19], así como en otros libros de texto, materiales didácticos y monografías, cuya relación se aduce al final del libro. En particular, en ellos hay diversas tablas y gráficas de las funciones de dinámica de los gases y termodinámicas para el aire y los gases, de las que se hace uso al resolver los problemas.

Es lógico que en este libro resulte imposible reflejar toda la diversidad de los problemas de aerodinámica moderna, incluso con un considerable número de preguntas y problemas. Por ello, aquí se proporciona información cuyo contenido y volumen son suficientes, en caso de su profunda asimilación, para que el interesado pueda estudiar por su propia cuenta otros problemas de aerodinámica.

Al final del libro se aduce una serie de programas para calcular los parámetros gasodinámicos en un ordenador.

Autores

Anotaciones fundamentales

r (d) — radio (diámetro) de una sección arbitraria de un sólido de revolución;

x_c, x_t — longitud de un sólido de revolución, de un vehículo volante;

b_e, b_0 — cuerda de extremo (de punta), de raíz (central) del ala;

b', (b) — anchura de la sección (cuerda corriente);

b_m, b_A — cuerda media geométrica y cuerda media aerodinámica;

l — envergadura del ala;

x_m, $x_{c.g}$ — coordenadas del centro de masas y de gravedad del área de la superficie de sustentación;

x_p, z_p, x_F, z_F — coordenadas de los centros de presión y de los focos;

S — área de la sección transversal de un sólido de revolución; surpeficie de sustentación;

λ — alargamiento;

η — ahusamiento (adelgazamiento) del ala o del empenaje;

α, β — ángulos de ataque y deslizamiento;

δ_{dir}, δ_{al}, δ_{aler} — ángulos de giro de los timones de dirección, de altura y de los alerones;

γ, φ — ángulos de balanceo;

ε — ángulo en el vértice del ala; deflexión de la corriente tras de ella;

V — velocidad de movimiento de un vehículo volante, velocidad del flujo de gas;

V_x, V_y, V_z; V_x, V_r, V_γ; V_r, V_θ, V_ψ — componentes de la velocidad en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas, respectivamente;

V_δ, V_l — velocidad en el borde (externo) de la capa límite o bien de la subcapa laminar;

a — velocidad del sonido en un gas;

Φ, φ — potencial de velocidad (φ, φ' — potencial adicional de velocidad del flujo perturbado);

ψ — función de la corriente;

Γ — circulación de la velocidad (intensidad de vórtice);

w, W — velocidades inducidas por el vórtice;

W — potencial complejo;

$\lambda = V/a^*$ — velocidad relativa;

$\mathrm{M} = V/a$ — número de Mach;

$k' = \sqrt{1 - \mathrm{M}_\infty^2}$,

$\alpha' = \sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}$ — valores reducidos del número de Mach;

M_δ — número de Mach en el límite libre de la capa límite;

$\mathrm{M}_{crít}$ — número crítico de Mach;

Ω_x, Ω_y, Ω_z — componentes de la velocidad angular del vehículo volante;

q^* — amplitud de las vibraciones;

p — frecuencia de las vibraciones;

$p^* = pl/V_\infty$ — número de Strouhal;

T — temperatura del gas;

T_δ — temperatura en el límite libre de la capa límite;

c_p, c_v — calores específicos a

presión y volumen constantes;
$k = c_p/c_v$ — índice de la adiabática;
ρ — densidad de un gas;
ρ_δ — densidad en el borde libre de la capa límite;
μ — viscosidad dinámica;
$\nu = \mu/\rho$ — viscosidad cinemática;
λ — conductibilidad térmica;
$\mathrm{Re} = V\rho l/\mu$ — número de Reynolds;
R, R_0 — constantes de los gases específica y universal;
μ_m — masa media molar de un gas;
i — entalpía de un gas;
S — entropía;
α — grado de disociación; coeficiente de traspaso de calor;
q — flujo térmico específico;
$\bar{c}$, c_m — velocidad media y más probable del movimiento caótico de las moléculas;
f — coeficiente de acomodación;
η — coeficiente térmico de acomodación;
p — presión de un gas;
p_0' — presión de remanso en el flujo tras la onda de choque;
p_δ — presión en la capa límite;
$q = \rho V^2/2 = kpM^2/2$ — presión dinámica (de velocidad);
$\bar{p} = (p - p_\infty)/q$ — coeficiente de presión;
$\Delta\bar{p} = \bar{p}_\mathrm{i} - \bar{p}_\mathrm{s}$ — coeficiente de caída de presión (diferencia entre los coeficientes de presión en los planos inferior (intradós) y superior (trasdós) del ala o en las generatrices de un sólido de revolución);
τ — esfuerzo de rozamiento;
$c_{fx} = \tau/q_\infty$ — coeficiente local de rozamiento;
X_a, Y_a, Z_a — fuerzas: de resistencia al avance, aerodinámicas de sustentación y lateral, respectivamente (en el sistema de ejes ligados a la trayectoria, al viento relativo o a la velocidad);
X, Y, Z — fuerzas aerodinámicas longitudinal, normal y transversal (en el sistema de ejes ligados al vehículo o al centro de gravedad);
M_{x_a}, M_{y_a}, M_{z_a} — momentos aerodinámicos de balanceo, de guiñada y de cabeceo (en el sistema de ejes ligados a la trayectoria);
M_x, M_y, M_z — ídem, en ejes ligados al vehículo;
$c_{x_a} = X_a/(q_\infty S)$, $c_{y_a} = Y_a (q_\infty S)$, $c_{z_a} = Z_a/(q_\infty S)$ — coeficientes aerodinámicos de las fuerzas de resistencia al avance, de sustentación y lateral, respectivamente;
$c_x = X/(q_\infty S)$, $c_y = Y/(q_\infty S)$, $c_z = Z/(q_\infty S)$ — coeficientes aerodinámicos de las fuerzas longitudinal, normal y transversal;
$m_{x_a} = M_{x_a}/(q_\infty S x_c)$, $m_{y_a} = M_{y_a}/(q_\infty S x_c)$, $m_{z_a} = M_{z_a}/(q_\infty S x_c)$ — coeficientes aerodinámicos de los momentos de balanceo, de guiñada y de cabeceo;
X_i — resistencia inducida o debida a la sustentación;
$c_{xi} = X_i/(q_\infty S)$ — coeficiente de resistencia inducida;
X_ch — resistencia de ondas de choque;
$c_{x\mathrm{ch}} = X_\mathrm{ch}/(q_\infty S)$ — coeficiente de resistencia de ondas de choque;
T — fuerza de succión;
$c_{xT} = T/(q_\infty S)$ — coeficiente de la fuerza aerodinámica de succión;
Y_t — fuerza aerodinámica normal creada por el timón;
i_int — coeficiente de interferencia;
$c_{y\delta} = Y_t/(q_\infty S_\mathrm{ala})$ — coeficiente de la fuerza aerodinámica

normal condicionada por la desviación de las semialas del ala basculante o giratoria;

$K = Y_a/X_a = c_{y_a}/c_{x_a}$ — rendimiento aerodinámico;

$c_p = x_p/x_c = -m_z/c_y$ — coeficiente del centro de presión;

$\bar{x}_F = x_F/x_c = -\partial m_{z_a}/\partial c_{y_a}$ — coordenada relativa del foco;

Índices:

inc, comp — fluido incompresible y compresible;

1, 2 — parámetros de un gas delante y detrás de la onda de choque;

ch — onda de choque;

máx — máximo;

∞ — parámetro de un gas en el infinito (flujo no perturbado);

o — remanso; datos iniciales;

$*$ — parámetros críticos, determinantes;

ala, emp, t (f) — parámetros del ala, empenaje o fuselaje;

ala (t) — influencia del fuselaje sobre la circulación alrededor del ala (empenaje);

t (ala) — fuselaje al haber ala (empenaje);

i, s — planos inferior y superior de una superficie aerodinámica

ν, p, μ, k — numeración de las células (bandas, paneles) en la teoría vorticial del ala;

rot — rotación;

pl — placa;

par — pared;

esf — cuerpo esférico;

p — extremo plano;

cil — cilindro;

s.c. — sector de cola de los sólidos (popa);

máx.t — sección máxima transversal (maestra) de un sólido de revolución (fuselaje)

s.b — sección de base (corte) del fuselaje o del ala;

i — inductancia; conjunto de parámetros cinemáticos (q_i);

l, t — capa límite laminar, turbulenta;

f — rozamiento;

rad — radiación;

ais — aislados;

a, m — átomo, molécula;

H, t — parámetros para cierta altura de vuelo y en tierra;

i, r — moléculas incidentes y reflejadas;

f, b — planos de ataque y de salida de una superficie alrededor de la cual circula un flujo de moléculas libres.

Capítulo 1

Generalidades de aerodinámica

Los problemas y preguntas aducidos en el presente capítulo se refieren a los conceptos y definiciones fundamentales de aerodinámica moderna. La información que ofrecemos, relacionada con esos conceptos y definiciones, caracteriza el efecto de las fuerzas del medio gaseoso sobre los cuerpos que por él se mueven. Con ello se estudian los casos cuando fluye un medio hipotético ideal, así como un fluido (gas) que posee propiedades reales de viscosidad. La manifestación de estas propiedades está ligada con el surgimiento de una capa límite que influye considerablemente sobre el carácter del movimiento del gas que circula alrededor de cierto cuerpo.

El objetivo del estudio de la circulación de un fluido o un gas alrededor de cuerpos consiste en determinar las fuerzas y momentos aerodinámicos sumarios que actúan sobre ellos. Parte de las preguntas y problemas se dedica al examen de la naturaleza física de dichos fuerzas y momentos, a la noción de coeficientes aerodinámicos, la estructura de las dependencias que permiten calcular tales coeficientes, así como las correspondientes fuerzas y momentos. Se ofrece información sobre la resolución de un importante problema que trata sobre el cálculo relacionado con traspaso de los coeficientes aerodinámicos de un sistema de coordenadas a otro o bien con el paso a otros parámetros geométricos característicos. Entre las importantes nociones, que caracterizan las propiedades aerodinámicas y el comportatamiento en vuelo de los vehículos volantes, cabe indicar la estabilidad estática, que se examina en una serie de problemas y preguntas, en las que esa estabilidad (o inestabilidad) se estima sobre la base del análisis de las fuerzas y momentos aerodinámicos que actúan.

En aerodinámica moderna se consideran con frecuencia vehículos volantes que se mueven a muy grandes velocidades supersónicas. A semejantes velocidades la interacción del gas con la superficie, alrededor de la que él circula, conduce al considerable aumento de la temperatura en aquellas regiones del flujo donde se produce el remanso intensivo (capa límite, puntos críticos, ondas de choque). Esto acarrea la variación de las propiedades fisicoquímicas del gas (capacidades caloríficas, viscosidad, composición, etc.), lo que a su vez influye considerablemente sobre el valor y la distribución de las tensiones (ante todo las tangentes), así como de los flujos térmicos desde el gas caliente hacia la pared alrededor de la que circula.

Problemas y preguntas

1.1. Den la definición de la fuerza superficial que surge en un medio fluido.

1.2. ¿Cuál es el carácter del efecto de fuerza de un medio gaseoso sobre un vehículo volante que se mueve en su seno?

1.3. Enumeren las particularidades características de los movimientos laminar y turbulento de un fluido.

1.4. Expliquen el origen de las fuerzas de rozamiento en las corrientes laminar y turbulenta.

1.5. ¿Cuáles son las peculiaridades del movimiento de un fluido en la capa límite que se forma junto a un sólido?

1.6. Las investigaciones muestran que la corriente de un fluido a cierta distancia de la superficie de un cuerpo es turbulenta. ¿Se puede afirmar que semejante corriente también existe en la región junto a la pared?

1.7. Determinar la fuerza de rozamiento que es necesario vencer (con el movimiento uniforme) para pasar una placa de $\delta = 1$ mm de grosor a una velocidad $V = 1{,}2$ m/s por la cavidad entre otras dos placas (paredes) situadas entre sí a una distancia de $h = 4$ mm. En la planta la placa en movimiento tiene el área $S = 6$ m^2 y se encuentra a una distancia $h_1 = 0{,}5$ mm de una de las paredes; la cavidad está llena de glicerina.

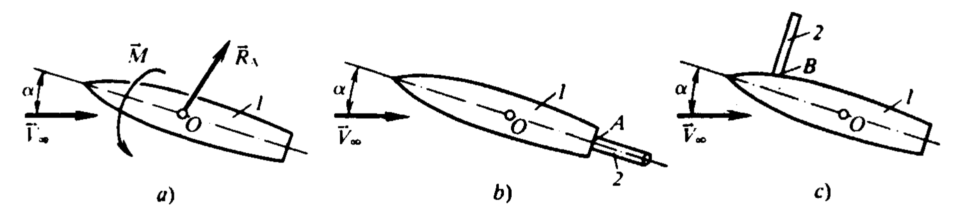


Fig. 1.1. Esquema de las fuerzas y los momentos aerodinámicos:
a, modelo en vuelo libre; *b* y *c*, fijación del modelo *1* en el soporte *2*

1.8. En la fig. 1.1, *a* se muestra el vector principal $\vec{R}_A$ de las fuerzas aerodinámicas y el vector principal $\vec{M}$ del momento de estas fuerzas que actúan sobre el modelo de un vehículo volante, alrededor del cual circula la corriente de un gas con la velocidad $\vec{V}_\infty$ (en la figura el centro de masas O es el punto de reducción con relación al que está calculado el momento). Mostrar los esquemas de disposición de los vectores análogos $\vec{R}_A$ y $\vec{M}$ para otros dos modelos iguales de vehículos volantes fijados en los túneles aerodinámicos, como se muestra en las figs. 1.1, *b* y *c*. Los lugares de fijación de estos modelos coinciden con los puntos de reducción A y B, respecto de los cuales se determina el momento.

1.9. En la fig. 1.2 se muestra el caso general (*b*) de la disposición mutua de los sistemas de ejes ligados a la trayectoria y de ejes ligados al vehículo utilizados en aerodinámica. Para pasar del sistema de coordenadas x, y, z al sistema x_1, y_1, z_1 hay que conocer los tres ángulos de Euler: φ, ψ, θ (fig. 1.2, *a*). Pero para realizar el cálculo de traspaso de las fuerzas y los momentos aerodinámicos, obtenidos en el sistema de ejes ligados a la trayectoria x_a, y_a, z_a, a sus respectivos valores en los ejes ligados al vehículo x, y, z es suficiente conocer sólo dos ángulos: α y β (ángulo de ataque y ángulo de resbalamiento, fig. 1.2, *b*). Explicar por qué se puede recurrir a semejante cálculo.

1.10. Den la definición de los ángulos de ataque α y de resbalamiento β. De acuerdo con dichas definiciones muestren en forma gráfica la disposición relativa de los dos sistemas de ejes ligados a la trayectoria y de ejes ligados al vehículo, así como de los ángulos α y β en los siguientes casos de movimiento del vehículo volante: 1) sin resbalamiento, pero bajo el ángulo de ataque; 2) con resbalamiento, pero con ángulo de ataque nulo.

1.11. En la fig. 1.3 se muestra el esquema más general de las fuerzas y momentos aerodinámicos que actúan sobre el vehículo volante en los sistemas de ejes ligados a la trayectoria x_a, y_a, z_a y ligados al vehículo x, y, z. En correspondencia con este esquema, en presencia de los ángulos de ataque α y de resbalamiento β, tales fuerzas son la resistencia al avance X_a, la fuerza aerodinámica de sustenta-

ción Y_a, la fuerza lateral Z_a (las proyecciones del vector $\vec{R}_A$ en el eje del sistema de ejes ligados a la trayectoria) y los momentos M_{xa}, M_{ya}, M_{za} (momentos de balanceo, de guiñada y de cabeceo, respectivamente, que son las proyecciones del momento $\vec{M}$ en los mismos ejes x_a, y_a, z_a). Si consideramos los ejes ligados con el vehículo volante, las fuerzas que actúan serán X, Y, Z, es decir, la axial (longi-

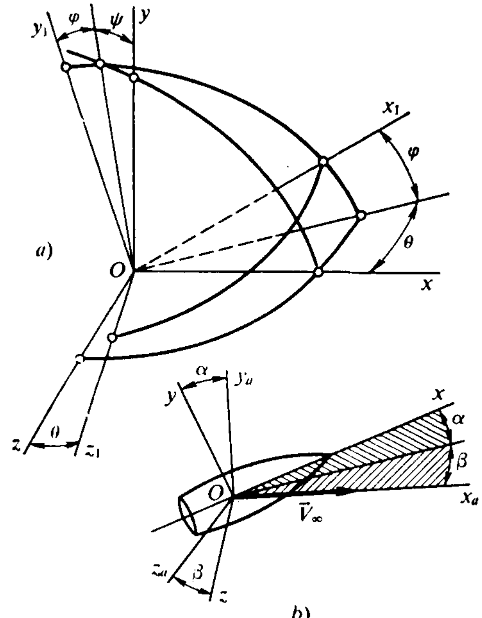


Fig. 1.2. Sistemas de coordenadas

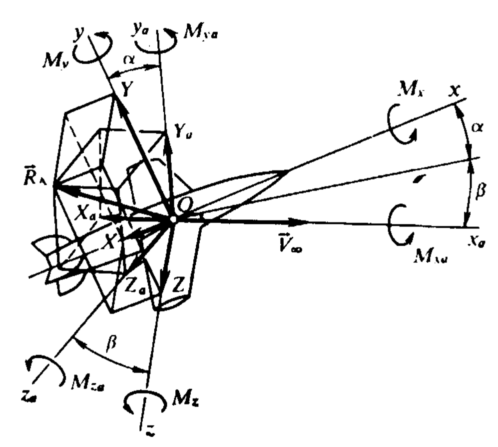


Fig. 1.3. Fuerzas y momentos que actúan sobre el vehículo volante

tudinal), normal y transversal (las proyecciones del vector $\vec{R}_A$ en los ejes x, y, z, respectivamente), en tanto que los momentos serán M_x, M_y, M_z (los momentos de balanceo, guiñada y cabeceo), que son las proyecciones del vector $\vec{M}$ en los mismos ejes x, y, z. Deduzcan las fórmulas para el cálculo del traspaso de las fuerzas y los momentos del sistema de ejes ligados al vehículo al de los ejes ligados a la trayectoria. Diseñen el correspondiente esquema para los casos de movimiento del vehículo, indicados en el problema, a condición que la estructura de semejante aeronave es simétrica con relación a los planos horizontal y vertical que pasan por su eje longitudinal.

1.12. En la fig. 1.4 está representado el esquema de las fuerzas y momentos que actúan sobre un cuerpo axisimétrico en los ejes ligados al vehículo x, y, z y ligados a la trayectoria x_a, y_a, z_a. En la misma figura se indican los ángulos de ataque α y de resbalamiento β. Representen el sistema de ejes ligados con el ángulo espacial (tridimensional) de ataque α_{esp} cuando el flujo circula alrededor de ese mismo sólido de revolución y hallen el valor de ese ángulo.

1.13. En la fig. 1.5 se muestran dos sólidos de revolución idénticos con aletas y las fuerzas axiales R_1 y R_2 que sobre ellos actúan y que han surgido debido a la corriente bajo diversos ángulos de ataque alrededor de dichos sólidos. La presencia de la fuerza R_1 (fig. 1.5, *a*) es bien explicable, ya que no contradice el concepto de

aparición de la resistencia; el surgimiento de la fuerza R_2 (fig. 1.5, *b*) parece ser inverosímil, ya que ella es como si representara una fuerza que empuja. En realidad sobre un cuerpo aerodinámico actúa la fuerza de la resistencia al avance X_{a2} (o bien X_{a1}, fig. 1.5, *a*). Expliquen en qué se diferencian la fuerza axial y la resistencia al avance; muestren el esquema del efecto de las fuerzas con la circulación

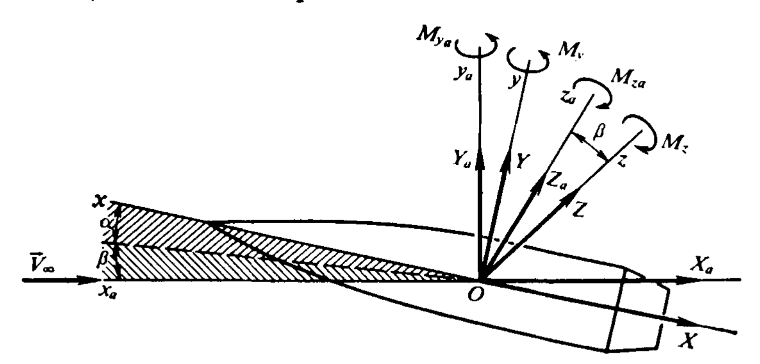


Fig. 1.4. Esquema para calcular las fuerzas y momentos que actúan sobre el sólido de revolución

alrededor de cada uno de los cuerpos aerodinámicos en los sistemas de ejes ligados a la trayectoria y de ejes ligados al vehículo.

1.14. De acuerdo con el esquema del efecto de las fuerzas sobre el vehículo volante (fig. 1.6) escriban las expresiones para determinar la fuerza sustentadora Y_a

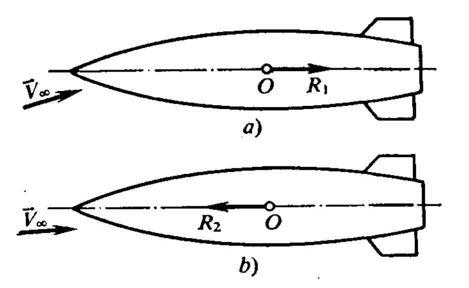


Fig. 1.5. Fuerzas que actúan sobre un sólido de revolución con empenaje

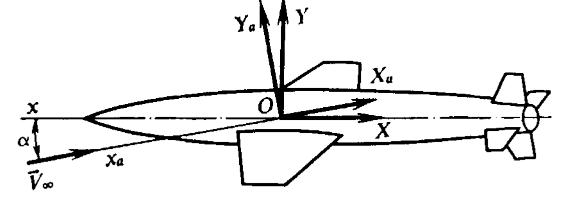


Fig. 1.6. Esquema de cómo actúan las fuerzas sobre el vehículo volante

en función de las fuerzas longitudinal y normal X, Y, y para la fuerza normal Y, en función de la resistencia al avance X_a y de la fuerza sustentadora Y_a. Hallen las relaciones que determinan Y_a e Y como funciones lineales y cuadráticas del ángulo de ataque α.

1.15. Por vía teórica o experimental se han hallado las componentes M_x, M_y, M_z del momento aerodinámico $\vec{M}$ en el sistema de ejes ligados al vehículo. Determinen por estas componentes las proyecciones de ese mismo momento en el sistema de ejes ligados a la trayectoria. Con ello, examinen los casos particulares que caracterizan el movimiento sin resbalamiento, así como con resbalamiento y ángulo nulo de ataque.

1.16. Den la definición de los coeficientes de las fuerzas aerodinámicas y expliquen su sentido.

1.17. Haciendo uso del análisis de dimensiones, determinen la forma general de la dependencia para el coeficiente de resistencia (aerodinámica) de un cuerpo que se mueve en la atmósfera.

1.18. Para un mismo vehículo volante se han calculado los coeficientes de resistencia al avance. Uno de los coeficientes c_{xa1} ha sido determinado por el área de la sección transversal máxima $S_{\text{máx. t}}$ del fuselaje, el otro c_{xa2}, por el área S del ala en la planta. Hallen la dependencia entre estos coeficientes.

1.19. De acuerdo con el esquema (fig. 1.7) escriban las expresiones para el coeficiente ascensional c_{y_a} de un vehículo volante en el sistema de ejes ligados a la trayectoria en función de los coeficientes de la fuerza normal c_y y longitudinal c_x en el sistema de ejes ligados al vehículo. Con ello se ha de tomar en consideración que los coeficientes c_y, c_x están calculados por las áreas S, $S_{\text{máx. t}}$, respectivamente, y el coeficiente c_{y_a} debe calcularse por el valor de S.

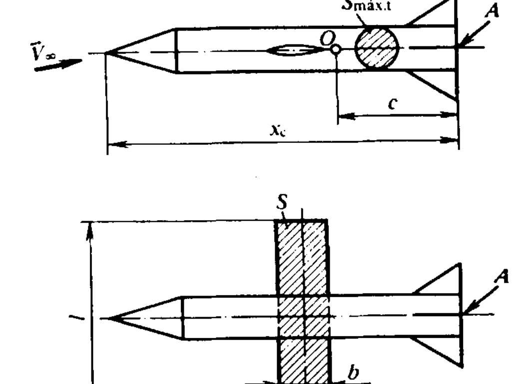


Fig. 1.7. Esquema de un vehículo volante con superficie de sustentación rectangular y empenaje triangular

1.20. Como resultado de investigaciones experimentales en un túnel aerodinámico se ha medido el momento de cabeceo M_z^A con relación al eje transversal que pasa por el punto A en la cola del modelo (fig. 1.7). De acuerdo con este valor del momento se ha calculado el coeficiente aerodinámico m_z^A, según el área $S_{\text{máx. t}}$ y la longitud del modelo x_c. Conociendo m_z^A hallen el correspondiente valor del coeficiente del momento de cabeceo con relación al eje que pasa por el otro punto O, a condición de que dicho coeficiente debe ser calculado por la cuerda b del ala y su área S en la planta.

1.21. De acuerdo con el esquema (fig. 1.7) hallen la expresión para determinar el coeficiente del momento de balanceo m_{x_a} en el sistema de ejes ligados a la trayectoria por medio de los coeficientes de los momentos de cabeceo m_z, guiñado m_y y de balanceo m_x en el sistema de ejes ligados al vehículo, a condición de que m_x se refiere al área S del ala y de su envergadura l, mientras que los coeficientes en el sistema de ejes ligados al vehículo, a las dimensiones geométricas S, x_c (m_z), S, l (m_y) y S, l (m_x).

1.22. Indiquen los parámetros geométricos fundamentales que, por regla, se utilizan al calcular los coeficientes aerodinámicos de los vehículos volantes de configuración de avión.

1.23. ¿Qué es la cuerda aerodinámica media (CAM) del ala?

1.24. Está dado el coeficiente aerodinámico de fuerza (o de momento), así como la altura y velocidad de movimiento de un vehículo volante. ¿Es posible determinar con estos datos la correspondiente fuerza o momento?

1.25. Se han hallado las componentes del coeficiente de resistencia al avance de un vehículo volante en forma del sólido de revolución mostrado en la fig. 1.8, es decir, $c_{xp} = 0{,}2$ (coeficiente de resistencia por presión, calculado por la sección máxima transversal $S_{\text{máx. t}}$ del fuselaje); $c_{xf} = 0{,}01$ (coeficiente de resistencia por rozamiento por la superficie lateral S_{sup}); $c_{x\,\text{s.b}} = 0{,}3$ (coeficiente de resistencia de base, calculado por el área $S_{\text{s.b}}$ del plano de base). Determinen el coeficiente

total de la resistencia al avance del sólido de revolución, a condición de que $S_{máx.t}/S_{sup} = 0,1$; $S_{máx.t}/S_{s.b} = 1,2$.

1.26. En la fig. 1.9, *a*, *b* se muestran los esquemas de tres alas aisladas de forma rectangular *1*, trapezoidal *2* y triangular *3*. De acuerdo con las dimensiones de estas alas determinar el alargamiento λ y adelgazamiento η.

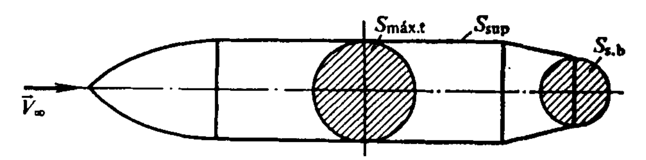


Fig. 1.8. Áreas características para un sólido de revolución

1.27. En correspondencia con las anotaciones y dimensiones concretas de una ala hexagonal (fig. 1.10) ($b_0 = 1$, $b_e = 0,2$; $l = 5$) hallen el valor numérico de la cuerda aerodinámica media de esta ala.

1.28. Para el perfil no simétrico del ala (fig. 1.11) se ha hallado por vía experimental la dependencia entre los coeficientes de la fuerza aerodinámica normal c_y

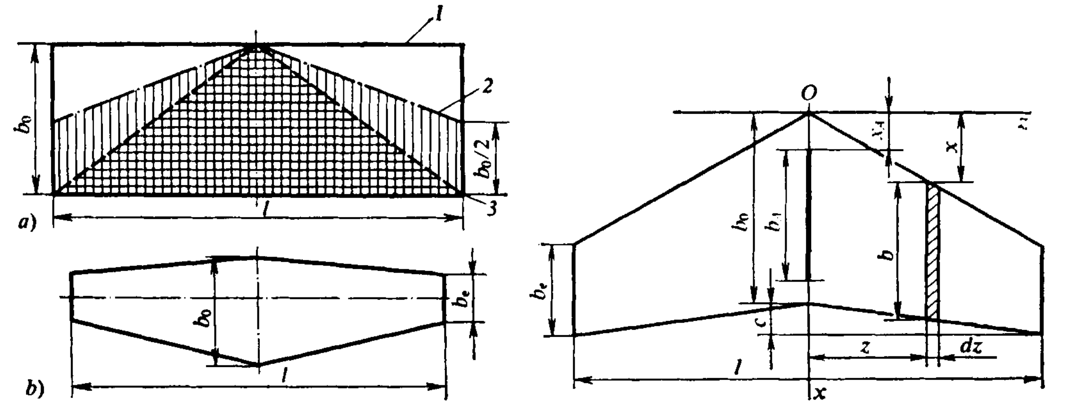


Fig. 1.9. Esquemas de alas aisladas

Fig. 1.10. Esquema de un ala hexagonal en la planta

y el momento aerodinámico de cabeceo m_z respecto del punto *O* del borde de ataque (dicha dependencia se muestra gráficamente en esa misma figura). Por las condiciones dadas determinen el coeficiente del centro de presión $c_p = x_p/b$ y la coordenada adimensional del foco por el ángulo de ataque $\bar{x}_F = x_F/b$.

1.29. En la fig. 1.12 están representadas las polares de dos perfiles del ala. Muestren cuál será la forma correspondiente de estos perfiles y determinen para cada uno de ellos, directamente en la figura, el rendimiento máximo, el ángulo de ataque más ventajoso, el coeficiente máximo ascensional y el ángulo crítico de ataque

1.30. Como resultado de investigaciones experimentales de un sólido de revolución en un túnel aerodinámico se ha determinado el coeficiente del centro de presión $c_p = x_p/x_c$. El indicado sólido se emplea como vehículo volante en tres casos, para cada uno de los cuales la disposición mutua de los centros de masas

y presión se muestra en la fig. 1.13, *a*, *b*, *c*. Expliquen por qué se produce tal desplazamiento de dichos centros entre sí. ¿Qué es característico para la estabilidad longitudinal estática de esos vehículos volantes?

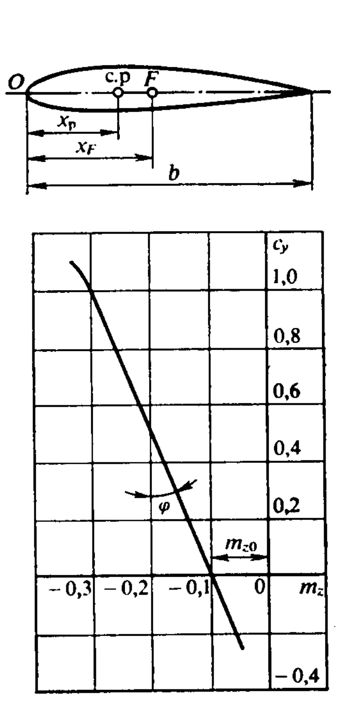


Fig. 1.11. Perfil asimétrico de un ala

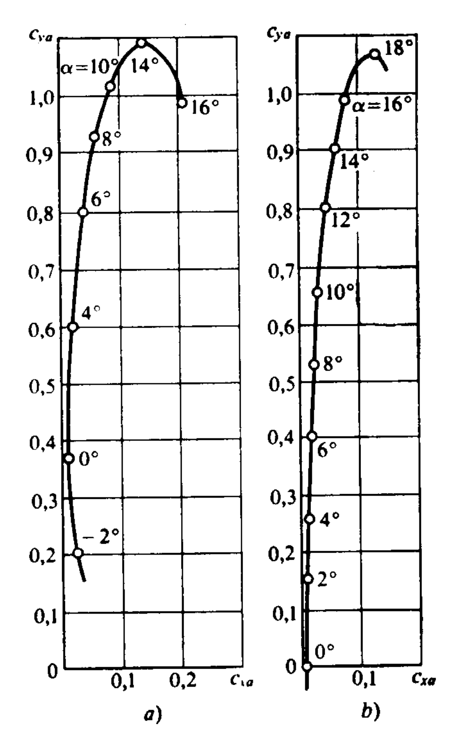


Fig. 1.12. Polares de los perfiles del ala

1.31. Determinen el margen de estabilidad estática de un cuerpo cónico con ángulo $\beta_{cono} = 15°$, altura $x_c = 4$ m fabricado de material enterizo y que está en movimiento a velocidad supersónica. Hallen la longitud h_{cola} de la cola estabilizadora hueca que asegura el margen negativo de estabilidad estática $\overline{Y} = 20\%$.

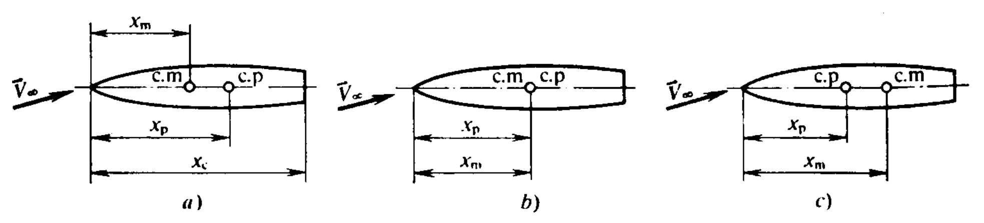


Fig. 1.13. Esquema de la posición mutua de los centros de masa y de presión de sólidos de revolución

1.32. Alrededor de un sólido de revolución largo (fig. 1.14) circula una corriente supersónica linealizada bajo un pequeño ángulo de ataque $\alpha = 5°$. Determinen el margen de estabilidad estática de dicho sólido, fabricado de material enterizo,

adoptando $d_{máx.t} = 1$, $x_{máx.t} = 5$, $x_{cil} = 25$, $x_{ala} = 5$, $\bar{S}_{s.b} = d^2_{s.b}/d^2_{máx.t} = 1{,}2$.

1.33. ¿Cómo variará la velocidad de un avión que asciende de la altura $H = 5$ km hasta la altura $H = 15$ km, conservando el ángulo de ataque y la fuerza sustentadora? El vuelo se efectúa a velocidades subsónicas moderadas.

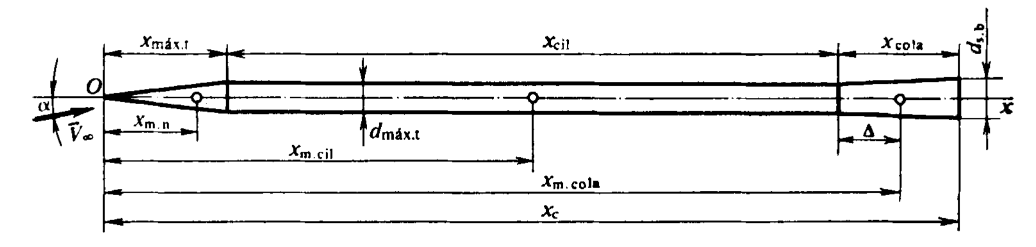


Fig. 1.14. Vehículo volante en forma de un sólido de revolución delgado

1.34. ¿En qué consiste la peculiaridad de la aerodinámica de grandes velocidades, condicionada por la propiedad del medio gaseoso de variar su densidad en función de la presión?

1.35. Enumeren la sucesividad aproximada y el carácter de las transformaciones físico-químicas en el aire que se mueve a grandes velocidades supersónicas y que sufre remanso durante el choque de compresión (onda de choque).

1.36. Como resultado de la disociación de un gas, de la cantidad total m de moléculas biatómicas se han descompuesto n. ¿Cuál es, en este caso, el grado de disociación?

1.37. La presión de un gas en disociación disminuye, la temperatura queda constante. ¿Cómo varía el grado de disociación?

1.38. ¿Cómo varía el calor específico del aire al aumentar su temperatura?

1.39. Enumeren los parámetros de un gas de los que dependen la viscosidad dinámica μ y la conductividad térmica λ, al no haber disociación y para un gas disociado (indiquen la solución correcta entre las indicadas en la tabla 1.1, donde T es la temperatura y p, la presión).

Tabla 1.1

Estado del gas	Respuesta 1		Respuesta 2		Respuesta 3	
	T	p	T	p	T	p
No hay disociación	—	+	+	+	+	—
Gas disociado	+	—	—	+	+	+

1.40. Determinen el error realizado al calcular el calor específico del aire con $T = 5000$ K y $p = 10^4$ Pa, de acuerdo con las dependencias que no toman en consideración la disociación en equilibrio.

1.41. La presión en el aire disociado a la temperatura $T = 4000$ K disminuye de 10^5 a 10^3 Pa. ¿Cómo variará su densidad?

1.42. ¿Cómo varía la masa media molar del aire μ_m cuando cambian su temperatura y presión?

1.43. Calculen la velocidad del sonido en el aire calentado hasta la temperatura $T = 3500$ K y que está a la presión $p = 10^3$ Pa. Comparen el valor obtenido con la velocidad del sonido, suponiendo que los calores específicos son constantes o varían sin haber disociación.

1.44. El aire está calentado hasta la temperatura $T = 4000$ K siendo la presión $p = 10^4$ Pa. Determinen su entalpía i tomando en consideración la disociación y comparen el valor obtenido con los valores para los casos de capacidades caloríficas constantes ($k = c_p/c_v = 1{,}4$) y con valores variables que sólo dependen de la temperatura (medio no disociado).

1.45. En aerodinámica de altas velocidades, para simplificar las investigaciones de la circulación (corriente) alrededor de cuerpos, en lugar de aire, que es un medio gaseoso que reacciona químicamente de forma complicada, se hace uso de un modelo biatómico. Expliquen qué representa ese modelo del aire.

1.46. Para la presión $p = 10^3$ Pa y temperatura $T = 3000$ K prefijadas determinen el grado de disociación en equilibrio del oxígeno, considerándolo como un gas convencional biatómico en disociación.

1.47. Determinen la masa media molar del modelo biatómico de nitrógeno a la presión $p = 10^3$ Pa y la temperatura $T = 5000$ K.

1.48. A la presión $p = 10^3$ Pa el grado de disociación del nitrógeno $\alpha = 0{,}5$. Examinándolo como un modelo biatómico de un gas en disociación, determinen su densidad, temperatura, entalpía y energía interna.

1.49. Para el aire, considerado en forma de una mezcla de los gases en disociación biatómicos puros N_2 y O_2, se conocen la presión $p = 10^3$ Pa y la temperatura $T = 4500$ K. Determinen el grado de disociación y los parámetros termodinámicos del aire caliente.

1.50. Para el planteamiento del problema 1.49 (el grado de disociación del oxígeno y el nitrógeno en la mezcla de aire, la entalpía de su disociación en equilibrio) determinen la masa media molar y la viscosidad dinámica del aire.

Solución de los problemas y respuestas a las preguntas

1.1. El efecto de la fuerza de un medio gaseoso continuo sobre un sólido en movimiento se reduce a las fuerzas, distribuidas regularmente por las superficies de dicho sólido, de los esfuerzos normal y tangencial. La resultante de estas fuerzas, que actúan sobre cada elemento de la superficie, lleva el nombre de *fuerza superficial*. En un fluido ideal (perfecto), donde no hay viscosidad, el efecto de la fuerza se reduce sólo a las fuerzas superficiales debidas al esfuerzo normal (presión).

1.2. Durante el movimiento de un sólido en un medio gaseoso viscoso, sobre cada pequeño sector de área dS actúa una fuerza superficial elemental $d\vec{P}$ que es la suma vectorial $d\vec{P}_n + d\vec{P}_\tau$ de dos componentes: la fuerza del esfuerzo normal $d\vec{P}_n = \vec{p}dS$ y la fuerza de rozamiento $d\vec{P}_\tau = \vec{\tau}dS$ (fig. 1.15). Aquí $\vec{p}$ y $\vec{\tau}$ son los esfuerzos de la fuerza normal y de la fuerza de rozamiento, respectivamente. Todas estas fuerzas elementales, que componen un sistema espacial, pueden reducirse, en correspondencia con las reglas de mecánica, a la fuerza resultante $\vec{R}_A$, es decir, al vector principal de un sistema de fuerzas elementales $d\vec{P}$ y al momento $\vec{M}$, momento principal de esas mismas fuerzas respecto del punto de reducción elegido.

La fuerza $\vec{R}_A$ se denomina *fuerza aerodinámica*; el momento $\vec{M}$, recibe el nombre de *momento aerodinámico*.

1.3. Para un fluido viscoso son característicos dos tipos de movimiento. El primero de ellos es el *laminar* que se distingue por la disposición ordenada de los filetes en movimiento, que durante éste no se mezclan. En el flujo laminar la transferencia de la cantidad de movimiento (impulso) y la sustancia de una capa a otra se produce a cuenta de la penetración molecular, mientras que el calor, a cuenta de la conductividad térmica. Por regla, semejante movimiento surge y se conserva a pequeñas velocidades, cuyo valor límite $v_{\text{lím}}$ se determina con el *número crítico de Reynolds*. $\mathrm{Re}_{\text{crít}} = v_{\text{lím}} l/\nu$.

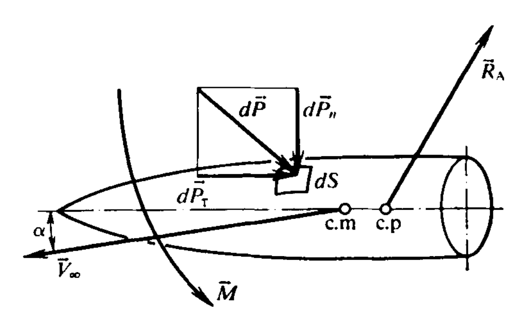


Fig. 1.15. Acción de fuerzas de un fluido viscoso:
V, velocidad del vehículo volante; c.m. y c.p., centro de masas y centro de presión, respectivamente

Si la velocidad de movimiento del fluido es mayor que $v_{\text{lím}}$, el movimiento laminar se destruye y se convierte en un nuevo tipo de éste para el que es característico el desplazamiento transversal de las partículas con relación al flujo fundamental, lo que provoca el mezclado del fluido. La corriente laminar ordenada desaparece convirtiéndose en *turbulenta*. El movimiento caótico molecular es característico para el flujo ~~laminar~~; en la corriente turbulenta se produce el mezclado de las partículas macroscópicas. Esta corriente tiene carácter no estacionario con el que la velocidad y otros parámetros en el punto dado varían con el tiempo. La presencia del mezclado intensivo de la corriente en el flujo turbulento conduce a la aparición de esfuerzos tangenciales en el fluido y una transferencia más intensa en él do la sustancia y el calor.

1.4. El surgimiento de las fuerzas de rozamiento en la corriente laminar halla su explicación en que las moléculas se desplazan en ella, lo que conduce a la transferencia de la cantidad de movimiento de una capa a otra. Con la presencia de movimiento relativo de estas capas del líquido, semejante intercambio de moléculas provoca la aparición de fuerzas de rozamiento entre las capas.

De acuerdo con la hipótesis expresada por Newton, el esfuerzo de rozamiento τ_{lam} es proporcional al gradiente de velocidad por la normal a la superficie que separa dos capas del líquido:

$$\tau_{\text{lam}} = \mu \partial v/\partial n, \tag{1.1}$$

donde μ es un coeficiente de proporcionalidad, llamado *viscosidad dinámica*.

En la corriente turbulenta la aparición de las fuerzas de viscosidad también está condicionada por la penetración de una capa a otra, pero aquí no sólo de moléculas aisladas, sino también de partículas macroscópicas.

Examinemos dos capas de un fluido en contacto, situadas entre sí a una pequeña distancia l'. Supongamos que la velocidad mediada de las partículas del fluido en dirección del eje x en cierto punto de la corriente turbulenta es igual a $\overline{V}_x$. Para la capa vecina, situada a una distancia $\Delta y = l'$, la velocidad mediada puede representarse en la forma $\overline{V}_x + (d\overline{V}_x/dy)\, l'$. Por consiguiente, en el momento cuando aparece la partícula que consideramos en la segunda capa se observa la velocidad de pulsación $\overline{V}'_x = (d\overline{V}_x/dy)\, l'$.

La macropartícula del fluido realiza el desplazamiento de la primera capa a la segunda a lo largo del eje de coordenadas y a una velocidad V'_y (el orden de V'_y es el mismo que el de V'_x). De este modo, la cantidad de movimiento que se transfiere con la masa de las macropartículas $\rho V'_y dS$ por el área elemental dS es igual, en valor absoluto, a $\rho V'_y (\bar{V}_x + V'_x)\, dS$. Dicha cantidad de movimiento condiciona el esfuerzo adicional τ_{tur}.

El esfuerzo de rozamiento que se produce debido a los choques y al desplazamiento desordenado de las partículas

$$\tau_{tur} = \rho l^2 \mid d\bar{V}_x/dy \mid d\bar{V}_x/dy, \tag{1.2}$$

donde $l = al'$ es la longitud del recorrido para que se mezclen; a, un coeficiente de proporcionalidad.

Tomando en consideración (1.1) y (1.2) el esfuerzo de rozamiento o cortante

$$\tau = \tau_{lam} + \tau_{tur} = \mu d\bar{V}_x/dy + \rho l^2 \mid d\bar{V}_x/dy \mid d\bar{V}_x/dy. \tag{1.3}$$

1.5. La fina capa que envuelve la superficie de un cuerpo, que se mueve dentro de un fluido y se caracteriza con grandes gradientes de velocidad por la normal a ella y, por consiguiente, con considerables esfuerzos de rozamiento, lleva el nombre de *capa límite*.

El carácter de movimiento del fluido en la capa límite junto a una placa plana está representado en la fig. 1.16. La distribución de la velocidad por la sección de la capa límite depende de qué corriente habrá: laminar o turbulenta. A causa del mezclado transversal de las partículas la distribución de la velocidad con el flujo turbulento es más uniforme que con el laminar. Tras los límites de dicha capa, los gradientes de velocidad por la normal a la superficie del cuerpo son muy pequeños y, por lo tanto, lo son, asimismo, las fuerzas de rozamiento. Esta parte de la corriente es denominada *flujo externo libre*. Cuando se investiga el flujo externo la influencia de las fuerzas de rozamiento se desprecia, por lo que él es considerado no viscoso.

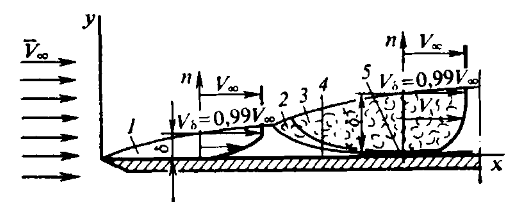


Fig. 1.16. Esquema de circulación alrededor de una placa plana:
1, sector de la capa límite laminar; *2*, sector de transición; *3*, capa límite turbulenta; *4*, subcapa laminar; *5*, placa plana

La variación de la velocidad por la sección de la capa límite se caracteriza porque creciendo gradualmente, a medida que se aleja de la pared, ella se aproxima asintóticamente al valor de la velocidad en el flujo externo libre. Pero para objetivos prácticos es cómodo destacar aquella parte de la capa límite en la que la indicada variación transcurre con suficiente rapidez y la velocidad en el límite de esta capa poco diverge de su valor en el flujo externo libre. La distancia desde la pared hasta dicho límite representa convencionalmente el grosor de la capa límite δ (fig. 1.16). Por regla, este grosor se determina como la distancia desde el contorno del cuerpo hasta el punto de la capa límite en el que la velocidad se distingue de su valor en el flujo exterior libre no más de 1%.

1.6. Semejante afirmación no es correcta. En la región situada en las inmediaciones de la pared, junto a la superficie alrededor de la que circula la corriente, el flujo es laminar. En esta región no puede crearse el flujo turbulento, ya que la pared obstaculiza el mezclado macroscópico en las capas vecinas. Dicha región de la capa límite recibe el nombre de *subcapa laminar*.

1.7. Considerando que junto a la placa el movimiento del fluido es laminar, podemos determinar los esfuerzos tangenciales en su superficie con la fórmula de Newton: $\tau_i = \mu \partial v_i / \partial n_i$.

Hallemos las derivadas de la velocidad v por la normal $\bar{n}$ a la placa considerando que la velocidad en las holguras varían de acuerdo con leyes lineales, es decir, $\partial v_i / \partial n_i = V/h_i$ ($i = 1$; 2). Aquí, h_i es la distancia de las superficies de la placa en movimiento a las correspondientes paredes inmóviles de la cavidad (fig. 1.17).

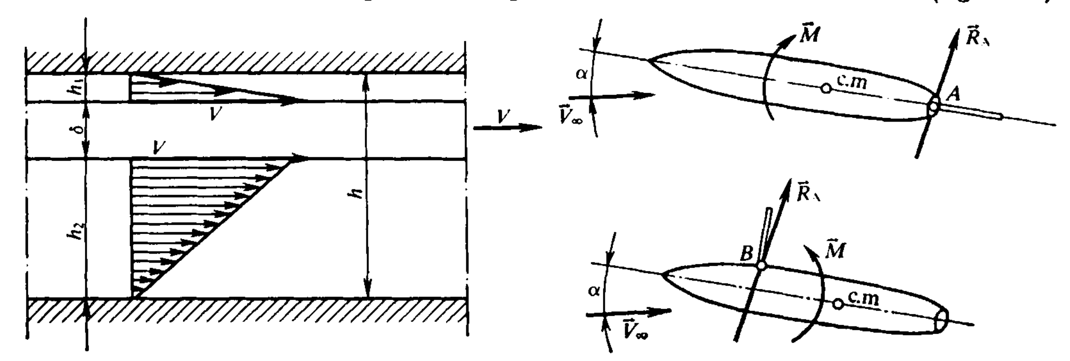


Fig. 1.17. Flujo de un fluido viscoso entre placas

Fig. 1.18. Esquemas de disposición de los puntos de reducción en el cuerpo

Las fuerzas que actúan sobre las superficies laterales de la placa en movimiento han de calcularse con la expresión $F_i = \tau_i S$. La fuerza sumaria que frena el movimiento de la placa $F = \sum F_i$. La magnitud $h_2 = h - (h_1 + \delta) = 0{,}0025$ m. Tomando la viscosidad de la glicerina $\mu = 85 \cdot 10^{-2}$ Pa·s, hallamos: $\tau_1 = \mu V/h_1 = 20{,}4 \cdot 10^2$ Pa; $\tau_2 = \mu V/h_2 = 4{,}08 \cdot 10^2$ Pa.

De este modo, la fuerza sumaria que frena el movimiento de la placa $F = F_1 + F_2 = (\tau_1 + \tau_2) S = 14\,690$ N.

1.8. La disposición y sentido del vector principal de las fuerzas aerodinámicas $\vec{R}_A$ y el momento $\vec{M}$, que actúan sobre los vehículos volantes, se muestran, en correspondencia con el planteamiento del problema, como vemos en la fig. 1.18. Iguales fuerzas aerodinámicas $\vec{R}_A$ (si despreciamos el efecto de los soportes) están aplicadas en los puntos A y B, en tanto que los momentos $\vec{M}$ tienen en estos casos distintos valores y sentidos.

1.9. El paso del sistema x, y, z de coordenadas rectangulares a otro x_1, y_1, z_1 se efectúa de acuerdo con las bien conocidas transformaciones de geometría analítica

$$x_1 = a_1 x + a_2 y + a_3 z; \quad y_1 = b_1 x + b_2 y + b_3 z; \quad z_1 = c_1 x + c_2 y + c_3 z; \tag{1.4}$$

$$x = a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1; \quad y = a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1; \quad z = a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3 z_1, \tag{1.5}$$

en las que a_n, b_n, c_n ($n = 1$, 2, 3) son los correspondientes cosenos directores. En el caso general, sus valores pueden calcularse mediante las funciones trigonométricas de los tres ángulos independientes de Euler φ, ψ y θ (véase la fig. 1.2, *a*):

$$a_1 = -\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta; \quad a_2 = \text{sen}\,\varphi\cos\psi + \cos\varphi\,\text{sen}\,\psi\cos\theta;$$

$$a_3 = -\cos\varphi\,\text{sen}\,\theta; \quad b_1 = -\cos\varphi\,\text{sen}\,\psi - \text{sen}\,\varphi\cos\psi\cos\theta;$$

$$b_2 = \cos\varphi\cos\psi - \text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\psi\cos\theta; \quad b_3 = \text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta;$$

$$c_1 = \cos\psi\,\text{sen}\,\theta; \quad c_2 = \text{sen}\,\psi\,\text{sen}\,\theta; \quad c_3 = \cos\theta.$$

En el caso del movimiento de un vehículo volante de simetría longitudinal, los ejes verticales Oy_1 y Oy se disponen en un mismo plano de simetría (véase la fig. 1.2, *b*). Con ello, uno de los ángulos de Euler ψ es igual a cero. Comparando las figs. 1.2, *a* y 1.2, *b* nos cercioramos de que los ángulos φ y θ son, respectivamente, iguales a los ángulos de ataque α y de resbalamiento β. Por ello

$$\left.\begin{array}{lll} a_1 = \cos\alpha\cos\beta; & a_2 = \operatorname{sen}\alpha; & a_3 = -\cos\alpha\operatorname{sen}\beta; \\ b_1 = -\operatorname{sen}\alpha\cos\beta; & b_2 = \cos\alpha; & b_3 = \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta; \\ c_1 = \operatorname{sen}\beta; & c_2 = 0; & c_3 = \cos\beta. \end{array}\right\} \quad (1.6)$$

De aquí se desprende que para realizar el cálculo para el traspaso de los coeficientes aerodinámicos de las fuerzas y los momentos del sistema de ejes ligados a la trayectoria al sistema de ejes ligados al vehículo (y viceversa) se precisan dos ángulos: el de ataque α y el de resbalamiento β.

1.10. Se llama *ángulo de ataque* α el formado por la proyección del vector velocidad del vehículo volante sobre el plano de simetría y el eje longitudinal de dicho vehículo. El *ángulo de resbalamiento* β es el que se halla entre el vector velocidad y el plano de simetría del vehículo volante (véase la fig. 1.2, *b*).

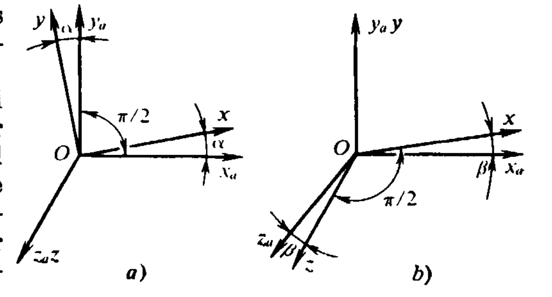


Fig. 1.19. Disposición de los sistemas de coordenadas ligado a la trayectoria y al vehículo

La representación gráfica de la disposición relativa de los sistemas de ejes ligados a la trayectoria y de ejes ligados al vehículo para el caso de movimiento del vehículo volante sin resbalamiento, bajo un ángulo de ataque, y con resbalamiento, bajo ángulo de ataque nulo, se muestra en las figs. 1.19, *a*, *b*, respectivamente.

1.11. La ligazón entre las componentes de las fuerzas y momentos aerodinámicos en los sistemas de ejes ligados a la trayectoria y de ejes ligados al vehículo se determina con las reglas de geometría analítica. Conociendo los ángulos de ataque α y de resbalamiento β es posible efectuar el cálculo para traspasar estas componentes de un sistema de ejes a otro haciendo uso de la tabla 1.2.

Tabla 1.2

Sistema de ejes ligados al vehículo	Sistema de ejes ligados a la trayectoria		
	Ox_a	Oy_a	Oz_a
Ox	$\cos\alpha\cos\beta$	$\operatorname{sen}\alpha$	$-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$
Oy	$-\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$	$\cos\alpha$	$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
Oz	$\operatorname{sen}\beta$	0	$\cos\beta$

De acuerdo con los datos de la tabla 1.2 deduzcamos las fórmulas para el recálculo. P. ej., para las fuerzas de la resistencia al avance y el momento de balanceo

$$\left.\begin{aligned} X_a &= X\cos(\widehat{xx_a}) + Y\cos(\widehat{yx_a}) + Z\cos(\widehat{zx_a}) = \\ &= X\cancel{\cos\theta}\cos\beta - Y\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + Z\operatorname{sen}\beta; \\ M_{x_a} &= M_x\cos(\widehat{xx_a}) + M_y\cos(\widehat{yx_a}) + M_z\cos(\widehat{zx_a}) = \\ &= M_x\cos\alpha\cos\beta - M_y\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + M_z\operatorname{sen}\beta. \end{aligned}\right\} \quad (1.7)$$

De modo análogo es posible obtener las fórmulas para el recálculo de las demás componentes:

$$Y_a = X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha; \quad M_{y_a} = M_x\operatorname{sen}\alpha + M_y\cos\alpha; \quad (1.8)$$

$$\left.\begin{aligned} Z_a &= -X\cos\alpha\operatorname{sen}\beta + Y\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + Z\cos\beta; \\ M_{z_a} &= -M_x\cos\alpha\operatorname{sen}\beta + M_y\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + M_z\cos\beta. \end{aligned}\right\} \quad (1.9)$$

Durante el recálculo del sistema de ejes ligados a la trayectoria al sistema de ejes ligados al vehículo se hace uso de las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} X &= X_a\cos\alpha\cos\beta + Y_a\operatorname{sen}\alpha - Z_a\cos\alpha\operatorname{sen}\beta; \\ M_x &= M_{x_a}\cos\alpha\cos\beta + M_{y_a}\operatorname{sen}\alpha - M_{z_a}\cos\alpha\operatorname{sen}\beta; \end{aligned}\right\} \quad (1.10)$$

$$\left.\begin{aligned} Y &= -X_a\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + Y_a\cos\alpha + Z_a\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta; \\ M_y &= -M_{x_a}\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + M_{y_a}\cos\alpha + M_{z_a}\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta; \end{aligned}\right\} \quad (1.11)$$

$$Z = X_a\operatorname{sen}\beta + Z_a\cos\beta; \quad M_z = M_{x_a}\operatorname{sen}\beta + M_{z_a}\cos\beta. \quad (1.12)$$

Haciendo uso de las fórmulas (1.7)—(1.12) para el movimiento de un vehículo volante simétrico sin resbalamiento ($\beta = 0$) bajo un ángulo de ataque ($\alpha \neq 0$) se obtienen los siguientes resultados: las fuerzas Z y Z_a son iguales a cero, ya que no hay causas físicas que provoquen su aparición (el vehículo es simétrico y el ángulo $\beta = 0$); los momentos M_{y_a}, M_y, M_{x_a} y M_x son también nulos.

Tomando en consideración los signos de las variables X_a, X, Y_a, Y en el sistema de ejes ligados a la trayectoria

$$-X_a = -X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha; \quad Y_a = -X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha; \quad M_{z_a} = M_z;$$

en el sistema de ejes ligados al vehículo

$$-X = -X_a\cos\alpha + Y_a\operatorname{sen}\alpha; \quad Y = X_a\operatorname{sen}\alpha + Y_a\cos\alpha; \quad M_z = M_{z_a}.$$

Los resultados obtenidos se representan gráficamente en la fig. 1.20, *a*.

Para el movimiento de un vehículo volante simétrico sin ángulo de ataque ($\alpha = 0$), pero con resbalamiento ($\beta \neq 0$) tenemos $Y = Y_a = 0$, así como $M_x = M_{x_a} = M_z = M_{z_a} = 0$. Con esto, en el sistema de ejes ligados a la trayectoria

$$-X_a = -X\cos\beta - Z\operatorname{sen}\beta; \quad -Z_a = X\operatorname{sen}\beta - Z\cos\beta; \quad M_{y_a} = M_y;$$

en el sistema de ejes ligados al vehículo

$$-X = -X_a\cos\beta + Z_a\operatorname{sen}\beta; \quad -Z = -X_a\operatorname{sen}\beta - Z_a\cos\beta; \quad M_y = M_{y_a}$$

De forma gráfica estos resultados están representados en la fig. 1.20, *b*.

1.12. Para los sólidos de revolución en lugar de dos ángulos (α y β), que caracterizan la ligazón entre los sistemas de ejes ligados al vehículo y de ejes ligados

a la trayectoria, se utiliza, en ocasiones, sólo el ángulo de ataque α_{esp} que se mide entre el vector velocidad del centro de masas del vehículo volante y su eje longitudinal. Dicho ángulo lleva la denominación de *ángulo de ataque espacial*. Él determina la posición del sistema de coordenadas x_{esp}, y_{esp}, z_{esp} (fig. 1.21, *b*), cuyo origen está ubicado en el centro de masas O del vehículo volante. El eje Ox_{esp} coincide con el eje longitudinal Ox, Oy_{esp} se encuentra en el plano determinado por el eje longitudinal y la velocidad respecto al aire V_∞. El eje Oz_{esp} es perpendicular al plano X_{esp}, Y_{esp}.

El ángulo de ataque α_{esp} puede hallarse con la fórmula de trigonometría esférica, de acuerdo con la cual para el triángulo rectángulo esférico (fig. 1.21, *b*)

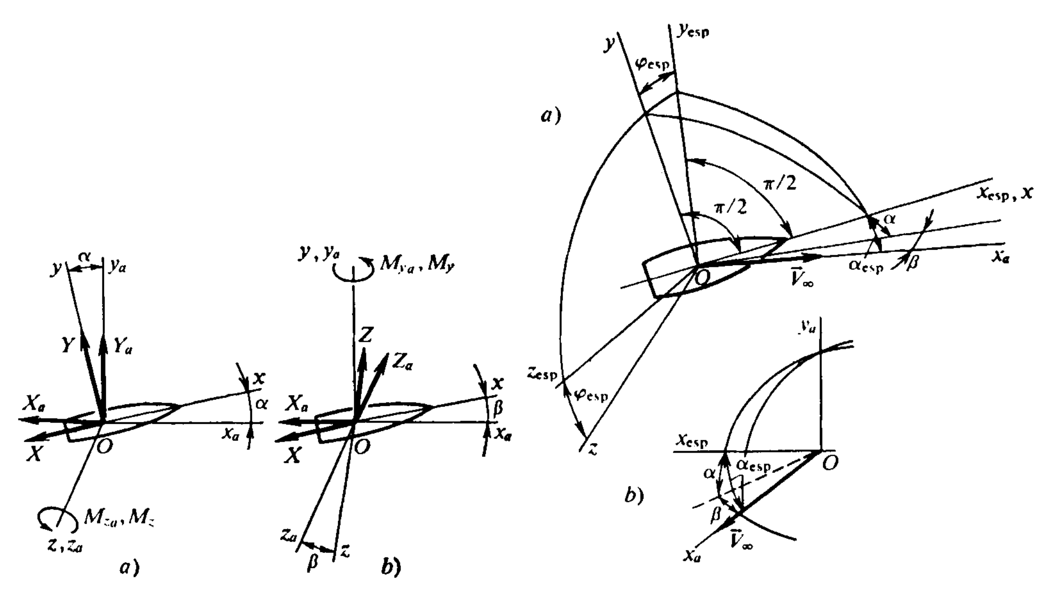


Fig. 1.20. Esquemas para el recálculo de las fuerza y los momentos en el sistema de coordenadas ligado a la trayectoria en caso de pasar al sistema ligado al vehículo

Fig. 1.21. Esquemas para calcular e ángulo de ataque espacial

el coseno de la hipotenusa es igual al producto de los cosenos de los catetos: $\cos(\widehat{x_{esp}x_a}) = \cos\alpha\cos\beta$, es decir, $\cos\alpha_{esp} = \cos\alpha\cos\beta$.

1.13. La inverosimilitud del esquema aducido en la fig. 1.5, *b* es aparente, lo que se ve del carácter del efecto de las fuerzas aerodinámicas sobre el cuerpo en movimiento (fig. 1.22). En función del ángulo de ataque el vector principal $\vec{R}_a$ de las fuerzas aerodinámicas, al proyectarse en el eje del sistema de ejes ligado al vehículo, proporciona bien una proyección positiva (fig. 1.22, *a*) o bien, negativa (fig. 1.22, *b*), es decir, la fuerza axial X. Pero la formación de la fuerza de empuje R_2 (véase la fig. 1.5) no se debe explicar sólo por las regularidades de la proyección. Los datos experimentales, obtenidos en túneles aerodinámicos, nos muestran que en caso de corriente subsónica alrededor del cuerpo, bajo cierto ángulo de ataque, en su borde de ataque se crea un enrarecimiento que crea una fuerza de arrastre.

En los esquemas (fig. 1.22) vemos la diferencia entre la fuerza axial X, que es la proyección del vector principal $\vec{R}_a$ sobre el eje Ox del cuerpo, y la resistencia

al avance X_a, que es la proyección de $\vec{R}_a$ sobre el eje Ox_a, que coincide con el vector velocidad $\vec{V}_\infty$.

1.14. Para determinar las fuerzas aerodinámicas hacemos uso de las fórmulas para el recálculo (1.7)—(1.12). En función de las fuerzas longitudinal X y normal Y con $\beta = 0$ y $\alpha \neq 0$ la fuerza sustentadora $Y_a = Y \cos\alpha - X \operatorname{sen}\alpha$. Con las mismas condiciones, la fuerza normal $Y = X_a \operatorname{sen}\alpha + Y_a \cos\alpha$.

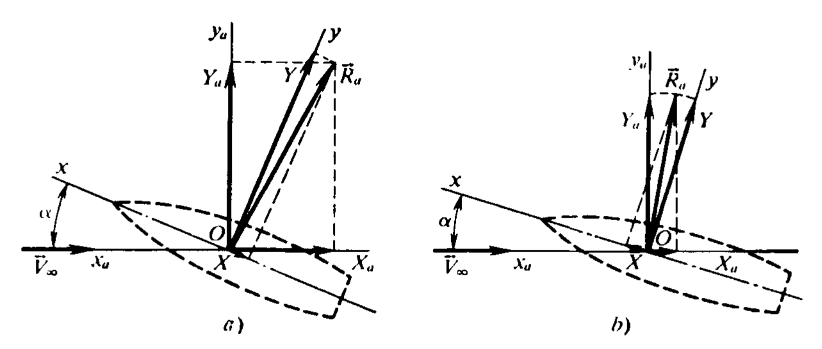


Fig. 1.22. Proyecciones del vector principal de las fuerzas aerodinámicas sobre los ejes de un sistema de coordenadas ligado al vehículo

Transformemos las dependencias obtenidas, adoptando para pequeños ángulos de ataque $\operatorname{sen}\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1 - \alpha^2/2$. De acuerdo con esto $Y_a = Y(1 - \alpha^2/2) - X\alpha$; $Y = X_a\alpha + Y_a(1 - \alpha^2/2)$.

1.15. Para las componentes conocidas del momento $\vec{M}$ en el sistema de ejes ligados al vehículo (M_x, M_y, M_z) es posible hallar sus componentes en el sistema de ejes ligados a la trayectoria. En el caso general (el movimiento del vehículo se efectúa bajo cierto ángulo de ataque α con resbalamiento bajo un ángulo β) las fórmulas para el recálculo tienen el siguiente aspecto (véase la solución en el problema 1.11):

$$M_{x_a} = M_x \cos\alpha \cos\beta - M_y \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + M_z \operatorname{sen}\beta;$$
$$M_{y_a} = M_x \operatorname{sen}\alpha + M_y \cos\alpha;$$
$$M_{z_a} = -M_x \cos\alpha \operatorname{sen}\beta + M_y \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta + M_z \cos\beta.$$

En caso de movimiento sin resbalamiento ($\beta = 0$) obtenemos $M_{x_a} = M_x \cos\alpha - M_y \operatorname{sen}\alpha$; $M_{y_a} = M_x \operatorname{sen}\alpha + M_y \cos\alpha$; $M_{z_a} = M_z$.

Con $\alpha = 0$; $\beta \neq 0$ los momentos $M_{x_a} = M_x \cos\beta + M_z \operatorname{sen}\beta$; $M_{y_a} = M_y$; $M_{z_a} = -M_x \operatorname{sen}\beta + M_z \cos\beta$.

1.16. Recibe el nombre de coeficiente de cualquier fuerza aerodinámica F el cociente entre esta fuerza y el producto de la presión dinámica q_∞ por el área característica S: $c = F/(q_\infty S)$. P. ej., el coeficiente de resistencia al avance $c_{x_a} = X_a/(q_\infty S)$.

Examinemos las dependencias generales para los coeficientes aerodinámicos. Destaquemos en la superficie de cierto cuerpo (fig. 1.23) el área elemental dS. Sobre ella actúan la fuerza normal aerodinámica debida a la presión excesiva $(p - p_\infty)\,dS$ y la fuerza tangencial τdS. La suma de las proyecciones de estas fuerzas sobre el eje x_a del sistema de ejes ligados a la trayectoria es igual a

$[(p - p_\infty)\cos(\widehat{nx_a}) + \tau\cos(\widehat{tx_a})]\,dS$, donde n y t son la normal y la tangente al área elemental, respectivamente (fig. 1.23). Las otras dos proyecciones sobre los ejes y_a, z_a se obtienen con una fórmula análoga con la correspondiente sustitución de los cosenos. Para obtener la fuerza resultante hay que integrar la expresión aducida por la superficie S del cuerpo. Introduciendo la anotación para el coeficiente de presión $\bar{p} = (p - p_\infty)/q_\infty$ y el coeficiente local de rozamiento $c_{fx} = \tau/q_\infty$, donde $q_\infty = \rho_\infty V_\infty^2/2$ es la presión dinámica, obtenemos, correspondientemente, las fórmulas para la fuerza aerodinámica de resistencia al avance, las fuerzas sustentadora y lateral:

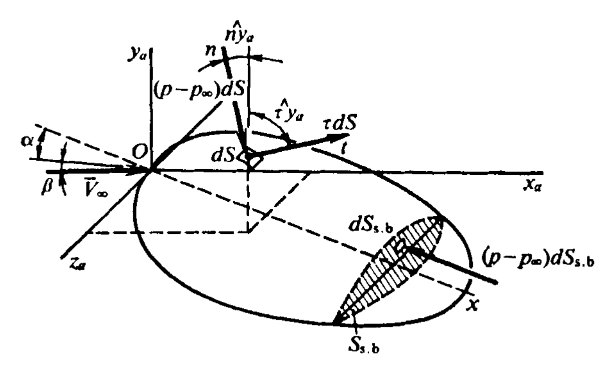


Fig. 1.23. Esquema de las fuerzas superficiales

$$X_a = q_\infty S_{sup} \int_{(S)} [\bar{p}\cos(\widehat{nx_a}) + c_{fx}(\widehat{tx_a})]\,dS/S_{sup}; \tag{1.13}$$

$$Y_a = q_\infty S_{sup} \int_{(S)} [-\bar{p}\cos(\widehat{ny_a}) + c_{fx}\cos(\widehat{ty_a})]\,dS/S_{sup}; \tag{1.14}$$

$$Z_a = -q_\infty S_{sup} \int_{(S)} [\bar{p}\cos(\widehat{nz_a}) + c_{fx}\cos(\widehat{tz_a})]\,dS/S_{sup}. \tag{1.15}$$

En calidad del área característica S_{sup} puede ser elegida una superficie arbitraria, p. ej., el área del ala en la planta, el área de la sección máxima (maestra) transversal del cuerpo, etc.

Las integrales en (1.13)—(1.15) son variables adimensionales que toman en consideración la influencia sobre la fuerza aerodinámica del tipo de la corriente alrededor de un cuerpo de la forma prefijada por un gas (fluido) concreto, con una orientación determinada del cuerpo con relación al sentido del flujo incidente. Estas variables adicionales son denominadas *coeficientes de las fuerzas aerodinámicas*: en la fórmula (1.13) es el *coeficiente de resistencia al avance* c_{x_a}, en las fórmulas (1.14) y (1.15), el *coeficiente de la fuerza aerodinámica sustentadora* c_{y_a} y *lateral* c_{z_a}. De modo análogo es posible obtener las expresiones para los coeficientes de los momentos aerodinámicos.

Del análisis de las expresiones (1.13)—(1.15) se puede llegar a la conclusión de que cada una de las fuerzas aerodinámicas puede ser dividida en la componente condicionada por la presión y la componente ligada con el esfuerzo tangencial, que surge cuando se mueve un fluido viscoso. Si la superficie alrededor de la que

transcurre la circulación tiene una área plana en la cola (plano de popa del fuselaje o bien el borde de salida del ala es obtuso) la resistencia de presión se divide, asimismo, en dos componentes: la resistencia debida a la presión sobre la superficie lateral, o sea, la *resistencia de nariz o proa* y la resistencia debida a la presión sobre el plano de popa, es decir, la *resistencia de base.* Así, pues, p. ej., para la resistencia sumaria y el correspondiente coeficiente aerodinámico

$$X_a = X_{ap} + X_{a\,s.b} + X_{af}; \quad c_{x_a} = c_{x_{ap}} + c_{x_{a\,s.b}} + c_{x_{af}}.$$

De acuerdo con la fig. 1.23

$$X_{a\,s.b} = -q_\infty \int\limits_{S_{s.b}} \bar{p}_{s.b}\, dS_{s.b}; \quad c_{x_{a\,s.b}} = X_{a\,s.b}/(q_\infty S_{sup}),$$

donde $\bar{p}_{s.b} = (p_{s.b} - p_\infty)/q_\infty$ (esta variable es negativa, ya que tras el plano de popa hay enrarecimiento, es decir, $p_{s.b} < p_\infty$).

1.17. El análisis de los fenómenos, ligados con la corriente uniforme de un medio gaseoso alrededor de un vehículo volante, permite llegar a la conclusión de que la fuerza de resistencia X, que actúa sobre dicho vehículo, es función de la densidad ρ, la velocidad V, la viscosidad del fluido μ, la aceleración de la gravedad g, la dimensión del cuerpo l y la velocidad del sonido en el medio a. Además, sobre la resistencia influyen asimismo los ángulos de ataque α y resbalamiento β. De este modo

$$X = f(\rho, \mu, V, l, g, a, \alpha, \beta). \quad (1.16)$$

La fórmula (1.16) puede representarse en forma de una dependencia exponencial

$$X = K\rho^a \mu^b V^c l^d g^e a^f \alpha\beta, \quad (1.17)$$

donde K es un coeficiente de proporcionalidad.

Las dimensiones de las variables que entran en (1.17) son las siguientes: X, LMT^{-2}; ρ, $L^{-3}M$; μ, $L^{-1}MT^{-1}$; V, LT^{-1}; l, L; g, LT^{-2}; a, LT^{-1}.

Confeccionemos las ecuaciones para los exponentes:

$$L \to 1 = -3a - b + c + d + e + f; \quad M \to 1 = a + b;$$
$$T \to -2 = -2 - c - 2e - f.$$

De estas ecuaciones hallamos:

$$a = 1 - b; \; c = 2 - b - 2e - f; \; d = 2 - b + e. \quad (1.18)$$

De (1.17) y (1.18), obtenemos

$$X = K\rho^{(1-b)}\mu^b V^{(2-b-2e-f)} l^{(2-b+e)} g^e a^f \alpha\beta =$$
$$= K\rho V^2 l^2 \,[\mu/(\rho V l)]^b \,(lg/V^2)^e \,(a/V)^f \,\alpha\beta. \quad (1.19)$$

Las variables entre paréntesis son parámetros adimensionales: $\rho Vl/\mu = \mathbf{Re}$; $V^2/(lg) = \mathbf{Fr}$; $V/a = \mathbf{M}$. Estos parámetros se denominan, respectivamente, criterios (números) de Reynolds, de Froude y de Mach. De modo que la expresión para la fuerza de resistencia puede representarse en la forma

$$X = \rho V^2 l^2 K \Phi\,(\mathbf{Re}, \mathbf{M}, \mathbf{Fr}, \alpha, \beta), \quad (1.20)$$

donde $\Phi\,(\mathbf{Re}, \mathbf{M}, \mathbf{Fr}, \alpha, \beta)$ es una función de los ángulos de ataque y resbalamiento, así como de los números **Re**, **Fr**, **M**.

De acuerdo con la forma de uso general de anotación de las fuerzas aerodinámicas de resistencia

$$X = c_x S \rho V^2/2, \quad (1.21)$$

donde c_x es el coeficiente de resistencia; S, el área característica del sólido.

Igualando (1.20) y (1.21), obtenemos

$$c_x = \Phi_1 (\mathbf{Re}, \mathbf{M}, \mathbf{Fr}, \alpha, \beta), \quad (1.22)$$

donde $\Phi_1 (\mathbf{Re}, \mathbf{M}, \mathbf{Fr}, \alpha, \beta) = 2 (Kl^2/S)\, \Phi (\mathbf{Re}, \mathbf{M}, \mathbf{Fr}, \alpha, \beta)$.

Así, pues, el coeficiente de resistencia c_x es cierta función de las variables α, β, **Re**, **M**, **Fr**.

La forma de esta función se determina bien de modo experimental, o bien como resultado de investigaciones teóricas de la corriente alrededor de cuerpos de la forma prefijada.

1.18. La fuerza de la resistencia al avance $X_a = c_{x_a} q_\infty S$, donde S es el área característica del vehículo volante y c_{x_a}, el coeficiente aerodinámico que corresponde a dicha área.

Haciendo uso de esta fórmula dos veces: $X_a = c_{x_{a1}} q_\infty S_{\text{máx.t}}$ y $X_a = c_{x_{a2}} q_\infty S$, hallamos la siguiente dependencia entre los coeficientes aerodinámicos: $c_{x_{a1}} = c_{x_{a2}} S/S_{\text{máx.t}}$.

1.19. Aducimos las fórmulas para determinar las fuerzas aerodinámicas necesarias: $Y_a = c_{y_a} q_\infty S$; $Y = c_y q_\infty S$; $X = c_x q_\infty S_{\text{máx.t}}$. La fórmula para hacer el cálculo del traspaso del sistema de ejes ligados al vehículo al de ejes ligados a la trayectoria tiene la forma (véase la solución a la pregunta 1.11) $Y_a = Y \cos \alpha - X \operatorname{sen} \alpha$ (el ángulo de balanceo es igual a cero). Poniendo aquí los valores hallados de X e Y, obtenemos $c_{y_a} = c_y \cos \alpha - c_x (S_{\text{máx.t}}/S) \operatorname{sen} \alpha$.

1.20. Para un vehículo volante simétrico con relación al plano horizontal, que pasa por el eje longitudinal, los momentos respecto de los puntos A y O crean una

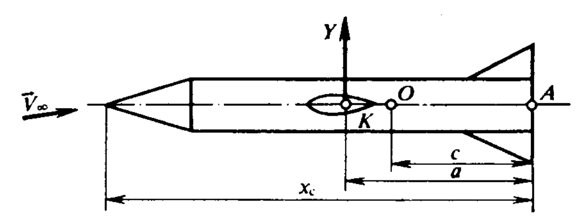


Fig. 1.24. Esquema para el recálculo del momento aerodinámico de un punto de reducción a otro

fuerza normal aerodinámica Y, cuyo punto de aplicación es desconocido en el caso que estudiamos. Supongamos que semejante punto es K (fig. 1.24).

En correspondencia con el planteamiento del problema, el momento de la fuerza Y respecto al punto A, puede representarse del modo siguiente:

$$M_z^A = Ya = c_y q_\infty S a \quad \text{o bien} \quad M_z^A = m_z^A q_\infty S x_c.$$

Con relación al punto O las correspondientes expresiones para el momento toman la forma

$$M_z^O = Y(a-c) = c_y q_\infty S (a-c) \quad \text{y} \quad M_z^O = m_z^O q_\infty S b,$$

donde b es la cuerda del ala.

Después de ciertas transformaciones, obtenemos

$$m_z^O = c_y a/b - c_y c/b \quad \text{y} \quad m_z^A = (c_y a/b)(S/S_{\text{máx. t}})\, b/x_c.$$

Tomando esto en consideración

$$m_z^O = m_z^A\,[(S_{\text{máx. t}}/S)\, x_c/b - (c/a)(S_{\text{máx. t}}/S)\, x_c/b],$$

o bien

$$m_z^O = m_z^A\,(S_{\text{máx. t}}/S)\, x_c/b - c_y c/b.$$

1.21. En correspondencia con el planteamiento del problema, tenemos:

$$M_{x_a} = m_{x_a} q_\infty S l; \quad M_x = m_x q_\infty S l;$$
$$M_y = m_y q_\infty S l; \quad M_z = m_z q_\infty S x_c.$$

Considerando que el vehículo volante se mueve bajo ángulo de ataque α y de resbalamiento β, aplicando las fórmulas (1.7)—(1.12), obtenemos

$$M_{x_a} = M_x \cos\alpha \cos\beta - M_y \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + M_z \operatorname{sen}\beta.$$

Pasando a los coeficientes aerodinámicos, hallamos

$$m_{x_a} = m_x \cos\alpha \cos\beta - m_y \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + m_z (x_c/l) \operatorname{sen}\beta.$$

1.22. Las fuerzas y los momentos aerodinámicos se determinan en el caso general con las fórmulas $R = c_R q_\infty S$ y $M = m q_\infty S l$, respectivamente, donde S y l son las dimensiones geométricas características del vehículo volante.

Al realizar los cálculos, como semejantes dimensiones de los vehículos volantes de configuración de avión se suelen adoptar: S, el área del ala (área de la proyección del ala sobre el plano de referencia del ala, es decir, tal plano que contiene la cuerda del plano central del ala que consideramos y que es perpendicular al plano de simetría del vehículo volante); l, la envergadura del ala (distancia entre dos planos perpendiculares al plano de referencia del vehículo volante y que hace contacto con los extremos del ala); b, la cuerda del ala. Si el ala tiene cuerda variable por la envergadura, como dimensión característica se elige b_A, es decir, la cuerda aerodinámica media del ala.

Al determinar los momentos M_{y_a}, M_y, M_{x_a}, M_x como dimensión característica se elige la envergadura del ala l, en tanto que al calcular los momentos de cabeceo M_{z_a} y M_z, la cuerda del ala.

1.23. La cuerda aerodinámica media b_A del ala se suele considerar la de tal ala rectangular convencional en la que el área S, la fuerza aerodinámica y el momento son los mismos que en el ala que se estudia. Partiendo de semejante definición es posible hallar el valor de esa cuerda. Como los momentos para el ala rectangular $M_{za} = m_{za} S q_\infty b_A$ y para la prefijada, $M_{za} = \int_{z_1}^{z_2} m'_{z_a} q_\infty b'^2(z)\, dz$ son iguales, considerando que los coeficientes m'_z son constantes a lo largo de la envergadura y haciendo $m'_{z_a} = m_{za}$, obtenemos

$$b_A = (1/S) \int_{z_1}^{z_2} b'^2(z)\, dz. \tag{1.23}$$

Aquí z_1 y z_2 son las coordenadas de los bordes laterales; $b'(z)$, la longitud de la proyección de la cuerda local b en el plano de referencia del ala.

La coordenada longitudinal del borde de la cuerda aerodinámica media

$$x_A = (1/S) \int_{z_1}^{z_2} b'(z)\, x\, dx. \quad (1.24)$$

El correspondiente valor de la coordenada transversal se determina con la conocida ecuación del borde de ataque $z = f(x)$. Haciendo $x = x_A$ hallamos dicho valor en la forma $z_A = f(x_A)$. En particular, para el borde de ataque recto $z_A = x_A \operatorname{ctg} \chi$ (χ es el ángulo de flecha). Si todos los demás bordes (laterales y de salida) también son rectos, para semejante ala trapezoidal la cuerda aerodinámica media

$$b_A = (2/3)\, b_0 (\eta^2 + \eta + 1)/[\eta (1 + \eta)], \quad (1.24')$$

donde $\eta = b_0/b_e$ es el ahusamiento del ala [b_0, b_e son las cuerdas de raíz y de extremo, respectivamente, (véase la fig. 1.10)].

1.24. La fuerza o bien el momento aerodinámicos se pueden determinar si, además de los coeficientes aerodinámicos, conocemos la presión dinámica $q_\infty = \rho_\infty V_\infty^2/2$ y los parámetros geométricos característicos S y l del vehículo volante. De acuerdo con el planteamiento, son conocidas la altura y velocidad de vuelo, es decir, puede determinarse la presión dinámica. Pero, como los parámetros geométricos del vehículo volante son desconocidos, no es posible calcular la fuerza y el momento aerodinámicos.

1.25. El coeficiente total de resistencia al avance de un sólido de revolución $c_{x_a} = c'_{xp} + c'_{xf} + c'_{x\,\text{s.b}}$. El coeficiente c_{x_a} y sus componentes en el segundo miembro deben ser calculados de acuerdo con la misma dimensión geométrica carac terística. Para un vehículo volante en forma de sólido de revolución semejante dimensión es el área de la sección máxima transversal $S_{\text{máx.t}}$. Según el planteamiento, el coeficiente de resistencia debido a la presión está calculado por $S_{\text{máx.t}}$ (es decir, $c'_{xp} = c_{xp}$). Hallemos las expresiones para los coeficientes c'_{xf} y $c'_{x\,\text{s.b}}$ mediante los valores prefijados de c_{xf} y $c_{x\,\text{s.b}}$ respectivamente. Es evidente que las fuerzas que actúan no dependen de con qué coeficientes ellas se calculan, es decir, para la fuerza de rozamiento

$$X_f = c_{xf} q_\infty S_{\text{sup}} = c'_{xf} q_\infty S_{\text{máx. t}},$$

en tanto que para la resistencia de base

$$X_{\text{s.b}} = c_{x\,\text{s.b}} q_\infty S_{\text{s.b}} = c'_{x\,\text{s.b}} q_\infty S_{\text{máx. t}}.$$

Así, pues,

$$c'_{xf} = c_{xf} S_{\text{sup}}/S_{\text{máx.t}}; \quad c'_{x\,\text{s.b}} = c_{x\,\text{s.b}} S_{\text{s.b}}/S_{\text{máx.t}}.$$

De acuerdo con esto, el coeficiente total

$$c_{x_a} = c_{xp} + c_{xf} S_{\text{sup}}/S_{\text{máx.t}} + c_{x\,\text{s.b}} S_{\text{s.b}}/S_{\text{máx.t}}.$$

Poniendo aquí los datos iniciales hallamos $c_{x_a} = 0{,}55$.

1.26. A las características geométricas del ala, además del área S y la envergadura l, también se refieren el alargamiento λ igual a la razón entre el cuadrado de la envergadura y el área del ala: $\lambda = l^2/S$, así como el ahusamiento (adelgazamiento) $\eta = b_0/b_e$ donde b_0 es la cuerda de línea central y b_e, la cuerda de extremo del ala (fig. 1.9, b).

Las áreas de las alas rectangular, trapezoidal y triangular $S_1 = lb$; $S_2 = l(b + b/2)/2$; $S_3 = lb/2$. Según estos valores de las áreas determinamos el alargamiento:

$$\lambda_1 = l^2/S_1 = l/b; \quad \lambda_2 = l^2/S_2 = 4l/(3b); \quad \lambda_3 = l^2/S_3 = 2l/b.$$

En correspondencia, los ahusamientos de las alas que estudiamos $\eta_1 = 1$; $\eta_2 = 2$; $\eta_3 = \infty$.

1.27. Calcularemos la cuerda aerodinámica media del ala prefijada con (1.24'). Primero determinamos el ahusamiento: $\eta = b_0/b_e = 5$. Así que $b_A = 0{,}6889$.

1.28. La fuerza aerodinámica normal Y, aplicada en el centro de presión (punto c.p) del perfil (véase la fig. 1.11), crea un momento $M_z = -Yx_p = -c_y q_\infty S x_p$ respecto del borde de ataque (punto O). Pero ese mismo momento $M_z = m_z q_\infty S b$.

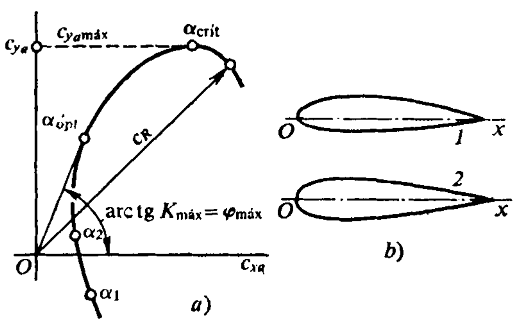


Fig. 1.25. Polar (*a*) y perfiles del ala (*b*)

De estas dos expresiones obtenemos la expresión para el coeficiente del centro de presión: $c_p = x_p/b = -m_z/c_y$.

Como muestran las investigaciones el centro de presión varía su posición en dependencia del ángulo de ataque. Para los vehículos aéreos de forma no simétrica (con relación al plano horizontal) las características de vuelo se estiman con mayor comodidad no por el centro de presión, sino por la distancia focal.

De la fig. 1.11 se desprende que para la dependencia lineal entre c_y y m_z obtenemos $m_z = m_{z_0} + c_y(\partial m_z/\partial c_y)$.

De acuerdo con esto $c_p = -(m_{z_0}/c_y + \partial m_z/\partial c_y)$, donde m_{z_0} es el coeficiente del momento con $c_y = 0$ (véase la fig. 1.11); la variable $\partial m_z/\partial c_y = \mathrm{tg}\,\varphi$ o bien, de acuerdo con la figura, $\partial m_z/\partial c_y = \mathrm{tg}\,\varphi = -0{,}2/0{,}47 = -0{,}4255$.

Este valor determina la coordenada adimensional del foco de acuerdo con la dependencia $\bar{x}_F = x_F/b = -\partial m_z/\partial c_y = 0{,}4255$.

Para el coeficiente del centro de presión $c_p = -m_{z_0}/c_y + \bar{x}_F$. De la fig. 1.11 se desprende que $m_{z_0} = -0{,}1$. Entonces $c_p = 0{,}1/c_y + 0{,}4255$.

Como sigue de los resultados obtenidos, con pequeñas variaciones del ángulo de ataque, la coordenada del punto del foco del perfil no varía, aunque el centro de presión es función del coeficiente c_y (o del ángulo de ataque α).

1.29. La polar del perfil establece la ligazón entre la fuerza sustentadora y la resistencia al avance, es decir, entre los correspondientes coeficientes y es el lugar geométrico de los extremos de los vectores de la fuerza aerodinámica total $\vec{R}_a$, que actúa sobre el perfil con diversos ángulos de ataque o bien del correspondiente vector del coeficiente $c_{R_a} = R_a/(q_\infty S)$ de dicha fuerza.

La polar permite determinar las características aerodinámicas del perfil con cualquier ángulo de ataque. P. ej., el rendimiento aerodinámico del perfil $K = c_{y_a}/c_{x_a} = Y_a/X_a$ puede determinarse (si en la gráfica las escalas de c_{y_a} y c_{x_a} son iguales) como la tangente del ángulo de inclinación al eje de abscisas del vector, trazado del origen de coordenadas (los polos) al punto del diagrama polar, correspondiente al ángulo de ataque elegido (fig. 1.25).

El máximo rendimiento $K_{\text{máx}} = \text{tg}\,\varphi_{\text{máx}}$ corresponde al *ángulo óptimo de ataque* $\alpha_{\text{ópt}}$ (fig. 1.25) que se halla trazando desde el eje de coordenadas una tangente a la polar. El punto de tangencia con la polar determina $\alpha_{\text{ópt}}$.

La fuerza sustentadora máxima corresponde a aquel punto de la polar, en el que $c_{y_a} = c_{y_a\text{máx}}$ y se alcanzará durante el movimiento con el ángulo crítico de ataque $\alpha_{\text{crít}}$.

En la fig. 1.12, *a* la polar corresponde al perfil asimétrico *1* del ala y en la fig. 1.12, *b*, al simétrico *2*. De acuerdo con dichas figuras, para el perfil asimétrico $K_{\text{máx}} = \text{tg}\,\varphi_{\text{máx}} = 21{,}5$; $\alpha_{\text{ópt}} = 1°15'$; $c_{y_a\text{máx}} = 1{,}08$; $\alpha_{\text{crít}} = 14°$, en tanto que para el simétrico $K_{\text{máx}} = 21{,}6$; $\alpha_{\text{ópt}} = 4°10'$; $c_{y_a\text{máx}} = 1{,}06$; $\alpha_{\text{crít}} = 18°$.

Hemos de señalar que, por regla, la polar del perfil (o bien la polar del vehículo volante) se construye en coordenadas de las variables c_{y_a} y c_{x_a} que tienen distintas escalas, ya que los órdenes de ellas son diferentes (por lo general, c_{x_a} es en un orden menor que c_{y_a}).

1.30. La determinación del centro de presión está ligada con el cálculo de la estabilidad estática del sólido de revolución en el vuelo. Dicha estabilidad depende de la forma geométrica del sólido, de la posición de su centro de masas, la velocidad de vuelo, el ángulo de ataque, el valor de la fuerza aerodinámica y del punto de su aplicación.

El movimiento del cuerpo puede caracterizarse por la diferente disposición mutua de los centros de presión y de masas. En la fig. 1.26,*a* se muestra la disposi-

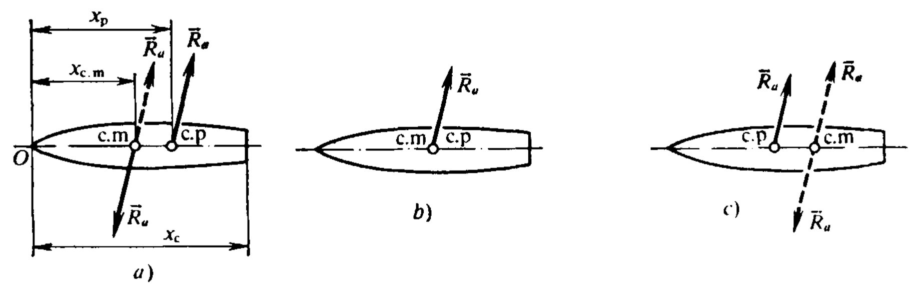


Fig. 1.26. Disposición de los centros de masas y de presión para sólidos estáticamente estable (*a*) e inestable (*c*), así como para un sólido (*b*) neutral con relación a la estabilidad estática

ción posterior del centro de presión. En este caso, el aumento del ángulo de ataque que surge se ve obstaculizado por el momento de fuerza $\vec{R}_a$ con relación al centro de masas que tiende a restablecer el equilibrio. El vuelo de tal cuerpo es estáticamente estable. Para la forma aerodinámica prefijada del cuerpo la disposición posterior del centro de presión se asegura aumentando la pesadez de la nariz de este cuerpo y con el respectivo desplazamiento del centro de masas.

En la fig. 1.26,*b* el centro de presión coincide con el de masas del vehículo volante. En semejante caso el momento que restablece el equilibrio es nulo. Por ello, el cuerpo puede comenzar a girar respecto del centro de masas y el vuelo será inestable, aunque la desviación a un ángulo de ataque suficientemente grande conduce a que surge una fuerza aerodinámica, distinta de la inicial $\vec{R}_a$ y aplicada en otro punto, que no coincide con el centro de masas, es decir, aparece un momento que tiende a restablecer el equilibrio. Pero semejante vuelo de un cuerpo con gran amplitud de oscilaciones cerca del centro de masas se considera inestable, desde

el punto de vista dinámico. Tal posición conjugada de los centros de presión y de masas, para la forma prefijada del cuerpo, se logra a cuenta del correspondiente «centrado» del sólido, lo que permite hacer que coincidan el centro de masas y el de presión.

En la fig. 1.26, *c* se muestra el caso de un sólido estáticamente inestable, al que corresponde la disposición anterior del centro de presión. El ángulo de ataque que surge sigue creciendo, a lo que favorece el momento de la fuerza $\vec{R}_a$ cerca del centro de masas (momento destabilizante). Tal desplazamiento del centro de masas con relación al centro de presión se produce en el caso que examinamos a cuenta de la redistribución de la masa y la pesadez de la cola del sólido de revolución.

1.31. El margen de estabilidad estática se determina con el criterio $\bar{Y} = \bar{x}_m - c_p$, que, por regla, se expresa en tanto por ciento: $\bar{Y} = (\bar{x}_m - c_p)\,100$. Aquí $\bar{x}_m = x_m/x_c$, $c_p = x_p/x_c$, donde x_c es la longitud del cuerpo. Si el coeficiente del centro de presión c_p es mayor que la coordenada relativa de centro de masas $\bar{x}_m$ es decir, si el centro de presión está dispuesto tras el centro de masas, el vehículo volante es estáticamente estable; con la disposición delantera del centro de presión (la diferencia $\bar{x}_m - c_p$ es positiva), estáticamente inestable. De este modo, el vehículo volante estáticamente estable debe tener margen negativo de estabilidad.

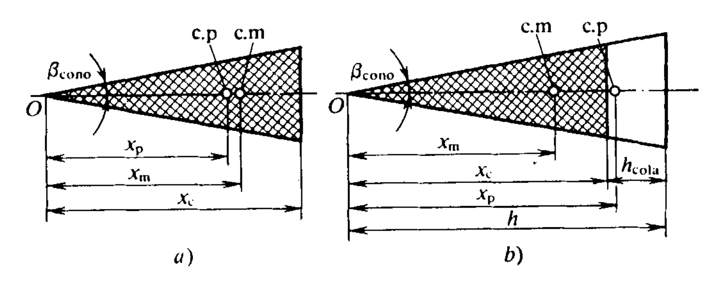


Fig. 1.27. Margen de estabilidad de un cono «enterizo» (*a*) y de un cono con cola estabilizadora (*b*)

Para el sólido cónico prefijado (fig. 1.27, *a*) el centro de masas dista respecto de la punta *O* 3/4 de la altura del cono, es decir, $x_m = (3/4)\,x_c$. La coordenada del centro de presión $x_p = (2/3)\,(1 + \mathrm{tg}^2\,\beta_{cono})\,x_c$. Así, pues, $\bar{x}_m = 3/4$ y $c_p = (2/3) \times \times (1 + \mathrm{tg}^2\,\beta_{cono})$.

Por consiguiente,

$$\bar{Y} = [3/4 - (2/3)\,(1 + \mathrm{tg}^2\,\beta_{cono})]\,100\% = [(-2/3)\,\mathrm{tg}^2\,\beta_{cono} + 1/12]\,100\% = 3{,}4\%.$$

El margen de estabilidad se ha obtenido positivo, es decir, el cono que consideramos es estáticamente inestable. Para asegurar la estabilidad puede utilizarse una cola estabilizadora hueca, cuya masa, en comparación con el sector enterizo del cono, se desprecia (fig. 1.27, *b*).

El margen de estabilidad estática con la cola estabilizadora $\bar{Y} = [3x_c/4 - 2\,(1 + \mathrm{tg}^2\,\beta_{cono})\,h/3]\,100/h$. La correspondiente altura del cono $h = x_c\,[\bar{Y}/100 + (2/3)\,(1 + \mathrm{tg}^2\,\beta_{cono})]^{-1}\,3/4$. Después de poner aquí los datos, obtenemos $h =$

$= 5{,}83$ m. Por este valor hallamos la lòngitud de la cola estabilizadora: $h_{\text{cola}} = 5{,}83 - 4 = 1{,}83$ m.

1.32. El margen de estabilidad estática de un vehículo volante $\bar{Y} = (\bar{x}_m - c_p) \times 100\%$, donde $\bar{x}_m = x_m/x_c$ es la coordenada adimensional del centro de masas, que puede determinarse para el cuerpo prefijado (véase la fig. 1.14) haciendo uso de la dependencia

$$\bar{x}_m = x_m/x_c = (x_{m.n}W_n + x_{m.cil}W_{cil} + x_{m.cola}W_{cola})/(x_cW_{cp}), \tag{1.25}$$

en la que x_m es la coordenada del centro de masas de todo el sólido; $x_{m.n}$, $x_{m.cil}$, $x_{m.cola}$ las coordenadas de los centros de masas de los sectores de nariz, cilíndrico y de cola, respectivamente; W_n, W_{cil}, W_{cola}, los volúmenes de los indicados sectores; W_{cp}, el volumen de todo el sólido de revolución.

Las posiciones de los centros de masas para los sectores del sólido se determinan con las conocidas dependencias: para el sector cónico de nariz, $x_{m.n} = (3/4)\, x_{máx.t}$; para el cilindro, $x_{m.cil} = x_{máx.t} + x_{cil}/2$; para el sector de cola (cono truncado) $x_{m.cola} = x_{máx.t} + x_{cil} + \Delta$. A su vez

$$\Delta = (x_{cola}/4)\,(3r_{s.b}^2 + 2r_{s.b}r_{máx.t} + r_{máx.t}^2)/(r_{s.b}^2 + r_{s.b}r_{máx.t} + r_{máx.t}^2).$$

Después de las correspondientes sustituciones en (1.25), obtenemos

$$\bar{x}_m = \frac{(3/4)\, x_{máx.t}\,(1/3)\,\pi r_{máx.t}^2 x_{máx.t} + (x_{máx.t} + 0{,}5x_{cil})\,\pi r_{máx.t}^2 x_{cil} + (x_{máx.t} + x_{cil} + \Delta)\,\pi x_{cola}\,(r_{máx.t}^2 + r_{máx.t}r_{s.b} + r_{s.b}^2)/3}{[(1/3)\,\pi r_{máx.t}^2 x_{máx.t} + \pi r_{máx.t}^2 x_{cil} + \pi x_{cola}\,(r_{máx.t}^2 + r_{máx.t}r_{s.b} + r_{s.b}^2)/3]\, x_c}.$$

Realizando los cálculos hallamos $\bar{r}_{s.b} = r_{s.b}/r_{máx.t} = \bar{S}_{s.b}^{1/2} = 1{,}095$; $\Delta = 2{,}56$; $\bar{x}_m = 0{,}55$.

Para los sólidos de revolución delgados

$$c_p = \frac{2\,(\bar{S}_{s.b} - W_{cp}/W_{cil}) + 2c\alpha\,(\lambda_c - \lambda_{máx.t}^2/\lambda_c)/\pi}{2\bar{S}_{s.b} + 4c\alpha\,(\lambda_{cil} + \lambda_{cola})/\pi}. \tag{1.26}$$

Aquí W_{cil} es el volumen de un cilindro, cuya base es igual al área $\pi r_{máx.t}^2$ y la altura del sólido, a la longitud x_c; c, un coeficiente, determinado por vía experimental; $\lambda_c = x_c/d_{máx.t}$; $\lambda_{cil} = x_{cil}/d_{máx.t}$; $\lambda_{cola} = x_{cola}/d_{máx.t}$; $\lambda_{máx.t} = x_{máx.t}/d_{máx.t}$ son parámetros.

Determinemos la razón de los volúmenes:

$$W_{cp}/W_{cil} = [(1/3)\,\lambda_{máx.t} + \lambda_{cil} + \bar{\Delta}\lambda_{cola}]/\lambda_c.$$

Como $\bar{\Delta} = W_{cola}/(\pi r_{máx.t}^2 x_{cola}) = (1/3)\,(\bar{S}_{s.b} + \bar{S}_{s.b}^{1/2} + 1) = 1{,}098$, $W_{cp}/W_{cil} = 0{,}92$.

Admitiendo que el coeficiente $c = 1, 2$, obtenemos $c_p = 0{,}44$.

El margen correspondiente de estabilidad estática $\bar{Y} = (\bar{x}_m - c_p)/100\% = 11\%$.

Por lo tanto, el vehículo volante, en forma del sólido de revolución fino y largo que consideramos, es estáticamente inestable.

1.33. Como el ángulo de ataque del vehículo volante no varía en el transcurso de todo el tiempo de ascenso, con cierto grado de aproximación podemos conside-

rar que el coeficiente de la fuerza sustentadora c_{y_a} es constante. Tomando esto en consideración aducimos la condición de igualdad de las fuerzas sustentadoras a las alturas $H = 5$ y $H = 15$ km; $c_{y_a}(\rho_\infty V_\infty^2)_{H=5}\, S/2 = c_{y_a}\,(\rho_\infty V_\infty^2)_{H=15} S/2$.

De aquí la razón de las velocidades $V_{\infty H=15}/V_{\infty H=5} = \sqrt{\rho_{\infty H=5}/\rho_{\infty H=15}}$. De las tablas de la atmósfera normal, la densidad del aire $\rho_{\infty H=5} = 0{,}737$ kg/m³; $\rho_{\infty H=15} = 0{,}195$ kg/m³. Por lo tanto, la velocidad del vehículo volante a $H = 15$ km $V_{\infty H=15} = 1{,}95\ V_{\infty H=5}$.

1.34. Esta particularidad consiste en que durante el movimiento a grandes velocidades en un gas, junto a una superficie envuelta por la corriente, surgen considerables cambios de presión, lo que provoca una variación de la densidad del gas y, por consiguiente, al cambio del carácter y el valor del efecto de fuerza y térmico sobre el vehículo volante en comparación con un fluido incompresible.

A pequeñas velocidades de movimiento del gas la variación de la presión en el flujo es pequeña, por lo que la densidad cambia poco y la influencia de la compresibilidad es insignificante. Debido a esto, a velocidades de hasta 70—80 m/s es posible calcular la presión en el flujo del gas como si éste fuera incompresible. Pero con el aumento de la velocidad el error de los cálculos por las fórmulas para un fluido incompresible aumenta. P. ej., a una velocidad de vuelo $V = 68$ m/s el error en la determinación de la densidad constituye el 2 %, en tanto que a $V = 270$ m/s el mismo aumenta hasta el 35 %. Por ello, a grandes velocidades, en los cálculos aerodinámicos deben utilizarse las correspondientes dependencias para los fluidos incompresibles.

1.35. Al decelerar el aire, que se desplaza a grandes velocidades, en el flujo se desarrollan altas temperaturas. Con esto, el calentamiento del gas conduce a la variación de los parámetros termodinámicos, así como a diferentes transformaciones físico-químicas. P. ej., al calentar el aire a presión atmosférica normal hasta una temperatura ~1500 K comienza una notoria excitación de los niveles vibracionales de la energía interna de las moléculas de oxígeno y nitrógeno del aire; con un calentamiento hasta la temperatura ~3000 K estos niveles resultan totalmente excitados para el oxígeno y el posterior calentamiento conduce a su disociación, lo que finaliza a una temperatura de ~6000 K (es decir, las moléculas de oxígeno están disociadas casi por completo). Además, a semejante temperatura se produce la disociación de la mayor parte de las moléculas de nitrógeno. Con el posterior aumento de la temperatura comienza a desarrollarse el proceso de excitación de los grados de libertad de los electrones y, a continuación, se produce el arranque de los electrones de los átomos de nitrógeno y oxígeno. Este fenómeno lleva el nombre de *ionización*. Este proceso se intensifica a medida que crece la temperatura y va acompañado por el aumento de concentración de los electrones libres.

1.36. Para un gas biatómico, en el que la disociación transcurre según la ecuación $A_2 \rightleftarrows 2A$, el grado de disociación $\alpha = n_A/(n_A + 2n_{A_2})$, en donde n_A es el número de átomos que se obtienen como resultado de la disociación; n_{A_2}, el número de moléculas del gas en ese mismo volumen. Según el planteamiento del problema $n_A = 2n$, $2n_{A_2} = 2\,(m - n)$. Por lo tanto, $\alpha = 2n/[2n + 2\,(m - n)] = n/m$.

1.37. Como muestran las investigaciones el proceso de disociación se determina por la temperatura, por la presión total a la que se encuentra la mezcla de gases, así como por las fracciones en peso de los elementos químicos de dicha mezcla. Sobre la disociación del gas ejerce mayor influencia su temperatura, menor, la presión. Con ello, la disminución de la presión favorece a una descomposición más intensa de las moléculas en átomos, es decir, al aumento del grado de disociación.

Y a la inversa, el aumento de la presión obstaculiza dicha descomposición, o sea, es como si suprimiera la disociación. Esto no se refiere a las mezclas en las que la reacción química transcurre sin la variación del número de moles (p. ej., la reacción $2NO \rightleftarrows N_2 + O_2$). En semejante caso el cambio de presión no influye sobre la composición de la mezcla en disociación.

1.38. El calor específico del aire c_p depende de manera notoria de la presión y la temperatura. El carácter de dicha dependencia tiene sus peculiaridades (fig. 1.28). P. ej., a la presión $p > 10^5$ Pa y a la temperatura hasta unos 2000 K las capacidades caloríficas poco dependen de la presión, pero su valor varía con el cambio de temperatura. Durante el calentamiento del aire, el calor que se comunica no sólo se consume para aumentar la energía del movimiento de traslación y rotatorio de las moléculas, sino también para el aumento de las vibraciones de los átomos en la molécula, el trabajo para vencer las fuerzas de interacción entre los átomos durante la disociación de la molécula, así como para arrancar los electrones del átomo al producirse la ionización. Debido a esto los calores específicos crecen.

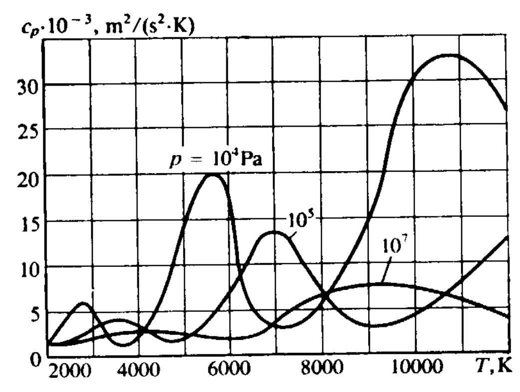


Fig. 1.28. Variación del calor específico del aire

Al comenzar la disociación los calores específicos no sólo dependen de la temperatura, sino, asimismo, de la presión. La tendencia general que con ello se observa es tal que con la disminución de la presión y, por consiguiente, el aumento del grado de disociación y de ionización, los calores específicos crecen, aunque no monótonamente.

1.39. La respuesta correcta es la 3. Los resultados sistematizados de los cálculos muestran que, al no haber disociación, la viscosidad dinámica μ y la conductividad λ sólo dependen de la temperatura, pero en el gas disociante, donde se producen los cambios en la composición de este gas, sobre ellas influyen la temperatura y la presión.

La esencia de estos fenómenos puede explicarse del modo siguiente. El origen de las fuerzas de viscosidad y el surgimiento del proceso de conductividad térmica en un gas están ligados con la estructura molecular de la sustancia. El desplazamiento de las moléculas en el volumen del gas de un lugar a otro conduce al transporte de energía y cantidad de movimiento. Con ello, la variación de la cantidad de movimiento provoca la aparición de la fuerza de viscosidad, en tanto que el transporte de energía condiciona la propiedad de conductividad térmica. Por esta razón, al crecer la temperatura aumentan en el medio gaseoso la conductividad térmica y la viscosidad dinámica. Al comenzar la disociación el carácter de las variaciones de λ y μ es bastante complicado (fig. 1.29). Con pequeño grado de disociación los valores de λ se reducen, lo que se provoca por el consumo de la energía interna para romper los enlaces moleculares. Al aumentar el grado de disociación, el fraccionamiento más intenso de las moléculas en átomos conduce al crecimiento del número de partículas que participan en los procesos de transporte y, por lo tanto, al aumento de la conductividad térmica λ. Con un calentamiento muy alto del gas aumenta considerablemente el consumo de energía interna para la ionización, lo que reduce la conductividad térmica.

La viscosidad dinámica de un medio gaseoso crece monótonamente al aumentar la temperatura, ya que al comenzar la disociación y la ionización se forma un creciente número de partículas que participan en el transporte de la cantidad de movimiento, lo que condiciona el aumento de las fuerzas de viscosidad.

1.40. Si suponemos que no hay disociación, $c_p = c_{p_\infty}(T/T_\infty)^\varphi$. Haciendo $\varphi = 0,1$, $T_\infty = 288$ K; $c_{p_\infty} = 1000$ J/(kg·K), hallamos $c_p = 1,33 \cdot 10^3$ J/(kg·K).

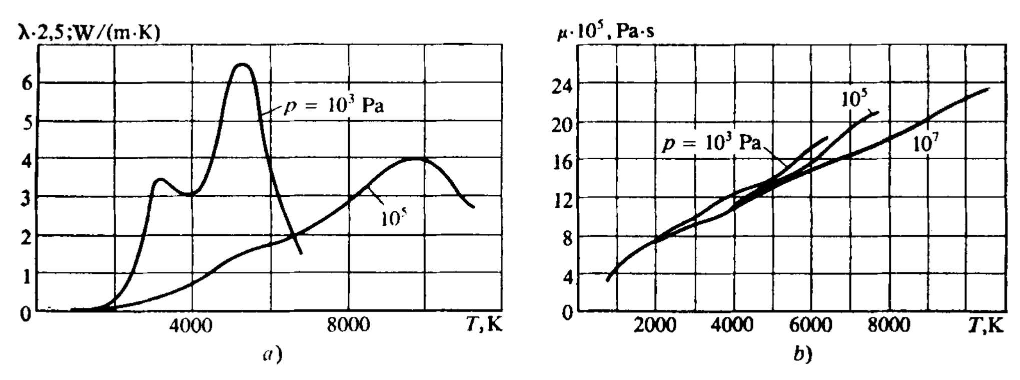


Fig. 1.29. Curvas de termoconductividad (*a*) y de viscosidad dinámica (*b*) del aire

Teniendo en cuenta la disociación, el respectivo valor del calor específico lo hallamos en las correspondientes tablas o gráficas (véase por ejemplo, la fig. 1.28), a partir de los datos $T = 5000$ K y $p = 10^4$ Pa, donde encontramos que $c_p = 12 \cdot 10^3$ J/(kg·K).

De este modo el calor específico, calculado sin tener en cuenta la disociación, es unas nueve veces menor que el valor real.

1.41. Si el aire no estuviera disociado su densidad disminuiría, lo mismo que la presión, 100 veces (esto se desprende de la ecuación de estado $p = \rho RT$). Sin embargo, durante la disociación la variación es otra, ya que la densidad depende, en este caso, del grado de disociación del aire.

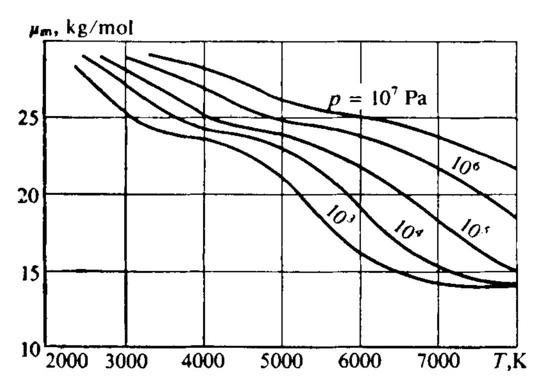


Fig. 1.30. Masa molar media del aire

En las gráficas de las funciones gasodinámicas del flujo aéreo a altas velocidades y temperaturas podemos hallar directamente para $T = 4000$ K y $p_1 = 10^5$ la densidad $\rho_1 = 8 \cdot 10^{-2}$ kg/m³, en tanto que para $T = 4000$ K y $p_2 = 10^3$ Pa, la densidad $\rho_2 = 10^{-3}$ kg/m³. Así, pues, al bajar la presión 100 veces, la disminución de la densidad del gas disociado se determina por la relación $\rho_2/\rho_1 = 1,25 \cdot 10^{-2}$ (80 veces).

1.42. La masa media molar del aire μ_m no varía, al aumentar la presión y la temperatura, hasta que en el aire comiencen las transformaciones físico-químicas (la disociación). Las gráficas (fig. 1.30), obtenidas mediante cálculos, permiten seguir el carácter de la influencia de la presión y la temperatura sobre la variable μ_m. La subida de la temperatura favorece la descomposición de las moléculas de

aire en átomos (y con las temperaturas muy altas se produce, incluso, el arranque de los electrones de estos átomos). Todo lo expuesto condiciona la disminución de la masa molar del gas disociado e ionizado (fig. 1.30). El aumento de la presión en semejante gas favorece una recombinación más intensiva, lo que conduce al crecimiento de μ_m.

1.43. De la dependencia $a = f(p, T)$ para altas temperaturas, según los valores de $T = 3500$ K y $p = 10^3$ Pa, determinamos la velocidad del sonido, tomando en consideración la disociación, $a_{dis} = 1230$ m/s. Con el calor específico y la magnitud $k = c_p/c_v = 1,4$ constantes dicha velocidad $a_{const} = \sqrt{kRT} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 3500} = 1186$ m/s, lo que es algo menor que en el caso de disociación.

Suponiendo que no hay disociación y que los calores específicos son funciones de la temperatura, empleando la dependencia $k = c_p/c_v = f(T)$, hallamos $k = c_p/c_v = 1,27$. De acuerdo con esto, $a_{var} = \sqrt{kRT} = 1130$ m/s.

Así, pues, la velocidad del sonido es aún menor en comparación con el valor real en un gas disociado.

1.44. Para el aire disociado, según el diagrama $i - S$ para la presión $p = 10^4$ Pa y la temperatura $= 4000$ K determinamos la entalpía $i_{dis} = 8,3 \times 10^6$ m²/s².

Suponiendo que c_p y c_v son constantes y $k = 1,4$, hallamos $i_{const} = [k/(k-1)]\, p/\rho = kRT/(k-1) = 4,02 \cdot 10^6$ m²/s².

Ahora, adoptemos que los calores específicos son funciones de la temperatura. En tal caso, $i_{var} = pc_p/(\rho R) = c_pT$. Para $T = 4000$ K y $p = 10^4$ Pa en las tablas de los parámetros característicos de disociación del aire obtenemos $c_p = 2.3 \times 10^3$ m²/(s²·K). De acuerdo con este valor $i_{var} = 2,3 \cdot 10^3 \cdot 4000 = 9,2 \cdot 10^6$ m²/s².

1.45. Con el fin de simplificar las investigaciones aerodinámicas, en ciertas ocasiones, se emplea un modelo del aire que, de por sí, es un gas biatómico constituido por una mezcla de oxígeno y nitrógeno en correspondencia con su composición de masa. Semejante mezcla se considera como un gas perfecto si sus componentes no reaccionan entre sí. Pero a altas temperaturas hay que tener en cuenta que la mezcla de los indicados gases resulta ser reaccionante, ya que los gases biatómicos comienzan a disociar y los átomos que con esto se forman toman parte en la recombinación. Se supone que la disociación está en equilibrio. Esto significa que en la reacción química, que para el gas biatómico disociado se determina con la ecuación $A_2 \underset{r_R}{\overset{r_D}{\rightleftarrows}} A + A$, las velocidades del transcurso de la reacción de izquierda a derecha r_D y de derecha a izquierda r_R son iguales (correspondientemente a la velocidad de disociación y recombinación).

1.46. Para determinar el grado de la disociación en equilibrio del modelo biatómico de oxígeno hacemos uso de la dependencia

$$\alpha^2/(1-\alpha) = 1/(\bar{\rho} e^{1/\bar{T}}) \quad (1.27)$$

y la ecuación de estado

$$\bar{p} = p/p_d = \bar{\rho}\bar{T}\,(1+\alpha), \quad (1.28)$$

donde $\bar{\rho} = \rho/\rho_d$; $\bar{T} = T/T_d$; p_d, ρ_d, T_d son la presión, densidad y temperatura características de la disociación, respectivamente.

Eliminando de (1.27) y (1.28) la densidad $\bar{\rho}$, hallamos

$$\alpha = [1 + (\bar{p}/\bar{T})\, e^{1/\bar{T}}]^{-1/2}. \quad (1.29)$$

En correspondencia con los datos de las tablas de los parámetros característicos de disociación del aire

$$\bar{p} = 10^3/(2{,}3\cdot 10^{12}) = 0{,}435\cdot 10^{-9};\quad \bar{T} = 3000/59000 = 0{,}051.$$

Así, pues, $\alpha = 0{,}515$.

1.47. Para hallar la masa media molar del nitrógeno disociado, hagamos uso de la fórmula

$$\mu_m = \mu_{m0}\,(1 + \alpha), \tag{1.30}$$

donde μ_{m0} es la masa media molar del nitrógeno disociado; μ_m puede calcularse hallando el grado de disociación α con (1.29). En las tablas de los parámetros característicos de disociación hallamos $p_d = 4{,}1\cdot 10^{12}$ Pa, $T_d = 113\cdot 10^3$ K. De acuerdo con esto para $p = 10^3$ Pa y $T = 5000$ K obtenemos $\bar{p}_d = p/p_d = 0{,}244\cdot 10^{-9}$, $\bar{T}_d = T/T_d = 0{,}0442$. Por consiguiente, el grado de disociación $\alpha = 0{,}164$ y la correspondiente masa media molar, $\mu_m = 24{,}1$.

1.48. Para resolver el problema serán necesarios los valores de p_d, T_d y u_d, es decir, la presión, la temperatura y la energía características de disociación. Para el nitrógeno determinamos estos valores en las tablas de los parámetros característicos de disociación del aire: $p_d = 4{,}1\cdot 10^{12}$ Pa, $T_d = 113\cdot 10^3$ K, $u_d = 3{,}4 \times \times 10^7$ m²/s².

La temperatura del gas puede determinarse haciendo uso de la ecuación (1.29). Poniendo los valores $\alpha = 0{,}5$, $\bar{p}_d = 10^3/(4{,}1\cdot 10^{12}) = 0{,}244\cdot 10^{-9}$ y resolviendo dicha ecuación, hallamos $\bar{T} = 0{,}0494$. Por lo tanto, $T = \bar{T}T_d = 5582$ K.

La entalpía del gas biatómico se calcula con ayuda de la fórmula $\bar{i} = \alpha + \bar{T}(4 + \alpha)$, en la que $\bar{i} = i/u_d$. Después de la sustitución, hallamos $\bar{i} = 0{,}722$. Así, pues, $i = \bar{i}u_d = 2{,}45\cdot 10^7$ m²/s².

La magnitud adimensional correspondiente a la energía interna $\bar{u} = 3\bar{T} + \alpha$, donde $\bar{u} = u/u_d$. Como resultado de la sustitución, obtenemos $\bar{u} = 0{,}648$.

Por consiguiente, la energía interna $u = \bar{u}u_d = 2{,}2\cdot 10^7$ m²/s².

1.49. Para determinar el grado de disociación del aire caliente, cuyo modelo de trabajo es el conjunto de los componentes puros en disociación N_2 y O_2, aplicamos la fórmula (1.29). Hallemos las magnitudes relativas $\bar{p} = p/p_d$ y $\bar{T} = T/T_d$ que entran en la fórmula. Para ello, hay que conocer la presión p_d y la temperatura T_d características de la mezcla de aire. Partiendo de que en ella hay el 23,5 % de oxígeno y el 76,5 % de nitrógeno, obtenemos:

$$p_d = 0{,}765\,p_{dN_2} + 0{,}235\,p_{dO_2} = \\ = 0{,}765\cdot 4{,}1\cdot 10^{12} + 0{,}235\cdot 2{,}3\cdot 10^{12} = 3{,}7\cdot 10^{12}\ \text{Pa};$$

$$T_d = 0{,}765\,T_{dN_2} + 0{,}235\,T_{dO_2} = 0{,}765\cdot 113\cdot 10^3 + 0{,}235\cdot 59\cdot 10^3 = 10^5\ \text{K},$$

donde los correspondientes valores de p_d y T_d para el nitrógeno y oxígeno están determinados en las tablas de los parámetros característicos de disociación del aire. De acuerdo con las magnitudes obtenidas p_d y T_d para la mezcla de gases, la presión y la temperatura adimensionales

$$\bar{p} = 10^3/(3{,}7\cdot 10^{12}) = 0{,}27\cdot 10^{-9};\quad \bar{T} = 4500/10^5 = 4{,}5\cdot 10^{-2}.$$

Así, pues, [véase (1.29)] el grado de disociación $\alpha = 0{,}19$. La entalpía relativa de la mezcla $\bar{i} = \alpha + \bar{T}(4 + \alpha) = 0{,}38$.

Como la energía característica de disociación del modelo del aire $u_d = 0{,}765\ u_{dN_2} + 0{,}235\ u_{dO_2} = 2{,}954 \cdot 10^7$ m²/s², la entalpía de la mezcla de aire $i = \bar{i} u_d = 1{,}123 \cdot 10^7$ m²/s².

Determinamos el valor relativo de la energía interna: $\bar{u} = 3\bar{T} + \alpha = 0{,}325$. El correspondiente valor absoluto $u = \bar{u} u_d = 0{,}96 \cdot 10^7$ m²/s².

1.50. La masa media molar de la mezcla de aire se determina con la fórmula (1.30). Suponiendo que en ella $\mu_{m0} = 29$ obtenemos $\mu_m = 29/(1 + 0{,}19) = 24{,}4$.

Para la viscosidad dinámica empleamos la dependencia que toma en consideración la influencia de la disociación:

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^{1/2} \frac{1 + 111/T_\infty}{1 + 111/T} \left[\frac{1}{1 + 0{,}89\alpha/(1-\alpha)} + \frac{1{,}42}{1 + 1{,}26(1-\alpha)/\alpha}\right].$$

Poniendo aquí las magnitudes conocidas, hallamos $\mu/\mu_\infty = 5{,}737$. Haciendo el valor de $\mu_\infty = 1{,}79 \cdot 10^{-5}$ Pa·s, siendo $T_\infty = 288$ K, hallamos que $\mu = (\mu/\mu_\infty)\,\mu_\infty = 10{,}27 \cdot 10^{-5}$ Pa·s.

Capítulo 2

Cinemática del medio fluido

La cinemática del fluido es una de las partes fundamentales de aeromecánica. La resolución del problema fundamental de las investigaciones aerodinámicas, relacionado con el hallazgo en cada punto del flujo de los parámetros que determinan el movimiento de éste (presión, densidad, temperatura, etc.), puede ser reducida, bajo ciertas condiciones, a la determinación del campo de velocidades, es decir, a la resolución de un problema cinemático. Según la distribución conocida de las velocidades es posible calcular los restantes parámetros de la corriente, el efecto sumario de las fuerzas, así como determinar el intercambio de calor entre el cuerpo y el gas que lo rodea.

La cinemática del fluido se basa en la hipótesis de la continuidad de las variaciones de los parámetros cinemáticos del flujo. A veces, esta propiedad puede violarse, p.ej., en los puntos singulares, en las líneas o superficies de discontinuidad. Durante la investigación cinemática del medio fluido se emplea bien el método de Lagrange, según el cual se considera el movimiento de partículas del fluido individuales y para cada una de ellas se determina la trayectoria, es decir, las coordenadas de las partículas como función del tiempo, o bien el método de Euler, en el que se fija el punto del espacio y se investiga la variación de la velocidad en dicho punto en función del tiempo. En una serie de casos, resulta ser preferible el método de Lagrange, suficientemente complicado, pero más eficaz para su realización práctica (p.ej., en las transformaciones de la ecuación de continuidad, al estudiar la deformación de la partícula fluida, así como algunos tipos de su movimiento, etc.).

Al estudiar la cinemática de los fluidos es de gran importancia saber hallar las ecuaciones de las familias de líneas de flujo (corriente) y las trayectorias de las partículas del fluido, la posición de los puntos de bifurcación del flujo, etc., lo que es necesario para establecer las peculiaridades de la circulación alrededor de cuerpos de diversa configuración. Por esta razón, en el presente capítulo se presta gran atención al estudio de aquellas preguntas y problemas que permiten asimilar los métodos de investigación de las corrientes estacionarias y no estacionarias de un fluido, imaginarse su carácter cinemático, hallar las ecuaciones de las líneas de flujo y la trayectoria de las partículas del fluido para diversos tipos de movimiento.

El flujo de un fluido puede ser rotacional o bien irrotacional (potencial). La investigación del flujo irrotacional puede reducirse a la búsqueda de la llamada función potencial (o bien el potencial de velocidad), ya que conociendo ésta es posible calcular por completo el campo de velocidades de diferentes flujos. Para algunos tipos de flujo rotacional la determinación de sus características cinemáticas puede, asimismo, reducirse a la búsqueda de una función desconocida: *la función de la corriente*. Por consiguiente, el hallazgo del potencial de velocidad y la función de la corriente es un importantísimo problema de aerodinámica. Debido a esto, se ofrece una serie de preguntas y problemas ligados con la búsqueda de la función de potencial y la función de la corriente, así como la construcción del carácter cinemático del flujo y determinación del campo de velocidad para los casos cuando dichas funciones son conocidas.

Al investigar la circulación alrededor de un vehículo volante o de sus elementos, en particular los perfiles y las alas de envergadura finita, se utiliza ampliamente la teoría de torbellinos, por lo que aquí se reflejan las cuestiones relacionadas con la determinación de la circulación del fluido, los cálculos de las velo-

cidades inducidas por los vórtices, las investigaciones de los sistemas de vórtices, es decir, sus interacciones con el flujo de traslación, etc.

El estudio de la cinemática de un fluido está ligado estrechamente con la teoría de las funciones de la variable compleja. Con ello, la elección de cierta función analítica se puede relacionar con el carácter totalmente determinado del flujo. De acuerdo con esto, semejante función permite hallar el potencial de velocidad y la función de la corriente.

Haciendo uso de los principios de superposición de los flujos potenciales, la resolución del problema sobre la circulación de un fluido incompresible alrededor de un cuerpo y la construcción del correspondiente esquema cinemático del flujo puede reducirse a la búsqueda de una distribución tal de los puntos singulares (fuentes, dipolos, etc.) que proporcione el mismo cuadro del flujo en caso de retirar el cuerpo y cuando éste permanece en el flujo.

Por esto, una parte de las preguntas y problemas está dedicada a la determinación de los potenciales complejos de diversos flujos tanto relativamente sencillos, como complicados, a la determinación de la forma de los contornos expuestos a la circulación según los potenciales complejos prefijados, a la búsqueda de esquemas cinemáticos de los flujos y campos de velocidad.

El material que se aduce en el presente capítulo ayudará a estudiar los métodos fundamentales de investigación del movimiento del medio fluido, asimilar con mayor profundidad los conceptos y tesis del correspondiente curso teórico, adquirir hábitos y procedimientos para resolver muchos problemas prácticos de cinemática de los fluidos.

Problemas y preguntas

2.1. En aerodinámica hay dos métodos de investigación cinemática de un medio fluido: uno de ellos lleva el nombre de Lagrange, el segundo, de Euler. ¿Cuál es el fundamental contenido de estos métodos y en qué se diferencian? Estudien también el siguiente problema. Sea que el movimiento de un fluido está prefijado por las proyecciones de las velocidades en las variables de Euler (x, y, t); $V_x = mx + nt$, $V_y = -ky + lt$, $V_z = 0$, donde m, n, l, k son constantes. Pasen de las variables de Euler a las de Lagrange y determinen en las nuevas variables la ecuación de la trayectoria.

2.2. Hallen las ecuaciones de las líneas de corriente y las trayectorias de tres tipos de movimiento de un fluido, prefijados con las siguientes proyecciones de las velocidades:

1) $V_x = -ay, \quad V_y = ax, \quad V_z = 0;$
2) $V_x = x + t, \quad V_y = -y + t, \quad V_z = 0;$
3) $V_x = ax/R^3, \quad V_y = ay/R^3, \quad V_z = az/R^3;$

aquí a es una constante; $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2.3. Indiquen la fundamental diferencia entre el carácter del movimiento de una partícula fluida y el del movimiento de un sólido, así como de los elementos con los que se forma el movimiento de deformación de una partícula fluida. Destaquen los elementos que caracterizan el movimiento de traslación, rotativo y de deformación de una partícula fluida en forma de un paralelepípedo, en el que la velocidad del punto C se determina con la fórmula

$$V_{x_C} = V_x + \theta_x\, dx + \varepsilon_y\, dz + \varepsilon_z\, dy + \omega_y\, dz - \omega_z\, dy,$$

donde $\theta_x = \partial V_x/\partial x$; $\varepsilon_y = 0{,}5\,(\partial V_x/\partial z + \partial V_z/\partial x)$; $\varepsilon_z = 0{,}5\,(\partial V_y/\partial x + \partial V_x/\partial y)$; $\omega_y = 0{,}5\,(\partial V_x/\partial_z - \partial V_z/\partial x)$; $\omega_z = 0{,}5\,(\partial V_y/\partial x - \partial V_x/\partial y)$.

2.4. Determinen el valor de *la velocidad de la expansión cúbica relativa* del flujo de un gas para la velocidad del cual las proyecciones se han prefijado con las ecuaciones $V_x = cx/[\rho\,(x^2 + y^2)]$; $V_y = cy/[\rho\,(x^2 + y^2)]$; $V_z = 0$, donde ρ es la densidad del gas; c, cierta constante.

2.5. En un flujo plano bidimensional de un fluido se encuentra una partícula infinitamente pequeña en forma de un círculo con la ecuación $x_1^2 + y_1^2 = r^2$. Determinen la forma de dicha partícula y la variación de su área después de la deformación, a condición de que ésta es lineal y se produce a lo largo de los ejes Ox_1 y Oy_1, que son los ejes fundamentales de la deformación (fig. 2.1).

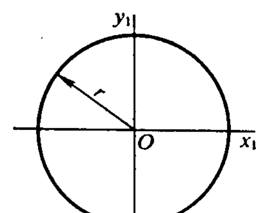


Fig. 2.1. Esquema de la deformación de una partícula de fluido

2.6. Determinen qué carácter —*rotacional* o *potencial* (irrotacional)— tendrá el flujo de un fluido por un tubo en el que la velocidad por su sección se distribuye de acuerdo con la ley exponencial $V_x = V_{\text{máx}}\,(y/r_0)^n$, donde $V_{\text{máx}}$ es la velocidad máxima en el centro del tubo; r_0, el radio del tubo; $y = r_0 - r$ (fig. 2.2). Para este caso hallen *el rotor de velocidad* rot $\vec{V}$.

2.7. En la fig. 2.3 se muestra un flujo plano bidimensional, es decir, un vórtice plano. En semejante flujo las líneas de corriente son circunferencias concéntricas, con la particularidad de que la velocidad V sólo depende del radio r en correspondencia con la fórmula $V = \text{const}/r$. Demuestren que tal movimiento es irrotacional

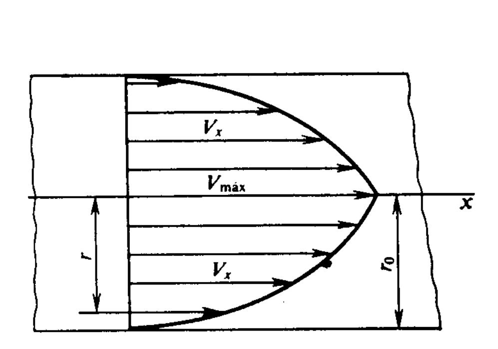


Fig. 2.2. Distribución de la velocidad por la sección de un tubo

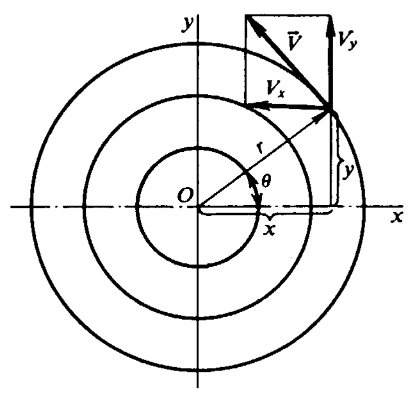


Fig. 2.3. Esquema de un flujo circulatorio

y escriban, en forma general, la condición de existencia de los movimientos irrotacionales de un fluido.

2.8. Escriban las igualdades que expresan las condiciones necesarias y suficientes para que las componentes de la velocidad V_x, V_y, V_z sean derivadas parciales para las coordenadas de cierta función φ, o sea, del potencial de velocidad. Muestren que el vector velocidad es igual al gradiente de dicha función, es decir, $\vec{V} = \text{grad}\ \varphi$.

2.9. Determinen las componentes de la velocidad angular de las partículas de un fluido en un flujo para el que las proyecciones de la velocidad sobre los ejes de coordenadas $V_x = axy$, $V_y = ayz$, $V_z = axz$, donde a es cierta constante.

2.10. Estudien la deducción de la ecuación de continuidad, basándose en el método de Lagrange.

2.11. Al deducir la ecuación de continuidad se puede partir del método de Euler. ¿Cuál es la condición de esta deducción según su sentido físico?

2.12. Haciendo uso del método de Euler, deduzcan la ecuación de continuidad para el caso del movimiento no estacionario de un gas tras una onda de choque cilíndrica que surge por delante de un pistón cilíndrico en expansión (fig. 2.4).

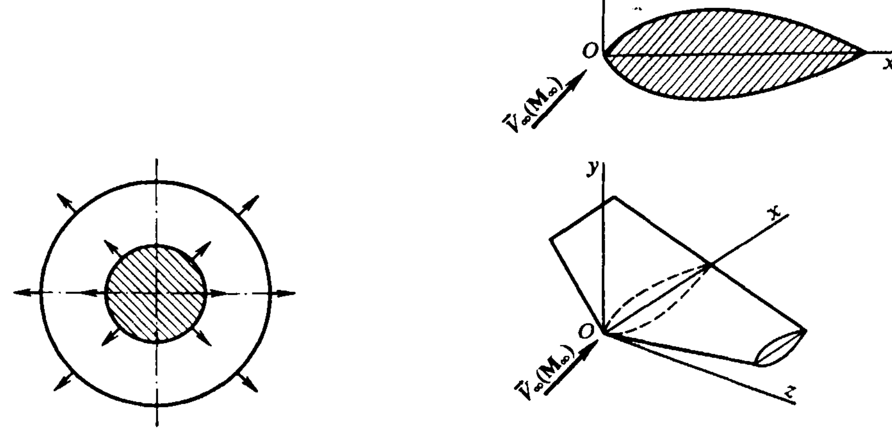


Fig. 2.4. Esquema de movimiento del gas tras una onda de choque cilíndrica

Fig. 2.5. Perfil y ala de envergadura finita

2.13. Empleando el método de Euler obtengan la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas y esféricas.

2.14. Muestren que $\partial\rho/\partial t + \partial(\rho V)/\partial r + \varepsilon\rho V/r = 0$ es la ecuación de continuidad para un flujo con ondas planas, cilíndricas y esféricas (la magnitud ε es igual a 0; 1; 2, respectivamente).

2.15. Deduzcan la ecuación de continuidad para los siguientes tipos de movimiento de un gas: 1) cada partícula describe una circunferencia perpendicular al eje permanente y con el centro en él; 2) la velocidad de las partículas, situadas en el espacio de modo simétrico con relación al centro inmóvil, están dirigidas bien desde el centro, bien hacia él y dependen sólo de la distancia hasta dicho centro; 3) las partículas del gas se mueven en un plano que pasa por el eje x.

2.16. El movimiento de un gas está caracterizado porque las trayectorias de las partículas se disponen, en un caso, sobre las superficies de cilindros coaxiales y, en el segundo caso, sobre la superficie de conos coaxiales al eje x y que tienen el vértice común. Escriban la ecuación de continuidad para cada uno de los casos indicados.

2.17. ¿Qué aspecto tienen las ecuaciones de continuidad en coordenadas cartesianas, empleadas para investigar la circulación uniforme de un fluido compresible alrededor del perfil de un ala, así como alrededor de un ala de envergadura finita (fig. 2.5)?

2.18. Transformen la ecuación de continuidad $\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\vec{V}) = 0$ a la forma $\partial\rho/\partial t + \vec{V}\operatorname{grad}\rho + \rho\operatorname{div}\vec{V} = 0$.

2.19. La función potencial φ determina por completo el carácter del movimiento de un fluido, ya que con ella es posible determinar la velocidad en cualquier punto del flujo. También podemos indicar la existencia de otra función que determina el movimiento, la función de la corriente ψ. Den la definición de ésta, indiquen los tipos de flujos para los que ella existe y escriban las relaciones que reflejan la ligazón entre las funciones φ y ψ.

2.20. Determinen la función de la corriente ψ si conocemos el potencial de velocidad de un fluido incompresible $\varphi = a(x^2 - y^2)$, donde a es cierta constante $(a > 0)$.

2.21. Haciendo uso de las nociones del análisis vectorial, demuestren la propiedad de ortogonalidad de las líneas de corriente y de las líneas equipotenciales (sobre el plano) o de las superficies equipotenciales (en un flujo espacial axisimétrico).

2.22. En un flujo plano incompresible las componentes de la velocidad están prefijadas con las ecuaciones $V_x = x - 4y$, $V_y = -y - 4x$. Muestren que estas componentes de la velocidad satisfacen la ecuación de continuidad, así como hallen la expresión para la función de la corriente. En el flujo potencial obtengan la expresión para el potencial de velocidad.

2.23. Determinen el consumo de un fluido que pasa por la curva (contorno) AB tomada al azar para el caso de un flujo bidimensional (plano o espacial axisimétrico), si conocemos los valores de la función de la corriente en los puntos A y B.

2.24. Calculen el consumo de un fluido por el segmento de una recta que une los puntos A $(x_1 = 0;\ y_1 = 0)$ y B $(x_2 = 1;\ y_2 = 1)$ para el caso de un movimiento determinado por el potencial de velocidad $\varphi = x(x^2 - 3y^2)$.

2.25. Demuestren el teorema de Helmholtz de que a lo largo de un tubo vorticial la intensidad es constante. ¿Qué importante propiedad de los tubos vorticiales se desprende del teorema de Helmholtz?

2.26. El movimiento está prefijado con las proyecciones de la velocidad

$$V_x = -ky, \quad V_y = kx, \quad V_z = [\varphi(z) - 2k^2(x^2 + y^2)]^{1/2},$$

donde k es una constante; $\varphi(z)$, cierta función de z. Determinen el rotor de la velocidad $\vec{\Omega} = \operatorname{rot} \vec{V}$ e indiquen su sentido.

2.27. Calculen la circulación de la velocidad por el contorno K que une los puntos con coordenadas A $(x,\ 0)$ y B $(0,\ y)$ en el flujo de un fluido prefijado con las proyecciones de la velocidad $V_x = -ax/(x^2 + y^2)$, $V_y = ay/(x^2 + y^2)$, $V_z = 0$, donde a es cierta constante.

2.28. Determinen la circulación de la velocidad Γ en un flujo de aire axisimétrico (densidad $\rho = \text{const} = 1{,}20\ \text{kg/m}^3$), si sabemos que la diferencia de presión entre dos superficies cilíndricas de la corriente (líneas de corriente en forma de circunferencias concéntricas en el plano) constituye 150 Pa. El radio de la superficie interna $r_1 = 1$ m, el radio de la superficie externa $r_2 = 1{,}2$ m.

2.29. Determinen la velocidad, inducida por un anillo de vórtice (línea de vórtice en forma de circunferencia), en un punto situado en el centro del anillo. El radio del anillo $r = 1$ m; la circulación (intensidad de la línea de vórtice) $\Gamma = 100\ \text{m}^2/\text{s}$.

2.30. En la fig. 2.6 se ofrece un sistema constituido por tres vórtices rectangulares entre los cuales hay una distancia $h = 50$ cm en los sentidos longitudinal y transversal. Hallen las velocidades que los vórtices se comunican entre sí y determinen el carácter del movimiento para el sistema vorticial dado en dos casos: 1) las intensidades de todos los vórtices son iguales en valor absoluto y signo ($\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \Gamma$); 2) la intensidad del vórtice inferior es igual en valor, pero de

signo opuesto respecto a los haces vorticiales superiores; el valor absoluto de la circulación $|\Gamma| = 100$ m²/s.

2.31. Determinen el potencial de velocidad y la función de la corriente, que induce un par de vórtices rectilíneos, para los dos siguientes casos (fig. 2.7): 1) las circulaciones de velocidad alrededor de cada uno de los vórtices son iguales en valor y signo ($\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$); 2) las indicadas circulaciones son iguales en valor, pero de signo contrario ($\Gamma_1 = -\Gamma_2$).

2.32. Hallen la trayectoria de un vórtice rectilíneo que se encuentra en el interior de un ángulo diedro, formado por paredes perpendiculares entre sí.

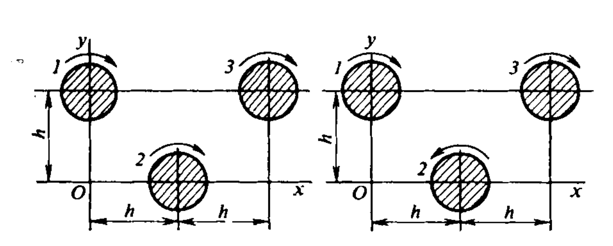


Fig. 2.6. Esquema para investigar el movimiento de tres vórtices

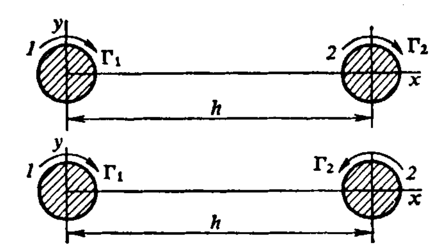


Fig. 2.7. Esquema de interacción de un par de vórtices rectilíneos

2.33. En un fluido, en puntos con coordenadas $y = \pm h$, se encuentra un par de vórtices cuyas intensidades son iguales en valor, pero de signo contrario ($\Gamma_1 = -\Gamma_2$). Con ello, el flujo incidente (en el infinito) tiene tal velocidad que los vórtices quedan inmóviles. Hallen las correspondientes líneas de la corriente.

2.34. Muestren que las condiciones necesarias y suficientes para la existencia del potencial complejo $W(z)$ para un flujo bidimensional plano e incompresible son las dependencias $\partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y$; $\partial\varphi/\partial y = -\partial\psi/\partial x$.

2.35. Obtengan la expresión para el potencial complejo del flujo de un fluido incompresible creado por un dipolo plano puntual.

2.36. Determinen el potencial complejo de un flujo formado como resultado de la superposición de un flujo de traslación plano y paralelo a velocidad V sobre el flujo de un dipolo con momento M. Hallen la ecuación de la familia de líneas de corriente del flujo complicado obtenido.

2.37. Examinen las características geométricas de un flujo cuyo potencial complejo está prefijado en forma de la ecuación $W = V(z + r_0^2/z)$.

2.38. El movimientó se determina con el potencial complejo

$$W = (1 + i)\ln(z^2 - 1) + (2 - 3i)\ln(z^2 - 4) + 1/z. \tag{2.1}$$

Hallen el caudal del líquido que pasa por una circunferencia descrita con la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ y la circulación de la velocidad Γ por esta circunferencia.

2.39. El potencial complejo está prefijado con la función

$$W(z) = V(z + r_0^2/z) - [\Gamma/(2\pi i)]\ln z. \tag{2.2}$$

Esta función, que caracteriza un flujo complicado, ha sido obtenida sumando los potenciales complejos de tres flujos más sencillos. Separen de (2.2) cada uno de esos potenciales complejos y consideren el correspondiente carácter del flujo.

2.40. Según el potencial complejo prefijado en (2.2) determinen el potencial de velocidad y la función de la corriente del flujo resultante; deduzcan la ecuación

4—01650

de un contorno expuesto a circulación y hallen la distribución de velocidades en el flujo y en dicho contorno.

2.41. ¿Cómo varían la velocidad y la presión en el flujo de una fuente (o sumidero) plano puntual al alejarse de ella?

Solución de los problemas y respuestas a las preguntas

2.1. En *el método de Euler* se estudia el campo de velocidades en un espacio lleno de un fluido en movimiento. De acuerdo con este método se considera cierto punto con coordenadas x, y, z y se estudia la variación de las velocidades en el indicado punto en función del tiempo, así como debido al paso a otros puntos del espacio. Por consiguiente, la velocidad se representa como función de las coordenadas y el tiempo:

$$V_x = f_1(x, y, z, t); \quad V_y = f_2(x, y, z, t); \quad V_z = f_3(x, y, z, t). \qquad (2.3)$$

Sustituyendo en (2.3) $V_x = dx/dt$, $V_y = dy/dt$, $V_z = dz/dt$ obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales que, al integrarlo, obtenemos la ecuación de la trayectoria en forma paramétrica:

$$x = \varphi_1(a, b, c, t); \quad y = \varphi_2(a, b, c, t); \quad z = \varphi_3(a, b, c, t), \qquad (2.4)$$

donde a, b, c son constantes arbitrarias que se determinan de las condiciones iniciales.

Eliminando en (2.4) el parámetro t, es posible obtener la ecuación de la trayectoria en forma habitual.

En *el método de Lagrange* se investiga el movimiento de partículas individuales del fluido a lo largo de sus trayectorias. Como hay una enorme cantidad de partículas, para prefijar las trayectorias es necesario de determinado modo caracterizar aquella partícula a la que se refiere la trayectoria.

Como característica de la partícula se eligen las coordenadas a, b, c en momento inicial de tiempo $t = t_0$. Así, pues, las coordenadas de la partícula del fluido x, y, z dependen de las magnitudes a, b, c y del tiempo t [véase (2.4)].

Como resultado de la derivación de (2.4) hallamos las componentes de la velocidad:

$$V_x = \partial\varphi_1/\partial t; \quad V_y = \partial\varphi_2/\partial t; \quad V_z = \partial\varphi_3/\partial t. \qquad (2.5)$$

El movimiento del fluido, prefijado por las condiciones del problema, es plano ($V_z = 0$) y uniforme, ya que los parámetros del flujo no sólo son funciones de las coordenadas del punto, sino también del tiempo (el tiempo t entra en las expresiones para V_x y V_y en forma explícita).

Para pasar de las variables de Euler a las de Lagrange y determinar las ecuaciones de la trayectoria hay que integrar las ecuaciones

$$dx/dt = V_x = mx + nt; \qquad (2.6)$$

$$dy/dt = V_y = -ky + lt. \qquad (2.7)$$

Durante la integración de (2.6) adoptamos que

$$x = u(t)\,v(t). \qquad (2.8)$$

Entonces

$$dx/dt = v\,(du/dt) + u\,(dv/dt). \qquad (2.9)$$

Poniendo (2.9) en (2.6), hallamos

$$v\,[(du/dt) - mu] + u\,(dv/dt) - nt = 0. \qquad (2.10)$$

Haciendo uso de la elección arbitraria de una de las funciones $u\,(t)$ o bien $v\,(t)$, elegimos tal función $u\,(t)$ que

$$du/dt - mu = 0. \qquad (2.11)$$

De acuerdo con esto

$$u\,(dv/dt) - nt = 0. \qquad (2.12)$$

La solución de la ecuación (2.11) tiene la forma

$$u = C_1 e^{mt}. \qquad (2.13)$$

Poniendo (2.13) en (2.12), obtenemos

$$dv/dt = (n/C_1)\,e^{-mt}t. \qquad (2.14)$$

Integrando (2.14), hallamos

$$v = [n/C_1 m^2)]\,(-mte^{-mt} - e^{-mt}) + C_2. \qquad (2.15)$$

Poniendo (2.13) y (2.15) en (2.8), tendremos

$$x = C_3 e^{mt} - nt/m - n/m^2. \qquad (2.16)$$

De forma análoga integramos (2.7):

$$y = C_4 e^{-kt} + lt/k - l/k^2. \qquad (2.17)$$

Las constantes C_3 y C_4 se hallan de las condiciones iniciales, haciendo $t = 0$, es decir,

$$C_3 = x + n/m^2; \qquad (2.18)$$

$$C_4 = y + l/k^2; \qquad (2.19)$$

De acuerdo con el método de Lagrange las coordenadas de una partícula del fluido, cuyo movimiento se estudia a lo largo de la trayectoria, deben ser conocidas para $t = 0$. Elijamos las indicadas coordenas igual a $x = -n/m^2$; $y = -l/k^2$. Entonces, en correspondencia con (2.18) y (2.19) $C_3 = C_4 = 0$. De este modo, para la trayectoria buscada

$$x = -nt/m - n/m^2; \qquad (2.20)$$

$$y = lt/k - l/k^2; \qquad (2.21)$$

de aquí, eliminando el tiempo t, hallamos la ecuación de la trayectoria

$$y + [lm/(kn)]\,x = -(l/k)\,(1/m + 1/k), \qquad (2.22)$$

que, como vemos, es una *línea recta*.

2.2. El movimiento del líquido está prefijado por las proyecciones de las velocidades

$$V_x = -ay, \quad V_y = ax; \quad V_z = 0. \qquad (2.23)$$

Determinemos las líneas de corriente que en el caso general son curvas que se caracterizan porque en el momento dado de tiempo t las tangentes a ellas, en cual-

quier punto, coinciden en sentido con el vector velocidad. Las ecuaciones diferenciales de las líneas de corriente tienen la forma

$$dx/V_x = dy/V_y = dz/V_z. \tag{2.24}$$

La trayectoria es una curva por la que se desplaza la partícula de líquido en el espacio. La tangente a esta trayectoria coincide con el vector velocidad, pero, a diferencia de la línea de corriente, cuya construcción se realiza en un momento fijado de tiempo, la noción de trayectoria está ligada con cierto intervalo de tiempo durante el cual la partícula pasa un determinado recorrido. De esto sigue que la línea de corriente y la trayectoria, que es la huella del movimiento de una misma partícula, en el flujo estacionario coinciden.

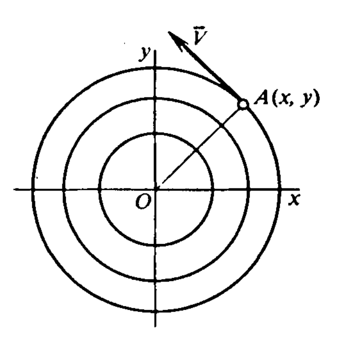


Fig. 2.8. Líneas de corriente en el flujo de un fluido

El movimiento que estudiamos es plano (ya que $V_z = 0$) y estacionario (ya que las componentes de la velocidad V_x y V_y no son función del tiempo).

En el caso de un movimiento plano la ecuación diferencial de las líneas de corriente (2.24), después de poner en ella los correspondientes valores de V_x y V_y, puede representarse en la forma $xdx + ydy = 0$. Después de integrarla, hallamos la ecuación de las líneas de corriente

$$x^2 + y^2 = c, \tag{2.25}$$

que son una familia de circunferencias concéntricas con el centro en el origen de coordenadas (fig. 2.8). Como el flujo que consideramos es estacionario, las trayectorias coinciden con las líneas de corriente.

Con el fin de determinar el sentido de movimiento del fluido hay que hallar los cosenos de los ángulos entre los vectores velocidad y los ejes de coordenadas:

$$\cos(\vec{V},\ x) = V_x/V = -y/\sqrt{x^2+y^2};$$
$$\cos(\vec{V},\ y) = V_y/V = +x/\sqrt{x^2+y^2}.$$

Como para el punto con valores positivos de las coordenadas $\cos(\vec{V},\ y) > 0$ y $\cos(\vec{V},\ x) < 0$, la velocidad forma con el eje x un ángulo mayor que $\pi/2$ y, por lo tanto, el movimiento transcurre en sentido antihorario.

El movimiento del fluido está prefijado por las proyecciones de las velocidades

$$V_x = x + t, \quad V_y = -y + t, \quad V_z = 0. \tag{2.26}$$

Este movimiento del fluido es plano ($V_z = 0$) e inuniforme (no estacionario), ya que las componentes de la velocidad V_x, V_y dependen de las coordenadas del punto y del tiempo. Por lo tanto, en el caso dado las trayectorias y las líneas de corriente no coinciden.

La ecuación diferencial de las líneas de corriente (2.24) tienen la forma $dx/(x + t) = dy/(-y + t)$. Integrándola y considerando, en este caso, el tiempo t fijado, obtenemos

$$(x + t)(t - y) = c, \tag{2.27}$$

es decir, en cada momento de tiempo las líneas de corriente son una familia de hipérbolas.

En la fig. 2.9 está construida una línea de corriente que, en el momento de tiempo $t = 0$, pasa por el punto A $(-1, -1)$. La correspondiente ecuación de la hipérbola

$$xy = 1. \tag{2.28}$$

Para determinar la trayectoria hay que integrar las ecuaciones

$$dx/dt = x + t; \quad dy/dt = -y + t. \tag{2.29}$$

Durante la integración de (2.29) hagamos $x = uv$, como en el problema 2.1. Después de derivar, de realizar las correspondientes sustituciones y de integrar (2.9), (2.12), tendremos

$$u = c_1 e^t; \quad v = (1/c_1)(-te^{-t} - e^{-t}) + c_2. \tag{2.30}$$

Poniendo los valores de u y v obtenemos para x la expresión

$$x = c_3 e^t - t - 1. \tag{2.31}$$

De modo análogo podemos hallar la dependencia

$$y = c_4 e^{-t} + t - 1. \tag{2.32}$$

Para determinar la trayectoria que describe la partícula del fluido, que en el momento de tiempo $t = 0$ se encuentra en el punto A $(-1, -1)$, hallemos los

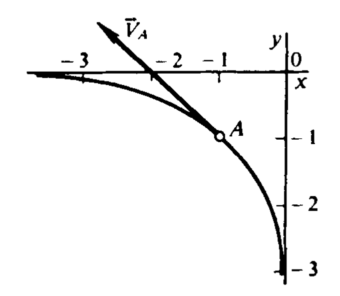


Fig. 2.9. Líneas de corriente en el momento de tiempo $t = 0$

Fig. 2.10. Esquema de una fuente espacial

valores de las constantes c_3, c_4. Poniendo en (2.31) y (2.32) $t = 0$, $x = -1$, $y = -1$ obtenemos $c_3 = c_4 = 0$. Por consiguiente, después de eliminar t de (2.31) y (2.32), para la trayectoria buscada obtenemos la ecuación

$$x + y = -2. \tag{2.33}$$

Comparando (2.28) y (2.33) es fácil notar que con el movimiento inuniforme las líneas de corriente y la trayectoria no coinciden.

El movimiento del fluido está prefijado por las proyecciones de las velocidades

$$V_x = ax/R^3, \quad V_y = ay/R^3, \quad V_z = az/R^3. \tag{2.34}$$

El flujo que estudiamos es espacial y uniforme (estacionario) (los parámetros no dependen del tiempo t). Por lo tanto, la trayectoria y las líneas de corriente coinciden. En semejante caso, la ecuación diferencial de las líneas de corriente (2.24) toma la forma

$$dx/x = dy/y = dz/z.$$

Integrándola, hallamos

$$x = Cy, \quad x = C_1 z, \quad y = C_2 z. \qquad (2.35)$$

El sistema de ecuaciones (2.35) es de por sí las ecuaciones de rectas en el espacio que pasan por el origen de coordenadas. Los valores de las constantes C, C_1, C_2 se determinan por las coordenadas del punto por el que pasa la línea de corriente (la trayectoria).

Examinemos la línea de corriente que pasa por el punto A (4; 3; 2) (fig. 2.10). De acuerdo con estas condiciones $C = 4/3$; $C_1 = 2$; $C_2 = 3/2$. La ecuación de esta línea de corriente puede representarse en forma del sistema

$$3x - 4y = 0; \quad x - 2z = 0.$$

El flujo del fluido, cuyas líneas de corriente son rayos que salen del origen de coordenadas, recibe el nombre de *fuente* ($a > 0$). El flujo con líneas de corriente en forma de rectas que convergen en el origen de coordenadas lleva el nombre de *sumidero* ($a < 0$).

2.3. A diferencia de un sólido, cuyo movimiento se determina por el desplazamiento de traslación junto con el centro de masas y la rotación alrededor del eje instantáneo, que pasa por el indicado centro, el de una partícula fluida se caracteriza, además, por la presencia de la componente de deformación de dicho movimiento que varía la forma de la partícula.

El movimiento de deformación de una partícula fluida se compone de la deformación lineal, caracterizada por el coeficiente de deformación lineal

$$\theta_x = \partial V_x/\partial x; \quad \theta_y = \partial V_y/\partial y; \quad \theta_z = \partial V_z/dz$$

y de la deformación angular determinada por los valores (semivelocidades) del achaflanado de los ángulos

$$\varepsilon_x = 0{,}5\,(\partial V_z/\partial y + \partial V_y/\partial z);$$
$$\varepsilon_y = 0{,}5\,(\partial V_x/\partial z + \partial V_z/\partial x);$$
$$\varepsilon_z = 0{,}5\,(\partial V_y/\partial x + \partial V_x/\partial y).$$

El movimiento de traslación de la partícula fluida se caracteriza por la velocidad V_x, el de rotación, con las variables $\omega_y dz$ y $\omega_z dy$, el de deformación, por los valores de $\theta_x dx$, $\varepsilon_y dz$, $\varepsilon_z dy$.

2.4. La velocidad de la expansión cúbica relativa de una partícula de un fluido de volumen elemental $\tau = dx\,dy\,dz$ se determina por la divergencia de la velocidad

$$\operatorname{div} \vec{V} = \partial V_x/\partial x + \partial V_y/\partial y + \partial V_z/\partial z = \theta_x + \theta_y + \theta_z. \qquad (2.36)$$

El flujo que investigamos es plano ($V_z = 0$) y uniforme (estacionario). Por consiguiente

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{c}{\rho}\,\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{cx}{x^2+y^2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{c}{\rho}\,\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} +$$
$$+ \frac{cy}{x^2+y^2}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{c}{x^2+y^2}\left[x\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\right) + y\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right].$$

Para un líquido incompresible ($\rho = \text{const}$) la variable $\operatorname{div} \vec{V} = 0$.

2.5. Designemos con x_2, y_2 las coordenadas del punto A de la partícula después del intervalo infinitesimal de tiempo dt. Como Ox_1 y Oy_1 son los ejes fundamentales,

a lo largo de ellos sólo tienen lugar deformaciones lineales. Por lo tanto, $x_2 = x_1 + (\partial V_x/\partial x) x_1 dt$; $y_2 = y_1 + (\partial V_y/\partial y) y_1 dt$, de donde $x_1 = x_2/[1 + (\partial V_x/\partial x) dt]$; $y_1 = y_2/[1 + (\partial V_y/\partial y) dt]$.

Poniendo los valores de x_1, y_1, en la ecuación de la partícula infinitesimal prefijada en forma de círculo, hallamos

$$x_2^2/\{r^2 [1 + (\partial V_x/\partial x) dt]^2\} + y_2^2/\{r^2[1 + (\partial V_y/\partial_y)dt]^2\} = 1. \quad (2.37)$$

La (2.37) es la ecuación de una elipse con semiejes $r[1 + (\partial V_x/\partial x)\ dt]$ y $r[1 + (\partial V_y/\partial y)\ dt]$.

De este modo, cuando la partícula infinitamente pequeña en forma de círculo se somete a la deformación lineal, se transforma en una elipse infinitesimal, cuyos ejes están dirigidos por los ejes fundamentales de la deformación (fig. 2.11).

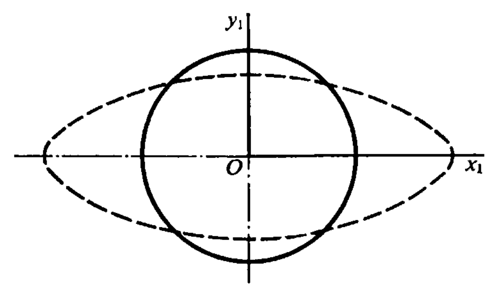


Fig. 2.11. Esquema de la deformación de la partícula de un fluido

Hallemos la variación del área de la partícula infinitamente pequeña que consideramos. Para ello, del área de la elipse restamos la del círculo:

$$\Delta S = \pi r [1 + (\partial V_x/\partial x)\ dt]\ r\ [1 + (\partial V_y/\partial y)\ dt] - \pi r^2. \quad (2.38)$$

Efectuando transformaciones elementales y despreciando el término del orden superior de pequeñez, obtenemos

$$\Delta S = \pi r^2 (\partial V_x/\partial x + \partial V_y/\partial y)\ dt. \quad (2.39)$$

2.6. La velocidad angular de la partícula fluida se caracteriza por el vector rot $\vec{V}$ (o vórtice)

$$\text{rot}\ \vec{V} = 2\vec{\omega}, \quad (2.40)$$

donde $\vec{\omega} = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k$ son las componentes del vector de velocidad angular:

$$\omega_x = 0{,}5\ (\partial V_z/\partial y - \partial V_y/\partial z);\quad \omega_y = 0{,}5\ (\partial V_x/\partial z - \partial V_z/\partial x);$$
$$\omega_z = 0{,}5\ (\partial V_y/\partial x - \partial V_x/\partial y). \quad (2.41)$$

Los flujos del fluido para los que rot $\vec{V} \neq 0$, o sea, tienen por lo menos una de las componentes ω_x, ω_y, ω_z distinta de cero, llevan el nombre de *rotacionales* o *vorticiales*. Los flujos para los que rot $\vec{V} = 0$ (es decir, $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$) son llamados *irrotacionales* o bien *potenciales*.

Así pues, para establecer el carácter del flujo del fluido en un tubo hay que determinar las componentes del vórtice ω_x, ω_y, ω_z. En el flujo que examinamos $V_y = V_z = 0$; por lo tanto, este flujo es paralelo a la pared del tubo y en él $\omega_x = \omega_y = 0$. La tercera componente de la velocidad angular

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left[V_{\text{máx}}\left(\frac{y}{r_0}\right)^n\right] = -\frac{n}{2}\frac{V_{\text{máx}}}{r_0}\left(\frac{y}{r_0}\right)^{n-1}.$$

Esta velocidad no es nula ($\omega_z \neq 0$). Por consiguiente, el flujo del fluido es rotacional. En tal caso, el rotor de la velocidad rot $\vec{V} = 2\omega_z k = -n(V_{\text{máx}}/r_0) \times (y/r_0)^{n-1} k$.

2.7. Para revelar el carácter del flujo de un fluido (potencial o rotacional) hay que hallar el valor de rot $\vec{V}$ (o de sus componentes ω_x, ω_y, ω_z). Como el flujo que estudiamos es plano, $\omega_x = \omega_y = 0$ y para el análisis del flujo es suficiente determinar $\omega_z = 0{,}5 \ (\partial V_y/\partial x - \partial V_x/\partial y)$.

Para el flujo prefijado las componentes de las velocidades

$$V_x = V \cos(\vec{V},\ x) = (c/\sqrt{x^2+y^2}) \cos(\vec{V},\ x) = -cy/(x^2+y^2); \qquad (2.42)$$

$$V_y = V \cos(\vec{V},\ y) = (c/\sqrt{x^2+y^2}) \cos(\vec{V},\ y) = cx/(x^2+y^2). \qquad (2.43)$$

Por lo tanto,

$$\omega_z = (c/2)\,[(y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)^2 + (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2] = 0.$$

Así, pues, el flujo que estudiamos es potencial.

En el caso general, para los flujos irrotacionales (potenciales), debido a que rot $\vec{V} = 0$ (o bien $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$), deben cumplirse las siguientes relaciones:

$$\partial V_x/\partial y = \partial V_y/\partial x, \quad \partial V_x/\partial z = \partial V_z/\partial x, \quad \partial V_y/\partial z = \partial V_z/\partial y. \qquad (2.44)$$

Para las condiciones prefijadas, como se desprende de (2.42) y (2.43), las relaciones (2.44) se cumplen, es decir, $\partial V_x/\partial y = \partial V_y/\partial x$.

2.8. Las igualdades (2.44) son las condiciones necesarias y suficientes para que el trinomio diferencial $V_x\,dx + V_y\,dy + V_z\,dz$ sea la diferencial completa de cierta función φ, o sea,

$$d\varphi = V_x\,dx + V_y\,\partial y + V_z\,dz. \qquad (2.45)$$

Además,

$$d\varphi = (\partial\varphi/\partial x)\,dx + (\partial\varphi/\partial y)\,dy + (\partial\varphi/\partial z)\,dz. \qquad (2.46)$$

Comparando (2.45) y (2.46), hallamos

$$V_x = \partial\varphi/\partial x, \quad V_y = \partial\varphi/\partial y, \quad V_z = \partial\varphi/\partial z.$$

Como vemos, la velocidad en cierta dirección se determina por la rapidez de variación del potencial φ en esa misma dirección. Si consideramos la dirección s, la rapidez de variación de este potencial es igual a la derivada parcial $\partial\varphi/\partial s$. Esta variable puede considerarse como la proyección sobre la dirección s de cierto vector denominado *gradiente de la función* φ *y* que coincide con la dirección del más rápido crecimiento de esa función. Es evidente que el indicado vector es igual al vector velocidad, es decir, $\vec{V} = \text{grad}\ \varphi$.

2.9. Las componentes de la velocidad angular de las partículas del fluido en el flujo son las siguientes:

$$\omega_x = 0{,}5\ (\partial V_z/\partial y - \partial V_y/\partial z) = -\ (a/2)\ y;$$
$$\omega_y = 0{,}5\ (\partial V_x/\partial z - \partial V_z/\partial x) = -\ (a/2)\ z;$$
$$\omega_z = 0{,}5\ (\partial V_y/\partial x - \partial V_x/\partial y) = -\ (a/2)\ x.$$

2.10. Para deducir la ecuación de continuidad, basándonos en el método de Lagrange, haremos uso del volumen móvil de un fluido que varía con el tiempo, pero que consta de *unas mismas partículas*. De acuerdo con la ley de la conservación de la masa $\rho_m\tau = \text{const}$, donde ρ_m es la densidad media en los márgenes del volumen τ. Por lo tanto, $d\ (\rho_m\tau)/dt = 0$ o bien, tomando en consideración que la densidad y el volumen son variables, $(1/\rho_m)\ d\rho_m/dt + (1/\tau)\ d\tau/dt = 0$.

Esta ecuación se refiere a un pequeño volumen arbitrario. Para obtener la relación que caracterice el movimiento del fluido en cada punto, en la última ecuación hay que pasar al límite cuando $\tau \to 0$, o sea, $(1/\rho)\, d\rho/dt + \operatorname{div} \vec{V} = 0$.

2.11. La ecuación de continuidad puede deducirse estudiando el paso de *diversas partículas* de un fluido por cierto volumen fijado en correspondencia con el método de Euler. De acuerdo con la suposición de la continuidad del medio, la diferencia entre el caudal del fluido que sale del volumen destacado y la cantidad del fluido que se alimenta a dicho volumen, durante cierto intervalo de tiempo, es igual a la variación de la cantidad del fluido en el volumen en ese mismo lapso.

2.12. Destaquemos en un flujo de gas tras una onda de choque cilíndrica (fig. 2.12) el volumen elemental *ABCD* de anchura unidad. La cantidad de gas que

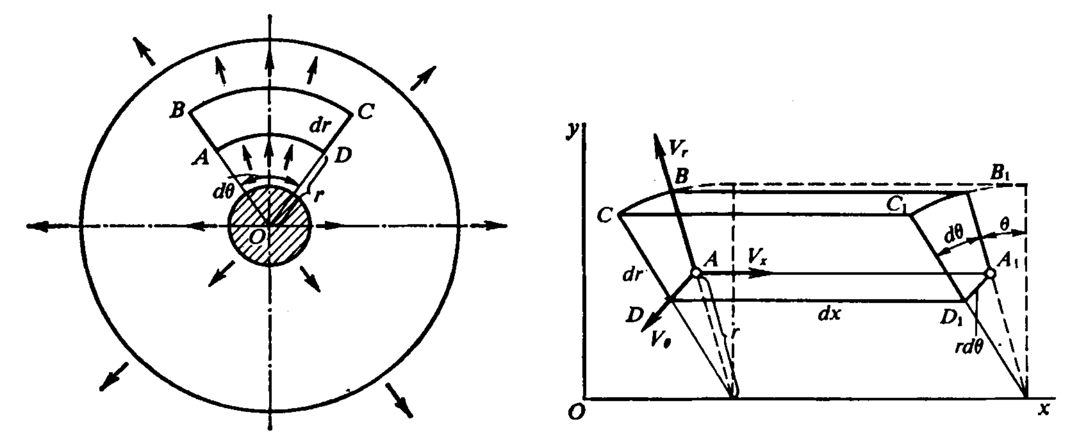


Fig. 2.12. Movimiento del gas tras la onda de choque

Fig. 2.13. Esquema para deducir la ecuación de continuidad

entra en el transcurso del tiempo dt en el volumen destacado a través de la superficie cilíndrica de anchura unitaria *AD* es igual a $\rho V_r r d\theta dt$.

La cantidad de gas que sale en ese mismo lapso del volumen destacado por la superficie cilíndrica de anchura *BC* es igual a $\rho V_r r d\theta dt + (\partial/\partial r)\,(\rho V_r r\, d\theta)\, dr\, dt$.

Así, pues, en el volumen separado, durante el tiempo dt, se produce una variación de la masa de gas

$$\rho V_r\, r\, d\theta\, dt + (\partial/\partial r)\,(\rho V_r r d\theta)\, dr\, dt - $$
$$- \rho V_r r d\theta\, dt = (\partial/\partial r)\,(\rho V_r r d\theta)\, dr\, dt. \tag{2.47}$$

De acuerdo con la ley de la conservación de la masa, la variación de la cantidad de gas en el volumen conduce al cambio de su densidad, caracterizada por la derivada parcial en el tiempo $\partial\rho/\partial t$. De acuerdo con esto, la variación de la masa del gas durante el tiempo dt en el volumen destacado

$$-\, (\partial\rho/\partial t)\, dt\, r d\, \theta\, dr. \tag{2.48}$$

Igualando (2.47) y (2.48), después de las transformaciones, obtenemos la ecuación de continuidad

$$r \partial\rho/\partial t + (\partial/\partial r)\,(\rho r V_r) = 0. \tag{2.49}$$

2.13. Coordenadas cilíndricas. Separemos en el entorno del punto *A* (con coordenadas x, r, θ; fig. 2.13), tomado al azar, un volumen infinitesimal fijado e

igual a $r\,d\theta dr\,dx$. De acuerdo con la ley de la conservación de la masa, la diferencia entre la cantidad de gas que sale de este volumen durante cierto intervalo de tiempo y la cantidad de gas, que entra en dicho volumen, es igual a la variación de la masa dentro del volumen separado.

La cantidad de gas que entra en el volumen elemental por la arista $ABCD$ por unidad de tiempo es igual a $\rho V_x r d\theta dr$, mientras que la masa de gas que sale por la arista opuesta $A_1B_1C_1D_1$:

$$\rho V_x r dr d\theta + (\partial/\partial x)(\rho V_x r dr d\theta)\,dx = [\rho V_x r + (\partial/\partial x)(\rho V_x r)\,dx]\,dr d\theta.$$

La diferencia entre estas dos variables es igual a

$$(\partial/\partial x)(\rho V_x r)\,dx\,dr\,d\theta. \qquad (2.50)$$

La cantidad de gas que pasa en dirección del eje r por las aristas AA_1D_1D y BB_1C_1C es igual a $\rho V_r dx r d\theta$ y $[\rho V_r r + (\partial/\partial r)(\rho V_r r)\,dr]\,dx d\,\theta$, respectivamente, mientras que la diferencia entre ellas es igual a

$$(\partial/\partial r)(\rho V_r r)\,dr\,dx\,d\theta. \qquad (2.51)$$

De modo análogo, para las aristas ABB_1A_1 y DCC_1D_1 las masas del gas que fluye son iguales a $\rho V_\theta\,dx\,dr$ y $[\rho V_\theta + (\partial/\partial\theta)(\rho V_\theta)\,d\theta]\,dx\,dr$, en tanto que la diferencia entre ellas

$$(\partial/\partial\theta)(\rho V_\theta)\,d\theta\,dx\,dr. \qquad (2.52)$$

Fig. 2.14. Esquema del flujo de un fluido en coordenadas esféricas

La variación de la masa en el volumen separado puede obtenerse sumando (2.50)—(2.52):

$$[(\partial/\partial x)(\rho V_x r) + (\partial/\partial r)(\rho V_r r) + (\partial/\partial\theta)(\rho V_\theta)]\,dx\,dr\,d\theta. \qquad (2.53)$$

Pero la variación por unidad de tiempo de la masa del gas contenido en dicho volumen es igual a

$$-(\partial\rho/\partial t)\,r\,dx\,dr\,d\theta. \qquad (2.54)$$

Igualando (2.53) y (2.54) obtenemos la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas

$$r\partial\rho/\partial t + (\partial/\partial x)(\rho V_x r) + (\partial/\partial r)(V_r\rho r) + (\partial/\partial\theta)(\rho V_\theta) = 0. \qquad (2.55)$$

Coordenadas esféricas. En el entorno del punto arbitrario A (con coordenadas r, θ, γ; fig. 2.14) separemos el volumen elemental r^2 sen $\theta\,dr\,d\theta\,d\gamma$ y calculemos la diferencia entre la cantidad de gas que fluye por las superficies opuestas de este volumen por unidad de tiempo:

por las aristas $ABCD$ y $A_1B_1C_1D_1$

$$(\partial/\partial r)(\rho V_r r^2)\,\text{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\,d\gamma; \qquad (2.56)$$

por las aristas AA_1D_1D y BB_1C_1C

$$r\,(\partial/\partial\theta)(\rho V_\theta\,\text{sen}\,\theta)\,dr\,d\theta\,d\gamma; \qquad (2.57)$$

por las aristas ABB_1A_1 y DCC_1D_1

$$r\,(\partial/\partial\gamma)(\rho V_\gamma)\,dr\,d\theta\,d\gamma. \qquad (2.58)$$

La variación de la masa del gas dentro del volumen separado se obtiene sumando (2.56) . . . (2.58):

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}(\rho V_r r^2)\operatorname{sen}\theta + r\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho V_\theta \operatorname{sen}\theta) + r\frac{\partial}{\partial\gamma}(\rho V_\gamma)\right] dr\, d\theta\, d\gamma. \qquad (2.59)$$

Además, la variación de la masa del gas en el volumen elemental por unidad de tiempo es igual a

$$-(\partial\rho/\partial t)\, r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\gamma. \qquad (2.60)$$

Igualando (2.59) y (2.60) obtenemos la ecuación de continuidad en coordenadas esféricas

$$r^2 \operatorname{sen}\theta \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial r}(\rho V_r r^2) + r\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho V_\theta \operatorname{sen}\theta) + r\frac{\partial}{\partial\gamma}(\rho V_\gamma) = 0. \qquad (2.61)$$

2.14. En la fig. 2.15 se muestran los esquemas de movimiento de un gas con formación de una onda plana, cilíndrica o bien esférica. Estudiemos cómo fluye el

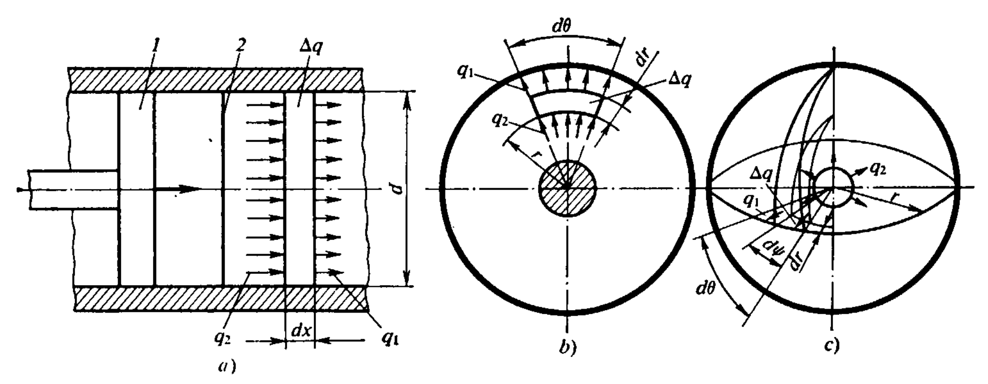


Fig. 2.15. Movimiento de un gas con ondas plana (*a*), cilíndrica (*b*) y esférica (*c*): *1*, pistón; *2*, onda de choque

gas por ciertos volúmenes fijados elegidos en cada uno de los flujos. De acuerdo con la fig. 2.15, *a*, la cantidad de gas que ingresa en semejante volumen en el lapso dt es $q_2 = \rho V(\pi d^2/4)\, dt$ y el caudal del gas que se gasta

$$q_1 = q_2 + (\partial q_2/\partial x)\, dx = \{\rho V(\pi d^2/4) + (\partial/\partial x)[\rho V(\pi d^2/4)]\, dx\}\, dt.$$

La diferencia entre el gasto y el ingreso es igual a la cantidad de gas en el volumen, es decir,

$$\Delta q = q_1 - q_2 = \{\partial[\rho(\pi d^2/4)\, dx]/\partial t\}\, dt.$$

De este modo, la ecuación de continuidad para el flujo de un gas con onda plana tiene la forma $\partial\rho/\partial t + \partial(\rho V)/dx = 0$.

Para el caso de un flujo con onda cilíndrica (fig. 2.15, *b*) $q_1 = \rho Vr\, d\theta\, dt$; $q_2 = \{\rho Vr\, d\theta + [\partial(\rho Vr\, d\theta)/\partial r]\, dr\}\, dt$;

$$\Delta q = [\partial(\rho r\, dr\, d\theta)/\partial t]\, dt.$$

De acuerdo con esto, la ecuación de continuidad para el flujo de un gas con onda cilíndrica

$$r\,\partial\rho/\partial t + \partial(\rho Vr)/\partial r = 0 \quad \text{o bien} \quad \partial\rho/\partial t + \partial(\rho V)/\partial r + \rho V/r = 0.$$

Examinemos ahora un flujo con onda esférica (fig. 2.15, *c*):

$$q_1 = \rho V r^2 \partial\psi\, d\theta\, dt; \quad q_2 = q_1 + (\partial q_1/\partial r)\, dr;$$
$$\Delta q = (\partial/\partial t)\, (\rho r^2 d\theta d\psi dr)\, dt.$$

Así, pues, la ecuación de continuidad para el flujo de un gas con onda esférica tiene la forma

$$r^2\partial\rho/\partial t + \partial\, (\rho V r^2)/\partial r = 0 \quad \text{o bien} \quad \partial\rho/\partial t + \partial\, (\rho V)/\partial r + 2\rho\, V/r = 0.$$

Estas ecuaciones pueden representarse en la forma $\partial\rho/\partial t + \partial\, (\rho V)/\partial r + \varepsilon\rho V/r = 0$.

2.15. 1. En el caso cuando las partículas del fluido describen durante su movimiento circunferencias, perpendiculares al eje permanente y tienen su centro en él, las componentes de la velocidad V_x, V_r en un sistema cilíndrico de coordenadas son iguales a cero y la ecuación de continuidad (2.55) toma la forma $\partial\rho/\partial t + (1/r)\, (\partial/\partial\theta)\, (\rho V_\theta) = 0$. Sustituyendo aquí V_θ por ωr, donde $\omega = d\theta/dt$ es la velocidad angular de las partículas, obtenemos $\partial\rho/\partial t + (\partial/\partial\theta)\, (\rho\omega) = 0$.

2. En el caso cuando las partículas se mueven en el espacio de forma simétrica con relación al centro inmóvil, con la particularidad de que la velocidad de cada semejante partícula está dirigida bien en sentido opuesto al centro, o bien hacia él, los parámetros del flujo sólo son función de la distancia r hasta el centro (fuente o sumidero espaciales). Así, pues, en la ecuación de continuidad en coordenadas esféricas (2.61) las derivadas de los parámetros por los ángulos θ y γ son nulas y la ecuación toma la forma $\partial\rho/\partial t + (1/r^2)\, (\partial/\partial r)\, (\rho V_r r^2) = 0$.

3. Si las partículas de gas se mueven en un plano que pasa por el eje x, los parámetros del flujo no dependen de la coordenada θ. Por lo tanto, la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas (2.55) tiene el aspecto

$$r\, \partial\rho/\partial t + (\partial/\partial r)\, (\rho V_r r) + r\, (\partial/\partial x)\, (\rho V_x) = 0.$$

2.16. Cuando las partículas de un gas están en movimiento a lo largo de trayectorias situadas en las superficies de cilindros coaxiales, en la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas (2.55) hay que hacer $\partial/\partial r = 0$; entonces $\partial\rho/\partial t + (\partial/\partial x)\, (\rho V_x) + (1/r)\, (\partial/\partial\theta)\, (\rho V_\theta) = 0$.

Si las trayectorias están situadas en las superficies de conos, coaxiales con el eje x y con vértice común, en la ecuación de continuidad (2.61) en coordenadas esféricas hay que hacer $\partial/\partial\theta = 0$; entonces $\partial\rho/\partial t + (1/r^2)\, (\partial/\partial r)\, (\rho V_r\, r^2) + [1/(r \operatorname{sen} \theta)]\, (\partial/\partial\gamma)\, (\rho V_\gamma) = 0$.

2.17. En el caso general de un flujo espacial inuniforme de un fluido compresible, la ecuación de continuidad en coordenadas cartesianas tiene la forma

$$\partial\rho/\partial t + (\partial/\partial x)\, (\rho V_x) + (\partial/\partial y)\, (\rho V_y) + (\partial/\partial z)\, (\rho V_z) = 0. \tag{2.62}$$

Para los flujos uniformes los parámetros del fluido son funciones de las coordenadas de los puntos. Por lo tanto, las derivadas parciales de los parámetros en el tiempo son nulas.

Durante la investigación de flujos planos uniformes de un fluido compresible (en particular junto al *perfil del ala*), la ecuación de continuidad adquiere la forma $(\partial/\partial x)\, (\rho V_x) + (\partial/\partial y)\, (\rho V_y) = 0$, en tanto que al estudiar flujos espaciales uniformes (p. ej., la circulación alrededor de un *ala de envergadura finita*) $(\partial/\partial x)\, (\rho V_x) + (\partial/\partial y)\, (\rho V_y) + (\partial/\partial z)\, (\rho V_z) = 0$.

2.18. Como sabemos

$$\operatorname{div}\, (\rho\vec{V}) = (\partial/\partial x)\, (\rho V_x) + (\partial/\partial y)\, (\rho V_y) + (\partial/\partial z)\, (\rho V_z)$$

o bien después de la derivación

$$\operatorname{div}(\rho\vec{V}) = V_x\partial\rho/\partial x + V_y\partial\rho/\partial y + V_z\,\partial\rho/\partial z + \rho\,(\partial V_x/\partial x + \partial V_y/\partial y + \partial V_z/\partial z).$$

El trinomio en el segundo miembro puede representarse como el producto escalar $V_x\,\partial\rho/\partial x + V_y\partial\rho/\partial y + V_z\partial\rho/\partial z = \vec{V}$ grad ρ, y la expresión $\rho\,(\partial V_x/\partial x + \partial V_y/\partial y + \partial V_z/\partial z)$, en la forma ρ div $\vec{V}$.

Así, pues, a la ecuación de continuidad (2.62) podemos aducirle la forma

$$\partial\rho/\partial t + \vec{V}\operatorname{grad}\rho + \rho\operatorname{div}\vec{V} = 0.$$

2.19. A diferencia del potencial de velocidad φ, que sólo existe para los flujos *irrotacionales*, la función de la corriente ψ, que es la solución de la ecuación de continuidad, existe, asimismo, para los flujos *rotacionales*, planos y espaciales, axisimétricos.

La ligazón entre la función de la corriente y las componentes de las velocidades tiene la forma siguiente:

$$V_x = 1/(\rho y^{\varepsilon})]\,\partial\psi/\partial y;\quad V_y = -[1/(\rho y^{\varepsilon})]\,\partial\psi/\partial x, \tag{2.63}$$

donde para el flujo plano $\varepsilon = 0$ y para el espacial axisimétrico, $\varepsilon = 1$, $y = r$.

También sabemos que la derivada parcial del potencial de velocidad φ por la coordenada es igual a la proyección de la velocidad sobre el correspondiente eje de coordenadas, o sea,

$$V_x = \partial\varphi/\partial x;\quad V_y = \partial\varphi/\partial y. \tag{2.64}$$

Igualando las respectivas dependencias (2.63) y (2.64), es posible hallar la relación entre el potencial de velocidad y la funcion de la corriente:

$$\partial\varphi/\partial x = [1/(\rho y^{\varepsilon})]\partial\psi/\partial y;\quad \partial\varphi/\partial y = -\,[1/(\rho y^{\varepsilon})]\partial\psi/\partial x. \tag{2.65}$$

Para el flujo plano de un fluido incompresible las relaciones toman la forma

$$\partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y;\quad \partial\varphi/\partial y = -\partial\psi/\partial x. \tag{2.66}$$

2.20. Haciendo uso de las relaciones (2.66), conociendo el potencial de velocidad φ, es posible determinar la función de la corriente ψ:

$$\psi = \int (\partial\varphi/\partial x)\,dy + c\,(x). \tag{2.67}$$

La constante de la ecuación (2.67) es función de la coordenada x, ya que al integrar por y sólo se fija x. De acuerdo con el potencial de velocidad φ prefijado hallamos la derivada $\partial\varphi/\partial x = 2ax$ y la ponemos en (2.67):

$$\psi = \int 2ax\,dy + c\,(x) = 2\,axy + c\,(x). \tag{2.68}$$

Aquí $c\,(x)$ es una constante arbitraria que se determina comparando dos valores de $\partial\psi/\partial x$, uno de los cuales se obtiene como resultado de la derivación de (2.68) por x y el segundo, haciendo uso de la fórmula (2.66), en la que $\partial\varphi/\partial y = -2\,ay$. De acuerdo con esto $2\,ay + dc/dx = 2\,ay$, de donde $c\,(x) =$ const. De este modo, $\psi = 2axy +$ const.

Con el fin de determinar el carácter cinemático del flujo del fluido hallemos la ecuación de las líneas de corriente. Para ello, igualemos la función de la corriente a una magnitud constante, es decir, $\psi = 2axy =$ const, de donde $xy =$ const. En correspondencia con esta ecuación las líneas de corriente son una familia de hipér

bolas, cuyas asíntotas son los ejes de coordenadas. Si la constante $c > 0$ (en tal caso $x > 0$, $y > 0$ o bien $x < 0$, $y < 0$), las ramas de las hipérbolas se hallan en los cuadrantes segundo y cuarto; con $c = 0$ las líneas de corriente coinciden con los ejes de coordenadas.

Así, pues, el flujo que estudiamos se dispone dentro de un ángulo recto (fig. 2.16). Para determinar la dirección de este flujo hallemos la velocidad en el punto A que yace en el eje x con coordenadas $y = 0$, $x > 0$. Entonces, $V_{x_A} = 2ax > 0$; $V_{y_A} = 0$, es decir, la velocidad en el punto A está dirigida hacia el sentido positivo del eje x.

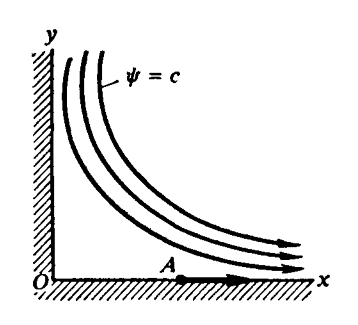


Fig. 2.16. Esquema del flujo de un fluido dentro de un ángulo recto

2.21. Si, en particular, para un flujo incompresible existe el potencial de velocidad φ, es posible establecer la siguiente relación entre él y la función de la corriente ψ:

$$\partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y; \quad \partial\varphi/\partial y = -\partial\psi/\partial x.$$

De acuerdo con esto

$$(\partial\varphi/\partial x)\, \partial\psi/\partial x + (\partial\varphi/\partial y)\, \partial\psi/\partial y = 0. \quad (2.69)$$

La relación (2.69) muestra que cada curva de la familia φ = const se cruza bajo ángulo recto con cualquier curva de la familia de líneas ψ = const, es decir, las líneas de corriente son *ortogonales* a las líneas equipotenciales.

2.22. Para un flujo plano incompresible la ecuación de continuidad tiene la forma

$$\partial V_x/\partial x + \partial V_y/\partial y = 0. \quad (2.70)$$

Como para el flujo prefijado con las componentes de las velocidades $V_x = x - 4y$ y $V_y = -(y + 4x)$, las derivadas parciales $\partial V_x/\partial x = 1$ y $\partial V_y/\partial y = -1$, podemos llegar a la conclusión de que las componentes de las velocidades del flujo dado satisfacen la ecuacion de continuidad (2.70).

Es conocido que

$$V_x = \partial\psi/\partial y = x - 4y; \quad (2.71)$$

$$V_y = -\partial\psi/\partial x = -(y + 4x). \quad (2.72)$$

De (2.71) hallamos

$$\psi = \int (x - 4y)\, dy + f(x) + C = xy - 2y^2 + f(x) + C.$$

Ya que con $x = 0$, $y = 0$ el valor de $\psi_0 = 0$, entonces $C = 0$ y $\psi = xy - 2y^2 + f(x)$.

La función $f(x)$ se halla de la condición

$$\partial\psi/\partial x = y + (d/dx)\, f(x) = -V_y = y + 4x.$$

Por lo tanto, $f(x) = \int 4x\, dx = 2x^2$. Así, pues, $\psi = xy + 2(x^2 - y^2)$.

Para establecer el carácter del movimiento del fluido hay que determinar la componente de rotor de velocidad (vórtice):

$$\omega_z = (1/2)\, (\partial V_y/\partial x - \partial V_x/\partial y). \quad (2.73)$$

Como $\partial V_y/\partial x = -4$; $\partial V_x/\partial y = -4$, entonces $\omega_z = 0$, lo que significa que el flujo que estudiamos es potencial.

Para semejante flujo $\partial\varphi/\partial x = V_x = x - 4y$; así que

$$\varphi = \int (x - 4y)\, dx + f_1(y) + C_1.$$

Siendo $\varphi_0 = 0$ con $x = 0$, $y = 0$, resulta $C_1 = 0$. De acuerdo con esto

$$\varphi = x^2/2 - 4\,xy + f_1(y).$$

A continuación, $\partial\varphi/\partial y = -4x + (d/dy)\, f_1(y) = V_y = -y - 4\,x$. Por lo tanto, $f_1(y) = -\int y\, dy = -y^2/2$ y el potencial de velocidad

$$\varphi = (1/2)\,(x^2 - y^2) - 4\,xy.$$

2.23. Examinemos el caso general del flujo bidimensional (plano o bien espacial axisimétrico) de un gas compresible. Con ello, el caudal ha de ser determinado para un flujo plano entre dos líneas de corriente prefijadas $\psi = C_1$, $\psi = C_2$, mientras que para el flujo axisimétrico, entre dos superficies de revolución $\psi = C_1$, $\psi = C_2$. Dicho caudal se determina como la masa del fluido que pasa en la unidad de tiempo o por el contorno AB y que es igual a

$$\int_A^B (2\pi r)^\varepsilon\, \rho V_n\, ds, \qquad (2.74)$$

donde V_n es la componente de la velocidad $\vec{V}$ normal al elemento ds del arco del contorno AB situado entre las líneas de corriente prefijadas; $\varepsilon = 0$ y 1 para los flujos plano y axisimétrico, respectivamente.

La variable V_n puede expresarse mediante las proyecciones V_x y V_y sobre las líneas de coordenadas, es decir, $V_n = V_x \cos(n, x) + V_y \cos(n, y)$.

Empleando las expresiones conocidas para los cosenos de los ángulos formados por la normal a los ejes de coordenadas, $\cos(n, x) = dy/ds$; $\cos(n, y) = -dx/ds$, para el caudal del fluido obtenemos

$$Q = \int_A^B (2\pi r)^\varepsilon\, \rho\, (V_x\, dy/ds - V_y\, dx/ds)\, ds.$$

Sustituyamos V_x y V_y de acuerdo con las igualdades (2.63) y, como resultado, obtenemos $Q = (2\pi)^\varepsilon\, (\psi_B - \psi_A)$.

Así, pues, el caudal del flujo por la curva AB, tomada al azar, se determina por la diferencia de los valores de la función de la corriente en sus puntos extremos y no depende de la forma de la curva. En correspondencia con esto, el caudal de un fluido que pasa entre dos líneas de corriente es una magnitud *constante* a todo lo largo de ellas.

2.24. Haciendo uso de la ligazón (2.66) entre el potencial de velocidad φ y la función de la corriente ψ para un fluido incompresible, hallamos el valor de la función de la corriente para el flujo prefijado: $\psi = \int (\partial\varphi/\partial x)\, dy + c(x)$.

Poniendo aquí $\partial\varphi/\partial x = 3\,(x^2 - y^2)$ e integrando, obtenemos $\psi = y\,(3x^2 - y^2) + c(x)$.

La función arbitraria $c(x)$ se determina comparando dos valores de $\partial\psi/\partial x$, uno de los cuales lo obtenemos derivando la última expresión por x y el segundo,

empleando la relación (2.66). Entonces $6\,xy + dc/dx = 6\,xy$. De acuerdo con esto, $c\,(x) = \text{const}$. De este modo, para el flujo prefijado $\psi = y\,(3x^2 - y^2) + \text{const}$.

El caudal del fluido por el segmento de la línea AB se determina por la diferencia entre los valores de la función de la corriente en sus puntos extremos, es decir, $Q = \psi_B - \psi_A = 2\ \text{m}^3/\text{s}$.

2.25. En la teoría del movimiento rotacional de un fluido, la intensidad de un tubo vorticial se determina como el producto del vórtice $\vec{\omega}$ por el área de la sección transversal del tubo σ, normal a su eje. Para demostrar el teorema de Helmholtz acerca de la *constancia* de esta intensidad a lo largo del tubo haremos uso de la expresión para la divergencia del vector de la velocidad angular

$$\operatorname{div}\vec{\omega} = \partial\omega_x/\partial x + \partial\omega_y/\partial y + \partial\omega_z/\partial z. \tag{2.75}$$

Poniendo aquí en lugar de las componentes del vórtice $\vec{\omega}$ sus correspondientes expresiones, obtenemos

$$\operatorname{div}\vec{\omega} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right).$$

Después de la derivación podemos cerciorarnos de que

$$\operatorname{div}\vec{\omega} = 0. \tag{2.76}$$

Esta expresión es válida para cualquier punto del espacio ocupado por el fluido. Examinemos cierto volumen de éste V limitado por la superficie $S = \sigma$. De acuerdo con el teorema de Ostrogradski

$$\iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{\omega}\,dV = -\iint\limits_{(S)} \omega_n\,d\sigma, \tag{2.77}$$

donde ω_n es la componente del vector de la velocidad angular del vórtice por la normal a la superficie σ. Como $\operatorname{div}\vec{\omega} = 0$, es evidente que la integral

$$\iint\limits_{(S)} \omega_n\,d\sigma = 0. \tag{2.78}$$

Esto quiere decir que la suma de los flujos del vector $\vec{\omega}$ (caudales) a través de áreas elementales es igual a cero para toda superficie cerrada.

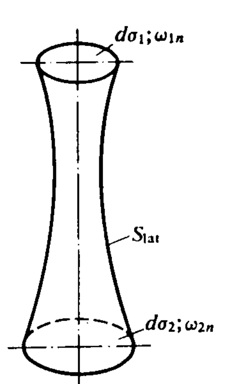


Fig. 2.17. Esquema para demostrar el teorema de la constancia de la intensidad de un vórtice

Refiramos la igualdad (2.78) a la superficie cerrada que se obtendrá si en el tubo vorticial se trazan dos secciones transversales arbitrarias (fig. 2.17):

$$0 = \iint\limits_{(S)} \omega_n\,dS = \iint\limits_{S_{\text{lat}}} \omega_{n\,\text{lat}}\,d\sigma_{\text{lat}} + \iint\limits_{(1)} \omega_{1n}\,d\sigma_1 + \iint\limits_{(2)} \omega_{2n}\,d\sigma_2. \tag{2.79}$$

La integral propagada a la superficie lateral del tubo es igual a cero, ya que según la definición del tubo vorticial las líneas de vórtice yacen por completo sobre su superficie; por lo tanto, aquí $\omega_n = 0$. Las integrales propagadas en las secciones 1 y 2 se calculan suponiendo que, debido a la pequeñez de estas secciones trans-

versales, los valores de ω_{1n} y ω_{2n} en los límites de cada una de ellas pueden considerarse constantes. De acuerdo con esto

$$\int\int_{(1)} \omega_{1n}\, d\sigma_1 = -\omega_1\sigma_1, \quad \int\int_{(2)} \omega_{2n}\, d\sigma_2 = \omega_2\sigma_2,$$

donde $\omega_1 = -\omega_{1n}$, $\omega_2 = \omega_{2n}$ son las velocidades angulares en las secciones 1 y 2, respectivamente, y σ_1, σ_2, las áreas de esas secciones perpendiculares a los vectores $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$. El signo negativo en la expresión para la primera integral se ha puesto porque la velocidad $\vec{\omega}_1$ está dirigida en sentido opuesto a la normal exterior de la sección 1. La ecuación (2.78) toma el aspecto $\omega_1\sigma_1 = \omega_2\sigma_2$.

Como las secciones 1 y 2 se han tomado al azar, en el caso general, para el momento dado de tiempo, podemos escribir la ecuación $\omega\sigma = \text{const}$ que es aplicable para todas las secciones de un mismo tubo. De esta forma el teorema de Helmholtz queda demostrado.

De este teorema se desprende la propiedad del tubo vorticial que consiste en que él no puede cortarse inesperadamente o bien terminar en una punta aguda. Esto último se condiciona debido a que con el área de la sección del tubo $\sigma \to 0$ la velocidad angular ω tendería, según el teorema de Helmholtz, al infinito lo que, desde el punto de vista físico, no es real.

2.26. Para determinar el rotor de la velocidad $\vec{\Omega} = \text{rot}\, \vec{V}$ es necesario calcular las componentes de la velocidad angular ω_x, ω_y y ω_z:

$$\omega_x = -k^2y/\sqrt{\varphi(z) - 2k^2(x^2+y^2)};$$
$$\omega_y = k^2x/\sqrt{\varphi(z) - 2k^2(x^2+y^2)};$$
$$\omega_z = k.$$

El rotor de la velocidad $\bar{\Omega} = \text{rot}\, \vec{V} = 2(\omega_x i + \omega_y j + \omega_z k)$; por consiguiente su módulo

$$|\vec{\Omega}| = [2k/\sqrt{\varphi(z) - 2k^2(x^2+y^2)}]\sqrt{k^2(x^2+y^2) + \varphi(z) - 2k^2(x^2+y^2)}.$$

Hallemos el módulo del vector de la velocidad:

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{k^2(x^2+y^2) + \varphi(z) - 2k^2(x^2+y^2)}.$$

De acuerdo con esto

$$|\vec{\Omega}| = [2k/\sqrt{\varphi(z) - 2k^2(x^2+y^2)}]\, |\vec{V}|.$$

Para determinar el sentido del vector $\vec{\Omega}$ hallemos las tangentes de los ángulos de inclinación de las respectivas componentes de los vectores $\vec{V}$ y $\vec{\omega}$:

$$V_y/V_x = -x/y; \quad \omega_y/\omega_x = -x/y;$$
$$V_y/V_z = kx/\sqrt{\varphi(z) - 2k^2(x^2+y^2)};$$
$$\omega_y/\omega_z = kx/\sqrt{\varphi(z) - 2k^2(x^2+y^2)};$$
$$V_z/V_x = -\sqrt{\varphi(z) - 2k^2(x^2+y^2)}/(ky);$$
$$\omega_z/\omega_x = -\sqrt{\varphi(z) - 2k^2(x^2+y^2)}/(ky).$$

5—01650

De acuerdo con estas relaciones podemos llegar a la conclusión de que el rotor $\vec{\Omega}$ tiene la misma dirección que el vector de velocidad $\vec{V}$.

2.27. Recibe el nombre de circulación de la velocidad por cierto contorno K a integral lineal

$$\Gamma = \int_K \vec{V}\, d\vec{S} \tag{2.80}$$

en la que $\vec{V}d\vec{S} = V_x dx + V_y dy + V_z dz$ es el producto escalar de los vectores $\vec{V}$ y $d\vec{S}$.

En el flujo irrotacional la circulación de la velocidad puede ser expresada con el potencial de velocidad, ya que $V_x dx + V_y dy + V_z dz = d\varphi$, es decir

$$\Gamma = \int_K d\varphi = \varphi_{K1} - \varphi_{K2}, \tag{2.81}$$

donde φ_{K1}, φ_{K2} son los valores de la función potencial en los extremos del contorno que consideramos.

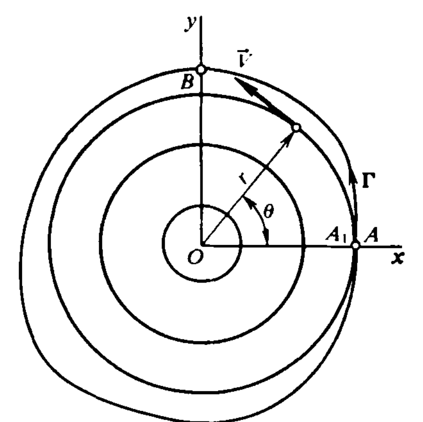


Fig. 2.18. Esquema para determinar la circulación

El flujo del fluido, prefijado con las condiciones del problema, es plano, uniforme y, como $\partial V_y/\partial x = \partial V_x/\partial y$ (es decir, $\omega_z = 0$), es también potencial. Con ello, el potencial de velocidad φ puede determinarse calculando la velocidad del flujo $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = a/r$, donde r es el radio polar del correspondiente punto (fig. 2.18).

El ángulo θ se halla de la relación $\cos\theta = V_y/V = y/r$.

De aquí sigue que el vector de velocidad $\vec{V}$ es perpendicular al radio polar del punto. Así, pues, $V_r = 0$, $V_s = V = a/r = \partial\varphi/\partial S = (1/r)\ \partial\varphi/\partial\theta$. Integrando la última ecuación hallamos que $\varphi = a\theta$. A este valor corresponde la función de la corriente $\psi = -a \ln r$.

De aquí se halla la ecuación de las líneas de corriente: $\psi = -a \ln r = c$. En correspondencia con esta ecuación, semejantes líneas son circunferencias $r = c$ con el centro en el origen de coordenadas.

Hallemos la circulación de la velocidad:

$$\Gamma = \oint_A^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A = a\pi/2.$$

Si calculamos la circulación por cualquier contorno cerrado que abarca el origen de coordenadas, obtendremos

$$\Gamma = \int_K d\varphi = \varphi_{A1} - \varphi_A = 2\pi a.$$

Por esta razón $a = \Gamma/(2\pi)$.

Desde el punto de vista físico, de acuerdo con el teorema de Stokes, este caso corresponde a la presencia en el punto singular ($r=0$) de un hilo vorticial, cuya intensidad es igual a la circulación Γ. Con ello, fuera del hilo vorticial el flujo es irrotacional.

2.28. El flujo de aire axisimétrico dado es la corriente de un fluido provocado por un hilo vorticial rectilíneo. Como el movimiento transcurre por todos los planos perpendiculares al hilo vorticial, en el caso dado es suficiente considerar el flujo plano creado por un vórtice puntual.

Bajo la influencia de este vórtice las partículas del fluido se desplazan por circunferencias (cuyo centro es el vórtice) a una velocidad inversamente proporcional a la distancia desde el punto en movimiento hasta el vórtice, es decir,

$$V = \Gamma/(2\pi r). \tag{2.82}$$

Por lo tanto, en las superficies dadas

$$V_1 = \Gamma/(2\pi r_1); \quad V_2 = \Gamma/(2\pi r_2). \tag{2.83}$$

De la ecuación de Bernoulli para un líquido incompresible obtenemos la diferencia de presiones

$$p_2 - p_1 = (\rho/2)\,(V_1^2 - V_2^2). \tag{2.84}$$

Poniendo aquí las expresiones para las velocidades V_1 y V_2 (2.83), hallamos la circulación de la velocidad:

$$\Gamma = 2\pi r_1 r_2 \sqrt{2\,(p_2 - p_1)/[\rho\,(r_2^2 - r_1^2)]} \approx 180 \text{ m}^2/\text{s}.$$

2.29. Los vórtices situados en el flujo provocan en el espacio circundante una velocidad inducida adicional. De acuerdo con la fórmula de Biot — Savart el

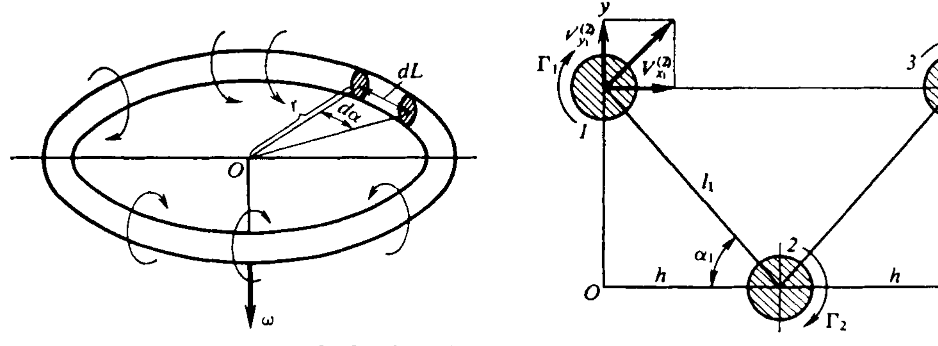


Fig. 2.19. Esquema para calcular la velocidad inducida

Fig. 2.20. Esquema de interacción de vórtices

valor elemental de la velocidad inducida en el centro de anillo (fig. 2.19)

$$d\vec{\omega} = [\Gamma/(4\pi)]\,(\vec{r} \times d\vec{L})/r^3.$$

En este caso el módulo del producto vectorial $(\vec{r} \times d\vec{L}) = r \operatorname{sen}(r, L)\, dL = r^2 d\alpha$, por ello $d\omega = [\Gamma/(4\pi)]\, d\alpha/r$. De aquí la velocidad total

$$\omega = [\Gamma/(4\pi r)] \int_0^{2\pi} d\alpha = \Gamma/(2r).$$

Poniendo aquí los datos, obtenemos $\omega = 50$ m/s.

2.30. Caso 1 (fig. 2.20). Examinemos la velocidad que se comunica al vórtice *1* por parte del vórtice *2*

$$V_{x1}^{(2)} = [\Gamma/(2\pi l_1)] \operatorname{sen} \alpha_1,$$
$$V_{y1}^{(2)} = [\Gamma/(2\pi l_1)] \cos \alpha_1,$$

o bien

$$V_{x1}^{(2)} = [\Gamma/(2\pi l_1)]\, h/l_1 = \Gamma/(4\pi h);$$
$$V_{y1}^{(2)} = [\Gamma/(2\pi l_1)]\, h/l_1 = \Gamma/(4\pi h).$$

La velocidad inducida por el vórtice *3* es igual a $V_{x1}^{(3)} = 0$, $V_{y1}^{(3)} = \Gamma/(4\pi h)$.

Los valores sumarios de la velocidad debidos a la influencia de ambos vórtices: $V_{x1} = \Gamma/(4\pi h)$; $V_{y1} = \Gamma/(4\pi h) + \Gamma/(4\pi h) = \Gamma/(2\pi h)$. Poniendo aquí los datos hallamos que $V_{x1} = 15{,}9$ m/s; $V_{y1} = 31{,}8$ m/s.

Consideremos las velocidades inducidas en el vórtice *2* por el vórtice *1*: $V_{x2}^{(1)} = -\Gamma/(4\pi h)$, $V_{y2}^{(1)} = -\Gamma\ (4\pi h)$; del vórtice *3*: $V_{x2}^{(3)} = -\Gamma/(4\pi h)$, $V_{y2}^{(3)} = \Gamma/(4\pi h)$.

Así, pues, las componentes sumarias de la velocidad $V_{x2} = -\Gamma/(2\pi h)$; $V_{y2} = 0$. Poniendo los datos iniciales calculamos que $|V_{x2}| = 31{,}8$ m/s.

Para el vórtice *3* la velocidad V_{x3} es la misma que para el vórtice *1*, en tanto que la componente vertical es de signo contrario, es decir, $V_{x3} = V_{x1} = \Gamma/(4\pi h) = 15{,}9$ m/s; $V_{y3} = -V_{y1} = -\Gamma/(2\pi h) = 31{,}8$ m/s.

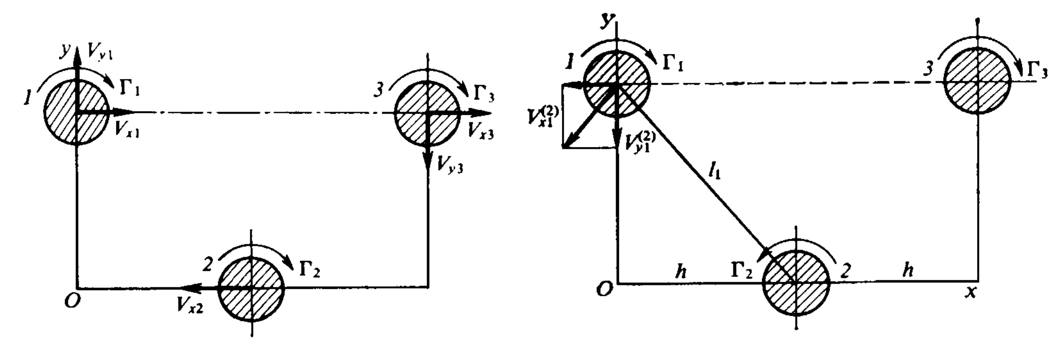


Fig. 2.21. Movimiento de tres vórtices rectilíneos

Fig. 2.22. Esquema para determinar la velocidad inducida

En la fig. 2.21 se muestra el carácter del movimiento de los vórtices rectilíneos en correspondencia con los valores de las velocidades obtenidas.

Caso 2 (fig. 2.22). Consideremos la velocidad que se comunica al vórtice *1* por parte del vórtice *2*; $V_{x1}^{(2)} = -\Gamma/(2\pi l_1)\, h/l_1 = -\Gamma/(4\pi h)$; $V_{y1}^{(2)} = -\Gamma/(4\pi h)$;

del vórtice *3*: $V_{x1}^{(3)} = 0$; $V_{y1}^{(3)} = \Gamma/(4\pi h)$.

Las componentes sumarias de la velocidad $V_{x1} = -\Gamma/(4\pi h)$; $V_{y1} = 0$. Teniendo en cuenta los valores prefijados de Γ y h la velocidad $|V_{x1}| = 15{,}9$ m/s.

Consideremos las velocidades inducidas en el vórtice *2*.

Del vórtice 1: $V_{x2}^{(1)} = -\Gamma/(4\pi h)$, $V_{y2}^{(1)} = -\Gamma/(4\pi h)$;

del vórtice *3*: $V_{x2}^{(3)} = -\Gamma/(4\pi h)$; $V_{y2}^{(3)} = \Gamma/(4\pi h)$.

De este modo, las componentes sumarias $V_{x2} = -\Gamma/(2\pi h)$; $V_{y2} = 0$. Poniendo aquí los datos iniciales hallamos $|V_{x2}| = 31{,}8$ m/s.

Examinemos las velocidades inducidas en el vórtice *3*:

Del vórtice 1: $V_{x_3}^{(1)} = 0$; $V_{y3}^{(1)} = -\Gamma/(4\pi h)$;
del vórtice 2: $V_{x_2}^{(2)} = -\Gamma/(4\pi h)$; $V_{y3}^{(2)} = \Gamma/(4\pi h)$.

Las correspondientes componentes sumarias: $V_{x3} = -\Gamma/(4\pi h)$; $V_{y3} = 0$. De acuerdo con el planteamiento $V_{x3} = 100/(4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5) = 15{,}9$ m/s.

En la fig. 2.23 se muestra el carácter del movimiento del sistema vorticial en correspondencia con los valores obtenidos de las velocidades.

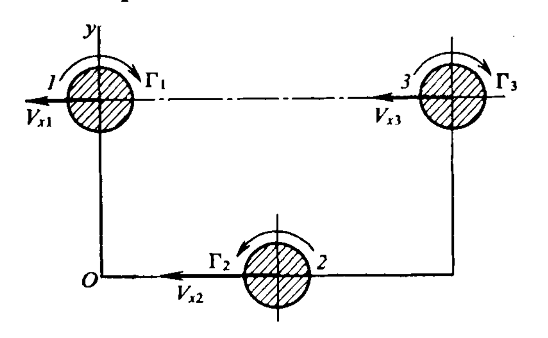


Fig. 2.23. Esquema del movimiento de un sistema de vórtices

Fig. 2.24. Esquema para determinar el potencial de velocidad y la función de corriente para un par de vórtices

2.31. Caso 1 (fig. 2.24). Elijamos el punto A con coordenadas x, y y en él calculemos las velocidades inducidas por los vórtices.

El vórtice *1* comunica a este punto la velocidad

$$V_x^{(1)} = \Gamma \operatorname{sen} \alpha_1/(2\pi l_1) = \Gamma y/[2\pi (x^2 + y^2)];$$
$$V_y^{(1)} = -\Gamma \cos \alpha_1/(2\pi l_1) = -\Gamma x/[2\pi (x^2 + y^2)].$$

Los correspondientes valores de estas velocidades inducidas por el vórtice 2

$$V_x^{(2)} = \Gamma \operatorname{sen} \alpha_2/(2\pi l_2) = \Gamma y/\{2\pi [(h - x)^2 + y^2]\};$$
$$V_y^{(2)} = \Gamma \cos \alpha_2/(2\pi l_2) = \Gamma (h - x)/ \{2\pi [(h - x)^2 + y^2]\}.$$

Las componentes completas de las velocidades

$$V_x = V_x^{(1)} + V_x^{(2)} = \Gamma y/[2\pi (x^2 + y^2)] + \Gamma y/\{2\pi (h - x)^2 + y^2]\};$$
$$V_y = V_y^{(1)} + V_y^{(1)} = -\Gamma x/[2\pi (x^2 + y^2)] + \Gamma (h - x)/\{2\pi [(h - x)^2 + y^2]\}.$$

Los valores de V_x y V_y se introducen en la expresión para la diferencial de la función potencial:

$$d\varphi = (\partial\varphi/\partial x)\, dx + (\partial\varphi/\partial y)\, dy = V_x\, dx + V_y\, dy.$$

Después de integrarla obtenemos

$$\varphi = [\Gamma/(2\pi)] \{ -\operatorname{arctg} (y/x) + \operatorname{arctg} [y/(h - x)]\}. \quad (2.85)$$

Este potencial se determina en forma de la suma de las componentes de los vórtices *1* y *2*, respectivamente:

$$\varphi_1 = -[\Gamma/(2\pi)] \operatorname{arctg} (y/x); \quad (2.86)$$
$$\varphi_2 = [\Gamma/(2\pi)] \operatorname{arctg} [y/(h - x)]. \quad (2.87)$$

Hagamos uso de la propiedad de la superposición de los flujos incompresibles con el fin de determinar la función sumaria de la corriente $\psi = \psi_1 + \psi_2$, donde ψ_1, ψ_2 son las funciones de la corriente para los vórtices *1* y *2*, respectivamente.

Hallemos la función ψ_1 del modo siguiente. De (2.86) se desprende que $\varphi_1 = -[\Gamma/(2\pi)] \operatorname{arctg}(y/x) = -[\Gamma/(2\pi)]\alpha_1$, de donde la velocidad total

$$V_s = \partial\varphi_1/\partial s = (1/l_1)\,\partial\varphi_1/\partial\alpha_1 = -\Gamma/(2\pi l_1).$$

Es evidente que V_s es igual a la componente de la velocidad normal al radio vector del punto A. La componente radial de la velocidad en este punto $V_r = 0$. Así, pues, para la función de la corriente tenemos $\partial\psi_1/\partial l_1 = -V_s = \Gamma/(2\pi l_1)$, de donde

$$\psi_1 = \Gamma \ln l_1/(2\pi). \tag{2.88}$$

En correspondencia para el vórtice *2*, situado respecto del vórtice *1* en el otro lado del punto A,

$$\psi_2 = -\Gamma \ln l_2/(2\pi). \tag{2.89}$$

De este modo, la función sumaria de la corriente

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = [\Gamma/(2\pi)] \ln \sqrt{(x^2+y^2)/[(h-x)^2+y^2]}. \tag{2.90}$$

Con el fin de obtener la familia de líneas de corriente ponemos $\psi = C_1$:

$$\psi = C_1 = [\Gamma/(2\pi)] \ln \sqrt{(x^2+y^2)/[(h-x)^2+y^2]},$$

de donde $(x^2 + y^2)/[(h-x)^2 + y^2] = C_2$, donde $C_2 = e^{4\pi c_1/\Gamma}$.

Caso 2. (fig. 2.25). La función de la corriente y el potencial de velocidad se determinan tomando en consideración los resultados obtenidos y que la rotación

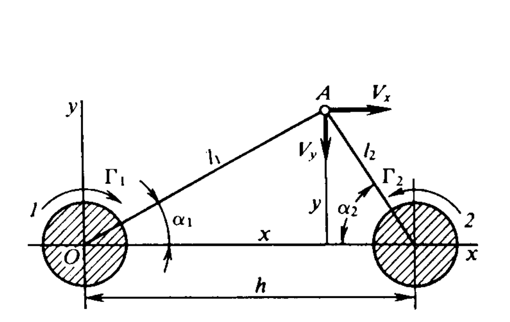


Fig. 2.25. Esquema del flujo inducido por dos vórtices de diferente intensidad

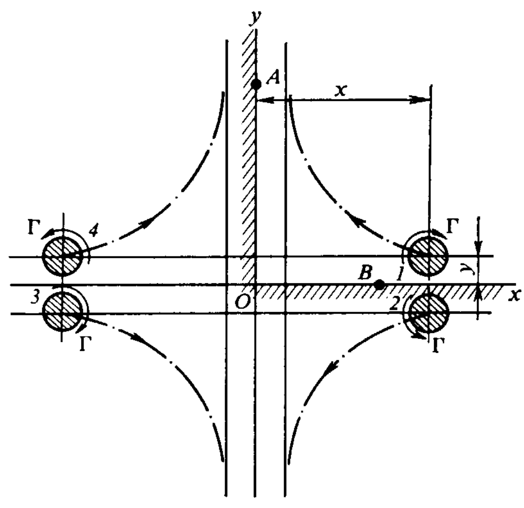


Fig. 2.26. Esquema para investigar el movimiento dentro de un ángulo diedro

del vórtice *2* transcurre no en sentido horario, como en el caso *1*, sino en sentido opuesto. De acuerdo con esto para el potencial de velocidad del flujo sumario

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = -[\Gamma/(2\pi)]\{\operatorname{arctg}(y/x) + \operatorname{arctg}[y/(h-x)]\}.$$

De forma análoga la función de la corriente

$$\psi=\psi_1+\psi_2=[\Gamma/(2\pi)]\,[\ln\sqrt{x^2+y^2}+\ln\sqrt{(h-x)^2+y^2}].$$

2.32. Mostremos que la investigación del movimiento de un vórtice rectilíneo que se encuentra en el interior de un ángulo diedro, formado por paredes perpendiculares entre sí, *es equivalente, en sentido hidrodinámico, al estudio de la interacción de este vórtice con tres vórtices rectilíneos*, situados de acuerdo con el esquema de la fig. 2.26.

En el sistema dado (vórtice — ángulo diedro) *los ejes de coordenadas coinciden con las líneas de corriente* y, por consiguiente, las componentes de las velocidades, normales a dichos ejes, son iguales a cero. También poseen esta misma propiedad las rectas perpendiculares entre sí trazadas en el flujo, formado por un sistema de cuatro vórtices (fig. 2.26). P. ej., consideremos el punto A en el eje Oy. La componente de la velocidad normal a este eje, inducida por los pares de vórtices *1—4* y *2—3*, dispuestos simétricamente respecto de ella, cuyas intensidades son iguales, pero de signo opuesto, es igual a cero. Análogo resultado obtendremos al determinar las componentes de las velocidades inducidas por los pares de vórtices *1—2* y *3—4* en el punto B del eje Ox.

Examinemos las velocidades inducidas en el vórtice *1* por los vórtices *2*, *3* y *4*, respectivamente:

$$V_{x_1}^{(2)}=-[\Gamma/(4\pi y)];\quad V_{y_2}^{(2)}=0;$$
$$V_{x_1}^{(3)}=[\Gamma/(4\pi)]\,y/(x^2+y^2);$$
$$V_{y_1}^{(3)}=-[\Gamma/(4\pi)]\,x/(x^2+y^2);$$
$$V_{x_1}^{(4)}=0;\quad V_{y_1}^{(4)}=\Gamma/(4\pi x).$$

Así, pues, las componentes sumarias de la velocidad

$$\left.\begin{aligned}V_{x1}&=-[\Gamma/(4\pi y)]\,x^2/r^2;\\ V_{y1}&=[\Gamma/(4\pi x)]\,y^2/r^2,\end{aligned}\right\}\qquad(2.91)$$

donde $r^2=x^2+y^2$.

Haciendo uso de las ecuaciones (2.91), así como teniendo en cuenta que $V_{x1}=dx/dt$, $V_{y1}=dy/dt$, obtenemos

$$dx/dt=-[\Gamma/(4\pi y)]\,x^2/r^2;$$
$$dy/dt=[\Gamma/(4\pi x)]\,y^2/r^2.$$

Eliminando en estas relaciones el tiempo t e integrando, hallamos la ecuación de la trayectoria del vórtice:

$$1/x^2+1/y^2=C.\qquad(2.92)$$

2.33. Consideremos el movimiento de dos vórtices en un fluido que en el infinito está en reposo. Las velocidades que el vórtice *2* induce en el vórtice *1* y viceversa

$$V_{x1}=\Gamma/(4\pi h);\quad V_{y1}=0;\quad V_{x2}=\Gamma/(4\pi h);\quad V_{y2}=0.$$

Por lo tanto, $V_{x1}=V_{x2}$ y el par de vórtices, en el caso que examinamos, está en movimiento de traslación a lo largo del eje Ox a una velocidad $V_x=\Gamma/(4\pi h)$.

De acuerdo con el planteamiento del problema (los vórtices deben estar inmóviles) la velocidad de movimiento del fluido en la infinidad se debe hacer igual en

valor, pero de signo opuesto, a la velocidad de desplazamiento de los vórtices, es decir, $V_\infty = -\Gamma/(4\pi h)$.

Elijamos en el plano un punto tomado al azar A (x, y) y determinemos el valor de la función de la corriente en este punto, haciendo uso del principio de superposición. Con ello, determinamos la función de la corriente de un flujo no perturbado incidente según la conocida velocidad $-V_\infty = \Gamma/(4\pi h) = \partial\psi_\infty/\partial y$.

Integrando esta expresión hallamos $\psi_\infty = \Gamma y/(4\pi h)$.

Calculemos otras componentes de la función de la corriente. Para ello, primero, hallemos las velocidades que en el punto dado se inducen por el par de vórtices *1* y *2* (fig. 2.27):

$$V_{xA}^{(1)} = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{l_1}\frac{h-y}{l_1} = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{h-y}{x^2+(h-y)^2};$$

$$V_{yA}^{(1)} = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{l_1}\frac{x}{l_1} = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+(h-y)^2};$$

$$V_{xA}^{(2)} = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{l_2}\frac{h+y}{l_2} = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{h+y}{x^2+(h+y^2)};$$

$$V_{yA}^{(2)} = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{l_2}\frac{x}{l_2} = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+(h+y)^2}.$$

Las componentes sumarias de la velocidad

$$V_{xA} = [\Gamma/(2\pi)]\,(h-y)/[x^2+(h-y)^2] + [\Gamma/(2\pi)]\,(h+y)/[x^2+(h+y)^2];$$

$$V_{yA} = [\Gamma/(2\pi)]\,x/[x^2+(h-y)^2] - [\Gamma/(2\pi)]\,x/[x^2+(h+y)^2].$$

Como $\psi\,(x, y)$, resulta $d\psi = (\partial\psi/\partial x)\,dx + (\partial\psi/\partial y)\,dy$ o bien, tomando en consideración la ligazón entre la función de la corriente y las componentes de la velocidad, $d\psi = -V_y\,dx + V_x\,dy$. Sustituyamos en la expresión V_x y V_y por sus valores en el punto A que consideramos e integrémosla:

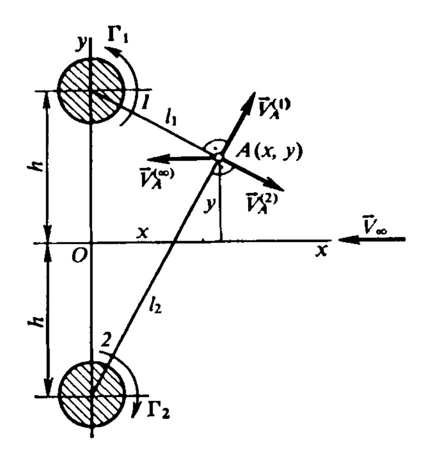


Fig. 2.27. Esquema de un flujo en movimiento de traslación y de un flujo debido a un par de vórtices

$$\psi_A = [\Gamma/(4\pi)]\ln\{[x^2+(h+y)^2]/[x^2+(h-y)^2]\}.$$

La función de la corriente del flujo sumario, surgido como resultado de la superposición del flujo en movimiento de traslación sobre el flujo inducido por el par de vórtices, se determina como la suma

$$\psi = \psi_\infty + \psi_A = [\Gamma\,(4\pi)]\,y/h + [\Gamma/(4\pi)] \times \ln\{[x^2+(h+y)^2]/[x^2+(h-y)^2]\}.$$

Para obtener la familia de líneas de flujo tomemos $\psi = \text{const}$, es decir, $y/h + \ln\{[x^2+(h+y)^2]/[x^2+(h-y)^2]\} = \text{const}$.

2.34. El estudio cinemático de un flujo plano de un fluido incompresible está ligado con la búsqueda del potencial complejo que es de por sí la función analítica de la variable compleja $f\,(z) = W = \varphi + i\psi$ y que proporciona un determinado sistema de líneas de corriente $\psi = \text{const}$ y de líneas equipotenciales $\varphi = \text{const}$.

Mostremos que las condiciones (2.66) son necesarias y suficientes para la existencia de semejante potencial. El potencial complejo $W = f(z)$ no sólo es función de dos variables x, y, sino que depende de la variable compleja $z = x + iy$. En correspondencia con la teoría de la variable compleja la función W será analítica en cierta región, si en el punto dado de ésta la derivada dW/dz es la misma en todas las direcciones, o sea, si se cumple la condición $dW/dz = dW/dx = dW/d(iy)$.

Como aquí $dW/dx = \partial(\varphi + i\psi)/\partial x = \partial\varphi/\partial x + i\partial\psi/\partial x$; $dW/dy = -i\partial(\varphi + i\psi)/\partial y = \partial\psi/\partial y - i\partial\varphi/\partial y$, por consiguiente $\partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial y = -\partial\psi/\partial x$.

Las expresiones obtenidas son las conocidas condiciones de Cauchy — Riemann, que se cumplen para los flujos potenciales de un fluido incompresible y son, como se ha mostrado, condiciones necesarias y suficientes para la existencia del potencial complejo.

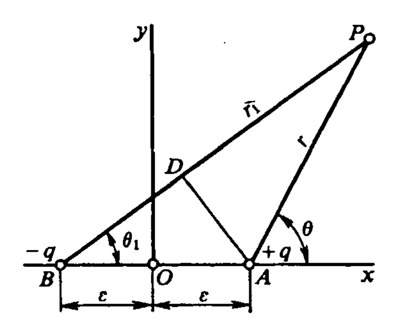


Fig. 2.28. Esquema para el cálculo del potencial complejo de un dipolo

2.35. Recibe el nombre de *dipolo* el conjunto de la fuente y el sumidero (de iguales intensidades) situados a una distancia infinitesimal entre sí.

Supongamos que en dos puntos A y B están situados, respectivamente, una fuente y un sumidero puntuales de igual intensidad (fig. 2.28). En cierto punto P el potencial sumario de ellos $\varphi = [1/2\pi)]\,(q \ln r - q \ln r_1) = [q/(2\pi)] \ln [1 - (r_1 - r)/r_1]$.

Como $r_1 - r = 2\varepsilon \cos\theta$, $\ln[1 - (r_1 - r)/r_1] \approx -(r_1 - r)/r$, mientras que el *momento del dipolo* $M = q\,2\varepsilon$, entonces

$$\varphi = -M \cos\theta/(2\pi r). \qquad (2.93)$$

Para la función de la corriente

$$\psi = [q/(2\pi)]\,(\theta - \theta_1).$$

Considerando los triángulos curvilíneos ABD y PAD (fig. 2.28) podemos hallar $\theta - \theta_1 = 2\varepsilon \operatorname{sen}\theta_1/r$. Por lo tanto,

$$\psi = M \operatorname{sen}\theta/(2\pi r). \qquad (2.94)$$

Teniendo en cuenta (2.93) y (2.94) el potencial complejo del dipolo

$$W = \varphi + i\psi = -[M/(2\pi)]\,(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)/r = -M/(2\pi z),$$

donde $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$.

2.36. Hagamos uso de los valores conocidos del potencial de velocidad y de la función de la corriente del flujo progresivo $\varphi_1 = Vx$; $\psi_1 = Vy$ y del flujo del dipolo

$$\varphi_2 = [M/(2\pi)]\,x/(x^2 + y^2); \quad \psi_2 = -[M/(2\pi)]\,y/(x^2 + y^2).$$

Como resultado de la superposición de estos dos flujos obtenemos una corriente para la cual

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = Vx + [M/(2\pi)]\,x/(x^2 + y^2); \qquad (2.95)$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = Vy - [M/(2\pi)]\,y/(x^2 + y^2). \qquad (2.96)$$

De acuerdo con esto el potencial complejo

$$W(z)=\varphi+i\psi=Vx\left(1+\frac{M}{2\pi V}\frac{1}{x^2+y^2}\right)+iV_y\left(1-\frac{M}{2\pi V}\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

Introduzcamos las coordenadas polares θ, $r=\sqrt{x^2+y^2}$ y designemos $M/(2\pi V)=r_0^2$. Entonces, teniendo en cuenta que $x=r\cos\theta$, $y=r\,\mathrm{sen}\,\theta$, obtenemos

$$W=V(1+r_0^2/r^2)\,r\cos\theta+iV(1-r_0^2/r^2)\,r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Como $z=r(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)=re^{i\theta}$ y $\cos\theta-i\,\mathrm{sen}\,\theta=e^{-i\theta}=r/z$, resulta que

$$W=V(z+r_0^2/z).$$

2.37. Para determinar el carácter geométrico del flujo (el espectro hidrodinámico) hagamos uso de la función de la corriente (2.96). Tomando esta función como la constante c, obtenemos la ecuación de la familia de líneas de corriente $Vy-[M/(2\pi)]\,y/(x^2+y^2)=c$ o bien, tomando en consideración la anotación $M/(2\pi V)=r_0^2$,

$$Vy[(x^2+y^2)-r_0^2]=c(x^2+y^2).$$

De esta ecuación se desprende que las líneas de corriente son curvas de tercer orden. Examinemos una de estas líneas, a la que corresponde el valor $c=0$. Su ecuación tiene la forma $Vy(x^2+y^2-r_0^2)=0$. A su vez, esta ecuación se descompone en dos: $y=0$ y $x^2+y^2=r_0^2$. La primera representa el eje x y la segunda, una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y de radio r_0. Así, pues, en el complicado flujo que estudiamos hay un hililo que, desde el infinito, se dirige a lo largo del eje x y después se ramifica, formando una circunferencia de radio r_0. De esto se deduce que si tomamos como semejante circunferencia el contorno de un cilindro circular de radio r_0, el flujo cerca de él será igual al flujo complicado obtenido sumando el flujo progresivo y el del dipolo. Conociendo el radio del cilindro r_0 y la velocidad del flujo V es posible hallar el momento del dipolo $M=2\pi Vr_0^2$ que se dispone en el eje del cilindro para reproducir el carácter de su circulación.

2.38. Para determinar el caudal del fluido que pasa por la circunferencia prefijada y la circulación Γ por ella, hay que hallar la distribución de los puntos singulares en el plano (fuentes, sumideros, dípolos, puntos vorticiales) para el flujo caracterizado por el potencial complejo $W(z)$, es decir, aquellos para los que la velocidad se invierte en el infinito.

Transformemos (2.1) en la forma

$$W=\ln(z+1)+\ln(z-1)+2\ln(z+2)+2\ln(z-2)+$$
$$+i\ln(z+1)+i\ln(z-1)-3i\ln(z+2)-3i\ln(z-2)+1/z. \quad (2.97)$$

Partiendo de (2.97) podemos llegar a la conclusión de que el flujo sumario, caracterizado por el potencial $W(z)$ dado, se obtiene como resultado de la superposición de los siguientes flujos sencillos:

1) de las fuentes [con potenciales complejos $\ln(z+1)$, $\ln(z-1)$, $\ln(z+2)$, $\ln(z-2)$] en los puntos con coordenadas $z=1;\ 2;\ -1;\ -2$ (es decir, situados en el eje real en los puntos $x=1;\ 2;\ -1;\ -2$);

2) de un dipolo (su potencial complejo es $1/z$; el momento, $M=-2\pi$), situado en el origen de coordenadas: $z=0$;

3) de los puntos vorticiales [potenciales complejos $i \ln (z+1)$, $i \ln (z-1)$, $-3i \ln (z+2)$, $-3i \ln (z-2)$], situados en los puntos $z = 1;\ 2;\ -1;\ -2$, es decir, allí donde las fuentes. La circunferencia prefijada $x^2 + y^2 = 9$ abarca todos los puntos singulares, ya que su centro yace en el origen de coordenadas y su radio $r = 3$.

Como es una combinación de una fuente y un sumidero de iguales intensidades, el dipolo no produce caudal por la circunferencia y, por lo tanto, el caudal sumario se determina por las intensidades de cuatro fuentes. La intensidad de cada una de ellas puede ser determinada del modo siguiente. Como ya sabemos, el potencial complejo del flujo de la fuente de intensidad q tiene la forma

$$W = q \ln z/(2\pi). \tag{2.98}$$

De acuerdo con el planteamiento del problema, el potencial complejo, p. ej., de la fuente situada en el punto $z = +1$, se da con la relación

$$W_1 = \ln (z-1). \tag{2.99}$$

Comparando (2.98) y (2.99) hallamos la intensidad de dicha fuente $q_1 = 2\pi$. Las intensidades de las fuentes situadas en los puntos $z = -1;\ 2;\ -2$, halladas de forma análoga, son iguales a $2\pi;\ 4\pi;\ 4\pi$, respectivamente.

De este modo el caudal del fluido por unidad de tiempo, que pasa por la circunferencia prefijada, $Q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 12\pi$. Para determinar la circulación de la velocidad por esta circunferencia empleemos el teorema de Stokes de acuerdo con el cual esta circulación por cierto contorno es igual a la suma de las intensidades de los vórtices que cruzan la superficie abarcada por dicho contorno.

Por consiguiente, la circulación por la circunferencia prefijada es igual a la suma de las intensidades de los cuatro puntos vorticiales situados en el eje de coordenadas Ox en los puntos $x = +1;\ -1;\ +2;\ -2$. La intensidad (tensión) de cada uno de ellos se determina del modo siguiente. El potencial complejo, creado por el punto vorticial, tiene la forma

$$W = -i\Gamma \ln z/(2\pi). \tag{2.100}$$

Según el planteamiento del problema que estudiamos, el potencial complejo del flujo creado, p. ej., por el punto vorticial con coordenada $z = +1$ se representa por la expresión

$$W' = i \ln (z-1). \tag{2.101}$$

Comparando (2.100) y (2.101) hallamos que $\Gamma_1 = -2\pi$. De modo análogo es posible determinar la intensidad Γ de los puntos vorticiales $z = -1;\ 2;\ -2$. Estas intensidades son iguales a $-2\pi;\ 6\pi;\ 6\pi$, respectivamente. De forma que por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ la circulación $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 = 8\pi$.

2.39. Aduzcamos el potencial complejo (2.2) en la forma

$$W(z) = Vz + V r_0^2/z - \Gamma \ln z/(2\pi i).$$

En esta ecuación cada uno de los sumandos es el potencial complejo de un flujo más sencillo: $W_1 = Vz$; $W_2 = V r_0^2/z$; $W_3 = -\Gamma \ln z/(2\pi i)$. Consideremos el flujo caracterizado por el potencial complejo $W_1 = \varphi_1 + i\psi_1$. Tomando en consideración que $z = x + iy$ para este potencial tenemos $W_1 = \varphi_1 + i\psi_1 = V(x + iy)$. Así, que

$$\varphi_1 = Vx; \quad \psi_1 = Vy. \tag{2.102}$$

La ecuación de las líneas de corriente para este flujo $\psi_1 = Vy = \text{const}$, es decir, el potencial complejo $W_1 = Vz$ caracteriza un flujo progresivo cuya velocidad V está dirigida a lo largo del eje Ox (fig. 2.29, *a*).

El potencial complejo $W_2 = Vr_0^2/z$ caracteriza el flujo de un dipolo situado en el origen de coordenadas. El momento de este dipolo $M = -2\pi V r_0^2$ (fig. 2.29, *b*).

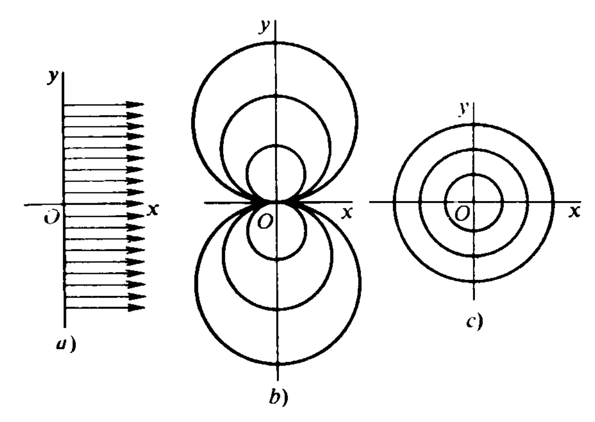


Fig. 2.29. Tipos de flujos de un fluido

El potencial de velocidad y la función de la corriente del dipolo se determinan del siguiente modo:

$$W_2 = \varphi_2 + i\psi_2 = (Vr_0^2/r)\,(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta).$$

Por lo tanto,

$$\varphi_2 = (V\,r_0^2/r)\cos\theta, \quad \psi_2 = -\,(V\,r_0^2/r)\operatorname{sen}\theta. \tag{2.103}$$

El potencial complejo $W_3 = -\,\Gamma \ln z/(2\pi i)$ determina el flujo de circulación creado por el punto vorticial, situado en el origen de coordenadas (fig. 2.29, *c*). Para hallar el correspondiente potencial de velocidad y la función de la corriente sustituyamos en la expresión para W_3 la variable $\ln z = re^{i\theta}$, entonces $W_3 = \varphi_3 + i\psi_3 = i\Gamma(\ln r + i\theta)/(2\pi)$. Así, pues,

$$\varphi_3 = -\,\Gamma\theta/(2\pi); \quad \psi_3 = \Gamma \ln r/(2\pi). \tag{2.104}$$

Las líneas de corrientes son [su ecuación es $\psi_3 = \Gamma \ln r/(2\pi) = \text{const}$], en el caso dado, circunferencias concéntricas con centro en el origen de coordenadas.

2.40. Para determinar el potencial de velocidad y la función de la corriente del flujo resultante prefijado haremos uso de las dependencias (2.102)—(2.104). Sumando las correspondientes expresiones para los potenciales de velocidad $\varphi_{1\,(2,\,3)}$ y la función de la corriente $\psi_{1\,(2,\,3)}$, obtenemos

$$\varphi = V\,r\cos\theta + (V\,r_0^2/r)\cos\theta - \Gamma\theta/(2\pi);$$
$$\psi = V\,r\operatorname{sen}\theta - (V\,r_0^2/r)\operatorname{sen}\theta + \Gamma\ln r/(2\pi).$$

La correspondiente ecuación de las líneas de corriente tiene la forma

$$V\,r\operatorname{sen}\theta - (V\,r_0^2/r)\operatorname{sen}\theta + \Gamma\ln r/(2\pi) = \text{const}.$$

Examinemos una de las líneas de corriente a la que corresponde el valor const = 0. Como sabemos que dichas líneas en un flujo de circulación son circunferen-

cias de r = const, el término $\Gamma \ln r/(2\pi)$ puede excluirse de la consideración. Investiguemos la ecuación

$$Vr \operatorname{sen} \theta - (Vr_0^2/r) \operatorname{sen} \theta = 0.$$

Sustituyendo aquí $r \operatorname{sen} \theta = y$ y tomando en consideración que $r^2 = x^2 + y^2$, hallamos $Vy\,[1 - r_0^2/(x^2 + y^2)] = 0$. Esta ecuación se descompone en dos: $y = 0$ y $x^2 + y^2 = r_0^2$. La primera de ellas es el eje x y la segunda, una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y de radio r_0. Así, pues, en el flujo complicado del fluido que consideramos hay un hililllo que desde el infinito se dirige a lo largo del eje x, y, a continuación, se ramifica formando una circunferencia de radio r_0. Por esta causa, el flujo que se investiga es igual al que surge cuando alrededor de un cilindro inmóvil circula un flujo progresivo, con la particularidad de que semejante flujo, como sigue del análisis realizado, puede obtenerse como resultado de la adición de un flujo progresivo, un dipolo y un flujo de circulación (un vórtice).

Para determinar la velocidad en un punto arbitrario del flujo y en el contorno abarcado por la circulación, hagamos uso de la expresión para el potencial de velocidad

$$\varphi = V\,(1 + r_0^2/r^2)\, r \cos \theta - \Gamma\theta/(2\pi).$$

Fig. 2.30. Esquema de una fuente plana

Calculando las derivadas por r y s hallamos las correspondientes velocidades en el punto arbitrario del flujo:

$$V_r = \partial\varphi/\partial r = V \cos \theta - (V\, r_0^2/r^2) \cos \theta;$$

$$V_s = \partial\varphi/\partial s = (1/r)\partial\varphi/\partial\theta = -\,V \operatorname{sen} \theta\,(1 + r_0^2/r^2) - \Gamma/(2\pi r).$$

En el contorno abarcado por la circulación (la circunferencia de radio $r = r_0$)

$$\varphi = 2V\, r_0 \cos \theta - \Gamma\theta/(2\pi).$$

En dicho contorno la velocidad radial es igual a cero y la componente tangencial determina la velocidad total:

$$V_s = V = \partial\varphi/\partial s = (1/r_0)\, \partial\varphi/\partial\theta = -\,2\, V \operatorname{sen} \theta - \Gamma/(2\pi r_0).$$

2.41. La velocidad debida a una fuente (sumidero) plana puntual varía en cierto punto del flujo de forma inversamente proporcional respecto a la distancia desde la indicada fuente (sumidero). En realidad, el caudal del fluido por una circunferencia de radio r con centro en la fuente (fig. 2.30) es igual a la intensidad de dicha fuente q, o sea, $q = 2\pi r V$. De aquí $V = q/(2\pi r)$.

Designemos con p_1 la presión en el infinito y, tomando en consideración que aquí el fluido está inmóvil ($V_1 = 0$), por la ecuación de Bernoulli obtenemos la presión

$$p = p_1 + \rho V_1^2/2 - \rho V^2/2 = p_1 - (\rho/2)\,[q/(2\pi r)]^2.$$

De aquí se desprende que, a medida que nos alejamos de la fuente, la presión crece. Con $r \to \infty$ (en el centro de la fuente, en el llamado punto singular) la velocidad $V \to \infty$, la presión $p \to -\infty$. Velocidades y presiones infinitas no surgen en un fluido, por lo que los puntos singulares, generalmente, se excluyen de la consideración.

Capítulo 3

Fundamentos de dinámica de los fluidos (líquidos y gases)

A los más importantes problemas de dinámica de los fluidos se refiere el establecimiento de las dependencias entre las características cinemáticas y dinámicas de los flujos, lo que es necesario, ante todo, para estudiar la interacción de las fuerzas entre el medio líquido o gaseoso y los sólidos que se mueven en ellos. Esta interacción se manifiesta en la correspondiente distribución, por la superficie alrededor de la que transcurre la circulación, de las tensiones tangenciales y normales.

La investigación de la circulación alrededor de los sólidos, es decir, la determinación en cada punto del flujo del fluido de los parámetros que caracterizan dicha circulación consiste en la resolución de las correspondientes ecuaciones hidroaerodinámicas. Por regla, estas ecuaciones forman un sistema de relaciones independientes, cuya cantidad se determina por el número de los parámetros desconocidos del gas o el líquido que circulan.

Al confeccionar los sistemas de ecuaciones de hidroaerodinámica es necesario imaginarse el sentido físico de los términos individuales de estas ecuaciones y de éstas en su total, ya que esto permite en cada caso concreto elegir el correspondiente tipo de ecuaciones, que con el mayor grado caracterizan el modelo adoptado del flujo.

A su vez, la elección precisa de semejante modelo (fluido incompresible o compresible, flujo uniforme o inuniforme, plano o espacial, etc.) simplifica considerablemente la confección de las ecuaciones y su aplicación.

En hidroaerodinámica tienen gran importancia las soluciones particulares de las ecuaciones diferenciales, tales como las integrales de Gromeka, Lagrange, Euler, Bernoulli. La comprensión correcta del sentido físico de estas integrales permite aplicarlas exitosamente y con precisión representarse los márgenes de su empleo justificado.

El cálculo de una extensa clase de problemas de hidroaerodinámica de flujos unidimensionales uniformes e isentrópicos de fluidos incompresibles y compresibles se basa en la aplicación de las ecuaciones de Bernoulli. La investigación de los flujos de un gas compresible tiene gran significado práctico, ya que permite introducir una serie de parámetros que caracterizan el movimiento del gas (parámetros de remanso, velocidad máxima, etc.), así como establecer la ligazón entre diversos parámetros del flujo y la forma del chorro o el canal. De acuerdo con las ecuaciones de Bernoulli se ha obtenido un amplio juego de relaciones de dinámica de los gases (funciones) que constituyen el aparato matemático fundamental empleado en los cálculos de los flujos isentrópicos del gas.

Las características aerodinámicas de los vehículos volantes o de sus elementos aislados pueden determinarse no sólo teóricamente con ayuda de las correspondientes ecuaciones de movimiento del fluido, sino también de modo experimental. Al realizar experimentos con vehículos volantes deben cumplirse las condiciones de semejanza aerodinámica.

Una serie de preguntas y problemas del presente capítulo está dedicada al análisis de los criterios de tal semejanza para diferentes condiciones de circulación, a determinar los correspondientes parámetros del flujo en los túneles aerodinámicos o bien en otras instalaciones experimentales de laboratorio.

Problemas y preguntas

3.1. Las ecuaciones de movimiento de un gas viscoso (ecuaciones de Navier — Stokes) con $\mu = \text{const}$ tienen la forma

$$\left.\begin{aligned} dV_x/dt &= X - (1/\rho)\,\partial p/\partial x + \nu\Delta V_x + (\nu/3)\,(\partial/\partial_x)\,\operatorname{div} V; \\ dV_y/dt &= Y - (1/\rho)\,\partial p/\partial y + \nu\Delta V_y + (\nu/3)\,(\partial/\partial y)\,\operatorname{div} \vec{V}; \\ dV_z/dt &= Z - (1/\rho)\,\partial p/\partial z + \nu\Delta V_z + (\nu/3)\,(\partial/\partial z)\,\operatorname{div} \vec{V}. \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

¿Qué forma tomarán estas ecuaciones para un flujo unidimensional inuniforme (no estacionario de un gas ingrávido compresible y para el movimiento uniforme (estacionario) de un líquido ingrávido incompresible?

3.2. Deduzcan la ecuación de difusión para el flujo plano de un gas con relación a un sistema cartesiano de ejes de coordenadas.

3.3. La ecuación de energía para el movimiento bidimensional (plano) de un gas viscoso conductor del calor (al no haber termotransferencia de difusión y radiación) tiene la forma

$$\rho di/dt = dp/dt + \mu\,\{2[\,(\partial V_x/\partial x)^2 + (\partial V_y/\partial y)^2] - $$
$$- (2/3)\,(\operatorname{div} \vec{V})^2 + 4\,\varepsilon_z^4\} + \operatorname{div}\,(\lambda \operatorname{grad} T). \tag{3.2}$$

En esta ecuación separen los términos disipativos, así como escriban la ecuación de energía a condición de que el movimiento del gas transcurre a pequeñas velocidades.

3.4. Alrededor de un ala de envergadura infinita circula sin deslizamiento el flujo de un gas ingrávido, compresible, no viscoso y que no irradia. Los parámetros del flujo incidente son conocidos. Indiquen los parámetros del flujo uniforme perturbado que hay que determinar (a condición de la constancia de la capacidad calorífica) y escriban el correspondiente sistema de ecuaciones.

3.5. Para todo medio gaseoso barotrópico, caracterizado por una dependencia unívoca entre la presión y la densidad, la razón dp/ρ es la diferencial de la función P. Hallen el valor de esta función para el caso del flujo adiabático del gas.

3.6. Una de las integrales particulares de las ecuaciones de movimiento de un gas no viscoso tiene la forma

$$\partial\varphi/\partial t + V^2/2 + \int dp/\rho + U = C\,(t). \tag{3.3}$$

¿Cómo se denomina la integral y cuál es su sentido físico? Asimismo, expliquen el sentido físico de la variable $\partial\varphi/\partial t$.

3.7. Enuncien la condición física que corresponde a la ecuación de Lagrange

$$\left[V_1^2/2 + \left(\int dp/\rho\right)_1 + U_1\right] - \left[V_2^2/2 + \left(\int dp/\rho\right)_2 + U_2\right] = (\partial\varphi/\partial t)_2 - (\partial\varphi/\partial t)_1, \tag{3.4}$$

reducida para dos puntos arbitrarios en un flujo, tomados en un mismo momento de tiempo.

3.8. Indiquen qué propiedad posee un flujo de gas para el que es justa la ecuación de Lagrange de la forma

$$\partial\varphi/\partial t + V^2/2 + i = C\,(t). \tag{3.5}$$

3.9. Escriban la integral particular de la ecuación de movimiento de un fluido no viscoso compresible que es la integral de Euler. ¿Cuál es el sentido físico de esta integral y en qué se diferencia de la de Lagrange?

3.10. La ecuación del movimiento vorticial (no potencial) uniforme de un fluido compresible tiene en forma vectorial el aspecto

$$\mathrm{grad}\ (V^2/2) + \mathrm{rot}\ \vec{V} \times \vec{V} = \vec{G} - (1/\rho)\ \mathrm{grad}\ p. \tag{3.6}$$

Indiquen las posibles integrales particulares de esta ecuación.

3.11. ¿Qué ley de física yace en la base de la ecuación (integral) de Bernoulli

$$V^2/2 + gy + p/\rho + U = \mathrm{const}? \tag{3.7}$$

Consideren el sentido físico de los términos de dicha integral.

3.12. En un canal hidrodinámico se estudia el modelo de una nave, cuya longitud en tamaño natural $L_{\mathrm{nat}} = 160$ m y la velocidad $V_{\mathrm{nat}} = 14$ m/s. Determinen a qué velocidad se desplazará por dicho canal un modelo, cuya longitud es $L_{\mathrm{mod}} = 3$ m.

3.13. Un aparato volante está calculado para un movimiento, en condiciones atmosféricas normales, a velocidades $V_{\mathrm{nat}} = 80...160$ m/s. Para las pruebas en un túnel aerodinámico de densidad regulable se emplea el modelo de este aparato realizado a la escala 1 : 10. La prueba se realiza manteniendo la presión en la zona de trabajo del túnel $p = 2 \cdot 10^6$ Pa y la temperatura $T = 298$ K. Determinen a qué velocidades hay que probar el modelo para asegurar la semejanza aerodinámica según el número **Re**.

• **3.14.** En un túnel aerodinámico de densidad regulable se prueba el modelo de una ala con cuerda $b_{\mathrm{mod}} = 150$ mm. La velocidad del flujo de aire en el túnel $V_{\mathrm{mod}} = 25$ m/s y la temperatura del aire $T_{\mathrm{mod}} = 303$ K. Determinen a qué presión hay que realizar las pruebas para asegurar la semejanza aerodinámica según el número **Re**. El ala de tamaño natural tiene la cuerda $b_{\mathrm{nat}} = 1{,}2$ m y una velocidad de movimiento $V_{\mathrm{nat}} = 90$ m/s.

3.15. El avión a diseñar se calcula para que se mueva en la atmósfera de la Tierra a una velocidad $V_{\mathrm{nat}} = 100$ m/s a la altura H = 10 km. Durante las pruebas del modelo del avión disminuido 10 veces en el túnel aerodinámico de densidad regulable fue alcanzada la semejanza según los números **M** y **Re** a la temperatura de 293 K del flujo de aire en el túnel. Determinen la presión y la velocidad del flujo durante el experimento en el túnel aerodinámico.

3.16. Para la simulación de la resistencia durante el aterrizaje del avión se ha construido su modelo reducido en tres veces. Determinen la velocidad del flujo en la zona de trabajo del túnel aerodinámico, suponiendo que la resistencia al avance está condicionada, fundamentalmente, por el rozamiento, mientras que la velocidad del avión de tamaño natural es $V_\infty = 45$ m/s.

3.17. El cohete, que se diseña en forma de un sólido de revolución, tendrá la velocidad $V_\infty = 1000$ m/s a la altura $H = 10$ km. Determinen los parámetros del flujo de aire en la zona cerrada de trabajo de un túnel ultrasónico que asegura la semejanza aerodinámica según las fuentes de resistencia por rozamiento y las fuerzas provocadas por el efecto de compresibilidad del cohete de tamaño natural y de su modelo reducido 20 veces. La temperatura del aire en la antecámara del túnel aerodinámico $T_0 = 288$ K.

3.18. En la zona de trabajo de un túnel aerodinámico supersónico el aire alcanza la velocidad de 700 m/s y la temperatura de 193 K. Determinen a qué velocidad debe moverse un vehículo volante a la altura H = 5 km en la atmósfera

de la Tierra, cuyo modelo se ensayaba en dicho túnel, para que sea posible hacer uso de los resultados de las investigacions experimentales del efecto de la compresibilidad sobre las características aerodinámicas.

3.19. Demuestren que a velocidades muy pequeñas la ecuación de Bernoulli

$$V^2/2 + [k/(k-1)]\, p/\rho = \text{const} \tag{3.8}$$

se reduce a la forma

$$\rho V^2/2 + p = p_0, \tag{3.9}$$

que corresponde al movimiento de un líquido incompresible.

3.20. Hallen el error cometido al determinar la presión de un gas que, convencionalmente, se considera como un medio incompresible.

3.21. Con $M_\infty = 0{,}8$ calculen el coeficiente de presión en el punto de remanso total.

3.22. Determinen el error al medir la velocidad de un flujo de aire con el tubo de Prandtl, si la velocidad $V = 120$ m/s y la temperatura del flujo es 293 K.

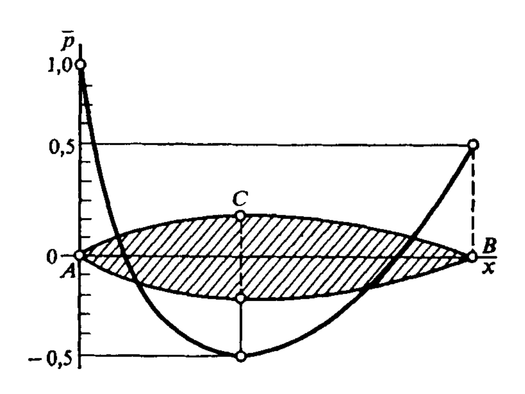


Fig. 3.1. Distribución del coeficiente de presión por el perfil

3.23. Hallen el error de cálculo de la densidad al emplear el modelo de un flujo de un fluido incompresible. Determinen que error se admite en aerodinámica de un medio incompresible al suponer que la densidad del aire es magnitud constante a la velocidad $V_\infty = 100$ m/s y temperatura 288 K ($a_\infty = 341$ m/s).

3.24. Determinen la velocidad máxima de un flujo, por debajo de la cual él puede considerarse como un fluido incompresible, si la variación máxima de la densidad del aire en el campo del flujo, con la que la compresibilidad puede despreciarse, constituye el 1 % (se supone que la corriente comienza del estado correspondiente a las condiciones normales y es isentrópica).

3.25. En la fig. 3.1 se muestra la distribución del coeficiente de presión $\bar{p} = (p - p_\infty)/(\rho V_\infty^2/2)$ obtenida según los resultados del ensayo del perfil del ala en un túnel aerodinámico de poca velocidad, en el que la velocidad del flujo en la zona de trabajo $V_\infty = 100$ m/s. De acuerdo con los datos de dicha distribución tracen las curvas de variación de la velocidad a lo largo del perfil y el área de la sección transversal del hilillo imaginario que circula alrededor del indicado perfil.

3.26. Mediante las pruebas en el túnel aerodinámico se ha hallado la distribución de la presión junto a una superficie alrededor de la cual circula un flujo puramente subsónico. Conociendo en el punto prefijado de la superficie el coeficiente de presión $\bar{p} = (p - p_\infty)/(\rho V_\infty^2/2) = -0{,}3$, así como los parámetros en la zona de trabajo del túnel ($p_\infty = 10^5$ Pa, $T_\infty = 288$ K, $V_\infty = 200$ m/s), determinen en ese punto la presión absoluta, el número M, la densidad, la temperatura, las velocidades del sonido y del flujo y la entalpía.

3.27. En dos secciones *1—1* y *2—2* de chorros de pequeña curvatura y de área S_1 y S_2, respectivamente, se han medido los valores de la presión estática p_1 y p_2 de flujos de un fluido incompresible y de una corriente compresible (isentrópica)

de aire. Determinen las velocidades V_1 y V_2 del fluido incompresible y los números M_1 y M_2 del flujo compresible en dichas secciones a condición de que $S_2/S_1 = 0{,}5$; $p_1 = 10^5$ Pa; $\rho_1 = 1{,}226$ kg/m³; $p_2 = 0{,}999 \cdot 10^5$ Pa para el flujo incompresible y $p_2 = 0{,}5 \cdot 10^5$ Pa para el compresible.

3.28. En un túnel aerodinámico supersónico la salida del aire de la tobera se produce a la velocidad $V = 450$ m/s y a la temperatura $T = 220$ K. ¿Cuál será el correspondiente número M y cómo variará él si mediante el calentamiento se aumenta la temperatura del aire en la zona de trabajo del túnel hasta $T = 285$ K?

3.29. ¿Cómo variará la velocidad máxima de salida de un gas de un receptáculo con el aumento isotérmico de la presión en él?

3.30. Hallen la velocidad máxima durante la expansión del aire que tenía la temperatura inicial $T_0 = 300$ K.

3.31. Determinen el número $M = V/a$ y la velocidad relativa $\lambda = V/a^*$, así como la velocidad máxima y la velocidad del sonido para un chorro de aire que sale de la tobera a una velocidad igual a la mitad de la velocidad máxima. La temperatura del aire en el receptáculo es de 288 K.

3.32. Hallen el número M local que corresponde a la velocidad relativa $\lambda = V/a^* = 2{,}2$ $(k = c_p/c_v = 1{,}4)$.

3.33. ¿Qué parámetros (presión y temperatura) debe tener el aire en la antecámara de un túnel aerodinámico supersónico para que con la expansión normal tenga en su parte de trabajo, en la que la presión $p = 10^5$ Pa, una velocidad $V = 800$ m/s a la temperatura de 200 K?

3.34. ¿Qué calentamiento del aire hay que asegurar a un recipiente (botella) con presión $p_0 = 20 \cdot 10^5$ Pa para obtener, en caso de salida prevista del gas por la tobera a la atmósfera, cuyos parámetros correspoden a las condiciones normales (estándar), la velocidad $V = 700$ m/s?

3.35. Un flujo de aire supersónico con número $M_\infty = 1{,}5$ y una razón del calor específico $k = c_p/c_v = 1{,}4$ tiene la temperatura estática 223 K. Determinen la velocidad crítica del sonido de este flujo.

3.36. ¿Qué velocidad máxima del aire puede obtenerse sin calentamiento en un túnel supersónico, si el aire se licúa a la temperatura $T = 78$ K?

3.37. Son conocidos los ángulos de Mach μ_1, μ_2 en dos puntos de un flujo isentrópico, con la particularidad de que $\mu_1 > \mu_2$. Determinen los números M y las presiones en dichos puntos y comparen entre sí los correspondientes valores de estos parámetros.

3.38. Escriban las dependencias que establecen la ligazón entre los parámetros estáticos, los de remanso y la velocidad relativa λ de movimiento de un gas, haciendo uso de las conocidas funciones gasodinámicas del tipo $p/p_0 = [1 + (k - 1) M^2/2]^{-k/(k-1)}$ y la correspondiente dependencia $M = f(\lambda)$.

3.39. ¿Qué ligazón existe entre las velocidades relativas λ y los correspondientes valores de las presiones, densidades y temperaturas de dos flujos con iguales parámetros de remanso?

3.40. En cierta sección de un canal el flujo de aire $[k = c_p/c_v = 1{,}4$; $R = 287$ J/(kg·K)$]$ tiene el número $M = 0{,}2$. Determinen el caudal másico por segundo del aire, si la presión de remanso de éste $p_0 = 3 \cdot 10^5$ Pa, la temperatura de remanso $T_0 = 300$ K, el área de la sección $S = 0{,}1$ m².

3.41. El aire $(k = c_p/c_v = 1{,}4)$ se mueve por un tubo de sección variable, con ello en la sección *1* el número $M_1 = 1$, en la *2*, $M_2 = 2$. Hallen la relación entre las velocidades del aire en estas secciones, así como determinen lo que ocurre con la energía cinética de la unidad de volumen del aire durante el movimiento de la sección *1* a la sección *2*.

3.42. Entre dos secciones de la parte que se ensancha de una tobera supersónica el número M aumenta desde $M_1 = 2$ hasta $M_2 = 3$. Determinen qué es lo que sucede con la energía cinética de la unidad de masa durante el movimiento que transcurre de la sección *1* a la *2*, así como hallen la razón de las presiones dinámicas en las secciones que consideramos, suponiendo que el flujo es isentrópico y las capacidades caloríficas constantes ($k = c_p/c_v = 1{,}4$).

3.43. La presión y la temperatura de un flujo de aire remansado son iguales a $p_0 = 10^5$ Pa y $T_0 = 1000$ K, respectivamente. Determinen los valores críticos de la presión, densidad y temperatura, tomando en consideración que el flujo es isentrópico y el índice adiabático es constante e igual a $k = c_p/c_v = 1{,}4$.

3.44. El aire sale de un receptáculo por una boquilla cónica de diámetro en la salida $d = 10$ cm. La temperatura del aire en el receptáculo $T_0 = 318$ K y la presión en el medio ambiente $p_{ext} = 10^5$ Pa. Calculen la presión, temperatura, densidad y velocidad del aire en el plano de salida de la boquilla y el caudal para dos casos: $p_0 = 9 \cdot 10^5$ Pa; $p_0 = 1{,}5 \cdot 10^5$ Pa. La razón de los calores específicos para el aire $k = c_p/c_v = 1{,}4$; la constante de los gases $R = 287$ J/(kg·K).

3.45. Elijan el área de la sección crítica de una tobera supersónica que asegure un caudal ponderal del aire por segundo $\dot{G} = 10$ N/s, si la salida es la prevista y ella transcurre de un recipiente donde la presión $p_0 = 6 \cdot 10^5$ Pa y la temperatura $T_0 = 288$ K.

3.46. El aire sale de un recipiente ($p_0 = 29{,}4 \cdot 10^5$ Pa; $T = 288$ K) a la atmósfera por una tobera de Laval. Determinen la velocidad, temperatura y densidad del aire en la salida de esta tobera, considerando que el flujo es adiabático y sin pérdidas, en tanto que el régimen de salida es el previsto.

3.47. El aire fluye de un recipiente a la atmósfera por una tobera de Laval a la velocidad $V_a = 800$ m/s y la temperatura $T_a = 203$ K. En las condiciones de un flujo adiabático y sin pérdidas, así como con el régimen previsto de funcionamiento de la tobera, determinen la presión, temperatura y densidad del aire en el recipiente.

3.48. En la antecámara de un túnel aerodinámico hay aire [$k = c_p/c_v = 1{,}4$; $R = 287$ J/(kg·K)] a la temperatura $T_0 = 293$ K. Determinen la presión p_0 y la densidad ρ_0 en la antecámara, la velocidad V_a, los números M_a y λ_a, la densidad ρ_a y la temperatura T_a en la sección de salida de la tobera, así como el caudal ponderal del gas por segundo, a condición de que la presión en el plano de salida de la tobera $p_a = 10^5$ Pa, la razón entre el área S^* de la sección crítica de la tobera y el área S_a de la sección de salida $S^*/S_a = 0{,}2$, siendo $S_a = 0{,}16$ m².

3.49. ¿Cómo varían los parámetros del gas en el plano de salida de una tobera supersónica de dimensiones geométricas constantes al aumentar dos veces la presión de modo isotérmico en la antecámara?

3.50. ¿Cómo varían los parámetros del gas en el plano de salida de una tobera supersónica con dimensiones geométricas constantes al disminuir 1,5 veces la presión en la antecámara de forma isotérmica?

3.51. Determinen hasta qué grado cambiarán los parámetros M_a, p_a, T_a, ρ_a, V_a en la sección de salida de una tobera supersónica al variar simultáneamente la temperatura y la presión en la antecámara: T_0 el $\pm$ 10% y p_0 el $\pm$ 8%. La presión del gas en la antecámara $p_0 = 40 \cdot 10^5$ Pa; $k = c_p/c_v = 1{,}2$; $p_{ext} = 10^5$ Pa.

3.52. De la cámara de combustión el gas sale a la atmósfera (altura $H = 5$ km) por una tobera de Laval. Determinen la presión en la cámara de combustión con la que la tobera supersónica funciona en el régimen previsto, si son conocidos la razón entre el área de la sección de salida de la tobera y el área de la sección crítica $S_a/S^* = 3$ y el índice adiabático del gas $k = c_p/c_v = 1{,}33$.

3.53. Calculen los parámetros del gas [$k = c_p/c_v = 1{,}2$; $R = 333$ J/(kg·K)] que fluye de un recipiente ($p_0 = 40{,}18 \cdot 10^5$ Pa, $T_0 = 3000$ K) por una tobera supersónica y construyan las gráficas de variación de la presión, temperatura, densidad, velocidad del sonido, velocidad del flujo de gas y del número **M** por la largura de la tobera, así como determinen el caudal ponderal del gas por segundo y el régimen de funcionamiento de la tobera. El movimiento del gas es isentrópico. La presión en el medio al que sale el gas $p_{ext} = 40{,}18 \cdot 10^2$ Pa. Las dimensiones de la tobera se aducen a continuación:

Sección	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
x, mm	0	22	35	50	65	80	110	140	170	200
d, mm	100	79	35,6	20	26	32	44	55,4	68,8	80

Observación: x es la distancia desde la sección de entrada de la tobera *1*, d, el diámetro de la sección que se considera; la sección *4* es la crítica.

3.54. En la sección de salida de una tobera supersónica son conocidos la velocidad $V_a = 8000$ m/s, el número $\mathbf{M}_a = 5$ y la presión $p_a = 9{,}8 \cdot 10^2$ Pa. Determinen la presión p_0 y la temperatura T_0 del aire en la antecámara que son necesarias para asegurar dichos parámetros.

3.55. La presión y la temperatura en la antecámara $p_0 = 98 \cdot 10^5$ Pa y $T_0 = 12\,000$ K. Determinen la variación de la densidad, presión, temperatura y número **M** cuando el aire disociado fluye de forma isentrópica por el canal de una tobera supersónica, en cuya sección de salida de área $S_a = 0{,}16$ m² la velocidad $V_a = 8000$ m/s.

Solución de los problemas y respuestas a las preguntas

3.1. En el modelo de un gas ingrávido (líquido ingrávido) se desprecia la fuerza de la gravedad másica haciendo $X = Y = Z = 0$.

El movimiento unidimensional se caracteriza porque los parámetros del gas varían sólo en una cierta dirección, p. ej., a lo largo del eje x. De acuerdo con esto la ecuación de movimiento para un flujo unidimensional inuniforme ($\partial V_x/\partial t \neq 0$) de un gas ingrávido compresible ($\operatorname{div} \vec{V} \neq 0$) tiene la forma

$$dV_x/dt = -(1/\rho)(dp/dx) + (4/3)\,\nu\partial^2 V_x/\partial x^2, \tag{3.10}$$

donde $dV_x/dt = \partial V_x/\partial t + (\partial V_x/\partial x) V_x$.

Los parámetros del movimiento plano varían en dos direcciones (p. ej., a lo largo de los ejes x e y), en tanto que la propiedad de incompresibilidad del fluido se caracteriza por el valor de $\operatorname{div} \vec{V} = 0$. Así, pues, las ecuaciones de Navier — Stokes para un flujo plano uniforme ($\partial V_x/\partial t = \partial V_y/\partial t = 0$) de un fluido ingrávido toman la forma

$$dV_x/dt = -(1/\rho)\,\partial p/\partial x + \nu\Delta V_x; \quad dV_y/dt = -(1/\rho)\,\partial p/\partial y + \nu\Delta V_y, \tag{3.11}$$

donde $dV_x/dt = V_x\partial V_x/\partial x + V_y\partial V_x/\partial y$; $dV_y/dt = V_x\partial V_y/\partial x + V_y\partial V_y/\partial y$; $\Delta V_x = \partial^2 V_x/\partial x^2 + \partial^2 V_x/\partial y^2$; $\Delta V_y = \partial^2 V_y/\partial x^2 + \partial^2 V_y/\partial y^2$.

3.2. Consideremos el flujo plano uniforme de un gas y separemos una partícula elemental en forma de un paralelepípedo rectangular con caras dx, dy, *1* construido

junto al punto M (x, y), en el cual las componentes de la velocidad son V_x y V_y (fig. 3.2).

La ecuación de difusión es la ecuación de transferencia del i-ésimo componente del gas (esta ecuación es la de continuidad para ese mismo componente). El caudal del i-ésimo componente del gas en la dirección del eje y por la superficie $S_y = 1\,dx$ constituye $m_y = \rho V_y c_i 1\,dx + Q_{i\,\text{dif}\,y}\, 1\,dx$, donde c_i es la concentración del componente i-ésimo; $Q_{i\,\text{dif}\,y} = \rho D_i\,(\partial c_i/\partial y)$, el flujo de difusión por la unidad de área; D_i, el coeficiente de difusión.

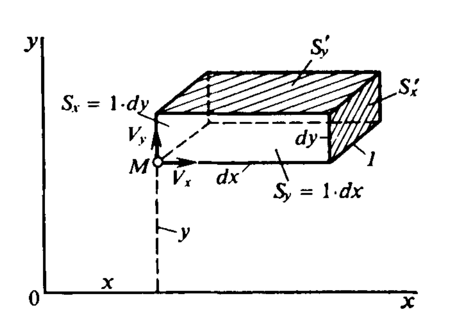


Fig. 3.2. Esquema para deducir las ecuación de difusión

Por la superficie S'_y (fig. 3.2) el caudal de este componente del gas $m_y + (\partial m_y/\partial y)\,\partial y = m_y + [\partial(\rho V_y c_i)/\partial y] \times dx dy + (\partial Q_{i\,\text{dif}\,y}/\partial y)\,dx\,dy$.

El aflujo del componente del gas al volumen que consideramos por las aristas S_y y S'_y $[\partial\,(\rho V_y c_i)/\partial y]\,dx\,dy + (\partial Q_{i\,\text{dif}\,y}/\partial y)\ dx\,dy$.

El aflujo del i-ésimo componente en la dirección del eje x por las superficies S_x y S'_x es igual a $[\partial\,(\rho V_x c_i/\partial x]\,dx\,dy + (\partial Q_{i\,\text{dif}\,x}/\partial x)\,dx\,dy$, donde $Q_{i\,\text{dif}\,x} = \rho D_i\,(\partial c_i/\partial x)$.

El aflujo total de este componente del gas es igual a su masa $(w_{\text{quím}})_i\,dx\,dy$ formada a cuenta de las reacciones químicas por unidad de tiempo, donde $(w_{\text{quím}})_i$ es la velocidad de formación del componente por unidad de tiempo.

Componiendo el balance del aflujo total y del caudal a cuenta de las reacciones químicas, obtenemos la ecuación de difusión

$$\partial\,(\rho V_x c_i)/\partial x + \partial\,(\rho V_y c_i)/dy = -\partial Q_{i\,\text{dif}\,x}/\partial x - \partial Q_{i\,\text{dif}\,y}/\partial y + w_{\text{quím}}. \qquad (3.12)$$

3.3. La *disipación de energía* consiste en que parte de la energía mecánica se convierte irreversiblemente en calor. De acuerdo con esto las fuerzas de rozamiento se denominan disipativas. De esta forma, en (3.2) son disipativos todos los términos de la ecuación que contienen la viscosidad dinámica μ.

A pequeñas velocidades de movimiento del gas el trabajo de las fuerzas de rozamiento es pequeño y en la ecuación de la energía (3.2) es posible despreciar los términos disipativos. Además, también es pequeño el trabajo de las fuerzas de presión ($\partial p/\partial t \approx 0$), y los parámetros ρ, c_p y λ pueden considerarse constantes. Teniendo esto en cuenta es posible representar la ecuación de la energía en la forma

$$dT/dt = a \operatorname{div}(\operatorname{grad} T), \qquad (3.13)$$

donde $a = \lambda/(\rho c_p)$ es la difusibilidad térmica que caracteriza la velocidad de nivelación del campo de temperatura.

3.4. Para el flujo que consideramos las variables desconocidas son dos componentes de la velocidad V_x, V_y, la presión p, la densidad ρ y la temperatura T. El correspondiente sistema consta de dos ecuaciones de movimiento, así como de las ecuaciones de continuidad, de estado y de energía.

Para el flujo uniforme de gas ingrávido compresible y no viscoso (y por lo tanto, que no conduce el calor), despreciando la variación de los calores específicos

debida a la temperatura y sin tomar en consideración la difusión y la radiación, dicho sistema de ecuaciones toma la forma

$$\left.\begin{array}{l} dV_x/dt = -(1/\rho)\,\partial p/\partial x; \quad dV_y/dt = -(1/\rho)\,\partial p/\partial y; \\ \operatorname{div} \rho V = 0; \quad p = \rho RT; \quad p = \text{const}\,\rho^k, \end{array}\right\} \qquad (3.14)$$

con la particularidad de que, a causa del carácter uniforme del movimiento ($\partial V_x/\partial t = \partial V_y/\partial t = 0$), las derivadas toman el aspecto
$dV_x/dt = (\partial V_x/\partial x)\,V_x + (\partial V_x/\partial y)\,V_y$; $dV_y/dt = (\partial V_y/\partial x)\,V_x + (\partial V_y/\partial y)\,V_y$.

3.5. Para el flujo adiabático de un gas existe la dependencia $p = A\rho^k$, donde A es una constante característica para las condiciones dadas del flujo.

Calculando la diferencial $dp = A\,k\rho^{k-1}\,d\rho$, hallamos $dP = dp/\rho = [Ak/(k-1)]\,d\,(\rho^{k-1})$, de donde

$$P = [k/(k-1)]\;p/\rho. \qquad (3.15)$$

3.6. La ecuación (3.3) lleva el nombre de *integral de Lagrange*. Esta integral establece que en un flujo potencial la energía total de la unidad de masa en el momento dado de tiempo es una magnitud igual para todos los puntos del flujo.

El sentido físico de la variable $\partial\varphi/\partial t$ en la integral de Lagrange consiste en lo siguiente. Con un flujo potencial la proyección del vector velocidad sobre cierta dirección s constituye $V_s = \partial\varphi/\partial s$, de donde la función potencial $\varphi = \int_{s_1}^{s_2} V_s\,ds$, donde s_1 y s_2 son las coordenadas de los dos puntos que examinamos. La derivada por el tiempo de esta función $\partial\varphi/\partial t = \int_{s_1}^{s_2} (\partial V_s/\partial t)\,ds$. Aquí $\partial V_s/\partial t$ es la aceleración local que determina cierta fuerza de inercia, en tanto que el producto $(\partial V_s/\partial t)\,ds$, por lo visto, corresponde al trabajo de esta fuerza en el sector ds. Así, pues, la variable $\partial\varphi/\partial t$ determina la energía de la unidad de masa del fluido, condicionada por la variación de la velocidad en el punto dado con el transcurso del tiempo, es decir, por el carácter inuniforme del movimiento.

3.7. La ecuación de Lagrange (3.4) refleja la condición de acuerdo con la cual, en caso de corriente potencial inuniforme de un fluido no viscoso, para dos cualesquiera puntos del flujo (p. ej., los puntos *1* y *2*) la diferencia entre las magnitudes iguales a la suma de la energía cinética $V^2/2$, así como las energías potenciales de presión $\int dp/\rho$ y de posición U de la unidad de masa de una partícula fluida, es igual al trabajo específico de la fuerza de inercia (véase el problema 3.6) correspondiente a la aceleración local en cualquier sector entre dichos puntos.

3.8. La ecuación de Lagrange (3.5) se aduce para el flujo potencial inuniforme de un gas ingrávido, compresible, barotrópico, cuando el carácter de dicho flujo es adiabático.

En efecto, para un fluido ingrávido la variación de la energía potencial de posición U puede despreciarse, mientras que con el carácter adiabático del flujo de un gas compresible barotrópico (véase el problema 3.5) $\int dp/\rho = [k/(k-1)] \times (p/\rho) = c_pT = i$. Teniendo en cuenta esto la ecuación (3.5) se obtiene de la forma más general de la ecuación de Lagrange (3.3) aducida en el problema 3.6.

3.9. La integral de Euler para un *fluido no viscoso compresible ingrávido* tiene la forma

$$V^2/2+\int dp/\rho+U=\text{const} \tag{3.16}$$

y establece que con el movimiento potencial uniforme de un fluido la energía total de la unidad de masa es una magnitud constante para todos los puntos del flujo. De (3.16) hallamos la integral de Euler de la forma

$$V^2/2+p/\rho=\text{const} \tag{3.17}$$

que es una integral particular de la ecuación de movimiento de Euler para el flujo potencial uniforme de un *fluido no viscoso incompresible ingrávido*. En efecto para un fluido incompresible $\int dp/\rho = p/\rho$, en tanto que para un fluido ingrávido podemos despreciar la variación de la energía potencial de posición U.

La integral de Euler es una forma particular de la de Lagrange (3.3) y se diferencia de ella por el carácter uniforme del movimiento $\partial\varphi/\partial t=0$ y la función $C(t)=\text{const}$, o sea, ella tampoco depende del tiempo.

3.10. La ecuación de movimiento (3.6) fue por primera vez obtenida por el científico ruso *I.S. Gromeka*. Aduzcamos dicha ecuación en otra forma.

Suponiendo que las fuerzas másicas (de masa) tienen un potencial U, de forma que $\partial U/\partial x=-X$, $\partial U/\partial y=-Y$, $\partial U/\partial z=-Z$, hallamos que el vector de aceleración de las fuerzas másicas $\vec{G}=-\text{grad } U$.

Para un medio barotrópico la razón dp/ρ es igual a la diferencial de la función P y, por lo tanto, $(1/\rho)\text{ grad } p=\text{grad } P=\text{grad}\left(\int dp/\rho\right)$.

De acuerdo con esto la ecuación (3.6) puede presentarse en la forma

$$\text{grad}\left(V^2/2+\int dp/\rho+U\right)=-(\text{rot }\vec{V})\times\vec{V}.$$

Consideremos el vector $\vec{ds}=dx\,i+dy\,j+dz\,k$ que es el arco de cierta curva en el flujo de un gas y determinemos el producto escalar:

$$\vec{ds}\,\text{grad}\left(V^2/2+\int dp/\rho+U\right)=-\vec{ds}\,[\text{rot }\vec{V})\times\vec{V}].$$

El primer miembro de la expresión aducida es igual a la diferencia total del trinomio entre paréntesis:

$$(\partial/\partial x)\left(V^2/2+\int dp/\rho+U\right)dx+(\partial/\partial y)\left(V^2/2+\int \partial p/\rho+U\right)dy+$$
$$+(\partial/\partial z)\left(V^2/2+\int dp/\rho+U\right)dz=d\left(V^2/2+\int dp/\rho+U\right).$$

El vector en el segundo miembro

$$(\text{rot }\vec{V})\times\vec{V}=2\vec{\omega}\times\vec{V}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2\omega_x & 2\omega_y & 2\omega_z\\ V_x & V_y & V_z\end{vmatrix}.$$

Tomando en consideración las expresiones obtenidas

$$-d\left(V^2/2+\int dp/\rho+U\right)=2\begin{vmatrix} dx & dy & dz\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ V_x & V_y & V_z\end{vmatrix}. \tag{3.18}$$

Analicemos la expresión (3.18). Aclaremos las condiciones con las que la magnitud $V^2/2 + \int dp/\rho + U$ es constante, lo que corresponde a la conservación de la energía total de la unidad de masa del gas con movimiento uniforme. Es evidente que para esto es preciso que el determinante en (3.18) sea igual a cero, lo que ocurrirá en el caso cuando los elementos de cualquier fila sean proporcionales a los correspondientes elementos de otra fila. Por lo tanto, podemos representar las dependencias

$$dx/V_x = \partial y/V_y = dz/V_z; \quad dx/\omega_x = dy/\omega_y = dz/\omega_z; \quad V_x/\omega_x = V_y/\omega_y = V_z/\omega_z,$$

de las que la primera es la ecuación de las líneas de corriente, la segunda la ecuación de las líneas de vórtice, la tercera determina la condición con la que las líneas de corriente y las de vórtice coinciden, es decir, la partícula fluida gira alrededor del eje a lo largo del cual transcurre el movimiento.

Así, pues, la ecuación de movimiento en la forma de Gromeko proporciona tres integrales particulares para el movimiento turbulento (vorticial) uniforme

$$V^2/2 + \int dp/\rho + U = C_{1,2,3}$$

que corresponden a las tres condiciones obtenidas. Las constantes C_1, C_2, C_3 se determinan para los puntos en aquella región donde las líneas de corriente coinciden con las de vórtice.

3.11. Desde el punto de vista físico la ecuación de Bernoulli (3.7) representa la ley de conservación de la energía aplicada al flujo isentrópico de un fluido por un tubo currentilíneo.

Examinemos la deducción de esta ecuación, lo que nos permitirá aclarar el sentido físico de los términos que en ella entran.

Destaquemos en el flujo uniforme de un fluido no viscoso un tubo currentilíneo, limitado por dos secciones 1 y 2 normales al eje del tubo (fig. 3.3). Como la superficie del tubo currentilíneo es impermeable al fluido, la masa de éste, contenida entre dichas secciones, es igual en cualquier momento de tiempo. De acuerdo con esto, por las secciones que examinamos en iguales intervalos de tiempo fluyen iguales masas del fluido. Suponiendo que el flujo en el tubo currentilíneo es adiabático, hagamos uso de la ley de conservación de la energía, de acuerdo con la cual la energía total del flujo de un fluido que pasa por la sección 1, en el transcurso de cierto tiempo, es igual a la energía total del flujo del fluido que sale por la sección 2, durante ese mismo intervalo de tiempo.

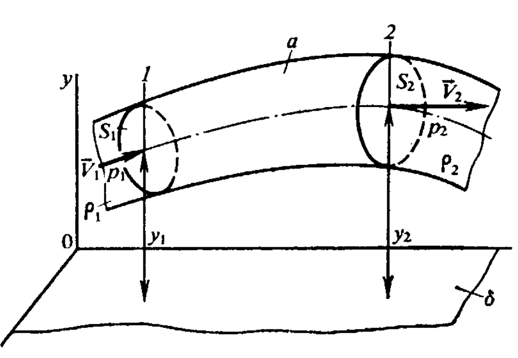


Fig. 3.3. Esquema de una corriente:
a, tubo currentilíneo; *b*, plano de nivelación

Sea que los parámetros de fluido en la sección se caracterizan con los valores promedios de la velocidad V, la presión p, la densidad ρ, etc. En el intervalo de tiempo Δt por la sección 1 de área S_1 pasa una masa del fluido $\rho_1 V_1 \Delta t S_1$, cuya energía total es igual a la suma de la energía cinética $(\rho_1 V_1 \Delta t S_1)(V_1^2/2)$, la energía potencial de presión $p_1 S_1 V_1 \Delta t = (p_1/\rho_1)(\rho_1 V_1 \Delta t S_1)$, la energía potencial del peso $(\rho_1 V_1 \Delta t S_1)\, g y_1$ (aquí y_1 es la altura de nivelación, con la particularidad de que el eje y, mostrado en la fig. 3.3, está dirigido contra el efecto de la fuerza de la gra-

vedad; g, la aceleración de la fuerza de la gravedad), así como la energía interna U_1 $(\rho_1 V_1 \Delta t S_1)$, donde U_1 es la energía interna de la unidad de masa del fluido.

De este modo, la energía total transportada por la masa $\rho_1 V_1 \Delta t S_1$ por la sección 1 en el tiempo Δt es igual a $(\rho_1 V_1 \Delta t S_1)(V_1^2/2) + (p_1/\rho_1)(\rho_1 V_1 \Delta t S_1) + (\rho_1 V_1 \Delta t S_1) g y_1 + U_1 (\rho_1 V_1 \Delta t S_1)$.

Es notorio que durante ese mismo intervalo de tiempo Δt por la sección 2 pasa una masa del fluido $\rho_2 V_2 \Delta t S_2 = \rho_1 V_1 \Delta t S_1$, cuya energía total

$$(\rho_2 V_2 \Delta t S_2)(V_2^2/2) + (p_2/\rho_2)(\rho_2 V_2 \Delta t S_2) + (\rho_2 V_2 \Delta t S_2) g y_2 + U_2 (\rho_2 V_2 \Delta t S_2).$$

De acuerdo con la ley de conservación de la energía

$$V_1^2/2 + p_1/\rho_1 + U_1 + g y_1 = V_2^2/2 + p_2/\rho_2 + U_2 + g y_2$$

o bien, como la sección 1 y 2 se han tomado al azar, $V^2/2 + p/\rho + U + gy = \text{const}$.

Como vemos de la deducción aducida, cada miembro de esta ecuación es el correspondiente tipo de energía de la unidad de masa del gas: $V^2/2$ es la energía cinética; p/ρ, la energía potencial de presión; U, la energía interna y gy, la energía potencial del peso.

De termodinámica sabemos que la entalpía de la unidad de masa del gas $i = U + p/\rho$. Así, pues la ecuación de Bernoulli puede tener la forma

$$V^2/2 + i + gy = \text{const}. \tag{3.19}$$

La energía interna de un fluido incompresible, a condición de que el flujo transcurre sin alimentación o extracción de calor, es una magnitud constante. De forma que en la ecuación de Bernoulli para un *fluido incompresible ponderable* es posible introducir la energía interna U de la unidad de masa en la constante y presentar la ecuación en la forma

$$V^2/2 + p/\rho + gy = \text{const}. \tag{3.20}$$

La ecuación de Bernoulli (3.19) para un *gas compresible ingrávido* es del aspecto

$$V^2/2 + i = \text{const}, \tag{3.21}$$

ya que en tal caso podemos despreciar la variación de la energía potencial gy.

3.12. El parámetro de semejanza durante las pruebas hidráulicas es el número de Froude, $\mathrm{Fr} = V^2/(Lg)$ igual a la razón entre la magnitud V^2/L, condicionada por la influencia de las fuerzas de inercia y la aceleración de la fuerza de gravedad g, que caracteriza la influencia del peso del fluido sobre la resistencia del sólido.

De acuerdo con la regla de semejanza, según el número de Froude, la velocidad del modelo y de la nave se refieren como las raíces cuadradas de la razón de sus dimensiones lineales. En efecto, de la igualdad $\mathrm{Fr}_{nat} = \mathrm{Fr}_{mod}$ o bien $V_{nat}^2/(L_{nat} g) = V_{mod}^2/(L_{mod}\, g)$ se desprende que $V_{mod}/V_{nat} = \sqrt{L_{mod}/L_{nat}}$. Poniendo en esta fórmula los datos iniciales determinamos la velocidad del modelo: $V_{mod} = 1{,}917$ m/s.

3.13. Determinemos la viscosidad dinámica a la temperatura $T = 298$ K, dada en el planteamiento, empleando la fórmula

$$\mu = \mu_0 (T/T_0)^{0,76}, \tag{3.22}$$

en la que $T_0 = 288$ K y $\mu_0 = 1{,}789 \cdot 10^{-5}$ Pa·s.

Poniendo aquí los datos, obtenemos $\mu = 1{,}836 \cdot 10^{-5}$ P·as.

De acuerdo con la ecuación de estado, tomando $R = 287$ J/(kg·K), hallamos la densidad del aire: $\rho = p/(RT) = 23{,}38$ kg/m³ y, a continuación, la viscosidad cinemática del flujo modelo: $\nu_{mod} = \mu/\rho = 0{,}07853 \cdot 10^{-5}$ m²/s.

De la igualdad de los números de Reynolds ($\mathrm{Re}_{nat} = \mathrm{Re}_{mod}$) tenemos $\nu_{mod} = (l_{nat}/l_{mod})\ V_{nat}\ \nu_{mod}/\nu_{nat}$.

Poniendo aquí los datos y tomando a condiciones normales la viscosidad cinemática $\nu_{nat} = 1{,}461 \cdot 10^{-5}$ m²/s, hallamos $V_{mod} = 0{,}5375\ V_{nat}$.

Para la banda de velocidades del vehículo volante $V_{nat} = 80\ldots160$ m/s obtenemos $V_{mod} = 43\ldots86$ m/s.

3.14. De la igualdad de los números de Reynolds, correspondientes a los flujos junto al ala de tamaño natural y al modelo ($\mathrm{Re}_{nat} = \mathrm{Re}_{mod}$), obtenemos $\nu_{mod} = (V_{mod}/V_{nat})\ b_{mod}\ \nu_{nat}/b_{nat}$. Haciendo $\nu_{nat} = 1{,}461 \cdot 10^{-5}$ m²/s, después de poner los datos obtenemos $\nu_{mod} = 0{,}05073 \cdot 10^{-5}$ m²/s.

Haciendo uso de la relación $\nu_{mod} = \mu/\rho$ y la dependencia (3.22) determinamos la densidad del flujo modelo de aire en el túnel aerodinámico: $\rho = \mu_0 (T/T_0)^{0,76}/\nu_{mod}$. La presión correspondiente $p = \rho RT = \mu_0 (T/T_0)^{0,76} RT/\nu_{mod}$.

Poniendo aquí los datos [$R = 287$ J/(kg·K)], hallamos $p = 31{,}87 \cdot 10^5$ Pa.

3.15. De la condición de semejanza por el número M para el avión de tamaño natural y el modelo ($\mathrm{M}_{nat} = \mathrm{M}_{mod}$), obtenemos $V_{mod} = V_{nat}\ (a_{mod}/a_{nat})$.

De las tablas de la atmósfera estándar, para la altura de 10 km, hallamos $a_{nat} = 299{,}4$ m/s. La velocidad del sonido en el flujo de aire en la zona de trabajo del túnel aerodinámico se calcula con la fórmula $a_{mod} = \sqrt{kRT_{mod}}$, donde para el aire $k = 1{,}4$ y $R = 287$ J/(kg·K).

Tomando $T_{mod} = 293$ K calculamos $a_{mod} = 343{,}1$ m/s. De este modo, en el túnel aerodinámico (con $V_{nat} = 100$ m/s) la velocidad del flujo $V_{mod} = 114{,}6$ m/s.

De la condición de la igualdad de los números Re ($\mathrm{Re}_{nat} = \mathrm{Re}_{mod}$) tenemos $\nu_{mod} = (V_{mod}/V_{nat})\ (l_{mod}/l_{nat})\ \nu_{nat}$.

De las tablas de la atmósfera estándar, para la altura $H = 10$ km, hallamos $\nu_{nat} = 3{,}523 \cdot 10^{-5}$ m²/s. Según el planteamiento del problema $l_{nat}/l_{mod} = 10$. Calculamos la viscosidad cinemática del flujo en el túnel: $\nu_{mod} = 0{,}4037 \cdot 10^{-5}$ m²/s.

De acuerdo con la temperatura $T_{mod} = 293$ K determinamos la viscosidad dinámica del flujo en el túnel haciendo uso de (3.22): $\mu_{mod} = 1{,}812 \cdot 10^{-5}$ Pa·s.

De la relación que refleja la dependencia entre las viscosidades μ y ν hallamos la densidad del flujo de aire en el túnel: $\rho_{mod} = \mu_{mod}/\nu_{mod} = 4{,}488$ kg/m³, y con la ecuación de estado, la presión en dicho flujo: $p_{mod} = \rho_{mod} RT_{mod} = 3{,}774 \cdot 10^5$ Pa.

3.16. *El criterio que caracteriza el valor relativo del efecto de la viscosidad (o el rozamiento) es el número de Reynolds.* Por ello, en correspondencia con el planteamiento del problema, al efectuar el experimento se realiza la semejanza por el número Re, es decir, $V_{nat} l_{nat}/\nu_{nat} = V_{mod} l_{mod}/\nu_{mod}$, donde $V_{nat} = V_\infty = 45$ m/s, $l_{nat}/l_{mod} = 3$.

Tomando $\nu_{mod} = \nu_{nat}$ (la presión y la temperatura del flujo en la zona de trabajo del túnel aerodinámico corresponden a las condiciones normales junto a la superficie de la Tierra) calculamos $V_{mod} = V_{nat}\ (l_{nat}/l_{mod}) = 135$ m/s.

3.17. De acuerdo con el planteamiento del problema en el experimento se asegura la semejanza por los números M y Re. Determinamos el número M del movimiento del cohete con la fórmula $\mathrm{M}_\infty = \mathrm{M}_{nat} = V_{nat}/a_{nat}$, donde $V_{nat} = V_\infty = 1000$ m/s; $a_{nat} = a_\infty = 299{,}4$ m/s (hallamos a_{nat} en las tablas de la atmósfera estándar para $H = 10$ km).

De este modo, $\mathrm{M}_\infty = \mathrm{M}_{nat} = 3{,}340$.

Empleando la función gasodinámica $T_\infty/T_0 = [1 + (k-1)\,\mathrm{M}_\infty^2/2]^{-1}$, hallamos la temperatura estática del flujo de aire en la zona de trabajo del túnel (para $k = 1{,}4$ y $T_0 = (T_0)_{mod} = 288$ K según el planteamiento del problema): $T_{mod} = 89{,}17$ K.

Como la semejanza se realiza por el número M ($M_{nat} = M_{mod}$) la velocidad del flujo de aire en la zona de trabajo del túnel $V_{mod} = M_{mod}\, a_{mod} = M_{nat}\sqrt{k\, R\, T_{mod}} =$ $= 632$ m/s.

De la condición de la igualdad de los números Re ($Re_{mod} = Re_{nat}$) tenemos $\nu_{mod} = (V_{mod}/V_{nat})\, l_{mod}\, \nu_{nat}/l_{nat}$.

De la tablas de la atmósfera estándar, para $H = 10$ km, hallamos $\nu_{nat} =$ $= 3{,}523 \cdot 10^{-5}$ m²/s. Según el planteamiento del problema $l_{nat}/l_{mod} = 20$. Calculamos la viscosidad cinemática del flujo en el túnel: $\nu_{mod} = 0{,}1113 \cdot 10^{-5}$ m²/s.

De acuerdo con la temperatura $T_{mod} = 89{,}17$ K, y haciendo uso de (3.22), determinamos la viscosidad dinámica de la corriente en la zona de trabajo del túnel aerodinámico. Poniendo los datos del problema $\mu_{nat} = 0{,}7339 \cdot 10^{-5}$ Pa·s.

De la relación que refleja la dependencia entre las viscosidades μ y ν, hallamos la densidad del flujo de aire en el túnel: $\rho_{mod} = \mu_{mod}/\nu_{mod} = 6{,}594$ kg/m³.

Empleando la ecuación de estado [para $R = 287$ J/(kg·K)] calculamos la presión del flujo del aire en la zona de trabajo del túnel:$p_{mod} = \rho_{mod}\, R T_{mod} =$ $= 1{,}688 \cdot 10^5$ Pa.

Por las magnitudes $k = 1{,}4$ y $M_{nat} = 3{,}340$ de las tablas de las funciones gasodinámicas hallamos $\pi\,(M_{nat}) = 0{,}01645$, de donde la presión en la antecámara del túnel aerodinámico $(p_0)_{mod} = p_{mod}/\pi\,(M_{nat}) = 102{,}6 \cdot 10^5$ Pa.

3.18. El número M en la zona de trabajo del túnel aerodinámico supersónico $M = V/a = V/\sqrt{kRT}$.

Para $V = 700$ m/s; $k = c_p/c_v = 1{,}4$; $R = 287$ J/(kg·K) y T $= 193$ K hallamos $M = 2{,}514$.

Con el fin de emplear los resultados de las investigaciones experimentales de la influencia de la compresibilidad sobre las características aerodinámicas, el número M_∞ de movimiento del vehículo volante a la altura $H = 5$ km debe ser igual al número M del flujo en la zona de trabajo del túnel aerodinámico, es decir, $M_\infty = M = 2{,}513$.

De las tablas de la atmósfera estándar, para la altura $H = 5$ km, determinamos la velocidad del sonido $a_\infty = 320{,}5$ m/s y obtenemos la velocidad necesaria de movimiento del vehículo volante a esta altura: $V_\infty = M_\infty a_\infty = 805{,}7$ m/s.

3.19. Hagamos uso de la función gasodinámica

$$p_0/p = [1 + (k - 1)\, M^2/2]^{k/(k-1)}.$$

Desarrollemos en serie la función que viene expuesta en el segundo miembro

$$p_0/p = 1 + (kM^2/2)\, [1 + M^2/4 + (2 - k)\, M^4/24 + \ldots].$$

Sustituyendo aquí $kpM^2/2 = \rho V^2/2$ reduzcamos la última relación a la forma

$$p_0 = p + \rho V^2\, (1 + \varepsilon_p)/2, \tag{3.23}$$

donde

$$\varepsilon_p = M^2/4 + (2 - k)\, M^4/24 + \ldots . \tag{3.24}$$

La magnitud ε_p recibe el nombre de *corrección de la compresibilidad por la presión*. A velocidades muy pequeñas ($M \ll 1$) la magnitud ε_p es próxima a cero y la ecuación (3.23) toma la forma $p + \rho V^2/2 = p_0$ que corresponde al movimiento de un fluido incompresible.

3.20. Para calcular el error por la presión, que se admite al considesar el movimiento de un gas como la corriente de un fluido incompresible, hemos de emplear las relaciones (3.23) y (3.24), obtenidas en el problema 3.19. En los cálculos aproximados es tolerable tomar $\varepsilon_p \approx M^2/4$. En particular, durante el movimiento del

aire [$k = 1{,}4$; $R = 287$ J/(kg·K)] con el número $\mathrm{M} = 0{,}3$, al que con $T = 288$ K y $a = 340$ m/s corresponde la velocidad $V = \mathrm{M}\,a = 102$ m/s, el error constituirá 2,25 %.

3.21. Obtengamos la expresión para el coeficiente de presión en el punto del remanso total empleando las relaciones (3.23) y (3.24):

$$\bar{p}_0 = (p_0 - p_\infty)/(\rho_\infty V_\infty^2/2) = 1 + \mathrm{M}_\infty^2/4 + (2 - k)\,\mathrm{M}_\infty^4/24 + \ldots .$$

Con $\mathrm{M}_\infty = 0{,}8$ y $k = c_p/c_v = 1{,}4$ (para el aire) $\bar{p}_0 = 1{,}17$.

3.22. La medición de la velocidad del flujo de aire con el tubo de Prandtl se basa en la aplicación de la ecuación de Bernoulli para un líquido incompresible $\rho V_{\text{inc}}^2/2 + p = p_0$.

De esta ecuación

$$V_{\text{inc}} = \sqrt{2\,(p_0 - p)/\rho}. \tag{3.25}$$

La presión de remanso p_0 se percibe por el canal central del tubo de Prandtl, en tanto que la presión estática p, por los orificios laterales. La diferencia de estas presiones, medida con un manómetro, permite por (3.25) calcular la velocidad V_{inc}.

A la corriente de aire [$k = 1{,}4$; $R = 287$ J/(kg·K)], que tiene una velocidad $V = 120$ m/s a $T = 293$ K, le corresponde el número $\mathrm{M} = V/a = V/\sqrt{kRT} = 0{,}3497$.

Haciendo uso de la ecuación (3.23), obtenemos

$$V = \sqrt{2\,(p_0 - p)/[\rho\,(1 + \varepsilon_p)]}. \tag{3.26}$$

De las relaciones (3.25) y (3.26) establecemos que el cociente entre la velocidad V_{inc}, obtenida en el tubo de Prandtl, y la velocidad real de la corriente V

$$V_{\text{inc}}/V = \sqrt{1 + \varepsilon_p}. \tag{3.27}$$

Haciendo $\varepsilon_p \approx \mathrm{M}^2/4$, tenemos $V_{\text{inc}}/V = \sqrt{1 + \mathrm{M}^2/4} = 1{,}015$, es decir, el error de la medición de la velocidad es el 1,5 %.

3.23. Empleemos la función gasodinámica $\rho_0/\rho = [1 + (k - 1)\,\mathrm{M}^2/2]^{1/(k-1)}$. Descomponiendo en una serie el segundo miembro de esta ecuación, obtenemos $\rho_0 = \rho + \rho\,(\mathrm{M}^2/2 + (2 - k)\,\mathrm{M}^4/8 + \ldots)$, de donde la variación relativa de la densidad es la *corrección de la compresibilidad por la densidad*

$$\varepsilon_\rho = \Delta\rho/\rho = (\rho_0 - \rho)/\rho = \mathrm{M}^2/2 + (2 - k)\,\mathrm{M}^4/8 + \ldots .$$

Con la primera aproximación podemos adoptar que $\varepsilon_\rho = \mathrm{M}^2/2$. Comparando la magnitud ε_ρ con ε_p (véase el problema 3.22) podemos llegar a la conclusión de que el error durante el cálculo de la densidad es más de dos veces mayor que el error al calcular la presión con los mismos números M del flujo.

En particular, para el ejemplo en el problema 3.20 el error $\varepsilon_\rho = 4{,}5$ %.

3.24. La variación relativa de la densidad (véase la solución del problema 3.23) $\Delta\rho/\rho_\infty = (\rho_0 - \rho_\infty)/\rho_\infty \approx \mathrm{M}_\infty^2/2$,, de donde $\mathrm{M}_\infty = \sqrt{2\Delta\rho/\rho_\infty}$. Poniendo $\Delta\rho/\rho_\infty = 0{,}01$ (de acuerdo con el planteamiento), hallamos $\mathrm{M}_\infty = 0{,}1414$.

A condiciones normales para el aire $a_\infty = 341$ m/s, por lo tanto, $V_\infty = \mathrm{M}_\infty a_\infty = 48{,}22$ m/s.

3.25. Representemos la ecuación de Bernoulli para un fluido incompresible en dos secciones del hilillo que circula alrededor del perfil: una de estas secciones está situada en la infinidad, donde la presión es p_∞ y la velocidad V_∞, mientras

que la segunda en un lugar, tomado al azar, junto al perfil, donde la presión es p y la velocidad V, es decir, $\rho_\infty V_\infty^2/2 + p_\infty = \rho_\infty V^2/2 + p$. De esta ecuación la velocidad

$$V = V_\infty \sqrt{1-\bar{p}}, \tag{3.28}$$

donde $\bar{p} = (p - p_\infty)/(\rho_\infty V_\infty^2/2)$ es el coeficiente de presión en el punto dado.

Empleando la fórmula (3.28) y la curva de distribución de $\bar{p}$ (véase la fig. 3.1) podemos construir la dependencia $V = f(x)$ (fig. 3.4). En particular, para los puntos A ($\bar{p}_A = 1{,}0$), C ($\bar{p}_C = -0{,}5$) y B ($\bar{p}_B = 0{,}6$) en la curva (véase la fig. 3.1), correspondientemente, tenemos (fig. 3.4):

$$V_A = 0; \quad V_C = V_\infty \sqrt{1-(-0{,}5)} = 122{,}5 \text{ m/s};$$
$$V_B = V_\infty \sqrt{1-0{,}6} = 63{,}24 \text{ m/s}.$$

De la ecuación del caudal para el hilillo VS = const hallamos que el área S de la sección transversal de éste es inversamente proporcional a la velocidad en dicha sección (fig. 3.4).

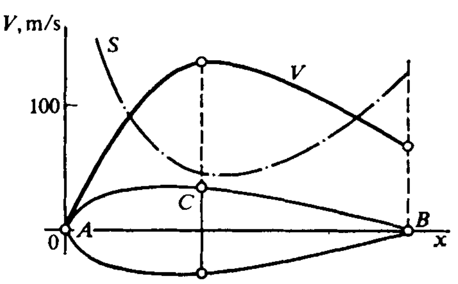


Fig. 3.4. Esquema del flujo de un fluido incompresible alrededor del perfil

3.26. Determinemos el número **M** en la zona de trabajo del túnel, suponiendo que $k = c_p/c_v = 1{,}4$ y $R = 287$ J/(kg $\times$ $\times$ K), es decir, $\mathbf{M}_\infty = V_\infty/a_\infty = V_\infty/\sqrt{kRT_\infty} = 0{,}5879$.

Conociendo el coeficiente de presión $\bar{p} = (p - p_\infty)/(kp_\infty \mathbf{M}_\infty/2)$, hallamos el valor absoluto de la presión: $p = p_\infty \times (1 + k\bar{p}\mathbf{M}_\infty/2)$. Después de poner aquí los valores de $k = 1{,}4$; $p_\infty = 10^5$ Pa; $\bar{p} = -0{,}3$; $\mathbf{M}_\infty = 0{,}5879$, hallamos $p = 0{,}9274 \cdot 10^5$ Pa.

Aplicando la relación $p/p_\infty = \pi(\mathbf{M})/\pi(\mathbf{M}_\infty)$, hallamos la función gasodinámica: $\pi(\mathbf{M}) = p\pi(\mathbf{M}_\infty)/p_\infty = 0{,}7341$. Aquí la magnitud $\pi(\mathbf{M}_\infty) = 0{,}7916$ se ha hallado de las tablas de las funciones gasodinámicas según $\mathbf{M}_\infty = 0{,}5879$ para $k = 1{,}4$. Por el valor de $\pi(\mathbf{M}) = 0{,}7341$ de esa misma tabla hallamos $\mathbf{M} = 0{,}6792$. Seguidamente determinamos la densidad y la temperatura:

$$\rho = \rho_\infty \varepsilon(\mathbf{M})/\varepsilon(\mathbf{M}_\infty) = p_\infty \varepsilon(\mathbf{M})/[RT_\infty \varepsilon(\mathbf{M}_\infty)] = 1{,}146 \text{ kg/m}^3;$$
$$T = T_\infty \tau(\mathbf{M})/\tau(\mathbf{M}_\infty) = 281{,}8 \text{ K}.$$

En las expresiones aducidas ε y τ se determinan según los correspondientes valores de los números **M** de las tablas de las funciones gasodinámicas. Calculamos la velocidad del sonido y del flujo, así como la entalpía:

$$a = \sqrt{kRT} = 336{,}5 \text{ m/s}; \quad V = \mathbf{M}a = 228{,}6 \text{ m/s};$$
$$i = kRT/(k-1) = 28{,}31 \cdot 10^4 \text{ J/kg}.$$

3.27. Consideremos *el flujo del fluido incompresible*. De acuerdo con la ecuación de Bernoulli $V_1^2/2 + p_1/\rho_1 = V_2^2/2 + p_2/\rho_1$, hallamos

$$V_2^2 - V_1^2 = 2(p_1 - p_2)/\rho_1. \tag{3.29}$$

De la ecuación de continuidad $V_1S_1 = V_2S_2$ se desprende que

$$V_1/V_2 = S_2/S_1. \quad (3.30)$$

Resolviendo conjuntamente las ecuaciones (3.29) y (3.30), obtenemos

$$V_1 = \sqrt{2(p_1 - p_2)/\{\rho_1[(S_1/S_2)^2 - 1]\}};$$
$$V_2 = \sqrt{2(p_1 - p_2)/\{\rho_1[1 - (S_2/S_1)^2]\}}.$$

Poniendo en las expresiones obtenidas los valores de las magnitudes, hallamos: $V_1 = 7{,}374$ m/s; $V_2 = 14{,}75$ m/s.

Para *el fluido compresible isentrópico* de las ecuaciones

$$p_1 = p_0(1 - \bar{V}_1^2)^{k/(k-1)}; \quad p_2 = p_0(1 - \bar{V}_2^2)^{k/(k-1)},$$

donde $\bar{V}_{1(2)} = V_{1(2)}/V_{máx}$, obtenemos

$$(1 - \bar{V}_1^2)/(1 - \bar{V}_2^2) = (p_1/p_2)^{(k-1)/k}. \quad (3.31)$$

No obstante, de acuerdo con la ecuación de continuidad $\rho_1V_1S_1 = \rho_2V_2S_2$ y la ecuación de los procesos adiabáticos $p_1/\rho_1^k = p_2/\rho_2^k$, la razón

$$\bar{V}_1^2/\bar{V}_2^2 = (p_2/p_1)^{2/k}(S_2/S_1)^2. \quad (3.32)$$

Introducimos las notaciones $\bar{V}_1^2 = x$; $\bar{V}_2^2 = y$; $(p_1/p_2)^{(k-1k)/k} = a$; $(p_2/p_1)^{2k} \times$ $\times (S_2/S_1)^2 = b$. Tomando esto en consideración, las ecuaciones (3.31) y (3.32) toman la forma $(1 - x)/(1 - y) = a$ y $x/y = b$. Resolviendo estas ecuaciones conjuntamente, determinamos

$$x = (a - 1)\,b/(a - b); \quad y = (a - 1)/(a - b). \quad (3.33)$$

Empleemos la ecuación de Bernoulli de la forma $\bar{V}^2/2 + \bar{a}^2/(k - 1) = 1/2$, donde $\bar{a} = a/V_{máx}$. Entonces

$$\bar{a}^2 = (k - 1)(1 - \bar{V}^2)/2, \quad (3.34)$$

así como

$$M = \bar{V}/\bar{a} = \sqrt{2\bar{V}^2/[(k-1)(1 - \bar{V}^2)]}. \quad (3.35)$$

Para las secciones 1—1 y 2—2, haciendo uso de la solución (3.33), obtenemos correspondientemente

$$M_1 = \sqrt{2(a-1)\,b/[(k-1)(1-b)\,a]};$$
$$M_2 = \sqrt{2(a-1)/[(k-1)(1-b)]}. \quad (3.36)$$

Hagamos los cálculos: $a = (p_1/p_2)^{(k-1)/k} = 1{,}219$ y $b = (p_2/p_1)^{2/k}(S_2/S_1)^2 =$ $= 0{,}09291$.

Ahora hallamos los números M del flujo en las secciones 1—1 y 2—2: $M_1 =$ $= 0{,}3033$; $M_2 = 1{,}099$.

3.28. El número M de la zona de trabajo de un túnel supersónico

$$M = V/a = V/\sqrt{kRT}. \quad (3.37)$$

Haciendo $k = c_p/c_v = 1{,}4$; $R = 287$ J/(kg·K), para $T = 220$ K, obtenemos el número $M = 1{,}514$.

Como sigue de (3.37) la elevación de la temperatura hace aumentar la velocidad del sonido y disminuir el número **M**. En particular, con $T = 285$ K hallamos que $\mathbf{M} = 1{,}329$.

3.29. Con la subida isotérmica de la presión en el recipiente la velocidad máxima de salida no varía, ya que de acuerdo con la fórmula $V_{\text{máx}} = \sqrt{2kRT_0/(k-1)}$ ella se determina por la temperatura del gas T_0 en dicho recipiente.

La velocidad $V_{\text{máx}}$ es aquella velocidad límite que obtendría un gas en movimiento a condición de que su entalpía se convirtiese en energía cinética. En realidad, de la ecuación de Bernoulli $V^2/2 + i = \text{const}$ hallamos que cuando $i = 0$ la velocidad $V = V_{\text{máx}}$. Como a la magnitud $i = 0$ le corresponden los valores $p = \rho = 0$, con los que surge el vacío absoluto, es evidente que la velocidad $V_{\text{máx}}$ no puede ser alcanzada por un gas real.

3.30. La velocidad máxima del aire se determina por la fórmula $V_{\text{máx}} = \sqrt{2kRT_0/(k-1)}$ en la que $k = c_p/c_v = 1{,}4$; $R = 287$ J/(kg·K), y $T_0 = 300$ K. Entonces $V_{\text{máx}} = 776{,}3$ m/s.

3.31. Aducimos la ecuación de Bernoulli en la forma $V^2/2 + a^2/(k-1) = V_{\text{máx}}^2/2$. Como, de acuerdo con el planteamiento, $V = V_{\text{máx}}/2$, de esta ecuación, con $k = c_p/c_v = 1{,}4$, la velocidad del sonido $a = V_{\text{máx}}\sqrt{3(k-1)/8} = 0{,}3873\ V_{\text{máx}}$.

El correspondiente número $\mathbf{M} = V/a = 1{,}291$, y la velocidad relativa

$$\lambda = V/a^* = V_{\text{máx}}/2a^* = \lambda_{\text{lím}}/2 = \sqrt{(k+1)/(k-1)}/2 = 1{,}225.$$

Para $k = c_p/c_v = 1{,}4$ y $R = 287$ J/(kg·K), con $T_0 = 288$ K, tenemos

$$V_{\text{máx}} = \sqrt{2kRT_0/(k-1)} = 760{,}6 \text{ m/s}; \quad a = 294{,}6 \text{ m/s}.$$

3.32. Haciendo uso de la ecuación de Bernoulli $V^2/2 + a^2/(k-1) = (k+1)\,a^{*2}/[2(k-1)]$, hallamos la dependencia entre **M** y λ. Multiplicando los términos de dicha ecuación por $2/V^2$, obtenemos

$$1 + 2/[(k-1)\,\mathbf{M}^2] = (k+1)/[(k-1)\,\lambda^2], \tag{3.38}$$

de donde

$$\mathbf{M} = \sqrt{[2\lambda^2/(k+1)]/[1-(k-1)\,\lambda^2/(k+1)]}. \tag{3.39}$$

Después de poner aquí los valores $k = 1{,}4$ y $\lambda = 2{,}2$, hallamos $\mathbf{M} = 4{,}567$.

3.33. En la zona de trabajo del túnel aerodinámico el flujo tiene el número de Mach $\mathbf{M} = V/\sqrt{kRT}$, donde $k = c_p/c_v = 1{,}4$; $R = 287$ J/(kg·K) y $T = 200$ K (según el planteamiento). Calculamos que $\mathbf{M} = 2{,}822$.

Con el fin de determinar la presión y la temperatura del aire en la antecámara empleamos las correspondientes funciones gasodinámicas:

$$p_0 = p\,[1 + (k-1)\,\mathbf{M}^2/2]^{k/(k-1)} = 28{,}06\cdot 10^5 \text{ Pa};$$
$$T_0 = T\,[1 + (k-1)\,\mathbf{M}^2/2] = 518{,}5 \text{ K}.$$

3.34. Con la salida prevista del gas de la tobera a la atmósfera, cuyos parámetros corresponden a las condiciones normales, la presión estática del flujo de aire $p \approx 10^5$ Pa. De acuerdo con el valor de la función gasodinámica $\pi(\mathbf{M}) = p/p_0 = 0{,}05$ en la tabla de las funciones gasodinámicas, para $k = c_p/c_v = 1{,}4$, hallamos $\mathbf{M} = 2{,}591$.

Determinemos la velocidad del sonido y la temperatura estática del flujo para los valores $k = c_p/c_v = 1{,}4$; $R = 287$ J/(kg·K), es decir, $a = V/\mathrm{M} = 270{,}2$ m/s; $T = a^2/(kR) = 181{,}7$ K.

Calculemos la temperatura del aire en el recipiente (botella):

$$T_0 = T\,[1 + (k - 1)\,\mathrm{M}^2/2] = 425{,}7 \text{ K}.$$

3.35. La velocidad crítica del sonido se determina por la fórmula $a^* = \sqrt{2kRT_0/(k+1)}$, en tanto que la temperatura de remanso $T_0 = T_\infty\,[1 + (k - 1)\,\mathrm{M}_\infty^2/2]$. Así, pues,

$$a^* = \sqrt{[2k/(k+1)]\,RT_\infty\{1 + [(k-1)/2]\,\mathrm{M}_\infty^2\}}.$$

Poniendo aquí los valores $k = c_p/c_v = 1{,}4$; $R = 287$ J/(kg·K); $T_\infty = 223$ K; $\mathrm{M}_\infty = 1{,}5$, hallamos $a^* = 329{,}1$ m/s.

3.36. De la relación $T_0 = T\,[1 + (k - 1)\,\mathrm{M}^2/2]$ hallamos $\mathrm{M} = \sqrt{[2/(k-1)]\,(T_0 - T)/T}$, donde T_0 y T son las temperaturas en la antecámara y en la zona de trabajo del túnel aerodinámico, respectivamente. Haciendo uso de la dependencia $a = \sqrt{kRT}$ determinamos la velocidad del flujo en la zona de trabajo del túnel:

$$V = \mathrm{M}a = \sqrt{2kR\,(T_0 - T)/(k-1)}.$$

Al no haber calentamiento, adoptando la temperatura del aire en la antecámara $T_0 = 288$ K; $k = c_p/c_v = 1{,}4$; $R = 287$ J/(kg·k), para $T = 78$ K hallamos $V = 649{,}5$ m/s.

3.37. Sabemos que sen $\mu = 1/\mathrm{M}$, de donde $\mathrm{M} = 1/\text{sen}\,\mu$ y, por lo tanto, $\mathrm{M}_1 = 1/\text{sen}\,\mu_1$ y $\mathrm{M}_2 = 1/\text{sen}\,\mu_2$. Como de acuerdo con el planteamiento $\mu_1 > \mu_2$, $\mathrm{M}_1 < \mathrm{M}_2$.

Conociendo la presión de remanso isentrópico de flujo p_0, hallamos las presiones estáticas en los dos puntos aplicando las relaciones

$$p_1 = p_0\,[1 + (k-1)\,\mathrm{M}_1^2/2]^{-k/(k-1)};\quad p_2 = p_0\,[1 + (k-1)\,\mathrm{M}_2^2/2]^{-k/(k-1)}.$$

Como p_0 = ídem (el flujo es isentrópico), entonces con $\mathrm{M}_1 < \mathrm{M}_2$ la presión $p_1 > p_2$.

3.38. Resolviendo la relación (3.38) respecto de λ, obtenemos

$$\lambda = \sqrt{[(k+1)\,\mathrm{M}^2/2]/[1 + (k-1)\,\mathrm{M}^2/2]}. \qquad (3.40)$$

Comparando (3.39) y (3.40) determinamos que $1 + (k - 1)\mathrm{M}^2/2 = [1 - (k - 1)\,\lambda^2/(k + 1)]^{-1}$.

Así, pues,

$$p/p_0 = [1 + (k - 1)\,\mathrm{M}^2/2]^{-k/(k-1)} = [1 - (k - 1)\,\lambda^2/(k + 1)]^{k/(k-1)}; \qquad (3.41)$$

$$\rho/\rho_0 = [1 + (k - 1)\,\mathrm{M}^2/2]^{-1/(k-1)} = [1 - (k - 1)\,\lambda^2/(k + 1)]^{1/(k-1)}; \qquad (3.42)$$

$$T/T_0 = [1 + (k - 1)\,\mathrm{M}^2/2]^{-1} = 1 - (k - 1)\,\lambda^2/(k + 1). \qquad (3.43)$$

3.39. Empleando las fórmulas (3.41) — (3.43) para uno de los flujos, tenemos:

$$p_1/p_0 = [1 - (k-1)\,\lambda_1^2/(k+1)]^{k/(k-1)};$$

$$\rho_1/\rho_0 = [1 - (k-1)\,\lambda_1^2/(k+1)]^{1/(k-1)};\quad T_1/T_0 = 1 - (k-1)\,\lambda_1^2/(k+1),$$

en tanto que para el otro flujo

$$p_2/p_0 = [1-(k-1)\lambda_2^2/(k+1)]^{k/(k-1)};$$

$$\rho_2/\rho_0 = [1-(k-1)\lambda_2^2/(k+1)]^{1/(k-1)}; \quad T_2/T_0 = 1-(k-1)\lambda_2^2/(k+1).$$

De aquí, en correspondencia de la condición de que para ambos flujos los parámetros de remanso son iguales, obtenemos

$$\frac{p_1}{p_2} = \left[\frac{1-(k-1)\lambda_1^2/(k+1)}{1-(k-1)\lambda_2^2/(k+1)}\right]^{k/(k-1)} = \frac{\pi(\lambda_1)}{\pi(\lambda_2)};$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \left[\frac{1-(k-1)\lambda_1^2/(k+1)}{1-(k-1)\lambda_2^2/(k+1)}\right]^{1/(k-1)} = \frac{\varepsilon(\lambda_1)}{\varepsilon(\lambda_2)};$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1-(k-1)\lambda_1^2/(k+1)}{1-(k-1)\lambda_2^2/(k+1)} = \frac{\tau(\lambda_1)}{\tau(\lambda_2)}.$$

Las relaciones obtenidas pueden emplearse para investigar un flujo en dos puntos del cual las velocidades son λ_1 y λ_2, respectivamente.

3.40. El caudal másico por segundo del aire $\dot{m} = \rho VS$, donde la velocidad $V = \mathrm{M}a$, la velocidad de sonido $a = \sqrt{kRT}$, la temperatura $T = T_0\tau(\mathrm{M})$, la densidad $\rho = \rho_0\varepsilon(\mathrm{M})$, $\rho_0 = p_0/(RT_0)$.

De este modo, $\dot{m} = p_0\mathrm{M}\varepsilon(\mathrm{M})\sqrt{k\tau(\mathrm{M})/RT_0}\,S$.

De las tablas de las funciones gasodinámicas para $\mathrm{M} = 0{,}2$ y $k = c_p/c_v = 1{,}4$ hallamos las funciones $\tau(\mathrm{M}) = 0{,}9725$; $\varepsilon(\mathrm{M}) = 0{,}9803$. Entonces, $\dot{m} = 23{,}39$ kg/s.

3.41. De las relaciones $\lambda_1 = V_1/a^*$ y $\lambda_2 = V_2/a^*$, así como de la expresión (3.40), tomando en consideración que $\lambda_1 = 1$ (con $\mathrm{M}_1 = 1$), hallamos la razón de las velocidades en las secciones:

$$V_2/V_1 = \lambda_2 = \sqrt{[(k+1)\mathrm{M}_2^2/2]/[1+(k-1)\mathrm{M}_2^2/2]} = 1{,}633.$$

Empleando este resultado obtenemos que $V_1^2 = V_2^2/2{,}667$. Para las densidades ρ_1 y ρ_2 en las secciones *1* y *2*, respectivamente, tenemos las dependencias

$$\rho_1 = \rho_0[1+(k-1)\mathrm{M}_1^2/2]^{-1/(k-1)}; \quad \rho_2 = \rho_0[1+(k-1)\mathrm{M}_2^2/2]^{-1/(k-1)},$$

de las que, tomando en consideración que $\mathrm{M}_1 = 1$; $\mathrm{M}_2 = 2$; $k = c_p/c_v = 1{,}4$, obtenemos $\rho_1 = 2{,}756\,\rho_2$.

La energía cinética de la unidad de volumen del aire en la sección *1*, de acuerdo con las relaciones obtenidas, $\rho_1 V_1^2/2 = 1{,}033\,(\rho_2/V_2^2/2)$.

Así, pues, la energía cinética de la unidad de volumen durante el movimiento del gas de la sección en la que $\mathrm{M}_1 = 1$ a la sección donde $\mathrm{M}_2 = 2$ disminuye el 3,3 %.

3.42. Aplicando las relaciones $\lambda_1 = V_1/a^*$, $\lambda_2 = V_2/a^*$ y (3.40), hallamos

$$V_2^2/V_1^2 = \{\mathrm{M}_2^2[1+(k-1)\mathrm{M}_1^2/2]\}/\{\mathrm{M}_1^2[1+(k-1)\mathrm{M}_2^2/2]\} = 1{,}446.$$

De este modo, la energía cinética de la unidad de masa $V^2/2$ durante el movimiento del gas de la sección en la que $\mathrm{M}_1 = 2$ a la sección donde $\mathrm{M}_2 = 3$ crece 1,446 veces.

Empleando la función gasodinámica $\varepsilon(\mathrm{M}) = \rho/\rho_0 = [1+(k-1)\mathrm{M}^2/2]^{-1/(k-1)}$, obtenemos

$$\rho_2/\rho_1 = \{[1+(k-1)\mathrm{M}_1^2/2]/[1+(k-1)\mathrm{M}_2^2/2]\}^{1/(k-1)}.$$

Después de poner aquí los valores de $\mathrm{M}_1 = 2$, $\mathrm{M}_2 = 3$ y $k = 1{,}4$, hallamos $\rho_2/\rho_1 = 0{,}3313$.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos ($V_2^2 = 1{,}446\ V_1^2$; $\rho_2 = 0{,}3313\ \rho_1$) determinamos la razón de las presiones dinámicas en las secciones:

$$(\rho_2 V_2^2/2)/(\rho_1 V_1^2/2) = 0{,}4791.$$

3.43. Aplicando la ecuación de estado y tomando $R = 287$ J/(kg·K) determinamos la densidad: $\rho_0 = p_0/(RT_0) = 0{,}3484$ kg/m³.

Los parámetros críticos p^*, ρ^*, T^* se determinan de las relaciones (3.41)—(3.43) para $M = \lambda = 1$:

$p^* = p_0\,[2/(k+1)]^{k/(k-1)}$; $\rho^* = \rho_0\,[2/(k+1)]^{1/(k-1)}$; $T^* = T_0\,[2/(k+1)]$.

Con $k = 1{,}4$ de estas fórmulas se desprende que $p^* = 0{,}5283\ p_0$, $\rho^* = 0{,}6340\ \rho_0$, $T^* = 0{,}8333\ T_0$. Poniendo aquí los valores de p_0, ρ_0 y T_0, obtenemos: $p^* = 0{,}5283\cdot10^5$ Pa; $\rho^* = 0{,}2209$ kg/m³; $T^* = 833{,}3$ K.

3.44. La razón entre la presión crítica de un flujo de aire y la presión de remanso $p^*/p_0 = [2/(k+1)]^{k/(k-1)} = 0{,}5283$, de donde $p^* = 0{,}5283\ p_0$.

Para $p_0 = 9\cdot10^5$ Pa la presión $p^* = 4{,}755\cdot10^5$ Pa. Como la presión en el medio circundante $p_{ext} = 10^5$ Pa es menor que la presión p^*, la velocidad en el plano de salida de la boquilla es igual a la del sonido, en tanto que el resto de los parámetros corresponden a los críticos. Así, pues, en el plano de salida de la boquilla $p^* = 4{,}755\cdot10^5$ Pa, la temperatura (véase la solución del problema (3.43) $T^* = 0{,}8333\ T_0 = 264{,}9$ K, la densidad $\rho^* = 0{,}6340\ \rho_0$, donde $\rho_0 = p_0/(RT_0) = 9{,}86$ kg/m³. De esta forma, $\rho^* = 6{,}252$ kg/m³.

La velocidad en el plano de salida de la boquilla $a^* = \sqrt{kRT^*} = 326{,}2$ m/s. El caudal másico por segundo $\dot{m} = \rho VS = \rho^* a^* \pi d^2/4 = 16{,}02$ kg/s.

Para $p_0 = 1{,}5\cdot10^5$ Pa la presión $p^* = 0{,}7924\cdot10^5$ Pa. En tal caso, la presión en el medio circundante $p_{ext} = 10^5$ Pa es mayor que la presión p^* y, por consiguiente, en el plano de salida de la boquilla la velocidad crítica no se alcanza y la presión en el plano de salida $p = p_{ext} = 10^5$ Pa.

La densidad del aire en el plano de salida de la boquilla puede determinarse aplicando la relación para la corriente en proceso adiabático $p/p_0 = (\rho/\rho_0)^k$, de donde $\rho = \rho_0\,(p/p_0)^{1/k}$, o sea, $\rho_0 = p_0/(RT_0) = 1{,}643$ kg/m³. Así, pues, $\rho = 1{,}229$ kg/m³.

De la ecuación de estado determinamos la temperatura del aire en el plano de salida de la boquilla: $T = p/(\rho R) = 283{,}5$ K.

La velocidad de salida

$$V = \sqrt{[2k/(k-1)]\,RT_0\,[1-(p/p_0)^{(k-1)/k}]} = 264{,}4 \text{ m/s}.$$

El caudal másico por segundo que pasa por la boquilla

$$\dot{m} = \rho V \pi d^2/4 = 2{,}552 \text{ kg/s}.$$

3.45. Empleemos la siguiente fórmula para determinar el caudal ponderal por segundo a través de la tobera:

$$\dot{G} = [2/(k+1)]^{1/(k-1)}\sqrt{2k/(k+1)}\,p_0 S^* g/\sqrt{RT_0},$$

de donde el área de la sección crítica

$$S^* = \dot{G}\sqrt{RT_0}/\{p_0 g\,[2/(k+1)]^{1/(k-1)}\sqrt{2k/(k+1)}\}.$$

Poniendo aquí los valores de $\dot{G} = 10$ N/s, $R = 287$ J/(kg·K), $T_0 = 288$ K, $p_0 = 6\cdot10^5$ Pa, $k = 1{,}4$ y $g = 9{,}81$ m/s², hallamos $S^* = 7{,}133\cdot10^{-4}$ m².

3.46. Con el régimen de salida previsto la presión en el plano de salida de la tobera p_a es igual a la presión externa p_{ext}. Admitimos que $p_{ext} = p_a = 9{,}8 \times \times 10^4$ Pa. La velocidad de salida [para $k = 1{,}4$; $R = 287$ J/(kg·K), $T_0 = 288$ K]

$$V_a = \sqrt{[2k/(k-1)]\,RT_0\,[1-(p_a/p_0)^{(k-1)/k}]} = 599{,}7 \text{ m/s}.$$

Empleando las relaciones $T_a = T_0\,[1 - (k-1)\,\lambda_a^2/(k+1)]$, $\lambda_a = V_a/a^*$ y $a^* = 2kRT_0/(k+1)$, establecemos que

$$T_a = T_0\,[1 - (k-1)\,V_a^2/(2kRT_0)].$$

De modo análogo, utilizando la fórmula $\rho_a = \rho_0\,[1 - (k-1)\,\lambda_a^2/(k+1)]^{1/(k-1)}$ hallamos

$$\rho_a = \rho_0\,[1 - (k-1)\,V_a^2/(2kRT_0)]^{1/(k-1)},$$

donde $\rho_0 = p_0/(RT_0)$.

Poniendo los datos determinamos: $T_a = 108{,}8$ K; $\rho_a = 3{,}133$ kg/m³.

3.47. Haciendo uso de las relaciones $p_0 = p_a\,[1 + (k-1)\,M_a^2/2]^{k/(k-1)}$, $T_0 = T_a\,[1 + (k-1)\,M_a^2/2]$ y $M_a = V_a/a_a = V_a/\sqrt{kRT_a}$, hallamos

$$p_0 = p_a\,[1 + (k-1)\,V_a^2/(2kRT_a)]^{k/(k-1)};$$

$$T_0 = T_a\,[1 + (k-1)\,V_a^2/(2kRT_a)].$$

Tomando $p_{ext} = p_a = 9{,}8\cdot10^4$ Pa (régimen previsto de funcionamiento de la tobera a condiciones atmosféricas normales), $k = 1{,}4$, $R = 287$ J/(kg·K) y poniendo los datos, obtenemos $p_0 = 26{,}64\cdot10^5$ Pa; $T_0 = 521{,}6$ K.

De la ecuación de estado hallamos la densidad: $\rho_0 = p_0/(RT_0) = 17{,}79$ kg/m³.

3.48. De acuerdo con el valor de la función gasodinámica $q_a\,(M_a) = S^*/S_a = 0{,}2$, en la tabla de las funciones gasodinámicas, para $k = 1{,}4$, hallamos: $M_a = 3{,}174$; $\lambda_a = 2{,}005$; $\pi\,(M_a) = 0{,}0214$; $\varepsilon\,(M_a) = 0{,}0642$; $\tau\,(M_a) = 0{,}3333$. Apoyándonos en estos datos determinamos: $T_a = T_0\tau\,(M_a) = 97{,}66$ K; $p_0 = p_a/\pi\,(M_a) = 46{,}73\cdot10^5$ Pa; $\rho_0 = p_0/(RT_0) = 55{,}57$ kg/m³; $\rho_a = \rho_0\varepsilon\,(M_a) = 3{,}568$ kg/m³; $V_a = M_a a_a = M_a\sqrt{kRT_a} = 628{,}7$ m/s.

El caudal ponderal del gas por la tobera $\dot{G} = \rho_a V_a S_a g = 3521$ N/s.

3.49. Con el régimen normal supersónico de trabajo de una tobera con dimensiones geométricas constantes [en las secciones de la tobera $q\,(M) = S^*/S = \text{const}$] las funciones gasodinámicas [tales como $\pi\,(M)$, $\varepsilon\,(M)$, $\tau\,(M)$, etc.] conservan sus valores. De acuerdo con esto, la presión en el plano de salida de la tobera $p_a = \pi\,(M_a)\,p_0$ aumenta proporcionalmente al crecimiento de p_0, es decir, dos veces; la temperatura $T_a = \tau\,(M_a)\,T_0$ queda invariable; $\rho_a = \varepsilon\,(M_a)\,\rho_0 = \varepsilon\,(M_a)\,p_0/(RT_0)$ aumenta dos veces; la velocidad del sonido $a_a = \sqrt{kRT_a}$ no varía. Como el número M_a no varía, la velocidad en el plano de salida de la tobera $V_a = M_a a_a$ permanece invariable.

3.50. Si como antes la tobera sigue trabajando en el régimen supersónico normal (véase la solución del problema 3.49), las funciones gasodinámicas $\pi\,(M)$, $\tau\,(M)$, $\varepsilon\,(M)$ y otras no variarán en las secciones de la tobera, ya que en ellas no cambian los valores de la función gasodinámica $q\,(M) = S^*/S$. De acuerdo con esto, la presión en el plano de salida de la tobera $p_a = \pi\,(M_a)\,p_0$ disminuye 1,5 veces; la temperatura $T_a = \tau\,(M_a)\,T_0$ no cambia; la densidad $\rho_a = \varepsilon\,(M_a) \times \times \rho_0 = \varepsilon\,(M_a)\,p_0/(RT_0)$ disminuye 1,5 veces; la velocidad del sonido $a_a = \sqrt{kRT_a}$ queda invariable. Como no varía el número M_a, tampoco cambia la velocidad en el plano de salida de la tobera $V_a = M_a a_a$.

3.51. Al calcular flujos isentrópicos unidimensionales estacionarios, hay que tomar en consideración que el flujo puede alcanzar velocidades supersónicas en la zona que se ensancha del canal, cuando en su zona más estrecha se logra la velocidad igual a la velocidad local del sonido $V = a = a^*$, donde a^* es la velocidad crítica del sonido. La velocidad crítica se alcanza con $p^* \geqslant p_{ext}$, donde p_{ext} es la presión en el medio ambiente en la salida de la zona que se ensancha del canal. En el caso límite de igualdad $p^* = p_{ext}$, obtenemos

$$p^*/(p_0)_{\text{lím}} = [2/(k+1)]^{k(k-1)} = p_{ext}/(p_0)_{\text{lím}},$$

donde $(p_0)_{\text{lím}}$ es el valor límite más pequeño de p_0 que asegura los parámetros críticos (a^*, p^*, etc.) en la sección más estrecha.

Así, pues, la condición, necesaria para alcanzar en el canal que se ensancha velocidades supersónicas, tiene la forma

$$(p_0)_{\text{lím}} = p_{nat}\,[(k+1)/2]^{k/(k-1)}. \tag{3.44}$$

Para una tobera con dimensiones geométricas invariables el parámetro $\mathbf{M}_a$ no varía, si el régimen de flujo del gas por la tobera se mantiene supercrítico. En el caso que examinamos, con $\Delta p_0/p_0 = -0{,}08$ el valor mínimo de la presión de remanso $p_0' = p_0\,(1 + \Delta p_0/p_0) = 36{,}8\cdot10^5$ Pa y de (3.44) $(p_0)_{\text{lím}} = 1{,}772\cdot10^5$ Pa.

De esta manera, $p_0' > (p_0)_{\text{lím}}$ y, por lo tanto, el régimen de flujo queda supercrítico. Con ello, como en las secciones el valor de la función gasodinámica $q\,(\mathbf{M}) = S^*/S$ no cambia, en las secciones no varían, asimismo, los valores de otras funciones gasodinámicas, tales como $\pi\,(\mathbf{M})$, $\varepsilon\,(\mathbf{M})$, $\tau\,(\mathbf{M})$.

La variable $p_a = \pi\,(\mathbf{M}_a)\,p_0$ cambia proporcionalmente a p_0, es decir, el ±8 %, ya que $\Delta p_a/p_a = \Delta p_0/p_0$.

El valor de $T_a = \tau\,(\mathbf{M}_a)\,T_0$ varía proporcionalmente a T_0, es decir, el ±10 %, ya que $\Delta T_a/T_a = \Delta T_0/T_0$.

La densidad $\rho_a = \varepsilon\,(\mathbf{M}_a)\,\rho_0$ cambia proporcionalmente a ρ_0, pero de acuerdo con la ecuación de estado $\rho_0 = p_0/(RT_0)$ la magnitud $\Delta\rho_0/p_0 = (\Delta p_0/p_0) - (\Delta T_0/T_0)$, por lo que

$$\Delta\rho_a/\rho_a = \Delta\rho_0/\rho_0 = (\Delta p_0/p_0) - (\Delta T_0/T_0) = \pm0{,}08 \mp 0{,}10 = \mp0{,}02.$$

Así, pues, la densidad ρ_a varía el ∓2 %.

Los valores de a_a y V_a cambian de igual forma, ya que $V_a/a_a = \mathbf{M}_a =$ ídem. Esta variación se determina de la igualdad

$$V_a = \lambda_a a^* = = \lambda_a \sqrt{2kRT_0/(k+1)},$$

de donde, ya que λ_a (lo mismo que $\mathbf{M}_a$) no varía,

$$\Delta V_a/V_a = \Delta T_0/(2T_0) = \pm0{,}10/2 = \pm0{,}05.$$

Así, pues, la velocidad del sonido y la velocidad en el plano de salida de la tobera varían el ±5 %.

3.52. De acuerdo con la magnitud $q\,(\mathbf{M}_a) = S^*/S_a = 0{,}3333$ hallamos, en las tablas de las funciones gasodinámicas, para $k = 1{,}33$ que $\pi\,(\mathbf{M}_a) = p_a/p_0 = 0{,}0534$. Con el régimen previsto de trabajo de la tobera $p_a = p_{ext} = 0{,}5403 \times 10^5$ Pa (aquí el valor de p_{ext} ha sido hallado en las tablas de la atmósfera normal para la altura $H = 5$ km). Entonces la presión en la cámara de combustión $p_0 = p_a/\pi\,(\mathbf{M}_a) = 10{,}12\cdot10^5$ Pa.

3.53. Para las dimensiones geométricas dadas construimos el perfil de la tobera como se muestra en la fig. 3.5. Al calcular el flujo isentrópico del gas por semejante tobera empleamos las tablas de las funciones gasodinámicas. El orden del cálculo es el siguiente:

1. Conociendo la función $d = f(x)$, según el planteamiento del problema, para cada sección de la tobera determinamos la función gasodinámica $\xi = d/d^*$, donde d^* es el diámetro de la sección crítica.

2. Con los valores de ξ hallados en las tablas de las funciones gasodinámicas, con $k = 1,2$, para las regiones subsónica y supersónica del flujo, determinamos los correspondientes valores de las funciones gasodinámicas $\pi(\mathbf{M}) = p/p_0$,

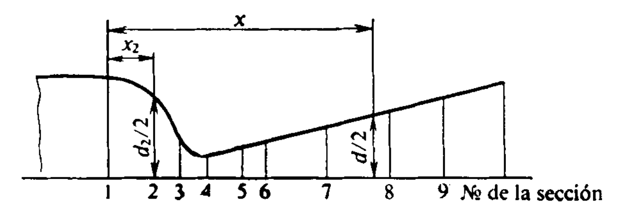


Fig. 3.5. Perfil de una tobera supersónica

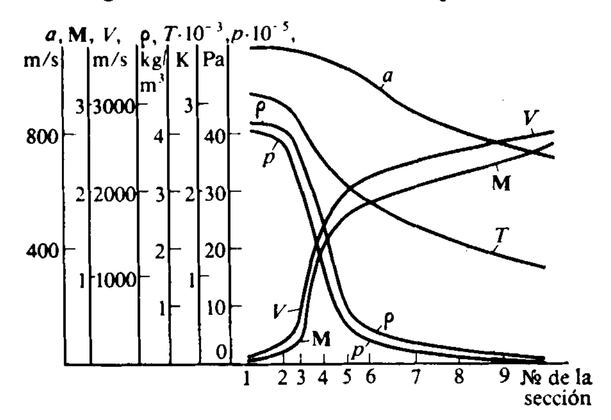


Fig. 3.6. Variación de los parámetros del gas a lo largo de la tobera

$\tau(\mathbf{M}) = T/T_0$, $\varepsilon(\mathbf{M}) = \rho/\rho_0$, así como los parámetros del gas: presiones $p = p_0\pi(\mathbf{M})$, temperaturas $T = T_0\tau(\mathbf{M})$, densidades $\rho = \rho_0\varepsilon(\mathbf{M})$ [o bien $\rho = p/(RT)$], los números $\mathbf{M}(\xi)$ de la velocidad relativa $\lambda(\xi)$, las velocidades del flujo $V = \lambda a^* = \lambda\sqrt{2kRT_0/(k+1)}$ y del sonido $a = V/\mathbf{M}$. Los resultados del cálculo realizado se ofrecen en la fig. 3.6, en forma de las gráficas de variación de los parámetros del gas a lo largo de la tobera.

Como el valor hallado en el plano de salida de la tobera $p_a = 0{,}2772\cdot10^5$ Pa es mayor que la presión externa $p_{ext} = 40{,}18\cdot10^2$ Pa, la tobera trabaja en el régimen de subexpansión. El caudal ponderal del gas por esta tobera

$$\dot{G} = \rho^* a^* S^* g = \rho^* a^* \pi d^{*2} g/4 = 8{,}034 \text{ N/s}.$$

3.54. Primero determinamos la velocidad del sonido del aire disociado en la salida de la tobera: $a_a = V_a/\mathbf{M}_a = 1600$ m/s.

Del diagrama $a - p - S - i$, según los valores de $a_a = 1600$ m/s y $p_a = 9{,}8\cdot10^2$ Pa (0,01 kgf/cm²), hallamos en la salida de la tobera la entalpía $i_a =$

$= 20{,}4 \cdot 10^6$ m²/s² y la entropía $S_a = 15{,}5 \cdot 10^3$ (m²/(s²·K). A continuación, por la ecuación $i_0 = i_a + V_a^2/2$ determinamos la entalpía de remanso de la unidad de masa del aire: $i_0 = 52{,}4 \cdot 10^6$ m²/s².

Suponiendo que el flujo de aire en la tobera es isentrópico $[S_0 = S_a = 15{,}5 \times \times 10^3$ m²/(s²·K)] en el diagrama $p - S - i$, para los valores obtenidos de i_0 y S_0, encontramos la presión $p_0 = 300$ kgf/cm² $= 294{,}2 \cdot 10^5$ Pa y en el diagrama $p - i - T$, para los valores de p_0 e i_0, la temperatura $T_0 = 13\,700$ K.

3.55. De acuerdo con los valores conocidos de $p_0 = 98 \cdot 10^5$ Pa (100 kgf/cm²) y $T_0 = 12\,000$ K, con ayuda del diagrama $i - S$, para las condiciones de remanso, determinamos la entalpía $i_0 = 48{,}3 \cdot 10^6$ m²/s² y la entropía $S_0 = 14{,}5 \cdot 10^3$ m²/ /(s²·K). Seguidamente, se determina la entalpía en la sección de salida de la tobera: $i_a = i_0 - V_a^2/2 = 16{,}3 \cdot 10^6$ m²/s².

Prefijando una serie de valores de la entalpía i_k $(16{,}3 \cdot 10^6 < i_k < 48{,}3 \times \times 10^6)$ en secciones por separado de la tobera, partiendo de ellas, calculamos las velocidades $V_k = \sqrt{2(i_0 - i_k)}$. P.ej., para $i_k = 18 \cdot 10^6$ m²/s² la velocidad $V_k = = 7785$ m/s.

Suponiendo que el flujo en la tobera es isentrópico, mediante el diagrama $i - S$, para los valores dados de i_k y el valor hallado $S_0 = 14{,}5 \cdot 10^3$ m²/(s²·K),

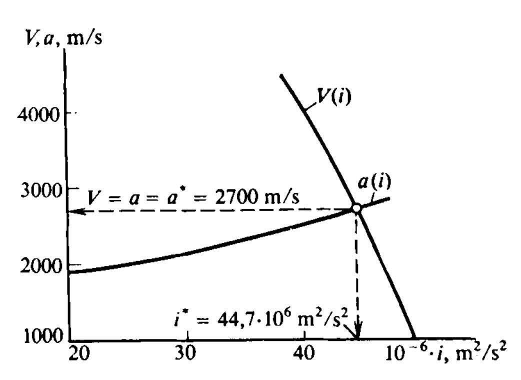


Fig. 3.7. Dependencia entre la velocidad del flujo, la del sonido y la entalpía

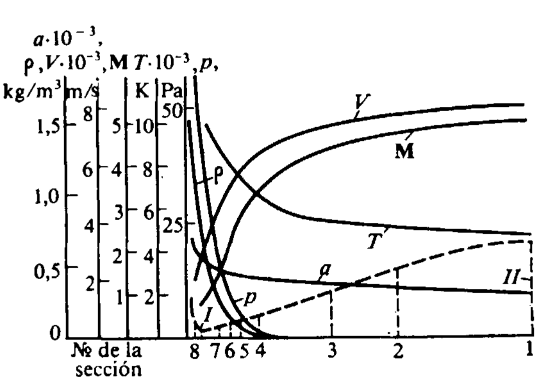


Fig. 3.8. Variación de los parámetros del gas en la tobera:

secciones crítica *I* y de salida *II*; las secciones *1–8* se refieren al perfil a trazos

obtenemos la densidad ρ_k, temperatura T_k y la presión p_k. Por los valores de ρ_k y V_k se calcula el caudal específico de masa $\rho_k V_k$.

Haciendo uso del diagrama $a - i$ determinamos la velocidad del sonido a_k, los correspondientes valores de i_k y S_0 y, a continuación, calculamos los números $M_k = V_k/a_k$.

La velocidad crítica del sonido a^*, así como la correspondiente entalpía i^*, se determinan del modo siguiente. Para la serie de valores hallados de a_k, V_k e i_k construimos las curvas $V_k = f(i_k)$ y $a_k = f(i_k)$. El punto de intersección de estas curvas determina los valores de a^* e i^* (fig. 3.7).

La densidad en la sección crítica ρ^* se halla mediante el diagrama $i - S$, según los valores de i^* y S_0. De la ecuación de caudal $(\rho_a V_a S_a = \rho^* a^* S^*)$ determinamos el área de dicha sección: $S^* = \rho_a V_a S_a/(\rho^* a^*)$. De forma análoga se calculan las áreas de las demás secciones: $S_k = \rho_a V_a S_a/(\rho_k V_k)$.

De acuerdo con los resultados del cálculo efectuado, en la fig. 3.8 se muestra la variación de los parámetros del gas a lo largo de la tobera. En esa misma figura está representado el perfil de la tobera, construido de acuerdo con los valores calculados de las áreas S_k de sus secciones transversales ($d_k = \sqrt{4S_k/\pi}$). La longitud de la tobera y las coordenadas de las secciones *1 — 8* se eligen al azar.

De la gráfica (fig. 3.7) se han hallado los valores $a^* = 2700$ m/s e $i^* = 44{,}7 \times 10^6$ m²/s² y del diagrama $i - S$, según $i^* = 44{,}7 \cdot 10^6$ m²/s² y $S_0 = 14{,}5 \times 10^3$ m²/(s²·K), se ha determinado la densidad $\rho^* = 9{,}2 \cdot 10^{-2}$ kg/(s²·m⁴) $= 0{,}9022$ kg/m³.

Así, pues, el área de la sección crítica de la tobera $S^* = 4{,}361 \cdot 10^{-4}$ m².

La presión y la temperatura en dicha sección son iguales a $p^* = 55 \cdot 10^5$ Pa y $T^* = 11\,000$ K, respectivamente, en tanto que el caudal específico de masa $\rho^* a^* = 2436$ kg/(m²·s).

Capítulo 4

Teoría de las ondas de choque

La teoría de las ondas de choque (también llamadas ondas de compresión o frontales) tiene gran importancia para el estudio de las regularidades de los flujos supersónicos de gas. Sin conocerla es imposible calcular las características aerodinámicas de los vehículos volantes en movimiento a velocidades super e hipersónicas; determinar los parámetros de trabajo de sus dispositivos de toma de aire y de control; diseñar túneles aerodinámicos supersónicos y de choque; estudiar los complicados procesos de las interacciones de chorros.

El estudio del material que se aduce en este capítulo permite aclarar consecutivamente la naturaleza de las ondas de choque, cuándo y por qué surgen, comprender la esencia de los procesos físicos que transcurren al pasar el gas por el frente de la onda de choque, tanto en los casos más sencillos, en que la capacidad calorífica del gas no varía (velocidades supersónicas con números de Mach hasta de 5—6), como con las condiciones de velocidades hipersónicas, cuando hay que tomar en consideración la saturación de los grados vibratorios de libertad de las moléculas del gas, la disociación térmica e, incluso, la ionización.

El modelo físico que yace en la base de la resolución de la mayoría de los problemas que se examinan consiste en que la corriente en cada chorro antes de la onda y tras ella se considera isentrópica, en tanto que el gas se examina como un fluido ideal (perfecto) compresible y no conductor del calor. Con esto, el proceso que se produce en la onda no es isentrópico, pero puede considerarse como tal.

En el caso de procesos en equilibrio el modelo matemático, correspondiente a tales representaciones físicas, contiene un sistema de ecuaciones que liga los parámetros del gas disociado antes de la onda de choque y tras ella.

También se estudian aquí problemas y preguntas relacionados con el desequilibrio de las transformaciones físico-químicas en las ondas de choque y la determinación de los efectos de relajamiento.

Notoria atención se presta a la orientación práctica del material a estudiar. Se examinan los aspectos tanto de la circulación externa (ondas de choque junto a los vehículos volantes), como los flujos en canales (difusores y túneles aerodinámicos supersónicos).

Problemas y preguntas

4.1. En la fig. 4.1 se muestran tres tipos de propagación de débiles perturbaciones (sónicas) en un flujo de gas. Indiquen a qué velocidad del movimiento del gas corresponde cada tipo de propagación de las perturbaciones: subsónica ($V < a$), supersónica ($V > a$) o bien sónica ($V = a$).

4.2. Demuestren que la tangente a las ondas circulares de las perturbaciones sónicas en un flujo supersónico (fig. 4.2) es una recta (semejante línea lleva el nombre de *recta* u *onda* (*cono*) *de Mach*).

4.3. En la fig. 4.3 se muestra una onda curvilínea de Mach que surge en el flujo de un gas con capacidades caloríficas constantes. Muestren cómo varía el número local M a lo largo de tal línea en la dirección del punto A al B.

4.4. ¿Variará o no el ángulo de inclinación de la línea de Mach $\mu = \arcsen(1/M)$, si en el flujo de un gas con capacidades caloríficas constantes y a una misma velocidad aumenta la presión?

4.5. ¿Qué sucede con el ángulo de inclinación de la línea de Mach en el flujo de un gas con capacidades caloríficas constantes a velocidad invariable y al disminuir la temperatura?

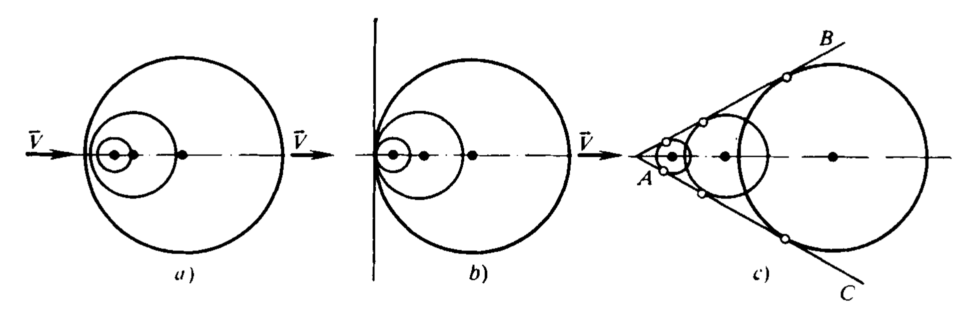


Fig. 4.1. Esquemas de perturbaciones débiles en un gas

4.6. ¿Cómo varía la inclinación de la línea de Mach, calculada en cierto punto del flujo de un gas, si se toma en consideración la disociación?

4.7. ¿Qué sucede con el ángulo de inclinación de la línea de Mach en un gas en disociación al reducir la presión?

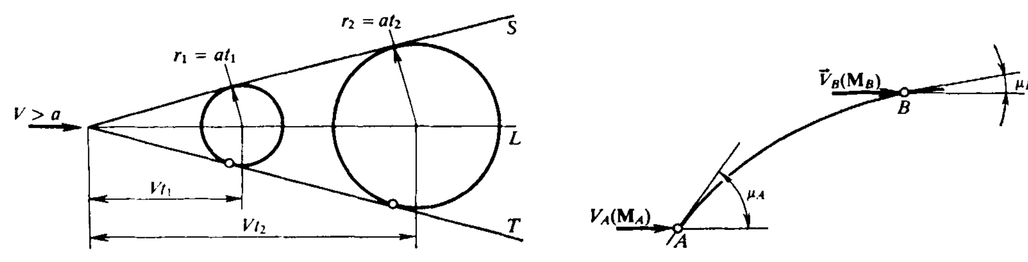


Fig. 4.2. Ondas circulares de las perturbaciones sónicas y cono de Mach

Fig. 4.3. Onda de perturbación curvilínea (onda de Mach)

4.8. Examinen la naturaleza física de formación de las ondas de choque.

4.9. Como sabemos, la presión, densidad y temperatura tras la onda de choque crecen bruscamente. ¿Cuál es la diferencia entre tal variación a salto de los parámetros y su crecimiento uniforme al no haber ondas de choque?

4.10. ¿Cómo explicar que con el aumento de la temperatura tras la onda de choque disminuye la velocidad del flujo?

4.11. Para determinar las magnitudes desconocidas, es decir, las razones entre los parámetros del gas tras la onda de choque normal (frontal) y delante de ella, cuando las capacidades caloríficas son constantes, deben ser conocidos el número M_1 del flujo incidente y el índice adiabático $k_1 = c_p/c_v$. ¿Qué datos adicionales debemos conocer si se resuelve el problema de una onda de choque tras la cual el flujo está disociado?

4.12. Consideren las dependencias para las razones de las presiones p_2/p_0 y p_0'/p_0 y, por vía gráfica, muestren el carácter de esas dependencias en función del número M_1 antes de una onda de choque normal para $k = 1{,}4$.

4.13. Obtengan las dependencias para los valores $\Delta\rho/\rho_1 = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$; M_1; M_2 y $\Delta p_0/p_0 = (p_0 - p_0')/p_0$ en función de la variación relativa de la presión $\Delta p/p_1 = (p_2 - p_1)/p_1$ en el caso de una onda de choque débil normal ($\Delta p/p_1 \ll 1$).

4.14. Un vehículo volante está en movimiento a la altura $H = 10$ km y velocidad $V = 2000$ km/h. ¿Cuál es su velocidad con relación a las partículas de aire por las que pasa la onda de choque normal, surgida delante de la nariz del fuselaje?

4.15. ¿A qué velocidad V_{ch} se propaga por un tubo una onda de choque normal, creada durante el movimiento del pistón a la velocidad $V_p = 250$ m/s por un gas a la temperatura $T_1 = 300$ K (fig. 4.4)? La razón de las capacidades caloríficas $k = 1,3$, la constante de los gases $R = 290$ J/(kg·K).

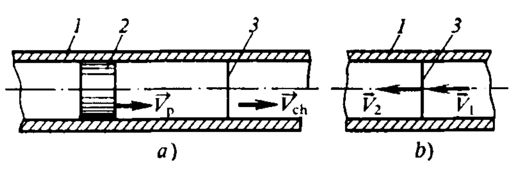


Fig. 4.4. Onda de choque delante del pistón:
a y *b*, velocidad respecto del tubo y la onda; *1*, tubo; *2*, pistón; *3*, onda de choque

4.16. La tobera de Laval tiene una razón entre las áreas de las secciones de salida y crítica $S_a/S^* = 4$. A ella, de un recipiente, se alimenta aire ($k = 1,4$) a la presión $p = 4 \cdot 10^6$ Pa. Determinen: el valor mínimo de la contrapresión con la que en la tobera surge una onda de choque; 2) la contrapresión que corresponde a la posición de la onda en la sección con área $S = 2S^*$; 3) la presión en el recipiente, con la que la tobera «se obstruye» con el número $M = 1$ en la sección crítica a presión atmosférica ($1,013 \cdot 10^5$ Pa).

4.17. Los parámetros de un gas tras una onda de choque oblicua pueden resultar iguales a sus correspondientes valores tras una onda de choque normal. ¿A qué condición esto es posible?

4.18. Determinen el ángulo de inclinación de una onda de choque adherida θ_{ch} en un flujo plano supersónico, si se han preestablecido la razón de las densidades $\rho_2/\rho_1 = 10$ y el ángulo de inclinación del obstáculo $\beta_{ch} = 30°$.

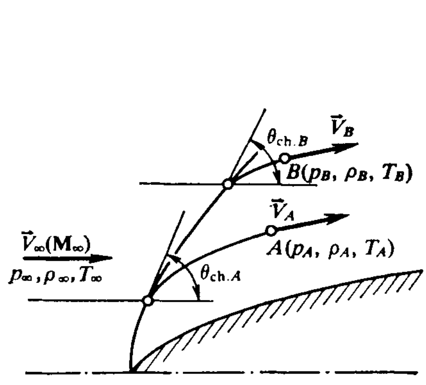
4.19. Hallen la razón de las velocidades V_2/V_1 tras y delante de una onda de choque oblicua adherida a una cuña aguzada con ángulo $\beta_{ch} = 30°$. La razón de las densidades para las condiciones directamente tras la onda de choque y delante de ella $\rho_2/\rho_1 = 10$.

4.20. El coeficiente de presión directamente tras una onda de choque oblicua, situada delante de un punto de una superficie cuneiforme con ángulo β (compresión), o en una superficie inclinada bajo ese mismo ángulo respecto a la dirección de la velocidad de un flujo supersónico (enrarecimiento), puede representarse como la función $\bar{p} = \bar{p}(M_1, \beta)$. Empleando el desarrollo en serie por el parámetro β, determinen para $|\beta| = 15°$, $M_1 = 2$ y $k = c_p/c_v = 1,4$ los valores del coeficiente de presión para las condiciones de compresión y expansión y comparen entre sí los correspondientes resultados obtenidos con las aproximaciones segunda y tercera.

4.21. La diferencia de presiones y la razón de las densidades para las condiciones de un gas disociado $p_2 - p_1 = 2,94 \cdot 10^6$ Pa; $\rho_2/\rho_1 = 10$ y la densidad $\rho_1 = 1,226$ kg/m³. Determinen la diferencia de entalpías $i_2 - i_1$ para las condiciones que surgen tras la onda de choque y delante de ella.

4.22. En los puntos A y B, situados tras una onda de choque curvilínea en distintas líneas de corriente (fig. 4.5), las velocidades son iguales: $V_A = V_B = V$. Comparen entre sí las correspondientes presiones p_A, p_B, densidades ρ_A, ρ_B y temperaturas T_A, T_B.

4.23. Obtengan la ecuación de caudal para el movimiento unidimensional uniforme de un gas con capacidades caloríficas constantes en el chorro, que pasa por un sistema de ondas de choque (fig. 4.6), en la siguiente forma: $S_2/S_1 = (1/\nu)\, q\,(\mathrm{M}_1)/q\,(\mathrm{M}_2)$, donde S_1, S_2 son las correspondientes áreas de la sección transversal del chorro; $\nu = p_0'/p_0$, el coeficiente de recuperación de la presión en el sistema de ondas de choque; p_0 y p_0', las presiones de remanso isentrópico y de remanso tras la última onda de choque, respectivamente; q (M), las funciones gasodinámicas del número M que representan la razón $\rho V/(\rho^* a^*)$ (ρV es el caudal específico del gas en la sección con el número M prefijado; $\rho^* a^*$, el caudal específico del gas en la sección crítica del chorro).



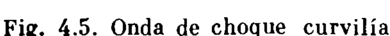


Fig. 4.5. Onda de choque curvilía

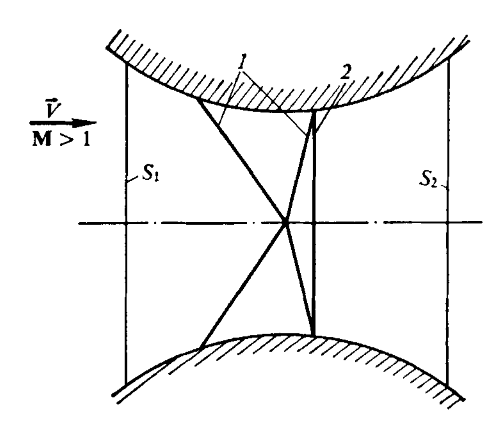


Fig. 4.6. Ondas de choque oblicuas (*1*) y recta (*2*) en un tubo

4.24. ¿Cómo varían la temperatura y la velocidad en el flujo de un gas tras la onda de choque en comparación con un flujo isentrópico con igual variación de la presión?

4.25. Sabemos que en la sección de entrada de un difusor, alrededor del cual circula un flujo de aire ($k = 1{,}4$) con número $\mathrm{M}_1 = 2$ y a una presión estática $p_1 = 4 \cdot 10^4$ Pa se forma una onda de choque normal. Determinen el número M_3, la presión p_3 y la pérdida de la presión total en la sección cuya área 3,5 veces supera la sección de entrada ($S_3/S_1 = 3{,}5$).

4.26. Hallen los parámetros de un gas tras una onda de choque adherida oblicua (p_2/p_1; ρ_2/ρ_1; a_2/a_1; V_2/V_1; T_2/T_1; M_2), así como su ángulo de inclinación θ_{ch} si están prefijados el ángulo de la cuña $\beta_{ch} = 30°$, el número $\mathrm{M}_1 = 5$ y $k = 1{,}2$.

4.27. En la zona de trabajo de un túnel aerodinámico se encuentra un cuerpo cuneiforme A_0K (fig. 4.7). La circulación alrededor de éste va acompañada por la formación en su vértice A_0 de una onda de choque que incide en la pared DA en el punto A. Tras la onda la velocidad no es paralela a la pared, por lo que ella interacciona con el flujo provocando la aparición de la onda reflejada AB, detrás de la cual el flujo se hace paralelo a la pared. Determinen el ángulo de reflexión de la onda de choque, a condición de que delante de la onda A_0A el número $\mathrm{M}_1 = 5$ y el ángulo de la cuña $\beta_{\text{cuña}} = 15°$.

4.28. Determinen el coeficiente de presión $\bar{p}_2$ tras una onda de choque, a condición de que el ángulo de su inclinación $\theta_{ch} = 30°$ y que delante de aquélla el número $\mathrm{M}_1 = 5$. Comparen dos valores del coeficiente de presión: uno de los cua-

les está calculado para $k = 1{,}2$ y el otro, para $k=1{,}4$. Para $k=1{,}2$ y $1{,}4$ hallen los valores límites de $\bar{p}_2$ correspondientes a $M_1 \to \infty$.

4.29. En la fig. 4.8 se muestra la circulación alrededor de una superficie de un flujo supersónico con número $M_1 = 5$, $p_1 = 9{,}807 \cdot 10^4$ Pa; $k = 1{,}2$, $\beta_{ch} = 30°$. Una de las líneas de corriente pasa por la onda de choque, mientras que otra está

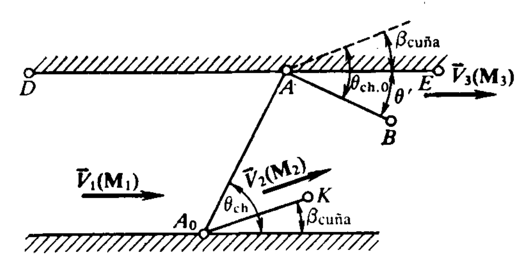


Fig. 4.7. Esquema de la reflexión de una onda de choque

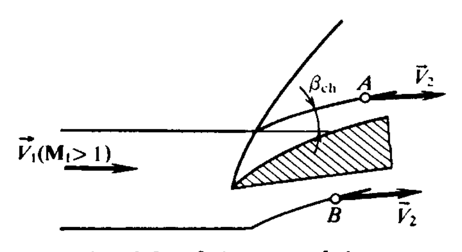


Fig. 4.8. Flujo supersónico:

A y *B*, puntos tras la onda de choque y en el flujo isentrópico

fuera de la onda en el lado inferior de la indicada superficie. Determinar la presión en los puntos *A* y *B* en dichas líneas de corriente, a condición de que las velocidades en ellos son las mismas e iguales a $V_2 = 1{,}1\ V_1$.

4.30. En un túnel supersónico, con la zona de trabajo cerrada de sección rectangular (fig. 4.9, *a*), en la entrada del difusor se forma un sistema de dos pares

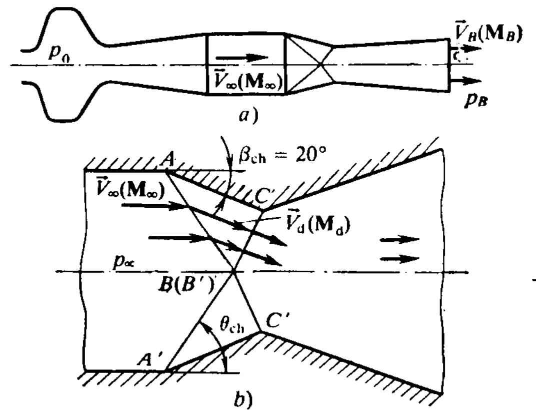


Fig. 4.9. Esquema de un túnel aerodinámico supersónico (*a*) y de un sistema de ondas de choque (*b*)

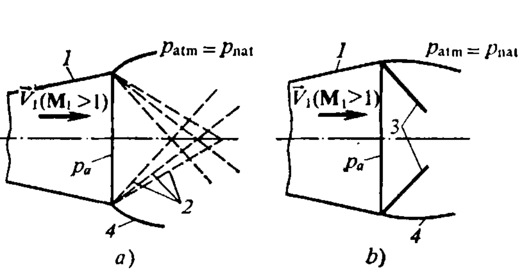


Fig. 4.10. Esquema de un chorro supersónico: surgimiento de ondas de enrarecimiento (*a*) o bien ondas de choque (*b*):

1, tobera; *2*, onda de enrarecimiento; *3*, ondas de choque; *4*, límite del chorro

de ondas de choque inclinadas respecto al eje del túnel (fig. 4.9, *b*). Con esto, las ondas *AB*, *A'B'* son oblicuas, con relación al flujo de la zona de trabajo, en tanto que las ondas *CB*, *C'B'*, normales (en lo que atañe al flujo tras las ondas de choque *AB* y *A'B'*). Determinen la presión de remanso p_0 en la antecámara, necesaria, al disponer de semejante sistema de ondas de choque, con el fin de obtener un flujo con número $M_\infty = 4$ en la zona de trabajo y vencer en la salida del difusor la contrapresión atmosférica $p_B = 9{,}807 \cdot 10^4$ Pa a una velocidad del flujo correspondiente a $M_B = 0{,}3$ ($\beta_{ch} = 20°$).

4.31. Las investigaciones ópticas muestran que durante el derrame de un gas a velocidad supersónica en la salida de la tobera (fig. 4.10) en un caso se forman ondas de enrarecimiento (ondas de Mach), en otro, ondas de choque. ¿A qué condiciones y por qué aparece semejante carácter de movimiento del gas?

4.32. Elijan el ángulo de la cuña $\beta_{cuña}$ con el que tras la onda de choque, que surge delante de tal cuña, el número $M_2 = 1$. El número M del flujo incidente $M_1 = 4$, $k = 1{,}4$.

4.33. Hallen un valor tal del ángulo de la onda de choque $\theta_{ch.m}$ con el que se produce el giro del flujo tras de ella al máximo ángulo $\beta_{ch.m}$. Determinen este ángulo en función del número M_1 y $k = 1{,}4$.

4.34. Un cuerpo agudizado bidimensional se utiliza para medir la velocidad del aire en la zona de trabajo de un túnel aerodinámico (fig. 4.11). El ángulo de la

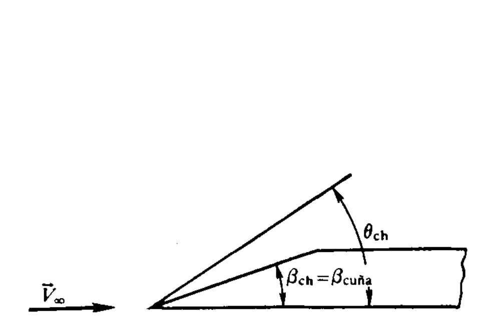


Fig. 4.11. Onda de choque plana

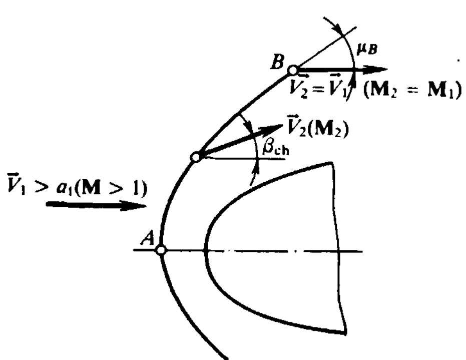


Fig. 4.12. Esquema de una onda de choque desprendida:

A, punto en la onda de choque; *B*, punto en la onda de Mach

cuña $\beta_{cuña} = 20°$ y el de la onda de choque, medido en una fotografía Schlieren (sombrografía), $\theta_{ch} = 50{,}8°$. Determinen el número M_1 en el túnel, así como su valor mínimo que puede ser medido con ayuda de la indicada cuña.

4.35. El coeficiente de presión inmediatamente después de una onda de choque oblicua, tras la que el flujo se desvía al ángulo β_{ch}, puede determinarse en el caso general de las dependencias

$$\bar{p} = 2\,(p_2 - p_1)/(kp_1M_1^2) = [4/(k+1)]\,(\text{sen}^2\,\theta_{ch} - 1/M_1^2)$$

y por la fórmula (4.42) en la que $\beta_{cuña} = \beta_{ch}$. Muestren que con pequeños ángulos β_{ch} es posible representar el indicado coeficiente con precisión hasta los términos pequeños de segundo orden en la forma

$$\bar{p} = 2\beta_{ch}/\sqrt{M_1^2 - 1} + \{[(k+1)\,M_1^4 - 4\,(M_1^2 - 1)]/[2\,(M_1^2 - 1)^2]\}\,\beta_{ch}^2.$$

4.36. ¿Cómo varía el ángulo crítico de giro de un flujo tras una onda de choque oblicua al aumentar la presión?

4.37. ¿Qué sucede con el ángulo crítico de giro al aumentar el número M_1 del flujo incidente supersónico?

4.38. En la fig. 4.12 se muestra el esquema de una onda de choque curvilínea desprendida. ¿Cuál es el carácter de la variación del ángulo de inclinación β_{ch} del vector velocidad a lo largo de la onda de choque en dirección del punto *A* (onda normal) al punto *B* (onda de Mach)?

4.39. De la fórmula (4.21) se desprende que al ángulo prefijado β_{ch} le corresponden dos valores del ángulo θ_{ch}: uno de ellos mayor (signo más), el otro menor (signo menos). ¿Qué propiedad caracteriza el flujo tras las ondas de choque inclinadas bajo esos ángulos θ_{ch}?

4.40. ¿Cómo varía el ángulo de inclinación de una onda de choque adherida θ_{ch} al aumentar el ángulo β_{ch} de la cuña?

4.41. ¿Qué sucederá con el ángulo θ_{ch} si se aumenta el número M_1 del flujo incidente?

4.42. En dos flujos supersónicos con diferentes $M_{\infty 1}$, $M_{\infty 2}$ y k_1, k_2 se encuentran superficies cuneiformes con iguales ángulos de filo ($\beta_{cuña1} = \beta_{cuña2} = \beta_{cuña}$). La onda de choque delante de una de estas superficies es rectilínea y adherida, delante de la otra, curvilínea y desprendida (fig. 4.13). Comparen entre sí los posibles valores de M y los índices adiabáticos a los que corresponden las indicadas ondas de choque.

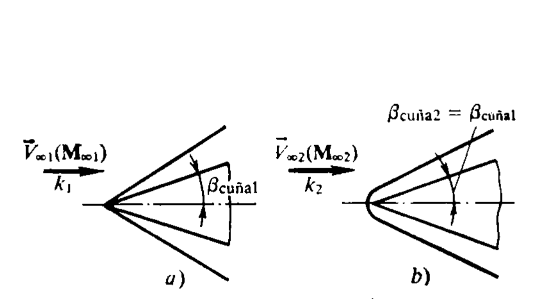


Fig. 4.13. Onda de choque adherida rectilínea (*a*) y onda de choque desprendida curvilínea (*b*)

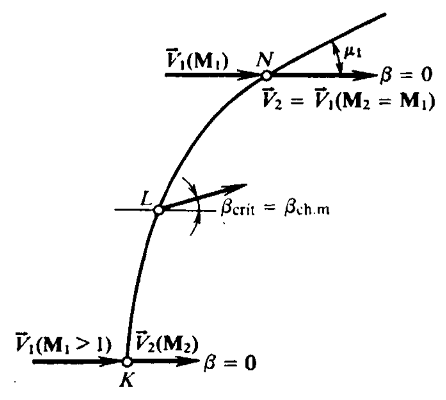


Fig. 4.14. Puntos característicos en un flujo de gas:

K, en el sector de la onda de choque recta; *L*, en el lugar del ángulo máximo de inclinación; *N*, en la onda de Mach

4.43. Muestren (véase más adelante la fig. 4.20) el ámbito de aplicación de una polar de choque para calcular la circulación supersónica alrededor de una cuña aguzada.

4.44. En la fig. 4.14 se muestra el esquema de una onda de choque desprendida. Muestren en la polar de choque (véase más abajo la fig. 4.20) los puntos que corresponden a los puntos de la onda marcados en la fig. 4.14.

4.45. Escriban la ecuación de la hodógrafa de velocidad detrás de la onda de choque para un flujo no perturbado de gas a la velocidad máxima. ¿Cuál es la forma de dicha hodógrafa?

4.46. Determinen la variación de la presión, temperatura y velocidad, así como el número M, detrás de una onda de choque normal, si la razón de las densidades detrás y delante de ella $\rho_2/\rho_1 = 5$ y $k = 1{,}2$.

4.47. ¿En qué se diferencia la onda de choque normal de la oblicua desde el punto de vista del carácter de la variación de la velocidad detrás de ella?

4.48. Determinen los coeficientes de presión en el punto de remanso total detrás de una onda de choque normal con $M_1 = 10$ para $k = 1{,}2$ y $1{,}4$. Comparen los valores hallados de estos coeficientes entre sí y con sus valores límites obtenidos para $M_1 \to \infty$.

4.49. Para una onda de choque normal, con capacidades caloríficas constantes, según los valores conocidos de $\lambda_1 = 1{,}90$ y $k = 1{,}4$, determinen la velocidad relativa detrás de la onda λ_2, así como los cocientes ρ_2/ρ_1; T_2/T_1; p_2/p_1 y $\nu = p_0'/p_0$.

4.50. Determinen la máxima «obstrucción» tolerable con el modelo (o bien con el dispositivo para su fijación) del flujo en la zona de trabajo de un túnel aerodinámico supersónico con número $M_\infty = 2{,}68$, con el que no se produce el «blocaje» del túnel [semejante blocaje va acompañado del paso por la parte del túnel no obstaculizada (entre la pared del túnel y el modelo) de una onda de choque «de puesta en funcionamiento», detrás de la cual el flujo es subsónico].

4.51. Para una onda de choque, tras la cual el ángulo de giro del flujo es $\beta_{ch} = 30°$, hallen la razón de las densidades ρ_2/ρ_1, los coeficientes de presión estática $\bar{p}_2$ y la presión de remanso $\bar{p}_0$, así como los números M_2 en el caso límite de corriente supersónica de un gas cuando M_1 sen $\theta_{ch} \to \infty$ y siendo los valores de $k = 1{,}2$ y $1{,}4$.

4.52. El flujo supersónico delante de una onda de choque se caracteriza por el número $M_1 = 15$ y el valor $k = 1{,}4$ e inmediatamente detrás de la onda de choque, por su giro a un ángulo $\beta_{ch} = 0{,}1$.

Considerando otros flujos supersónicos con números M muy grandes, semejantes al dado, determinen los parámetros del gas detrás de las ondas de choque para $M_1 = 10$, $M_1 = 20$ con el mismo valor $k = 1{,}4$.

4.53. ¿Cuál será la temperatura detrás de una onda de choque en un gas disociado en comparación con su valor en caso de capacidades caloríficas constantes?

4.54. Un flujo de gas supersónico circula alrededor de la superficie de una cuña bajo cierto ángulo β_{ch}. ¿Cuál será el ángulo de inclinación de la onda de choque θ_{ch} durante la disociación en comparación con el caso en que las capacidades caloríficas son constantes?

4.55. ¿Cómo varía la presión detrás de una onda de choque si se toma en consideración la influencia de la disociación del gas?

4.56. Comparen la densidad detrás de una onda de choque en caso de capacidades caloríficas constantes y al haber disociación.

4.57. ¿Qué sucederá con el ángulo crítico de giro del flujo detrás de una onda de choque (ángulo crítico de la cuña) si sustituimos el flujo con capacidades caloríficas constantes por la corriente de un gas en disociación?

4.58. Determinen los parámetros de un gas inmediatamente detrás de una onda de choque normal, así como los valores de los correspondientes parámetros en el punto del remanso total detrás de dicha onda con velocidad $V_1 = 8{,}1$ km/s, presión $p_1 = 9{,}807 \cdot 10^2$ Pa, masa molecular media $(\mu_m)_1 = 29{,}0$, temperatura $T_1 = 236$ K y velocidad del sonido $a_1 = 310$ m/s.

4.59. Calculen los parámetros del aire detrás de una onda de choque oblicua para las siguientes condiciones: número $M_1 = 11$, ángulo de giro del flujo detrás de la onda $\beta_{ch} = 45°$, altura de vuelo $H = 5$ km.

4.60. Determinen los parámetros de un gas en el punto del remanso total detrás de una onda de choque normal, considerando el movimiento detrás de ella como el flujo de un medio incompresible. La velocidad del aire delante de la onda $V_1 = 8100$ m/s. Comparen los valores obtenidos de la presión, densidad y temperatura con sus valores determinados con ayuda del cálculo habitual tomando en consideración la disociación y compresibilidad del gas detrás de la onda de choque. Al determinar los parámetros del gas inmediatamente detrás de ésta hagan uso de los datos iniciales de la solución del problema 4.58.

4.61. Son conocidos el ángulo de inclinación de una onda de choque oblicua $\theta_{ch} = 55°$, el ángulo de giro del flujo detrás de ella $\beta_{ch} = 45°$, así como la altura de vuelo $H = 10$ km. Determinen el número M_1 delante de la onda, así como los correspondientes parámetros inmediatamente detrás de ella.

4.62. Mediante mediciones en el punto de remanso total en un vehículo volante, que está en vuelo a la altura $H = 5$ km, han sido halladas la presión $p_0' = 3{,}23 \cdot 10^7$ Pa y la temperatura $T_0' = 4500$ K. Determinen la velocidad del vehículo volante y los parámetros del gas detrás de la onda de choque.

4.63. De acuerdo con las mediciones, la temperatura y la presión en el punto de remanso total de un vehículo volante son $T_0' = 5000$ K y $p_0' = 9{,}807 \cdot 10^5$ Pa, respectivamente. Determinen la velocidad (número M) y la altura de vuelo.

4.64. Según los datos del problema 4.63 calculen la velocidad (número M) y la altura de vuelo suponiendo que la capacidad calorífica del aire es constante ($k = 1{,}4$).

4.65. La interpretación de los interferogramas muestra que detrás de una onda de choque oblicua, delante de un obstáculo plano bajo un ángulo $\beta_{ch} = 30°$, la densidad del aire aumenta, en uno de los regímenes de trabajo del túnel aerodinámico, 3,41 veces y en otro, 10 veces. ¿Son suficientes estos datos para determinar las razones entre los correspondientes valores de las velocidades y temperaturas detrás de la onda de choque y delante de ella? En caso de necesidad, prefijen los parámetros que faltan y hallen las razones buscadas.

4.66. Determinen los parámetros detrás de la onda de choque en el aire, considerándolo como la mezcla de nitrógeno y oxígeno puros en disociación, en la suposición de que la componente normal de la velocidad delante de la onda de choque $V_{n1} = 1{,}5\ V_d$ y que el vuelo transcurre a cierta altura en la que $\rho_1 = 1{,}5 \cdot 10^{-7}\ \rho_d$ (V_d y ρ_d son la velocidad y la densidad características de disociación, respectivamente).

4.67. Con los datos del problema 4.59 determinen el grado de disociación del aire detrás de una onda de choque, considerándolo como el modelo biatómico de una mezcla de oxígeno y nitrógeno.

4.68. La masa molar media del aire detrás de una onda de choque $(\mu_m)_2 = 23{,}2$. Calculen el grado de disociación α_2 suponiendo que el aire delante de la onda no está disociado ($\alpha_1 = 0$).

4.69. ¿Cómo varía el grado de disociación tras una onda de choque en un sector con longitud del recorrido de relajación?

4.70. Determinen los parámetros del gas detrás de una onda de choque normal, teniendo en cuenta la influencia de la inuniformidad, a condición de que delante de la onda $M_1 = 25$; $p_1 = 9{,}807 \cdot 10^2$ Pa; $T_1 = 250$ K; $k_1 = 1{,}4$. Comparen estos parámetros con los correspondientes valores en caso de disociación en equilibrio, calculen el tiempo y la largura del recorrido de relajación detrás de la onda.

Solución de los problemas y respuestas a las preguntas

4.1. El carácter de las perturbaciones (véase la fig. 4.1, *a*) corresponde a la velocidad subsónica de movimiento del gas ($V < a$), ya que el frente de las pequeñas perturbaciones, al moverse a la velocidad del sonido, se propaga al encuentro del flujo. En el caso mostrado en la fig. 4.1, *b*, la velocidad del flujo es igual a la del sonido ($V = a$) y las perturbaciones sólo se desplazan por el flujo. En la fig. 4.1, *c* está representada la propagación de las perturbaciones sónicas en el

flujo supersónico ($V > a$), por ello las perturbaciones débiles se hallan en el espacio (cono de Mach) limitado por las generatrices, es decir, las rectas AB y AC.

4.2. En la fig. 4.2 se muestra la propagación de ondas circulares de pequeñas perturbaciones en un flujo supersónico. El radio de cada una de ellas $r = at$, donde t es el tiempo de desplazamiento del centro del círculo a la velocidad del flujo $V > a$ a lo largo de la recta OL. Es evidente que con la variación de t la distancia Vt y el radio del círculo, igual a at, varían un número igual de veces, o sea, en este caso todos los círculos tienen un centro común de semejanza O. Por esta razón, la región del plano ocupada por los círculos de perturbación es el ángulo SOT con vértice en el punto O, formado por las tangentes comunes a todos los círculos, en forma de las rectas OS, OT que al mismo tiempo son envolventes.

4.3. El número local $\mathbf{M}$ está ligado con el ángulo de inclinación de la línea sónica (de Mach) por la expresión $\mu = \arcsin (1/\mathbf{M})$. En la fig. 4.3 el ángulo μ_B en el punto B es menor que el ángulo μ_A en el punto A ($\mu_B < \mu_A$), por lo que el número local $\mathbf{M}$ en la dirección del punto A al B aumenta ($\mathbf{M}_B > \mathbf{M}_A$).

4.4. El ángulo de inclinación de la línea de Mach, $\mu = \arcsin (1/\mathbf{M})$, al aumentar la presión no varía, ya que a las condiciones prefijadas la velocidad del sonido, dependiente de la temperatura ($a^2 = kRT$), queda invariable. Por esta causa, se conserva el número $\mathbf{M} = V/a$ y, por consiguiente, el ángulo μ.

4.5. Al disminuir la temperatura T, quedando la velocidad V del flujo invariable, crece el número $\mathbf{M} = V/a$, ya que disminuye la velocidad del sonido $a = \sqrt{kRT}$, lo que provoca la disminución del ángulo de inclinación de la línea de Mach $\mu = \arcsin (1/\mathbf{M})$.

4.6. Como es sabido, durante la disociación crece el número de partículas del gas por unidad de volumen. Esto conduce al aumento de la velocidad de propagación de las perturbaciones débiles, es decir, al crecimiento de la velocidad del sonido a, en comparación con el caso de capacidades caloríficas constantes. Por esto, tomando en consideración la influencia de la disociación, debido a la disminución del número $\mathbf{M} = V/a$, aumenta el ángulo de inclinación de la línea de Mach.

4.7. El ángulo de inclinación de la línea de Mach en un gas en disociación aumenta si disminuye la presión. Esto se explica por el hecho de que con semejante disminución de la presión crece el grado de disociación, es decir, crece la cantidad de partículas por unidad de volumen. Por ello, la velocidad del sonido a y el ángulo de inclinación de la línea de Mach, aumentan.

4.8. Las ondas de choque surgen al decelerar de modo brusco los flujos supersónicos en el gas por cualesquiera obstáculos. Las perturbaciones de compresión, provocadas por obstáculos puntuales aislados, al propagarse a la velocidad del sonido no pueden salir en el flujo supersónico tras los límites de las correspondientes superficies cónicas formadas por las ondas (cono) de Mach (véase la fig. 4.2). Por ello, en un espacio limitado delante del obstáculo se produce la superposición múltiple de las perturbaciones de compresión, lo que conduce al surgimiento de ondas de choque.

4.9. La notoria diferencia entre el proceso de paso de un gas por la onda de choque, que va acompañado por el aumento abrupto de la presión, densidad y temperatura, y el flujo con crecimiento suave y uniforme de esos parámetros, consiste en el considerable valor del trabajo de las fuerzas de rozamiento interno en el gas. En la onda de choque, a una distancia que no sobrepasa varias longitudes de la carrera libre de las moléculas, debido a los grandes gradientes de velocidad, las fuerzas de rozamiento interno son tan considerables que convierten irrever-

siblemente en calor una notable parte de los tipos mecánicos de energía del gas. Esto provoca un gran crecimiento de la entropía. Cuando se trata de un flujo de gas con crecimiento gradual de los parámetros, el trabajo de las fuerzas del rozamiento interno es despreciablemente pequeño y el proceso se considera isentrópico.

4.10. Al subir la temperatura del gas, detrás de la onda de choque aumentan las energías interna y potencial de ese (o bien la entalpía $i = c_p T$). En correspondencia con la ley de conservación de la energía ($V^2/2 + i = \text{const}$), su valor detrás de la onda de choque no varía, lo que sólo es posible al disminuir la energía cinética ($V^2/2$). Por esto la velocidad del gas V siempre disminuye detrás de la onda de choque.

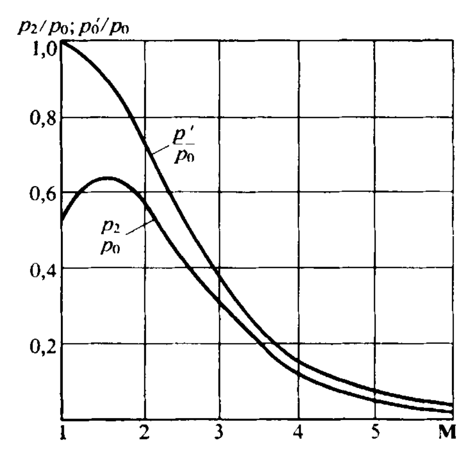


Fig. 4.15. Variación de la presión tras una onda de choque normal

4.11. Para determinar las variables desconocidas, es decir, las razones de los parámetros del gas detrás de la onda de choque y delante de ella, cuando detrás de esta onda el flujo está disociado, además del número M_1 y del índice adiabático k_1, deben ser conocidas la presión p_1 y la temperatura T_1 del flujo incidente, así como la composición del gas.

4.12. Para la onda de choque normal la razón de la presión detrás de ésta y delante de ella

$$p_2/p_1 = [2k/(k+1)]M_1^2 - (k-1)/(k+1), \tag{4.1}$$

y la presión de remanso delante de la onda se determina con la fórmula

$$p_0/p_1 = \{1 + [(k-1)/2]\, M_1^2\}^{k/(k-1)}.$$

De acuerdo con esto

$$p_2/p_0 = (2kM_1^2 - k + 1)\, [1 + (k-1)\, M_1^2/2]^{-k(k-1)}/(k+1). \tag{4.2}$$

Para determinar la razón p_0'/p_0 (las presiones de remanso detrás de la onda y delante de ella), además de las dependencias aducidas más arriba, se emplean las siguientes

$$p_2/p_0' = [1 + (k-1)\, M_2^2/2]^{-k/(k-1)};$$

$$M_2^2 = [1 + (k-1)\, M_1^2/2]/[kM_1^2 - (k-1)/2].$$

Tomando esto en consideración

$$\frac{p_0'}{p_0} = \frac{p_0'}{p_2}\frac{p_2}{p_0} = \left[\frac{(k+1)\,M_1^2}{2+(k-1)\,M_1^2}\right]^{k/(k-1)}\left[\frac{k+1}{2kM_1^2-(k-1)}\right]^{1/(k-1)}. \tag{4.3}$$

Según el planteamiento $k = 1{,}4$, por lo que

$$\frac{p_2}{p_0} = \frac{7M_1^2 - 1}{6\,(1+0{,}2M_1^2)^{3,5}}\,; \quad \frac{p_0'}{p_0} = \left(\frac{6M_1^2}{5+M_1^2}\right)^{3,5}\left(\frac{6}{7M_1^2-1}\right)^{2,5}.$$

En la fig. 4.15 se muestran las gráficas construidas según estas fórmulas. De acuerdo con estos resultados, para la estimación aproximada de la razón p_0'/p_0, en el caso de grandes números M_1, es posible emplear la razón p_2/p_0.

4.13. De acuerdo con la teoría de la onda de choque normal de intensidad finita, la razón de las presiones se determina con (4.1), de donde

$$M_1 = \{1 + [(k+1)/(2k)]\ \Delta p_1/p_1\}^{0,5}. \qquad (4.4)$$

Según el planteamiento $\Delta p/p_1 \ll 1$, por lo que después de desarrollar en serie obtenemos la relación aproximada $M_1 \approx 1 + (k+1)(\Delta p_1/p_1)/(4k)$.

El cociente de las densidades en la onda de choque

$$\rho_2/\rho_1 = [(k+1)\ M_1^2/2]/[1 + (k-1)\ M_1^2/2], \qquad (4.5)$$

de donde

$$\Delta\rho/\rho_1 = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_1 = (M_1^2 - 1)/[1 + (k-1)\ M_1^2/2]. \qquad (4.5')$$

De (4.4) se deduce que $M_1^2 - 1 = (k+1)(\Delta p/p_1)/(2k)$. Por ello,

$$\Delta\rho/\rho_1 = [(\Delta p/p_1)/k]/[1 + (k-1)(\Delta p/p_1)/(2k)]. \qquad (4.6)$$

Tomando en consideración que para una onda de choque débil $(\Delta p/p_1) \ll 1$, obtenemos

$$\Delta\rho/\rho_1 \approx (\Delta p/p_1)/k. \qquad (4.7)$$

Para el número M detrás de la onda tenemos la dependencia

$$M_2^2 = [1 + (k-1)\ M_1^2/2]\ [kM_1^2 - (k-1)/2]^{-1}. \qquad (4.8)$$

Poniendo en (4.8) el valor de M_1 de (4.4), hallamos

$$M_2^2 = \frac{1 + (k-1)\ [1 + (k-1)\ (\Delta p/p_1)/(2k)]/2}{k\ [1 + (k+1)\ (\Delta p/p_1)/(2k)] - (k-1)/2}.$$

De aquí, después de desarrollar en serie el denominador y de simplificar, tendremos

$$M_2 \approx 1 - (k+1)(\Delta p/p_1)/(4k). \qquad (4.9)$$

Ahora, empleando la fórmula (4.3) y poniendo en ella el valor M_1 de (4.4), obtenemos

$$\frac{\Delta p_0}{p_0} = \frac{p_0' - p_0}{p_0} = \left(1 + \frac{\Delta p}{p_1}\right)^{-\frac{1}{k-1}} \left[\frac{(k+1)\left(1 + \frac{k+1}{2k}\frac{\Delta p}{p}\right)}{(k-1)\left(1 + \frac{k+1}{2k}\frac{\Delta p}{p_1} + 2\right)}\right]^{\frac{k}{k-1}} - 1. \qquad (4.10)$$

Después de desarrollar en la serie de Taylor y de las correspondientes transformaciones, definitivamente obtenemos

$$\Delta p/p_0 \approx -(k+1)(\Delta p/p_1)^3/(2k^2). \qquad (4.11)$$

4.14. La velocidad del vehículo volante, respecto de las partículas del aire, por las que pasó la onda de choque, es la misma que detrás de la onda de choque normal (V_2) a condición de que el flujo incidente se mueva a la velocidad V_1 del vehículo volante. La velocidad V_2 se determina por la fórmula

$$V_2/V_1 = [2 + (k-1)\ M_1^2]/[(k+1)\ M_1^2], \qquad (4.12)$$

en la que $M_1 = V_1/a_1$ es el número M delante de la onda de choque.

La velocidad del vehículo volante está prefijada: $V_1 = 2000/3{,}6 = 555{,}6$ m/s. La velocidad del sonido delante de la onda de choque $a_1 = 299{,}4$ m/s se determina

por la altitud de vuelo $H = 10$ km en las tablas de la atmósfera normal. Así, pues, $\mathbf{M}_1 = 1{,}856$.

La velocidad correspondiente a (4.12) $V_2 = 227{,}0$ m/s.

4.15. Ante todo, obtenemos la fórmula de cálculo para la velocidad V_{ch} de desplazamiento de la onda de choque normal. Con este fin, aducimos las ecuaciones de conservación de la masa, el impulso y la energía al pasar el gas por la onda:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2; \tag{4.13}$$

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2; \tag{4.14}$$

$$i_1 + V_1^2/2 = i_2 + V_2^2/2. \tag{4.15}$$

En estas ecuaciones la velocidad antes de la onda de choque y detrás de ella, V_1 y V_2, se determinan en un sistema de coordenadas que se desplaza por el túnel junto con la onda (véase la fig. 4.4, *b*).

Sustituyendo en (4.14) p_1 y p_2 de acuerdo con la ecuación de estado, representemos (4.14) en la forma $\rho_1 RT_1 + \rho_1 V_1^2 = \rho_2 RT_2 + \rho_2 V_2^2$, de donde, tomando en consideración (4.13), obtenemos

$$T_2 = T_1 V_2/V_1 + V_2 V_1/R - V_2^2/R. \tag{4.16}$$

Poniendo en (4.15) la expresión para la entalpía $i = c_p T = kRT/(k-1)$ hallamos

$$kRT_1/(k-1) + V_1^2/2 = kRT_2/(k-1) + V_2^2/2.$$

Sustituyendo en esta fórmula el valor de T_2 en (4.16), obtenemos

$$\frac{k}{k-1} RT_1 + \frac{V_1^2}{2} = \frac{k}{k-1} RT_1 \frac{V_2}{V_1} + \frac{k}{k-1} V_1 V_2 - \frac{k}{k-1} V_2^2 + \frac{V_2^2}{2}. \tag{4.17}$$

Los valores de V_1 y V_2 están ligados con las velocidades de movimiento del pistón V_p y de desplazamiento de la onda V_{ch} (en el sistema inmóvil de coordenadas, véase la fig. 4.4, *a*) con las siguientes relaciones: $V_1 = V_{ch}$; $V_2 = V_{ch} - V_p$. Teniendo en cuenta lo indicado, (4.17) se transforma en la ecuación

$$V_{ch}^2 - (k+1) V_{ch} V_p/2 - kRT_1 = 0. \tag{4.18}$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos

$$V_{ch} = (k+1) V_p/4 + 0{,}5 \sqrt{(k+1)^2 V_p^2/4 + 4kRT_1}. \tag{4.19}$$

Introduciendo aquí los datos iniciales determinamos la velocidad $V_{ch} = 509{,}5$ m/s.

4.16. En las tablas de las funciones gasodinámicas al valor de $q(\mathbf{M}_a) = S^*/S_a = 1/4$ corresponde el número de Mach en la sección de salida de la tobera $\mathbf{M}_a = 2{,}938$ y la magnitud $\pi(\mathbf{M}_a) = p_a/p_0 = 0{,}02991$.

1) La contrapresión mínima p_{cont}, con la que en la tobera surge una onda de choque, existe en el caso en que ésta se sitúa en la sección de salida de la tobera, es decir, si $p_2 = p_{cont}$; $p_1 = p_a$ y $\mathbf{M} = \mathbf{M}_a$. Por ello, de (4.1) hallamos que $p_{cont}/p_a = 9{,}904$.

2) La presión de remanso en la tobera es igual a la presión en el recipiente del que se alimenta el aire ($p_0 = 4\cdot 10^6$ Pa). Así, pues, $p_{cont}/p_0 = (p_a/p_0)(p_{cont}/p_a) = 0{,}2962$; por lo tanto, la contrapresión $p_{cont} = (p_{cont}/p_0)\, p_0 = 1{,}185\cdot 10^6$ Pa.

Si la onda de choque normal se halla en la sección de la tobera de área $S_1 = 2S^*$, para encontrar la correspondiente contrapresión es posible efectuar cálculos análogos. Con esto, en la sección que consideramos el número $\mathbf{M}_1$ y la fun-

ción π ($\mathbf{M}_1$) $= p_1/p_0$ se determinan por el valor de q ($\mathbf{M}_1$) $= S^*/S_1 = S^*/(2\ S^*) =$ $= 0{,}5$ y son iguales a $\mathbf{M}_1 = 2{,}196$; π ($\mathbf{M}_1$) $= 0{,}09398$, respectivamente.

Con la fórmula (4.1), en la que $p_2 = p_{\text{cont}}$, calculamos $p_{\text{cont}}/p_1 = 5{,}461$. A continuación, hallamos $p_{\text{cont}}/p_0 = (p_1/p_0)\ (p_{\text{cont}}/p_1) = 0{,}5132$, de donde

$$p_{\text{cont}} = (p_{\text{cont}}/p_0)\ p_0 = 2{,}053 \cdot 10^6 \text{ Pa}.$$

3) determinemos tal valor de la presión en el recipiente con la que la tobera «se obstruye» cuando el aire sale a la atmósfera con una contrapresión $p_{\text{cont}} =$ $= 1{,}03 \cdot 10^5$ Pa, y en su sección crítica se dispone la onda de choque normal. Para esto empleamos la dependencia entre la presión de remanso p_0 y la presión en la sección crítica

$$p_0 = p^*\ [2/(k+1)]^{-k/(k-1)}. \tag{4.20}$$

Tomando en esta fórmula $p^* = p_{\text{cont}}$, obtenemos $p_0 = 1{,}198 \cdot 10^5$ Pa.

4.17. La condición de que los correspondientes parámetros del gas resulten iguales detrás y delante de las ondas de choque oblicua y normal consiste en el cumplimiento de la relación $\mathbf{M}_{1\text{obl}}$ sen $\theta_{\text{ch}} = \mathbf{M}_{1\text{nor}}$, es decir, cuando la componente normal del número $\mathbf{M}_{1\text{obl}}$ delante de la onda de choque oblicua $[(\mathbf{M}_{1\text{obl}})_n =$ $= \mathbf{M}_{1\text{obl}}$ sen $\theta_{\text{ch}}]$ es igual al correspondiente valor de $\mathbf{M}_{1\text{nor}}$ delante de la onda normal.

4.18. Para resolver el problema empleamos las siguientes relaciones que ligan entre sí los ángulos de inclinación de la onda de choque θ_{ch} y de desviación del flujo tras ella β_{ch}:

$$\text{tg}\,\theta_{\text{ch}} = \text{ctg}\,\beta_{\text{ch}}\,[(\rho_2/\rho_1 - 1)/2 \pm \sqrt{(\rho_2/\rho_1 - 1)^2/4 - (\rho_2/\rho_1)\,\text{tg}^2\,\beta_{\text{ch}}}]. \tag{4.21}$$

Después de poner en esta ecuación los valores $\rho_2/\rho_1 = 10$ y $\beta_{\text{ch}} = 30°$, obtenemos tg $\theta_{\text{ch}} = 1{,}732\ (4{,}5 \pm 4{,}11)$.

Así, pues, obtenemos dos valores del ángulo de inclinación: $\theta_{\text{ch}2} = 86°\ 10'$; $\theta_{\text{ch}1} = 33°\ 50'$.

Según el planteamiento, la onda de choque que surge es adherida, por lo que hay que elegir el ángulo menor de los dos valores obtenidos, es decir, admitir que en el flujo dado se realiza una onda con ángulo de inclinación $\theta_{\text{ch}1} = 33°\ 50'$. El segundo ángulo, de mayor valor $\theta_{\text{ch}2} =$ $= 86°\ 10'$, tiene lugar en el caso de una onda de choque desprendida y corresponde al punto en la onda donde la inclinación del vector velocidad, inmediatamente tras ella, $\beta_{\text{ch}} = 30°$ (fig. 4.16).

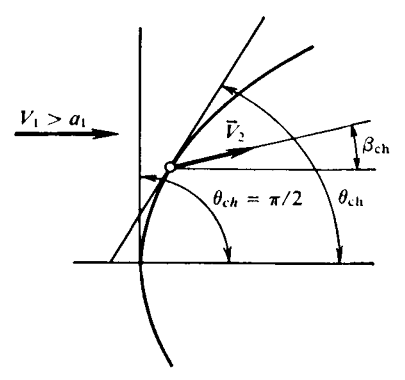


Fig. 4.16. Onda de choque curvilínea

4.19. Para determinar el cociente de las velocidades V_2/V_1 empleamos la fórmula de la onda de choque oblicua

$$V_2^2/V_1^2 = 1 - \text{sen}^2\,\theta_{\text{ch}}\,[1 - (\rho_1/\rho_2)^2]. \tag{4.22}$$

Como vemos, para hallar este cociente con el valor prefijado de $\rho_2/\rho_1 = 10$ hay que conocer, además, el ángulo de inclinación de la onda θ_{ch}. En la solución del problema 4.18 este ángulo resultó $\theta_{\text{ch}1} = 33°\ 50'$ para la onda adherida. Introduciendo su valor en (4.22) hallamos que $V_2^2/V_1^2 = 0{,}693$, de donde $V_2/V_1 = 0{,}832$.

Si examinamos la onda de choque desprendida, para la que en la solución del problema (4.18) el ángulo $\theta_{ch2} = 86° 10'$, $V_2^2/V_1^2 = 0{,}014$, de donde $V_2/V_1 = 0{,}118$.

4.20. Durante la desviación de un flujo supersónico a un pequeño ángulo β, el correspondiente coeficiente de presión varía en un valor determinado, para el número M_1 prefijado, con el desarrollo de tercer orden

$$\bar{p} = c_1\beta + c_2\beta^2 + c_3\beta^3, \tag{4.23}$$

donde β es el valor positivo para la desviación del flujo con compresión (onda de choque) y negativo, al pasar por una onda de enrarecimiento.

En los dos casos los coeficientes

$$c_1 = 2\sqrt{M_1^2-1}; \quad c_2 = [kM_1^4 + (M_1^2-2)^2]/[2(M_1^2-1)^2]. \tag{4.24}$$

El coeficiente c_3 para el flujo con compresión

$$c_3 = \frac{1}{(M_1^2-1)^{k/(k-1)}}\left[\frac{k+1}{6}M_1^8 + \frac{2k^2-7k-5}{6}M_1^6 + \frac{5(k+1)}{3}M_1^4 - 2M_1^2 + \frac{4}{3}\right] - \frac{(k+1)[(5-3k)M_1^4/4 + (k-3)M_1^2 + 2]}{12M_1^4(M_1^2-1)^{k/(k-1)}}, \tag{4.25}$$

mientras que para el flujo con expansión

$$c_3 = \frac{1}{(M_1^2-1)^{k/(k-1)}}\left[\frac{k+1}{6}M_1^8 + \frac{2k^2-7k-5}{6}M_1^6 + \frac{5(k+1)}{3}M_1^4 - 2M_1^2 + \frac{4}{3}\right]. \tag{4.26}$$

Con el valor dado del ángulo $\beta = 15°/57{,}3 = 0{,}2618$, el coeficiente de presión $\bar{p} = \pm 0{,}2618\ c_1 + 0{,}06854\ c_2 \pm 0{,}01794\ c_3$, donde para $M_1 = 2$, $k = 1{,}4$ los coeficientes $c_1 = 1{,}154$; $c_2 = 2{,}933$; $c_3 = 0{,}9343$.

Tomando en consideración el término cuadrático en el desarrollo, el coeficiente de presión $\bar{p} = 0{,}5033$, mientras que teniendo en cuenta el tercer término, $\bar{p} = 0{,}5201$.

Ahora, examinemos el proceso de expansión para el que $c_1 = 1{,}154$; $c_2 = 2{,}933$; $c_3 = 0{,}9343$. Teniendo en cuenta los coeficientes c_1 y c_2, con la segunda aproximación, obtenemos $\bar{p} = -0{,}1012$. Con la tercera aproximación el coeficiente de presión $\bar{p} = -0{,}1027$.

4.21. Empleamos la relación para la diferencia de entalpías del gas: $i_2 - i_1 = (p_2 - p_1)(1 - \rho_1/\rho_2)/(2\rho_1)$. Poniendo en ella los datos, hallamos $i_2 - i_1 = 1{,}079 \cdot 10^6$ m²/s².

4.22. Debido a la igualdad de las velocidades en los puntos que consideramos (véase la fig. 4.5), también deben ser iguales otros parámetros, en particular, las presiones o bien las densidades. Pero esto no es característico para los flujos en los que surgen ondas de choque. Las presiones en los puntos A y B se determinan, respectivamente, con las dependencias

$$p_A = p'_{0A}(1 - V_A^2/V_{\text{máx}}^2)^{k/(k-1)} \quad \text{y} \quad p_B = p'_{0B}(1 - V_B^2/V_{\text{máx}}^2)^{k/(k-1)}.$$

Como las velocidades en estos puntos son iguales ($V_A = V_B$), $p_A/p_B = p'_{0A}/p'_{0B}$. Aquí, debido a que el punto A se encuentra en la línea de corriente que pasa por la zona de mayor intensidad de la onda de choque, la razón $p'_{0A}/p'_{0B} < 1$. De acuerdo con esto, la presión $p_A < p_B$. La temperatura en los indicados puntos

$$T_A = T'_{0A}(1 - V_A^2/V_{\text{máx}}^2) \quad \text{y} \quad T_B = T'_{0B}(1 - V_B^2/V_{\text{máx}}^2).$$

De la igualdad $T'_{0A} = T'_{0B}$, sigue que los valores de T_A y T_B en dichos puntos son iguales.

Las densidades se determinan de las relaciones

$$\rho_A = \rho'_{0A}(1 - V_A^2/V_{\text{máx}}^2)^{1/(k-1)} \quad \text{y} \quad \rho_B = \rho'_{0B}(1 - V_B^{2}/V_{\text{máx}}^2)^{1/(k-1)},$$

de donde $\rho_A/\rho_B = \rho'_{0A}/\rho'_{0B}$.

La razón ρ'_{0A}/ρ'_{0B} puede ser hallada empleando la ecuación de estado para los parámetros de remanso en los puntos A y B:

$$p'_{0A} = \rho'_{0A}RT'_{0A} \quad \text{y} \quad p'_{0B} = \rho'_{0B}RT'_{0B}.$$

De esto se desprende que $p'_{0A}/p'_{0B} = \rho'_{0A}T'_{0A}/(\rho'_{0B}T'_{0B})$. Como $p'_{0A}/p'_{0B} < 1$ y $T'_{0A}/T'_{0B} = 1$, $\rho'_{0A}/\rho'_{0B} < 1$ y, por lo tanto, $\rho_A < \rho_B$.

4.23. La ecuación del caudal para el movimiento unidimensional uniforme de un gas tiene la forma $\rho_1 V_1 S_1 = \rho_2 V_2 S_2$. Los correspondientes valores de la función gasodinámica q (M) $= S^*/S$ son iguales a $q(\text{M}_1) = \rho_1 V_1/(\rho_1^* a_1^*)$; $q(\text{M}_2) = \rho_2 V_2/(\rho_2^* a_2^*)$. Por esto,

$$S_2/S_1 = q(\text{M}_1)\rho_1^* a_1^*/[q(\text{M}_2)\rho_2^* a_2^*]. \quad (4.27)$$

Como detrás del sistema de ondas de choque (véase la fig. 4.6) $T'_0 = T_0 = \text{const}$ y $a'_2 = a'_1 = \text{const}$, entonces, teniendo en cuenta la ecuación de estado $p'_0/p_0 = \rho'_0 T'_0/(\rho_0 T_0)$ y la dependencia $\rho^* = \rho_0 [2/(k+1)]^{1/(k-1)}$, que liga la densidad crítica con la densidad en el flujo en remanso (estancado), de (4.27) obtenemos la fórmula buscada

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{q(\text{M}_1)\rho_0}{q(\text{M}_2)\rho'_0} = \frac{q(\text{M}_1)p_0}{q(\text{M}_2)p'_0} = \frac{1}{\nu}\frac{q(\text{M}_1)}{q(\text{M}_2)}. \quad (4.28)$$

Fig. 4.17. Isentrópica (a) y adiabática de choque (b)

4.24. Ante todo, aclaremos cómo varía la densidad del gas en el flujo detrás de la onda de choque en comparación con una corriente isentrópica, cuando es igual la variación de la presión. Con este fin empleamos la dependencia, obtenida en la teoría de las ondas de choque, entre las razones de las presiones y las densidades

$$p_2/p_1 = \{[(k+1)/(k-1)]\rho_2/\rho_1 - 1\}/[(k+1)/(k-1) - \rho_2/\rho_1] \quad (4.29)$$

y la fórmula para procesos isentrópicos

$$p_2/p_1 = (\rho_2/\rho_1)^k. \quad (4.30)$$

Las gráficas de las ecuaciones (4.29) y (4.30), aducidas en la fig. 4.17, nos muestran que con igual variación de la presión (p_2/p_1) la densidad del gas detrás de la onda de choque cambia menos que en caso de corriente isentrópica $[(\rho_2/\rho_1)_{ch} < (\rho_2/\rho_1)_{is}]$. Con ayuda de la ecuación de estado $p_2/p_1 = \rho_2 T_2/(\rho_1 T_1)$ es fácil establecer que con igual variación de la presión $[(p_2/p_1)_{ch} = (p_2/p_1)_{is}]$ la temperatura detrás de la onda de choque varía en mayor grado que en el caso de la corriente isentrópica, es decir, $(T_2/T_1)_{ch} > (T_2/T_1)_{is}$. Esto no contradice las representaciones físicas, ya que en la onda de choque se desprende calor adicional, condicionado por el trabajo de las fuerzas de viscosidad.

Estudiemos la variación isentrópica de la presión

$$p = p_0 (1 - V^2/V^2_{máx})^{k/(k-1)}. \quad (4.31)$$

La fórmula (4.31) es aplicable para la corriente detrás de la onda de choque.

Con (4.31), teniendo en cuenta la disminución de la presión de remanso detrás de la onda de choque ($p'_0 < p_0$) para las condiciones de flujo del gas después y antes de la onda, obtenemos

$$(p_2/p_1)_{ch} = (p'_0/p_0) [(1 - V^2_2/V^2_{máx})/(1 - V^2_1/V^2_{máx})]^{k/(k-1)}_{ch}, \quad (4.32)$$

así como para los correspondientes flujos sin onda de choque ($p'_0 = p_0$)

$$(p_2/p_1)_{is} = [(1 - V^2_2/V^2_{máx})/(1 - V^2_1/V^2_{máx})]^{k/(k-1)}_{is}. \quad (4.32')$$

Como según el planteamiento del problema $(p_2/p_1)_{ch} = (p_2/p_1)_{is}$, comparando los segundos miembros de (4.32) y (4.32'), obtenemos

$$(p'_0/p_0) [(1 - V^2_2/V^2_{máx})/(1 - V^2_1/V^2_{máx})]^{k/(k-1)}_{ch} =$$
$$= [(1 - V^2_2/V^2_{máx})/(1 - V^2_1/V^2_{máx})]^{k/(k-1)}_{is}.$$

De aquí se desprende que como la magnitud $V_{máx}$ detrás de la onda de choque no varía y $p'_0/p_0 < 1$, entonces $(1 - V^2_{2ch}/V^2_{máx}) > (1 - V^2_{2is}/V^2_{máx})$. Esta desigualdad sólo es válida cuando $V_{2ch} < V_{2is}$. Por consiguiente, con igual variación de la presión la velocidad detrás de la onda de choque es menor que en el flujo isentrópico. Esta conclusión se confirma con razonamientos físicos. Como hemos mostrado más arriba, la temperatura detrás de la onda de choque (y, por lo tanto, también la entalpía $i = c_p T$) varía en mayor grado, por lo que de acuerdo con la ley de conservación de la energía, la magnitud $V^2/2$ (y asimismo la velocidad V) deberá cambiar menos.

4.25. Para la onda de choque normal, conociendo $\mathbf{M}_1 = 2$, $k = 1{,}4$ y $p_1 = 4 \cdot 10^4$ Pa, por la dependencia (4.3) determinamos el coeficiente de recuperación de la presión: $\nu = p'_0/p_0 = 0{,}7208$.

Para hallar el número $\mathbf{M}_3$ empleamos la ecuación (4.28) de acuerdo con la cual $q(\mathbf{M}_3) = 0{,}2347$.

Por el valor de $q(\mathbf{M}_3)$ en la tabla de las funciones gasodinámicas encontramos el número $\mathbf{M}_3 = 3{,}002$ y la función $\pi(\mathbf{M}_3) = 0{,}02722$. Para determinar la presión p_3 hay que conocer la presión de remanso en el flujo incidente $p_0 = p_1/\pi(\mathbf{M}_1) = 3{,}147 \cdot 10^5$ Pa.

La presión total detrás de la onda de choque $p'_0 = \nu p_0 = 2{,}268 \cdot 10^5$ Pa. Considerando que el flujo detrás de la onda de choque es isentrópico ($p'_0 =$ const), hallamos $p_3 = p'_0 \pi(\mathbf{M}_3) = 6{,}173 \cdot 10^3$ Pa. La pérdida de la presión total $\Delta p_0 = p_0 - p'_0 = 8{,}79 \cdot 10^4$ Pa.

4.26. Prefijemos el valor del ángulo $\theta_{ch} > \beta_{ch}$ tomándolo igual a 40° y calculemos la correspondiente razón de las densidades:

$$\rho_2/\rho_1 = \mathbf{M}^2_1 \operatorname{sen}^2 \theta_{ch} (k + 1)/[2 + (k - 1) \mathbf{M}^2_1 \operatorname{sen}^2 \theta_{ch}] = 5{,}589. \quad (4.33)$$

Con la fórmula (4.21) determinamos el ángulo de inclinación de la onda de choque con la segunda aproximación: $\operatorname{tg} \theta_{ch} = 1{,}732 (2{,}295 \pm 1{,}844)$. Como, de acuerdo con el planteamiento del problema, la onda de choque es oblicua adherida, elegimos el signo menos: $\operatorname{tg} \theta_{ch} = 0{,}7813$. De aquí, $\theta_{ch} = 38{,}00°$. Partiendo de este ángulo, encontramos, con la segunda aproximación, la razón de las densidades

(4.33), es decir, $\rho_2/\rho_1 = 5{,}352$. Efectuamos la última aproximación para el ángulo θ_{ch}: $\operatorname{tg}\theta_{ch} = 0{,}7934$, de donde $\theta_{ch} = 38{,}43°$.

En definitiva hallamos el cociente de las densidades $\rho_2/\rho_1 = 5{,}403$; de las presiones $p_2/p_1 = 10{,}44$; de las temperaturas $T_2/T_1 = p_2\rho_1/(\rho_2 p_1) = 1{,}932$; de las velocidades del sonido $a_2/a_1 = \sqrt{T_2/T_1} = 1{,}390$; de las velocidades del flujo $V_2/V_1 = [1 - \operatorname{sen}^2\theta_{ch}(1 - \rho_1^2/\rho_2^2)]^{1/2} = 0{,}7917$.

El correspondiente número M detrás de la onda de choque $M_2 = (V_2/V_1) \times (a_1/a_2) M_1 = 2{,}848$.

4.27. Determinemos el ángulo de inclinación de la onda de choque A_0A (véase la fig. 4.7) y la razón de las densidades ρ_2/ρ_1, haciendo uso de las ecuaciones (4.21) y (4.33). Poniendo en ellas los valores de $M_1 = 5$; $\beta_{cuña} = 15°$; $k = 1{,}4$, obtenemos

$$\operatorname{tg}\theta_{ch} = \operatorname{ctg} 15° \left[0{,}5(\rho_2/\rho_1 - 1) - \sqrt{0{,}25(\rho_2/\rho_1 - 1)^2 - (\rho_2/\rho_1)\operatorname{tg}^2 15°}\right];$$
$$\rho_2/\rho_1 = 5^2 \operatorname{sen}^2\theta_{ch}(1{,}4 + 1)/[2 + (1{,}4 - 1)\, 5^2 \operatorname{sen}^2\theta_{ch}].$$

Resolviendo estas ecuaciones hallamos $\theta_{ch} = 24{,}27°$; $\rho_2/\rho_1 = 2{,}747$. El correspondiente número M detrás de la onda de choque

$$M_2^2 \operatorname{sen}^2(\theta_{ch} - \beta_{cuña}) = [2/(k+1)]\,[\rho_2/\rho_1 - (k-1)/(k+1)]^{-1}.$$

Después de poner aquí los respectivos valores, obtenemos $M_2 = 3{,}528$.

Examinemos la onda de choque AB. Como el número M delante de ésta $M_2 = 3{,}528$ y el ángulo de desviación del flujo detrás de ella $\beta_{cuña} = 15°$, resulta que

$$\operatorname{tg}\theta_{ch.o} = \operatorname{ctg} 15° \left[0{,}5(\rho_3/\rho_2 - 1) - \sqrt{0{,}25(\rho_3/\rho_2 - 1)^2 - (\rho_3/\rho_2)\operatorname{tg}^2 15°}\right];$$
$$\rho_3/\rho_2 = 3{,}528^2 \operatorname{sen}^2\theta_{ch.o}(1{,}4 + 1)/[2 + (1{,}4 - 1)\, 3{,}528^2 \operatorname{sen}^2\theta_{ch.o}].$$

Resolviendo estas ecuaciones determinamos el ángulo de inclinación de la onda reflejada $\theta_{ch.o} = 29{,}32°$, así como la razón de las densidades $\rho_3/\rho_2 = 2{,}243$. El correspondiente ángulo de reflexión de la onda de choque $EAB = \theta' = \theta_{ch.o} - \beta_{cuña} = 14{,}32°$.

4.28. Detrás de la onda de choque oblicua el coeficiente de presión

$$\bar{p}_2 = \frac{p_2 - p_1}{q_1} = \frac{2}{kM_1^2}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) = \frac{4}{M_1^2(k+1)}(M_1^2 \operatorname{sen}^2\theta_{ch} - 1). \tag{4.34}$$

Calculemos el límite de esta variable cuando $M_1 \to \infty$:

$$\bar{p}_{2\infty} = \lim_{M_1\to\infty} \bar{p}_2 = [4/(k+1)] \operatorname{sen}^2\theta_{ch}. \tag{4.35}$$

Pongamos esta expresión en (4.34):

$$\bar{p}_2 = \bar{p}_{2\infty} - 4/[M_1^2(k+1)]. \tag{4.36}$$

De la fórmula (4.36) se deduce que con todos los valores finitos del número M_1 el coeficiente de presión $\bar{p}_2$ es menor que su valor límite $\bar{p}_{2\infty}$. Empleando (4.35) calculamos para $k = 1{,}2$ y $1{,}4$, con $\theta_{ch} = 30°$, los valores límites del coeficiente de presión: $\bar{p}_{2\infty}^{(1)} = 0{,}4545$; $\bar{p}_{2\infty}^{(2)} = 0{,}4167$.

Para el número $M_1 = 5$ prefijado (según 4.36) determinamos los correspondientes coeficientes de presión, es decir, $\bar{p}_2^{(1)} = 0{,}3818$; $\bar{p}_2^{(2)} = 0{,}3500$.

4.29. La presión en el punto A en la línea de corriente detrás de la onda de choque (véase la fig. 4.8) se determina de acuerdo con (4.31) por la fórmula

$$p_A = p_0' (1 - V_2^2/V_{\text{máx}}^2)^{k/(k-1)}, \quad (4.37)$$

donde p_0' es la presión de remanso detrás de la onda de choque.

La presión en el punto B en la línea de corriente, en el caso de un flujo isentrópico (4.31),

$$p_B = p_0 (1 - V_2^2/V_{\text{máx}}^2)^{k/(k-1)}, \quad (4.37')$$

donde p_0 es la presión de remanso en caso de compresión isentrópica.

La razón de las presiones de remanso

$$p_0'/p_0 = (p_1/p_2)^{1/(k-1)} (\rho_2/\rho_1)^{k/(k-1)}. \quad (4.38)$$

Hallemos la razón de las presiones p_2/p_1 y de las densidades ρ_2/ρ_1 por las fórmulas de la onda de choque oblicua, partiendo de los valores prefijados $\beta_{ch} = 30°$, $M_1 = 5$ y $k = 1{,}2$. El problema 4.26 se ha enunciado de esta forma. Como resultado de su resolución se han hallado los valores $p_2/p_1 = 10{,}44$ y $\rho_2/\rho_1 = 5{,}403$. De acuerdo con esto de (4.38), para $k = 1{,}2$, obtenemos $p_0'/p_0 = 0{,}1989$.

Determinemos la presión de remanso isentrópico: $p_0 = p_1 \{1 + [(k-1)/2] \times \times M_1^2\}^{k/(k-1)} = 1{,}838 \cdot 10^8$ Pa. Entonces, la presión de remanso detrás de la onda de choque $p_0' = (p_0'/p_0)\, p_0 = 3{,}656 \cdot 10^7$ Pa.

Calculemos la razón $V_2^2/Y_{\text{máx}}^2$ que entra en las expresiones (4.37) y (4.37') para p_A y p_B. Para ello empleamos la fórmula

$$V_2^2/V_{\text{máx}}^2 = (V_2^2/V_1^2)\{1 + [2/(k-1)]\, 1/M_1^2\}^{-1}. \quad (4.39)$$

Poniendo aquí los datos obtenemos $V_2^2/V_{\text{máx}}^2 = 0{,}8642$.

Ahora, con las fórmulas (4.37) y (4.37'), calculamos la presión en los puntos A y B: $p_A = 2{,}292 \cdot 10^2$ Pa; $p_B = 1{,}153 \cdot 10^3$ Pa.

Como vemos, a la misma velocidad que en la corriente isentrópica, la presión estática en el flujo de gas detrás de la onda de choque es considerablemente menor.

4.30. Para determinar la presión en la antecámara del túnel p_0 (véase la fig. 4.9) hay que determinar, primeramente, el ángulo de inclinación θ_{ch} de la onda de choque AB ($A'B'$) por la ecuación

$$\operatorname{tg} \theta_{ch}/[\operatorname{tg}(\theta_{ch} - \beta_{ch})] = M_\infty^2 \operatorname{sen}^2 \theta_{ch}\, (k+1)/[2 + (k-1)\, M_\infty^2 \operatorname{sen}^2 \theta_{ch}]. \quad (4.40)$$

Resolviendo la ecuación (4.40) para $k = 1{,}4$, $M_\infty = 4$, $\beta_{ch} = 20°$, determinamos $\theta_{ch} = 32{,}60°$. Partiendo del valor del ángulo θ_{ch} y de $M_\infty = 4$ hallamos la razón entre las presiones de remanso detrás de la onda p_0' y la presión de remanso delante de ella (la presión en la antecámara p_0):

$$\frac{p_{0d}'}{p_0} = \frac{k-1}{k+1} \frac{\left(\frac{2k}{k-1} M_\infty^2 \operatorname{sen}^2 \theta_{ch} - 1\right)^{-\frac{1}{k-1}} (M_\infty \operatorname{sen} \theta_{ch})^{\frac{k}{k-1}} \left[\frac{2(k-1)}{(k+1)^2}\right]^{-\frac{k}{k-1}}}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \operatorname{sen}^2 \theta_{ch}\right)^{k/(k-1)}} = 0{,}6483.$$

Si designamos con $p_{0\,nor}'$ la presión de remanso para las condiciones detrás de la onda de choque normal CB ($C'B'$),

$$\frac{p_{0\,nor}'}{p_{0\,d}'} = \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{M_d^{k/(k-1)}}{\left[\frac{2(k-1)}{(k+1)^2}\right]^{k/(k-1)} \left(\frac{2k}{k-1} M_d^2 - 1\right)^{1/(k-1)} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_d^2\right)^{k/(k-1)}},$$

donde M_d es el número M detrás de la onda de choque AB $(A'B')$:

$$M_d = \left[\frac{2+(k-1)M_\infty^2}{2kM_\infty^2 \operatorname{sen}^2\theta_{ch}-(k-1)} + \frac{2M_\infty^2\cos^2\theta_{ch}}{2+(k-1)M_\infty^2\operatorname{sen}^2\theta_{ch}}\right]^{1/2} = 2{,}560. \quad (4.41)$$

Así, pues, $p'_{0nor}/p'_{0d} = 0{,}4748$. La presión en la salida del difusor $p_B = p'_{0\,nor}\{1+[(k-1)/2]\,M_B^2\}^{-k/(k-1)}$; por consiguiente

$$p'_{0\,nor} = p_B\{1+[(k-1)/2]\,M_B^2\}^{k/(k-1)} = 1{,}044\cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Ahora calculemos la presión en la antecámara:

$$p_0 = p'_{0d}/(p'_{0d}/p_0) = p'_{0\,nor}/[(p'_{0d}/p_0)(p'_{0\,nor}/p'_{0d})] = 3{,}391\cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

4.31. El carácter de la corriente del flujo supersónico en la salida de la tobera (véase la fig. 4.10) se manifiesta en función del valor de la razón entre la presión p_a en el gas en el plano de salida de la tobera y la contrapresión, igual a la presión

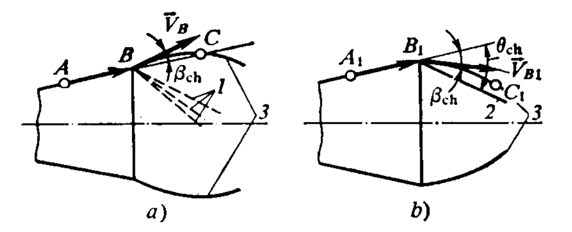


Fig. 4.18. Esquema de un chorro de baja expansión (*a*) y de alta expansión (*b*): *1*, onda de enrarecimiento; *2*, onda de choque; *3*, límite del chorro

p_{nat} en el medio ambiente. Semejante razón lleva el nombre de *grado de inconveniencia* ($n = p_a/p_{nat}$). Siendo $n > 1$ ($p_a > p_{nat}$) el chorro de gas es de baja expansión. Para reducir la presión en la salida de la tobera el chorro de gas se ve obligado a pasar por una onda de enrarecimiento (véase la fig. 4.10, *a*). Con ello, las líneas de corriente divergen del eje del flujo (fig. 4.18, *a*). P.ej., la línea de corriente junto a la pared ABC gira a un ángulo β_{ch}.

Si $n < 1$ ($p_a < p_{nat}$), se observa la sobreexpansión del chorro de gas. La contrapresión elevada favorece al remanso del chorro. Como resultado surge un sistema de ondas de choque (véase la fig. 4.10, *b*) y en el chorro crece la presión. En este caso, las líneas de corriente convergen hacia el eje del flujo. En la fig. 4.18, *b* esto se muestra en el ejemplo de la línea de corriente junto a la pared $A_1B_1C_1$.

4.32. Primero determinemos el ángulo de la onda de choque θ_{ch} para el cual el número $M_2 = 1$. Para ello es idóneo hacer uso de la igualdad (4.41), adoptando en ella $M_d = M_2 = 1$ y $M_\infty = M_1$. Resolviéndola con relación a $\operatorname{sen}^2\theta_{ch}$, hallamos

$$\operatorname{sen}^2\theta_{ch} = \frac{1}{4kM_1^2}\left[(k+1)M_1^2 + k_1 - 3 + \sqrt{(k+1)\,[k+9+2M_1^2(k-3)+(k+1)M_1^4]}\right].$$

Poniendo aquí los valores $M_1 = 4$ y $k = 1{,}4$ obtenemos $\operatorname{sen}^2\theta_{ch} = 0{,}6779$. Determinemos ahora el correspondiente ángulo de la cuña $\beta_{cuña}$ empleando la dependencia

$$\operatorname{tg}\beta_{cuña} = \sqrt{\frac{1-\operatorname{sen}^2\theta_{ch}}{\operatorname{sen}^2\theta_{ch}}}\,(M_1^2\operatorname{sen}^2\theta_{ch}-1)\left[1+\left(\frac{k+1}{2}-\operatorname{sen}^2\theta_{ch}\right)M_1^2\right]^{-1}. \quad (4.42)$$

Poniendo aquí los valores $\text{sen}^2\,\theta_{ch} = 0{,}6779$, $M_1 = 4$ y $k = 1{,}4$, obtenemos $\text{tg}\,\beta_{\text{cuña}} = 0{,}7256$, de donde $\beta_{\text{cuña}} = 35{,}96°$.

4.33. Hagamos uso de la dependencia que refleja la ligazón entre el ángulo de la onda de choque θ_{ch} y el de giro del flujo β_{ch} (ángulo de la cuña $\beta_{\text{cuña}}$),

$$\text{ctg}\,\beta_{ch} = \text{tg}\,\theta_{ch}\,\{[(k+1)\,M_1^2/2]/(M_1^2\,\text{sen}^2\,\theta_{ch} - 1) - 1\} \qquad (4.42')$$

e investiguemos dicha dependencia en el extremo. Con este fin efectuamos la derivación:

$$-\frac{1}{\text{sen}^2\,\beta_{ch}}\,\frac{d\beta_{ch}}{d\theta_{ch}} = \frac{1}{1-\text{sen}^2\,\theta_{ch}}\left[\frac{(k+1)\,M_1^2/2}{M_1^2\,\text{sen}^2\,\theta_{ch}-1} - 1\right] + \frac{(k+1)\,M_1^4\,\text{sen}^2\,\theta_{ch}}{(M_1^2\,\text{sen}^2\,\theta_{ch}-1)^2}. \qquad (4.43)$$

La condición de la igualdad $d\beta_{ch}/d\theta_{ch} = 0$, con la que se puede obtener el extremo de la función que estudiamos, es la igualdad a cero del segundo miembro de (4.43), ya que $1/\text{sen}^2\,\beta_{ch} = \infty$ sólo con $\beta_{ch} = 0$, cuando no hay giro del flujo. Por esta razón, reduciendo el segundo miembro de (4.43) al denominador común $(M_1^2\,\text{sen}^2\,\theta_{ch} - 1)^2\,(1 - \text{sen}^2\,\theta_{ch})$, que no puede ser infinitesimal, e igualando a cero el numerador de la fracción obtenida, deducimos una ecuación cuadrática respecto de $M_1^2\,\text{sen}^2\,\theta_{ch.m}$:

$$M_1^4\,\text{sen}^4\,\theta_{ch\cdot m} + \frac{2}{k}\left(1 - \frac{k+1}{4}\,M_1^2\right)M_1^2\,\text{sen}^2\,\theta_{ch\cdot m} - \frac{1}{k}\left(1 + \frac{k-1}{2}\,M_1^2\right) = 0.$$

Las raíces de esta ecuación son las magnitudes

$$M_1^2\,\text{sen}^2\,\theta_{ch\cdot m} = -\frac{1}{k}\left(1 - \frac{k+1}{4}\,M_1^2\right) \pm$$
$$\pm\sqrt{\frac{1}{k^2}\left(1 - \frac{k+1}{4}\,M_1^2\right)^2 + \frac{1}{k}\left(1 + \frac{k+1}{2}\,M_1^2\right)}. \qquad (4.44)$$

Si ponemos el valor de $M_1\,\text{sen}^2\,\theta_{ch\ m}$ con el signo más en (4.42) obtenemos el ángulo $\beta_{ch\ m}$ máximo posible de giro del flujo detrás de la onda de choque. Para la comprobación aducimos un ejemplo particular, cuando $M_1 = M_\infty \to \infty$. En efecto, transformando (4.44), obtenemos

$$\text{sen}^2\,\theta_{ch\cdot m} = -\frac{1}{k}\left(\frac{1}{M_1^2} - \frac{k+1}{4}\right) \pm$$
$$\pm\sqrt{\frac{1}{M_1^4 k^2}\left(1 - \frac{k+1}{4}\,M_1^2\right)^2 + \frac{1}{kM_1^4}\left(1 + \frac{k+1}{2}\,M_1^2\right)}, \qquad (4.45)$$

de donde con $M_1 \to \infty$

$$\text{sen}^2\,\theta_{ch\ m} = (k+1)/(4k) \pm (k+1)/(4k).$$

Es evidente que el signo menos no tiene sentido físico, ya que en tal caso $\theta_{ch\cdot m}$ sería igual a cero. Por ello

$$\text{sen}^2\,\theta_{ch\cdot m} = (k+1)/(2k). \qquad (4.46)$$

Poniendo esta expresión en (4.42) (con esto $\beta_{\text{cuña}} = \beta_{ch} = \beta_{ch\ m}$), tenemos

$$\text{tg}\,\beta_{ch\cdot m} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\left(\frac{k+1}{2k}\,M_1^2 - 1\right)\left(1 + \frac{k^2-1}{2k}\,M_1^2\right)^{-1}. \qquad (4.47)$$

La magnitud $\beta_{ch\cdot m}$ recibe, asimismo, el nombre de *ángulo crítico de giro del flujo*: $\beta_{ch\cdot m} = \beta_{\text{crit}}$.

4.34. El número M_1 en el túnel puede calcularse con la fórmula (4.42) que refleja la relación entre el ángulo de la onda de choque θ_{ch} y el ángulo de la cuña

$\beta_{\text{cuña}}$ (igual al de giro del flujo tras la onda β_{ch}) y el número M_1. De (4.42), obtenemos

$$M_1 = \sqrt{\text{sen}^2\theta_{ch} - [(k+1)/2]\,\text{tg}\,\theta_{ch}/(\text{ctg}\,\beta_{\text{cuña}} + \text{tg}\,\theta_{ch})} = 2{,}084.$$

Analicemos la dependencia para el ángulo crítico de giro del flujo

$$\beta_{ch.\,crit} = \text{arcctg}\sqrt{\frac{A}{1-A}\left[\frac{(k+1)\,M_1^2/2}{AM_1^2-1} - 1\right]}, \tag{4.48}$$

donde

$$A = \frac{1}{M_1^2}\left[-\frac{1}{k}\left(1 - \frac{k+1}{4}M_1^2\right) + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\frac{1}{k^2}\left(1 - \frac{k+1}{4}M_1^2\right)^2 + \frac{1}{k}\left(1 + \frac{k+1}{2}M_1^2\right)}\right].$$

Si adoptamos que el ángulo $\beta_{\text{cuña}} = \beta_{ch.crit}$, M_1 sera precisamente aquel número mínimo de Mach que puede ser medido mediante la correspondiente cuña.

La dependencia gráfica entre el número M_1 y el ángulo $\beta_{\text{cuña}} = \beta_{ch.crit}$ está representada en la fig. 4.19. En dicha gráfica hallamos, para $\beta_{\text{cuña}} = 20°$, el número mínimo $M_1 = 1{,}84$.

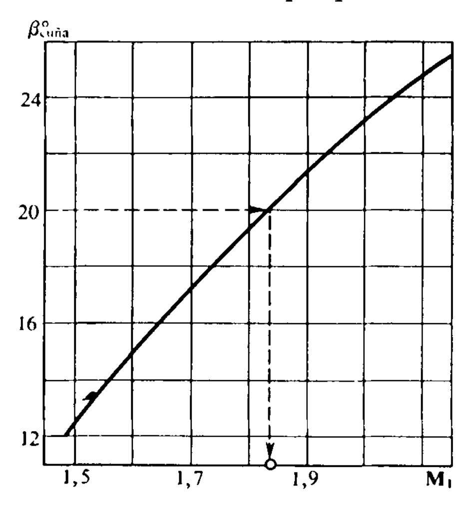


Fig. 4.19. Variación del ángulo de inclinación de la onda de choque

4.35. Durante la circulación alrededor de una cuña aguzada con una onda de choque adherida, el coeficiente de presión detrás de ella depende del número M_1 del flujo incidente y del ángulo de la cuña $\beta_{\text{cuña}}$, igual al de giro del flujo detrás de la onda β_{ch}, es decir, $\bar{p} = f(M_1, \beta_{ch})$. Con ello, al crecer el ángulo β_{ch} aumenta el coeficiente de presión. Esta función puede representarse en forma de una serie de potencias por el parámetro β_{ch}. Cuanto mayor sea el valor del ángulo β_{ch} tanto más cantidad de términos de la serie debe tomarse en consideración al calcular el coeficiente de presión con la precisión prefijada. Si los ángulos de la cuña son comparativamente pequeños es suficiente emplear la fórmula de desarrollo en la serie de Taylor con dos términos

$$\bar{p} = (\partial\bar{p}/\partial\beta_{ch})_{\beta_{ch}=0}\beta_{ch} + 0{,}5\,(\partial^2\bar{p}/\partial\beta_{ch}^2)_{\beta_{ch}=0}\beta_{ch}^2, \tag{4.49}$$

en la que las derivadas $(\partial\bar{p}/\partial\beta_{ch})_{\beta_{ch}=0}$ y $(\partial^2\bar{p}/\partial\beta_{ch}^2)_{\beta_{ch}=0}$ se determinan para $\beta_{ch} = 0$, es decir, para una onda de choque infinitamente débil.

Para calcular estas derivadas utilicemos las reglas de derivación de funciones compuestas. Como sigue de las expresiones (4.34) y (4.40) el coeficiente de presión es una función compuesta del ángulo β_{ch}. De acuerdo con esto

$$\frac{\partial\bar{p}}{\partial\beta_{ch}} = \frac{\partial\bar{p}}{\partial(\text{sen}^2\theta_{ch})}\,\frac{d(\text{sen}^2\theta_{ch})}{d\beta_{ch}} = \left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}\right)\Big/\left(\frac{d\beta_{ch}}{\partial x}\right), \tag{4.50}$$

donde $x = \text{sen}^2\theta_{ch}$.

Con ayuda de (4.34) calculamos la derivada $\partial\bar{p}/\partial x$:

$$\partial\bar{p}/\partial x = 4/(k+1). \quad (4.51)$$

La derivada $\partial\beta_{ch}/\partial x$ se calcula utilizando (4.42).

Con $\beta_{ch} \to 0$ la variable $x = \operatorname{sen}^2 \theta_{ch} \to \operatorname{sen}^2 \mu = 1/M_1^2$, por ello la derivada que hallamos

$$(\partial\beta_{ch}/\partial x)_{\beta_{ch}=0} = 2\sqrt{M_1^2-1}/(k+1). \quad (4.51')$$

En correspondencia con los resultados obtenidos la derivada (4.50)

$$(\partial\bar{p}/\partial\beta_{ch})_{\beta_{ch}=0} = 2/\sqrt{M_1^2-1}. \quad (4.52)$$

La segunda derivada $\partial^2\bar{p}/\partial\beta_{ch}^2$ se determina derivando (4.50).

Con $\beta_{ch} \to 0$, ella tiene la forma

$$(\partial^2\bar{p}/\partial\beta_{ch}^2)_{\beta_{ch}=0} = [(k+1)M_1^4/2 - 2(M_1^2-1)]/(M_1^2-1)^2; \quad (4.53)$$

el correspondiente coeficiente de presión

$$\bar{p} = (2\beta_{ch}/\sqrt{M_1^2-1}) + \{[(k+1)M_1^4 - 4(M_1^2-1)]/[2(M_1^2-1)^2]\}\beta_{ch}^2. \quad (4.54)$$

4.36. Al aumentar la presión, el ángulo crítico de giro del flujo no varía, ya que él, de acuerdo con (4.47), sólo depende del número M_1 y del índice adiabático k.

4.37. Cuando aumenta el número M_1 del flujo supersónico incidente, crece el ángulo crítico de giro del flujo detrás de la onda. Esto es posible de comprobar

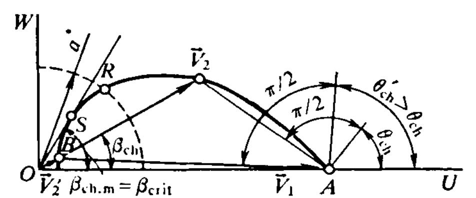


Fig. 4.20. Polar de choque

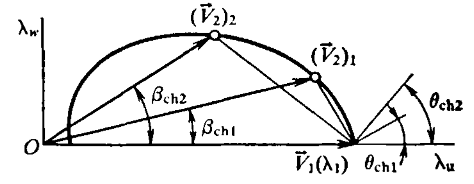


Fig. 4.21. Determinación del ángulo de inclinación de la onda de choque

analizando la expresión (4.47) para semejante ángulo $\beta_{ch.m}$. En correspondencia con ella, al aumentar M_1 la intensidad de la onda de choque crece, lo mismo que la densidad del gas detrás de ella, el frente de ésta se aproxima a la superficie, alrededor de la cual transcurre la circulación, y el flujo recibe la posibilidad de girar, al ser esto necesario, a un ángulo mayor.

4.38. El ángulo β_{ch} de inclinación del vector velocidad, a medida que se aleja del punto A (véase la fig. 4.12), aumenta desde cero hasta cierto valor máximo $\beta_{ch.m}$ y, a continuación, disminuye. En el punto B, situado en un sector de la onda suficientemente alejado del obstáculo alrededor del cual transcurre la circulación, y que coincide con la onda de Mach, dicho ángulo $\beta_{ch} = 0$.

4.39. Al valor mayor del ángulo θ_{ch} le corresponde el flujo subsónico detrás

de la onda de choque; al menor, el supersónico, lo que se ve en la gráfica de la polar de choque (fig. 4.20).

4.40. El ángulo de inclinación de la onda de choque adherida θ_{ch} crece al aumentar el ángulo β_{ch} de la cuña. Esto sigue directamente de la gráfica de la polar de choque aducida en la fig. 4.21. De acuerdo con esta gráfica para $\theta_{ch2} > \theta_{ch1}$ el ángulo $\beta_{ch2} > \beta_{ch1}$.

4.41. Si aumentamos el número M_1 (λ_1) del flujo incidente supersónico, el ángulo de la onda de choque adherida disminuye delante de la cuña. P.ej., esto se ve de las gráficas de dos polares de choque que corresponden a los números λ_1' y $\lambda_1'' > \lambda_1'$ (fig. 4.22).

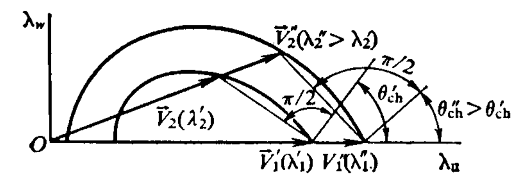


Fig. 4.22. Polares de choque para dos números M (λ)

4.42. Analicemos diferentes casos que pueden conducir a la formación de las ondas de choque representadas en la fig. 4.13. La onda de choque curvilínea desprendida sólo puede tener lugar cuando $\beta_{cuña} > \beta_{crít}$. Si $k_1 = k_2$, entonces, ya que el valor crítico del ángulo de giro del flujo $\beta_{crít}$ aumenta al crecer el número M_∞ del flujo incidente, las ondas de choque pueden tener semejante carácter sólo al observar la desigualdad $M_{\infty 1} > M_{\infty 2}$, cuando un mismo ángulo $\beta_{cuña}$ resulta ser mayor que el crítico para el flujo de menor velocidad. Si el número $M_{\infty 1} = M_{\infty 2}$, como $\beta_{crít}$ crece al disminuir k, es necesaria la desigualdad $k_1 < k_2$. Si $M_{\infty 1} \neq M_{\infty 2}$ y $k_1 = k_2$, con $M_{\infty 1} > M_{\infty 2}$ y $k_1 < k_2$ el carácter de las ondas (véase la fig. 4.13) es posible, en tanto que con $M_{\infty 1} < M_{\infty 2}$ y $k_1 > k_2$ no lo es. En los casos cuando $M_{\infty 1} > M_{\infty 2}$ ($k_1 > k_2$) o bien $M_{\infty 1} < M_{\infty 2}$ ($k_1 < k_2$) la formación de las ondas de choque consideradas sólo es posible con valores plenamente determinados de $M_{\infty 1}$, $M_{\infty 2}$, k_1 y k_2 que entran en dichas desigualdades.

4.43. Para calcular la circulación supersónica de una cuña aguzada sólo es útil el sector de la polar de choque desde el punto A hasta el punto R (véase la fig. 4.20).

En el sector RS la velocidad detrás de la onda de choque es subsónica y ésta se curva. El sector SB no puede, prácticamente, utilizarse para calcular las ondas de choque curvilíneas desprendidas, que surgen delante de las cuñas con ángulos supercríticos, ya que para el cálculo no hay una correspondencia unívoca entre la velocidad detrás de la onda de choque y la posición del punto en la superficie de la cuña. Por lo tanto, el sector SB describe el conjunto de las ondas de choque oblicuas y normal (punto B) por separado, en las que puede ser dividida la onda curvilínea. Con su ayuda es posible encontrar la dependencia entre la velocidad y el ángulo de giro del flujo detrás de la onda para hilillos aislados del gas que intersecan la onda curvilínea, pero es imposible indicar dónde se encuentran ellos, es decir, cuál será la forma de dicha onda de choque.

4.44. En la fig. 4.14 al punto K (sector de una onda de choque normal) corresponde en la polar de choque (véase la fig. 4.20) el punto B. Al punto L, en el que el ángulo de giro del flujo es el máximo ($\beta_{ch} = \beta_{ch\cdot m}$) corresponde el punto S y al punto N en la onda sónica (onda de Mach), el punto A.

4.45. En el caso de un flujo no perturbado a la máxima velocidad, con el fin de hallar la forma de la ecuación de la hodógrafa de velocidad detrás de la onda de choque, en la dependencia

$$\lambda_w^2/(\lambda_1 - \lambda_u)^2 = (\lambda_u\lambda_1 - 1)/[2\lambda_1^2/(k + 1) + 1 - \lambda_1\lambda_n] \qquad (4.55)$$

es preciso poner el valor máximo de la velocidad relativa $\lambda_1 = \lambda_m = \sqrt{(k+1)/(k-1)}$. Entonces

$$\lambda_w^2 = \sqrt{(k-1)/(k+1)}\,(\sqrt{(k+1)/(k-1)} - \lambda_u)\,(\lambda_u \sqrt{(k+1)/(k-1)} - 1). \quad (4.55')$$

La gráfica de esta ecuación es una circunferencia simétrica con relación al eje λ_u y que lo cruza en los puntos con abscisas $\lambda_u = \sqrt{(k-1)/(k+1)}$ y $\lambda_u = \sqrt{(k+1)/(k-1)} = \lambda_m$.

4.46. Primero determinamos la velocidad relativa: $\lambda_1 = \sqrt{\rho_2/\rho_1} = 2{,}236$. A este valor corresponde el número **M** delante de la onda de choque:

$$M_1 = \{[2\lambda_1^2/(k+1)]\,[1 - \lambda_1^2\,(k-1)/(k+1)]\}^{1/2} = 2{,}886,$$

con el cual, mediante (4.1), calculamos la razón entre las presiones $p_2/p_1 = 8{,}995$.

Empleando la ecuación de estado calculamos la razón de las temperaturas: $T_2/T_1 = (p_2/p_1)\,(\rho_1/\rho_2) = 1{,}799$. De acuerdo con esto la razón de las velocidades del sonido $a_2/a_1 = \sqrt{T_2/T_1} = 1{,}341$.

Como la razón de las velocidades del flujo $V_2/V_1 = 1/\lambda_1^2 = 0{,}2$, entonces $M_2/M_1 = (V_2/V_1)\,(a_1/a_2) = 0{,}1491$. Por consiguiente, el número **M** detrás de la onda $M_2 = (M_2/M_1)\,M_1 = 0{,}4303$.

4.47. La velocidad detrás de una onda de choque normal siempre es subsónica, en tanto que tras la oblicua semejante velocidad puede ser tanto supersónica como subsónica (véase la fig. 4.20).

4.48. El coeficiente de presión en el punto de remanso total detrás de la onda de choque normal

$$\bar{p}_0 = \frac{p_0' - p_1}{q_1} = \frac{2}{kM_1^2}\left[\left(\frac{2k}{k+1}M_1^2 - \frac{k-1}{k+1}\right)^{-\frac{1}{k-1}} M_1^{\frac{2k}{k-1}} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{-\frac{k}{k-1}} - 1\right]. \quad (4.56)$$

Para $M_1 \to \infty$ calculamos el valor límite de dicho coeficiente:

$$\lim_{M_1\to\infty} \bar{p}_0 = \bar{p}_{0\infty} = 2k^{-k/(k-1)}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{-(k-1)/(k+1)}, \quad (4.56')$$

a continuación, obtenemos la dependencia entre las variables $\bar{p}_0$ y $\bar{p}_{0\infty}$. Para ello, representemos la fórmula (4.56) en la forma

$$\bar{p}_0 = 2k^{-\frac{\varkappa}{k-1}}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{-\frac{k+1}{k-1}}\left(1 - \frac{k-1}{2k}\frac{1}{M_1^2}\right) - \frac{2}{kM_1^2}$$

o bien, tomando en consideración (4.56')

$$\bar{p}_0 = \bar{p}_{0\infty}\left(1 - \frac{k-1}{2k}\frac{1}{M_1^2}\right) - \frac{2}{kM_1^2}. \quad (4.57)$$

Aduzcamos los valores de $\bar{p}_{0\infty}$ para $k = 1{,}2$ y $1{,}4$, respectivamente: $\bar{p}_{0\infty}^{(1)} = 1{,}911$; $\bar{p}_{0\infty}^{(2)} = 1{,}839$.

Conociendo estos valores, determinamos los coeficientes de presión para $M_1 = 10$: $\bar{p}_0^{(1)} = 1{,}892$; $\bar{p}_0^{(2)} = 1{,}822$.

4.49. De la relación fundamental para la onda de choque normal $\lambda_1\lambda_2 = 1$ hallamos $\lambda_2 = 1/\lambda_1 = 1/1{,}9 = 0{,}5263$ y con la fórmula $\rho_2/\rho_1 = \lambda_1^2$ determinamos la razón de las densidades: $\rho_2/\rho_1 = 1{,}9^2 = 3{,}610$.

Para determinar la razón de las temperaturas T_2/T_1 empleamos la función gasodinámica $\tau(\lambda) = T/T_0 = 1 - [(k-1)/(k+1)]\,\lambda^2$, en correspondencia con la

cual $T_2/T_1 = (T_0'/T_0)\ \tau(\lambda_2)/[\tau(\lambda_1)]$. Como la temperatura de remanso detrás de la onda de choque no varía $(T_0' = T_0)$, obtenemos $T_2/T_1 = \tau(\lambda_2)/\tau(\lambda_1) = 0{,}9549/0{,}3983 = 2{,}397$.

De la ecuación de estado la razón de las presiones $p_2/p_1 = (\rho_2/\rho_1)(T_2/T_1) = 8{,}653$.

Para calcular $\nu = p_0'/p_0$ empleamos la dependencia

$$\nu = q(\lambda_1)/q(\lambda_2), \tag{4.58}$$

en la que la función

$$q(\lambda_{1,2}) = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{1/(k-1)} \lambda_{1,2}\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_{1,2}^2\right)^{1/(k-1)}.$$

Determinando en la tabla de las funciones gasodinámicas, de acuerdo con los valores de $\lambda_1 = 1{,}9$ y $\lambda_2 = 0{,}5263$, los valores de $q(\lambda_1) = 0{,}3000$ y $q(\lambda_2) = 0{,}7376$, hallamos $\nu = 0{,}4070$.

4.50. Con el fin de determinar la «obstrucción» máxima tolerable del flujo en la zona de trabajo de un túnel aerodinámico supersónico, aplicamos la dependencia (4.28) suponiendo que en ella S_1 y S_2 son iguales, respectivamente, a las áreas de las secciones del flujo en la zona de trabajo y en el lugar más obstaculizado del túnel y que $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_\infty$. Entonces, el número $\mathbf{M}_2$ en (4.28) será determinado para dicho lugar del túnel. De (4.28) hallamos

$$(S_1 - S_2)/S_1 = 1 - (1/\nu)\ q(\mathbf{M}_\infty)/[q(\mathbf{M}_2)]. \tag{4.59}$$

Vamos a considerar que la onda «de puesta en funcinamiento» es normal. Por ello, para la onda es válida la dependencia (4.58), en la que debemos tomar $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_\infty\ (\lambda_1 = \lambda_\infty)$ y $\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_{\text{nor}}\ (\lambda_2 = \lambda_{\text{nor}})$, donde $\mathbf{M}_{\text{nor}}$ es el número $\mathbf{M}$ detrás de la onda de choque normal. De acuerdo con esto $\nu = q(\mathbf{M}_\infty)/q(\mathbf{M}_{\text{nor}})$.

Por lo tanto, en lugar de (4.59), obtenemos

$$(S_1 - S_2)/S_1 = 1 - q(\mathbf{M}_{\text{nor}})/q(\mathbf{M}_2). \tag{4.60}$$

El valor tolerable de $(S_1 - S_2)/S_1$ debe ser algo menor que el hallado con (4.60), siendo $\mathbf{M}_2 = 1$, es decir,

$$[(S_1 - S_2)/S_1]_{\text{máx}} = 1 - q(\mathbf{M}_{\text{nor}}). \tag{4.60'}$$

En efecto, si la igualdad (4.60′) se cumple, en la sección más obstruida del túnel (o sea, en la más estrecha), al acercarse a ella la onda de puesta en funcionamiento, se establece una velocidad igual a la del sonido ($\mathbf{M}_2 = 1$). En este caso, se considera que el túnel aerodinámico «queda bloqueado» y la sección que se examina será la crítica. La onda de choque de puesta en funcionamiento no atravesará la zona de trabajo, sino que se detendrá en esa sección, como obturando el túnel. Delante del modelo el flujo no será supersónico con los parámetros prefijados. Detrás de semejante onda normal el número $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M}_{\text{nor}} = \sqrt{[\mathbf{M}_\infty^2 + 2/(k-1)]/[2k\mathbf{M}_\infty^2/(k-1) - 1]} = 0{,}4972.$$

En la tabla de las funciones gasodinámicas a este número $\mathbf{M}_{\text{nor}}$ corresponde el valor de $q(\mathbf{M}_{\text{nor}}) = 0{,}7433$. Por ello, $[(S_1 - S_2)/S_1)]_{\text{máx}} = 0{,}2567$.

4.51. La razón de las densidades se calcula con la fórmula $\rho_2/\rho_1 = (k+1)/(k-1)$. Para $k = 1{,}2$ la razón $\rho_2/\rho_1 = 11$, y para $k = 1{,}4$ el valor de $\rho_2/\rho_1 = 6$.

Los valores límites de los coeficientes de presión

$$\bar{p}_2 = (p_2 - p_1)/q_1 = [4/(k+1)]\,\mathrm{sen}^2\,\theta_{ch}; \quad (4.61)$$

$$\bar{p}_0 = (p_0' - p_1)/q_1 = 2\,[2/(k+1)]^{-1/(k-1)}\,[2k/(k+1)]^{-k/(k-1)}\,\mathrm{sen}^2\,\theta_{ch} \quad (4.62)$$

y el número de Mach

$$M_2 = \{[(k+1)^2/(2k\,(k-1))]\,[\mathrm{ctg}^2\,\theta_{ch} + [(k-1)^2/(k+1)]^2]\}^{1/2} \quad (4.63)$$

dependen, como vemos, del ángulo de la onda θ_{ch}. Para determinarlo empleamos la fórmula

$$\mathrm{tg}\,\theta_{ch} = \frac{\mathrm{ctg}\,\beta_{ch}}{2\,(k-1)/(k+1)}\left[\frac{2}{k+1} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{k+1}\right)^2 - 4\,\frac{k-1}{k+1}\,\mathrm{tg}^2\,\beta_{ch}}\right]. \quad (4.64)$$

Poniendo en ella los valores $k = 1{,}2$ y $\beta_{ch} = 30°$, obtenemos $\mathrm{tg}\,\theta_{ch} = 8{,}571 \pm \pm 7{,}918$.

El menor valor del ángulo θ_{ch} corresponde a una onda de choque de débil intensidad (la parte superior de la onda de choque desprendida): $\mathrm{tg}\,\theta_{ch1} = 0{,}6533$; $\theta_{ch1} = 33{,}16°$. El mayor valor se refiere a la onda de elevada intensidad (sector inferior de la onda desprendida): $\mathrm{tg}\,\theta_{ch2} = 16{,}49$; $\theta_{ch2} = 86{,}53°$.

Calculemos para el ángulo $\theta_{ch1} = 33{,}16°$ los coeficientes de presión: $\bar{p}_2^{(1)} = 0{,}5432$; $\bar{p}_2^{(2)} = 0{,}4984$.

Para el ángulo $\theta_{ch2} = 86{,}53°$, hallamos $\bar{p}_2^{(1)} = 1{,}811$; $\bar{p}_2^{(1)} = 1{,}660$.

Los correspondientes valores del coeficiente de presión de remanso para $\theta_{ch1} = 33{,}16°$ son iguales a $\bar{p}_0^{(1)} = 823$; $\bar{p}_0^{(2)} = 36{,}2$.

Para el valor de $\theta_{ch2} = 86{,}53°$ tenemos $\bar{p}_0^{(1)} = 1{,}946$; $\bar{p}_0^{(2)} = 1{,}856$.

De manera análoga calculamos los números M_2. Para el ángulo $\theta_{ch1} = 33{,}16°$ obtenemos $M_2^{(1)} = 4{,}868$; $M_2^{(2)} = 3{,}492$.

Para el ángulo $\theta_{ch2} = 86{,}53°$ tendremos $M_2^{(1)} = 0{,}3469$; $M_2^{(2)} = 0{,}4249$.

4.52. Según los valores prefijados $M_1 = 15$, $\beta_{ch} = 0{,}1$ y $k = 1{,}4$ calculamos el parámetro de semejanza $K = M\beta_{ch} = 15 \cdot 0{,}1 = 1{,}5$. De acuerdo con este valor encontramos el otro parámetro de semejanza:

$$K_{ch} = \{K/[4/(k+1)]\}\,[1 + \sqrt{1 + (4/K^2)\,4/(k+1)^2}] = 2{,}245.$$

El correspondiente ángulo de inclinación de la onda de choque $\theta_{ch} = K_{ch}M_1 = 0{,}1496$ y el coeficiente de presión $\bar{p}_2 = 2K_{ch}/\beta_{ch}^2 = 0{,}0449$.

La razón de las densidades

$$\rho_2/\rho_1 = K_{ch}^2/[2/(k+1) + K_{ch}^2\,(k-1)/(k+1)] = 3{,}162.$$

Examinemos la determinación del número M:

$$\theta_{ch}^2 M_2^3 = K_{ch}^4 \Big/ \left\{\left[\left(\frac{2k}{k+1}\right) K_{ch}^2 - \frac{k-1}{k+1}\right]\left[\left(\frac{2}{k+1}\right) + \frac{k-1}{k+1}\,K_{ch}^2\right]\right\} = 2{,}658;$$

$$M_2 = [(\theta_{ch}^2 M_2^2)/\theta_{ch}^2]^{1/2} = 10{,}90.$$

Calculemos los parámetros para los flujos aerodinámicos semejantes con números $M_1 = 10$, $M_1 = 20$ y $k = 1{,}4$. De acuerdo con la condición de semejanza para estos flujos los valores de los parámetros $K = M_1\beta_{ch}$ y $K_{ch} = M_1\theta_{ch}$ son los

mismos que para el flujo dado, es decir, $K = 1{,}5$ y $K_{ch} = 2{,}245$. Para $M_1 = 10$ y $M_1 = 20$, a ellos corresponden los ángulos β_{ch} y θ_{ch}, es decir, $\beta_{ch} = K/M_1 = 0{,}15$; $\theta_{ch} = K_{ch}/M_1 = 0{,}2245$ $(M_1 = 10)$ y $\beta_{ch} = 0{,}075$; $\theta_{ch} = 0{,}1122$ $(M_1 = 20)$.

Los coeficientes de presión son los siguientes: para $M_1 = 10$ tenemos $\bar{p}_2 = 2\beta_{ch}\theta_{ch} = 0{,}06735$; para $M_2 = 20$ obtenemos $\bar{p}_2 = 0{,}01683$. La razón de las densidades para los números $M_1 = 10$ y 20 son las mismas que para $M_1 = 15$.

Detrás de la onda de choque los números M serán: para $M_1 = 10$ tendremos $M_2 = [(\theta_{ch}^2 M_2^2)/\theta_{ch}^2]^{1/2} = 7{,}260$; para $M_1 = 20$ obtenemos $M_2 = 14{,}53$.

4.53. Detrás de la onda de choque en un gas disociado la temperatura es menor en comparación con su valor en el caso de las capacidades caloríficas constantes. Esto se explica por el consumo de energía del gas que se gasta para la disociación térmica de sus moléculas. La disociación del gas en la onda de choque va acompañada de la absorción de energía, lo que condiciona cierta bajada de la temperatura y, como resultado, el aumento de la densidad. Esta mayor «docilidad» del gas a la compresión reduce el espacio entre la onda y la superficie, alrededor de la cual transcurre la circulación, disminuyendo, de este modo, el ángulo de inclinación de la onda de choque.

4.54. Cuando alrededor de la superficie de una cuña aguzada con ángulo β_{ch} circula un flujo supersónico, el ángulo de inclinación de la onda θ_{ch} durante la disociación es menor que al ser constantes las capacidades caloríficas.

4.55. Como muestran las investigaciones, cuando se toma en consideración la disociación, esto conduce a cierta elevación de la presión detrás de la onda de choque en comparación con el caso en que las capacidades caloríficas son constantes. La explicación de este fenómeno reside en el aumento del número de partículas en el gas a cuenta de la disociación y crecimiento de las pérdidas de energía cinética durante sus choques. Pero la disminución de la temperatura en el gas disociado provoca el efecto contrario, pero algo menor. Debido a esto, la presión crece aunque no mucho.

4.56. Como al haber disociación detrás de la onda de choque la temperatura es notoriamente menor que en caso de capacidades caloríficas constantes, en tanto que la presión poco varía, el gas se hace más «dócil» (es menos «duro») y se comprime hasta una densidad mayor detrás de la onda. Esto se desprende también de la ecuación de estado del gas detrás de la onda de choque $p_2 = \rho_2 [R_0/(\mu_m)_2] T_2$, de acuerdo con la cual la disminución de la temperatura sólo puede compensarse con el aumento de la densidad.

4.57. Si sustituimos un flujo con capacidades caloríficas constantes por la corriente de un gas en disociación, el ángulo crítico de giro del flujo detrás de la onda de choque (ángulo crítico de la cuña) aumentará. La causa de esto consiste en el aumento de la densidad del mencionado gas y la disminución del ángulo de inclinación de la onda. El gas comprimido tiene la posibilidad de girar a un ángulo mayor.

4.58. Ante todo determinemos el número M delante de la onda de choque: $M_1 = V_1/a_1 = 8100/310 = 26{,}13$. Con un número M tan grande del flujo incidente, detrás de la onda el aire está disociado y el problema de la onda de choque ha de resolverse teniendo en cuenta la influencia de la disociación. Para esto empleamos el método de las aproximaciones sucesivas. Prefijando en la primera aproximación el valor $\Delta\bar{V} = 1$, que corresponde a la suposición del remanso total del flujo detrás de la onda de choque $(V_2 = 0)$, hallamos con la primera aproximación la presión tras ella: $p_2 = p_1 (1 + k_1 M_1^2 \Delta\bar{V}) = 9{,}384 \cdot 10^5$ Pa.

La entalpía i_2, igual a la de remanso, se determina con la dependencia

$$i_2 = i'_0 = c_{p1}T_1 + V_1^2/2. \qquad (4.65)$$

Tomando la capacidad calorífica del aire delante de la onda $c_{p1} = 1000$ m²/ /(s²·K) y poniendo en (4.65) los datos iniciales, obtenemos $i_2 = i'_0 = 3{,}283 \times \times 10^7$ m²/s².

Partiendo de los valores p_2 e i_2, en el diagrama $i - S$ hallamos la temperatura $T_2 = 8500$ K y, según las dependencias $\mu_m = f(p, T)$ para altas temperaturas (véase ,p.ej., la fig. 1.30), determinamos $(\mu_m)_2 = 17{,}0$. Según la ecuación de estado, conociendo los valores de p_2, T_2 y $(\mu_m)_2$, calculamos $\rho_2/\rho_1 = (p_2/p_1)[(\mu_m)_2/ /(\mu_m)_1]/(T_2/T_1) = 15{,}78$.

Ahora precisamos el valor de $\Delta\overline{V} = 1 - \rho_1/\rho_2 = 0{,}9370$. Con la segunda aproximación, para este valor de $\Delta\overline{V}$, obtenemos la presión $p_2 = 8{,}795 \cdot 10^5$ Pa y la entalpía $i_2 = i_1 [1 + (V_1^2/2)(\Delta\overline{V}/i_1)(2 - \Delta\overline{V})] = 3{,}290 \cdot 10 \cdot$ m²/s², donde $i_1 = c_{p1}T_1 = 1000 \cdot 236 = 2{,}36 \cdot 10^5$ m²/s².

A continuación, en el diagrama $i - S$ determinamos la temperatura $T_2 = 8450$ K y, según las dependencias $\mu_m = f(p, T)$, el nuevo valor de $(\mu_m)_2 = 16{,}1$. Por los valores precisados de p_2, T_2 y $(\mu_m)_2$ determinamos la razón $\rho_2/\rho_1 = 13{,}88$. Realizamos el cálculo con la tercera aproximación:

$$\Delta\overline{V} = 1 - 1/13{,}88 = 0{,}9280; \quad p_2 = 8{,}709 \cdot 10^5 \text{ Pa } (p_2/p_1 = 886);$$
$$i_2 = 3{,}285 \cdot 10^7 \text{ m}^2/\text{s}^2; \quad (\mu_m)_2 = 16{,}0;$$
$$T_2 = 8430 \text{ K } (T_2/T_1 = 35{,}7); \quad (\rho_2/\rho_1) = 13{,}72.$$

Los resultados de los cálculos muestran que entre la tercera y segunda aproximación hay pequeña diferencia, en particular la razón de las densidades difiere en una magnitud menor del 1 %. Por consiguiente, para objetivos prácticos es posible finalizar los cálculos con la tercera aproximación.

Calculemos el valor de la densidad detrás de la onda de choque empleando la ecuación de estado y el valor de la constante universal de los gases $R_0 = 848$ m/(mol·K):

$$\rho_2 = (p_2/T_2)(\mu_m)_2/R_0 = 0{,}1988 \text{ kgf}\cdot\text{s}^2/\text{m}^4.$$

En la gráfica $a = f(p, T)$ para altas temperaturas, partiendo de las magnitudes conocidas p_2 y T_2, hallamos la velocidad del sonido detrás de la onda de choque: $a_2 = 2200$ m/s. Seguidamente, en el diagrama $i - S$ para $p_2 = 8{,}86$ kgf/cm² e $i_2 = 7800$ kcal/kgf, determinamos la entropía: $S_2 = 3{,}39$ kcal/(kgf·K).

Examinando la línea de corriente nula y considerando que a lo largo de ella el flujo es isentrópico, tomamos la entropía en el punto crítico $S'_0 = S_2$ igual a su valor S_2 detrás de la onda de choque ($S'_0 = S_2$). En este punto la entalpía $i'_0 = 7890$ kcal/kgf. De acuerdo con los valores de S'_0 e i'_0, por el diagrama $i - S$, determinamos $p'_0 = 10$ kgf/cm² y $T'_0 = 8520$ K. La dependencia $\mu_m = f(p, T)$ para altas temperaturas proporciona para los valores dados de p'_0 y T'_0 el valor de $(\mu_m) = 17{,}0$. Esto permite calcular los parámetros relativos para el punto de remanso total:

$$p'_0/p_1 = 10^3; \quad T'_0/T_1 = 8520/236 = 36{,}1;$$
$$(\mu_m)_0/(\mu_m)_1 = 0{,}5862; \quad \rho'_0/\rho_1 = (p'_0/p_1)[(\mu_m)_0/(\mu_m)_1](T_1/T'_0) = 16{,}24.$$

4.59. Para resolver este problema hay que conocer los parámetros de la atmósfera a la altitud prefijada $H = 5$ km. En la tabla de la atmósfera normal (tipo o estándar) hallamos:

$$p_1 = (p_H/p_t)\, p_t = 5{,}334\cdot10^{-1}\cdot1{,}033 = 0{,}5510 \text{ kgf/cm}^2;$$
$$\rho_1 = (\rho_H/\rho_t)\, \rho_t = 6{,}012\cdot10^{-1}\cdot0{,}1249 = 0{,}07508 \text{ kgf}\cdot\text{s}^2/\text{m}^4;$$
$$T_1 = 255{,}6 \text{ K};\quad a_1 = 320{,}5 \text{ m/s};\quad (\mu_m)_1 = 28{,}97.$$

Determinamos la velocidad de vuelo: $V_1 = \mathrm{M}_1 a_1 = 3526$ m/s. En las tablas de las funciones gasodinámicas hallamos $k_1 = 1{,}405$; $c_{p1} = 1002$ m²/(s²·K) y, a continuación, calculamos la entalpía: $i_1 = c_{p1}T_1 = 0{,}2561\cdot10^6$ m²/s².

Según la gráfica $\theta_{ch} = f(\beta_{ch}, \mathrm{M}_\infty)$, para $\beta_{ch} = 45°$ y $\mathrm{M}_1 = 11$, al no haber disociación, el ángulo de la onda de choque $\theta_{ch} = 60°$. Teniendo en cuenta que al haber disociación el ángulo de la onda es menor, prefijamos el valor $\theta_{ch} = 55°$ para el que, con la primera aproximación,

$$\Delta\overline{V}_n = 1 - \operatorname{tg}(\theta_{ch} - \beta_{ch})/\operatorname{tg}\theta_{ch} = 0{,}8765;$$
$$p_2/p_1 = 1 + k_1\mathrm{M}_1^2\Delta\overline{V}_n \operatorname{sen}^2\theta_{ch} = 101{,}0;$$
$$p_2 = (p_2/p_1)\, p_1 = 55{,}65 \text{ kgf/cm}^2;$$
$$i_2 = i_1 + 0{,}5V_1^2 \operatorname{sen}^2\theta_{ch}\Delta\overline{V}_n(2 - \Delta\overline{V}_n) = 4{,}364\cdot10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

Según las dependencias $T = f(p, i)$ y $\mu_m = f(p, T)$, conociendo i_2 y p_2, determinamos $T_2 = 3357$ K y $(\mu_m)_2 = 28{,}70$ y hallamos

$$A = (k_1\mathrm{M}_1^2 \operatorname{sen}^2\theta_{ch} - 1)/(2k_1\mathrm{M}_1^2 \operatorname{sen}^2\theta_{ch}) = 0{,}4956;$$
$$B = [1/(k_1\mathrm{M}_1^2 \operatorname{sen}^2\theta_{ch})]\,[(T_2/T_1)\,(\mu_m)_1/(\mu_m)_2 - 1] = 0{,}1074.$$

Ahora precisemos el valor de la velocidad relativa $\Delta\overline{V}_n = A + \sqrt{A^2 - B} = 8673$, que con mayor precisión permite determinar el ángulo de la onda de choque:

$$\operatorname{tg}\theta_{ch} = [\Delta\overline{V}_n - \sqrt{\Delta\overline{V}_n^2 - 4(1 - \Delta\overline{V}_n)}]/[2(1 - \Delta\overline{V}_n)] = 1{,}495;$$
$$\theta_{ch} = 56{,}22°.$$

Por estos datos realizamos los correspondientes cálculos con la segunda aproximación: $p_2/p_1 = 102{,}9$; $p_2 = 102{,}9\cdot0{,}551 = 56{,}69$ kgf/cm²; $i_2 = 4{,}475 \times 10^6$ m²/s².

Según las dependencias $T = f(p, i)$ y $\mu_m = f(p, T)$, empleando los valores precisados $p_2 = 56{,}69$ kgf/cm² e $i_2 = 4{,}475\cdot10^6$ m²/s², determinamos los valores de $T_2 = 3424$ K y $(\mu_m)_2 = 28{,}64$, así como calculamos $A = 0{,}4957$; $B = 0{,}1069$.

Precisando el valor de $\Delta\overline{V} = 0{,}8683$ hallamos $\operatorname{tg}\theta_{ch} = 1{,}487$ ($\theta_{ch} = 56{,}07°$). Este valor del ángulo θ_{ch} es suficientemente próximo a el que hemos hallado con la segunda aproximación (56°07′), por lo que podemos no efectuar las posteriores aproximaciones. Así, pues, tomamos $\theta_{ch} = 56°07'$; $p_2 = 56{,}69$ kgf/cm² ($p_2/p_1 = 102{,}9$); $i_2 = 4{,}475\cdot10^6$ m²/s²; $T_2 = 3424$ K ($T_2/T_1 = 13{,}40$); $(\mu_m)_2 = 28{,}64$ $[(\mu_m)_2/(\mu_m)_1 = 0{,}988]$.

Con ayuda del diagrama $T - i - S$, según los valores $T_1 = 255{,}6$ K e $i_1 = 0{,}2561\cdot10^6$ m²/s², hallamos la entropía del aire delante de la onda de choque $S_1 = 1{,}77$ kcal/(kgf·K) [7,40·10³ m²/(s²·K)], en tanto que por los valores $T_2 = 3424$ K e $i_2 = 4{,}475\cdot10^6$ m²/s², la entropía detrás de la onda de choque $S_2 = 2{,}18$ kcal/(kgf·K) [9,15·10³ m²/(s²·K)]. El incremento de la entropía detrás

de la onda de choque $\Delta S = S_2 - S_1 = 2,18 - 1,77 = 0,41$ kcal/(kgf·K) [1,75 × × 10^3 m²/(s²·K)].

Según las dependencias $a = f(p, T)$ para altas temperaturas, por los valores $T_2 = 3424$ K y $p_2 = 56,69$ kgf/cm², determinamos la velocidad del sonido detrás de la onda: $a_2 = 1094$ m/s.

Para calcular la velocidad del flujo detrás de la onda de choque determinemos $V_{2n} = V_1(1 - \Delta\overline{V}_n)$ sen $\theta_{ch} = 385,2$ m/s; entonces, la velocidad $V_2 = V_{2n}/$ /sen $(\theta_{ch} - \beta_{ch}) = 2006$ m/s y el número $M_2 = V_2/a_2 = 1,833$.

La densidad detrás de la onda de choque $\rho_2 = \rho_1/(1 - \Delta\overline{V}_n) = 0,5701$ $(\rho_2/\rho_1 = = 7,593)$.

Finalicemos el cálculo determinando los parámetros del aire en el punto de remanso total detrás de la onda de choque. La entalpía del remanso detrás de la onda no varía, por eso $i_0' = i_1 + V_1^2/2 = 6,472 \cdot 10^6$ m²/s².

La entropía del gas en el punto de remanso total es la misma que inmediatamente detrás de la onda, es decir, $S_0' = S_2 = 9,15 \cdot 10^3$ m²/(s²·K). Conociendo la entalpía y la entropía de remanso, con ayuda del diagrama $i - S$, determinamos $p_0' = 330$ kgf/cm² $(3,24 \cdot 10^7$ Pa); $T_0' = 4490$ K.

A estos datos corresponden la densidad $\rho_0' = 2,46$ kgf·s²/m⁴ (2,41·10 kg/m³), así como los valores relativos $p_0'/p_1 = 599$; $T_0'/T_1 = 17,6$; $\rho_0'/\rho_1 = 32,7$.

4.60. Al resolver el problema 4.58 fueron obtenidos los siguientes valores relativos de los parámetros del aire para las condiciones inmediatamente detrás de la onda de choque normal: $p_2/p_1 = 886$; $T_2/T_1 = 35,7$; $\rho_2/\rho_1 = 13,71$; $\Delta\overline{V}_n = = 0,9279$.

Tomemos la presión, la temperatura y la densidad iguales a $p_1 = 0,01$ kgf/cm² $(9,807 \cdot 10^2$ Pa); $T_1 = 236$ K; $\rho_1 = 14,42 \cdot 10^{-3}$ kg/m³, respectivamente. Estos parámetros de la atmósfera son los mismos que a una altura $H \approx 31$ km. Obtengamos los parámetros detrás de la onda de choque:

$$p_2 = 886 p_1 = 8,689 \cdot 10^5 \text{ Pa}; \quad T_2 = 35,7 T_1 = 8425 \text{ K};$$
$$\rho_2 = 13,7 \rho_1 = 197,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}^3.$$

La correspondiente velocidad $V_2 = V_1(1 - \Delta\overline{V}_n) = 584,0$ m/s.

Según los datos de la solución del problema 4.58 la velocidad del sonido detrás de la onda de choque $a_2 = 2200$ m/s; por consiguiente, el número $M_2 = V_2/a_2 = = 0,2654$. Con semejante número M el flujo, con determinada aproximación, se puede considerar incompresible y para el cálculo de la presión p_0' en el punto de remanso total detrás de la onda es posible utilizar la ecuación de Bernoulli

$$p_0'/\rho_2 = p_2/\rho_2 + V_2^2/2, \tag{4.66}$$

en correspondencia con la cual $p_0' = p_2 + \rho_2 V_2^2/2 = 8,689 \cdot 10^5 + 197,5 \cdot 10^3 \times \times 583,5^2/2 = 9,025 \cdot 10^5$ Pa.

Tomando en consideración la disociación del gas compresible, el cálculo proporciona el valor $p_0' = 10$ kg/cm² (véase el problema 4.58), que es algo mayor que el valor obtenido. Considerando el flujo incompresible podemos determinar $T_0' = = T_2 = 8425$ K. Si hacemos el cálculo preciso de la densidad y la temperatura, sus valores en un gas disociado compresible son, respectivamente, iguales a: $\rho_0' = 2,43 \cdot 10^{-1}$ kg/m³; $T_0' = 8520$ K.

4.61. Para determinar los parámetros del gas inmediatamente detrás de la onda de choque, es necesario conocer los correspondientes valores de dichos parámetros delante de ella. Por ello, en las tablas de la atmósfera normal (tipo) para la

altura de vuelo $H = 10$ km, hallamos: $p_1 = 0{,}269$ kg /cm^2 (2,638·10^4 Pa); $\rho_1 = 0{,}0423$ kgf·s^2/m^4 (0,4148 kg/m^3); $T_1 = 223$ K; $a_1 = 299{,}5$ m/s; $(\mu_m)_1 = 28{,}97$. Para los posteriores cálculos tomamos $k_1 = 1{,}4$, $c_p = 1000$ m^2/(s^2·K) y determinamos la entalpía: $i_1 = c_pT_1 = 2{,}23\cdot10^5$ m^2/s^2.

Calculamos la velocidad relativa:

$$\Delta\overline{V}_n = 1 - \operatorname{tg}(\theta_{ch} - \beta_{ch})/\operatorname{tg}\theta_{ch} = 0{,}8766.$$

Para el cálculo con la primera aproximación adoptamos el número $M_1 = 11{,}5$. Entonces, $V_1 = M_1a_1 = 3444$ m/s. Determinamos la presión y la entalpía detrás de la onda:

$$p_2/p_1 = 1 + k_1M_1^2\Delta\overline{V}_n \operatorname{sen}^2\theta_{ch} = 109{,}9; \quad p_2 = (p_2/p_1)\,p_1 = 2{,}899\cdot10^6 \text{ Pa};$$

$$i_2 = i_1 + 0{,}5V_1^2 \operatorname{sen}^2\theta_{ch}\Delta\overline{V}_n\,(2 - \Delta\overline{V}_n) = 4{,}133\cdot10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2 \text{ (904 kcal/kgf)}.$$

En las gráficas $T = f(p, i)$ y $\mu_m = f(p, T)$, conociendo i_2 y p_2, determinamos los valores de $T_2 = 3020$ K y $(\mu_m)_2 = 28{,}8$ y calculamos

$$M_1 = \sqrt{\frac{(T_2/T_1)\,[(\mu_m)_1/(\mu_m)_2]/(1-\Delta\overline{V}_n)-1}{k_1 \operatorname{sen}^2\theta_{ch}\,\Delta\overline{V}_n}} = 11{,}58.$$

Realizamos los cálculos definitivos con la segunda aproximación (para el número $M_1 = 11{,}58$), entonces $p_2/p_1 = 102$; $p_2 = 27{,}5$ kgf/cm^2 (2,697·10^6 Pa); $i_2 = 3{,}90\cdot10^6$ m^2/s^2; $T_2 = 3050$ K; $(\mu_m)_2 = 28{,}8$; $V_1 = 3340$ m/s. Con esto acabamos con las aproximaciones y hallamos en el diagrama $p - S - i$ la entropía: $S_2 = 9{,}20\cdot10^3$ m^2/(s^2·K) y en la gráfica $a = f(p, T)$ para altas temperaturas la velocidad del sonido: $a_2 = 1040$ m/s.

Empleando estos datos, calculamos los parámetros inmediatamente detrás de la onda de choque:

$$V_{2n} = V_1\,(1 - \Delta\overline{V}_n) \operatorname{sen}\theta_{ch} = 337{,}6 \text{ m/s}; \quad \rho_2 = \rho_1/(1 - \Delta\overline{V}_n) = 3{,}127 \text{ kg/m}^3;$$

$$V_2 = V_{2n}/\operatorname{sen}(\theta_{ch} - \beta_{ch}) = 1944 \text{ m/s}; \quad M_2 = V_2/a_2 = 1{,}870.$$

La entalpía de remanso $i_0' = i_0 = i_1 + V_1^2/2 = 5{,}778\cdot10^6$ m^2/s^2. La entropía $S_0' = S_2 = 9{,}20\cdot10^3$ m^2/(s^2·K).

4.62. Para resolver el problema hay que determinar, primeramente, los parámetros del aire a la altura prefijada $H = 5$ km. Haciendo uso de las tablas de la atmósfera normal, encontramos: $p_1 = 0{,}5510$ kgf/cm^2 (0,54031·10^5 Pa); $\rho_1 = 0{,}07511$ kgf·s^2/m^4 (0,7361 kg/m^3); $T_1 = 255{,}6$ K; $(\mu_m)_1 = 28{,}97$; $a_1 = 320{,}5$ m/s.

Con ayuda del diagrama $i - S$, de acuerdo con los valores medidos de $p_0' = 330$ kgf/cm^2 y $T_0' = 4500$ K, para las condiciones de remanso determinamos la entalpía: $i_0' = i_0 = 6{,}50\cdot10^6$ m^2/s^2 y la entropía: $S_0' = S_2 = 9{,}18\cdot10^3$ m^2/(s^2·K).

A continuación calculamos la velocidad de vuelo: $V_1 = \sqrt{2\,(i_0 - c_pT_1)} = 3534$ m/s y el correspondiente número $M = V_1/a_1 = 11{,}03$. Como el ángulo de la onda de choque θ_{ch} y el de giro β_{ch} de aquella parte del flujo tras la onda que sufrió remanso total son desconocidos, ellos, lo mismo que los parámetros del gas detrás de la onda, serán determinados por el método de las aproximaciones sucesivas. Para ello utilicemos el diagrama $i - S$ en el que están marcados los valores de la densidad. Tal diagrama facilita la resolución del problema. Conociendo $S_2 = 9{,}18\cdot10^3$ m^2/(s^2·K) y prefijando el valor de la entalpía detrás de la onda de choque $i_2 = 4{,}60\cdot10^6$ m^2/s^2, en el indicado diagrama determinamos con la primera aproximación $p_2 = 58\cdot10^4$ kg /m^2 y $\rho_2 = 0{,}580$ kgf·s^2/m^4.

A continuación, calculamos la variación relativa de la componente normal de la velocidad: $\Delta\overline{V}_n = 1 - \rho_1/\rho_2 = 0{,}871$; la componente normal del número **M** antes de la onda de choque:

$$\mathbf{M}_{n1} = \sqrt{[(p_2/p_1) - 1]/(k\Delta\overline{V}_n)} = 9{,}250$$

y la correspondiente componente normal de la velocidad: $V_{n1} = \mathbf{M}_{n1}a_1 = 2960$ m/s.

Precisemos el valor de la entalpía i_2 detrás de la onda:

$$i_2 = i_1 + V_{n1}^2\Delta\overline{V}_n\,(2 - \Delta\overline{V}_n)/2 = 4{,}53\cdot10^6\ \text{m}^2/\text{s}^2.$$

Para el valor precisado de la entalpía $i_2 = 4{,}53\cdot10^6$ m²/s² y $S_2 = 9{,}18 \times 10^3$ m²/(s²·K), con ayuda del diagrama $i - S$, determinamos con la segunda aproximación $p_2 = 56\cdot10^4$ kgf/m²; $\rho_2 = 0{,}55$ kgf·s²/m⁴ y calculamos $\Delta\overline{V}_n = 0{,}864$; $\mathbf{M}_{n1} = 9{,}14$; $V_{n1} = 2930$ m/s. Ahora precisamos la entalpía detrás de la onda de choque: $i_2 = 4{,}46\cdot10^6$ m²/s². Como el valor obtenido de i_2 es próximo al calculado antes $i_2 = 4{,}53\cdot10^6$ m²/s², podemos no realizar la posterior aproximación.

Determinemos los ángulos θ_{ch} y β_{ch}. Para ello hacemos uso de la dependencia sen $\theta_{ch} = \mathbf{M}_{n1}/\mathbf{M}_1$. Poniendo en ella los valores de $\mathbf{M}_{n1}$ y $\mathbf{M}_1$, obtenemos sen $\theta_{ch} = 0{,}8409$, $\theta_{ch} = 57{,}12°$. A continuación calculamos el ángulo de giro del flujo detrás de la onda:

$$\operatorname{tg} 57{,}12°/\operatorname{tg}\,(57{,}12° - \beta_{ch}) = 6{,}750. \qquad (4.67)$$

Resolviendo (4.67) hallamos $\beta_{ch} = 44{,}21°$.

4.63. La altitud y la velocidad de vuelo se determinan con la correspondiente elección de sus valores que satisfagan las dependencias empleadas en el problema 4.62. Con ello, se admite que la presión de remanso se mide detrás de una onda de choque normal ($\theta_{ch} = \pi/2$).

Prefijamos la altitud de vuelo $H = 25$ km. Con ayuda de las tablas de la atmósfera normal, determinamos:

$$p_1 = (p_H/p_t)\,p_t = 0{,}02205\ \text{kgf/cm}^2\ (0{,}2161\cdot10^4\ \text{Pa});$$
$$T_1 = 219{,}4\ \text{K};\quad a_1 = 296{,}9\ \text{m/s};\quad (\mu_m)_1 = 28{,}97.$$

Empleando el diagrama $i - S$, para $p_0' = 10$ kgf/cm² y $T_0' = 5000$ K, encontramos los valores de la entropía: $S_0' = S_2 = 2{,}58$ kcal/(kgf·K) $= 10{,}8\cdot10^3$ m²/(s² × K) y la entalpía: $i_0' = 2231$ kcal/kgf $(9{,}34\cdot10^6$ m²/s²).

La correspondiente entalpía del aire a la altitud dada $i_1 = c_{p1}T_1 = 0{,}2196 \times 10^6$ m²/s² (52,4 kcal/kgf) y la velocidad de vuelo $V_1 = \sqrt{2\,(i_0' - i_1)} = 4270$ m/s. A esta velocidad corresponde el número $\mathbf{M}_1 = V_1/a_1 = 14{,}40$.

Ahora prefijamos el valor de $\Delta\overline{V} = \Delta\overline{V}_1 = 0{,}65$ y hallamos la entalpía detrás de la onda de choque:

$$i_2 = i_1 + 0{,}5V_1^2\Delta\overline{V}_1\,(2 - \Delta\overline{V}_1) = 8{,}240\cdot10^6\ \text{m}^2/\text{s}^2\ (1963\ \text{kcal/kgf}).$$

Haciendo uso del diagrama $i - S$, para $S_2 = 2{,}58$ kcal/(kgf·K) e $i_2 = 1963$ kcal/kgf. hallamos la presión detrás de la onda de choque $p_2 = 4{,}2$ kgf/cm² y calculamos la razón $p_2/p_1 = 190{,}5$.

Precisemos la diferencia relativa de velocidades: $\Delta\overline{V}_1 = (p_2/p_1 - 1)/(k_1\mathbf{M}_1^2) = 0{,}653$ y determinamos $i_2 = 8{,}240\cdot10^6$ m²/s² (1963 kcal/kg).

Seguidamente, en el diagrama $i - S$ para $S_2 = 2{,}58$ kcal/(kg·K) e $i_2 = 1963$ kcal/kgf, hallamos $p_2 = 4{,}25$ kgf/cm²; $T_2 = 4500$ K y precisamos los resultados de los cálculos: $p_2/p_1 = 192{,}7$; $\Delta\overline{V}_1 = 0{,}658$. Como los dos últimos valores de $\Delta\overline{V}_1$ son suficientemente próximos entre sí, cesamos la aproximación.

Es posible cerciorarse de que la elección inicial de la altura de vuelo es correcta calculando $\Delta\overline{V} = \Delta\overline{V}_2$ de otro modo. Para ello, con los valores precisados de $p_2 = 4{,}25$ kgf/cm² y $T_2 = 4500$ K, por las dependencias $\mu_m = f(p, T)$, determinamos la masa molecular relativa del aire detrás de la onda de choque $(\mu_m)_2 = 24{,}2$. Después calculamos:

$$A = (k_1 M_1^2 - 1)/(2k_1 M_1^2) = 0{,}498;$$

$$B = \frac{1}{k_1 M_1^2}\left[\frac{T_2}{T_1}\frac{(\mu_m)_1}{(\mu_m)_2} - 1\right] = 0{,}0827 \quad \text{y} \quad \Delta\overline{V}_2 = A + \sqrt{A^2 - B} = 0{,}904.$$

Debido a que los valores $\Delta\overline{V}_1 = 0{,}655$ y $\Delta\overline{V} = 0{,}904$ no coinciden, prefijamos nuevos valores de la altura de vuelo $H = 30$ km, así como $\Delta\overline{V}_1 = 0{,}91$ y repetimos todos los cálculos.

Como resultado, hallamos: $p_1 = 1{,}217 \cdot 10^{-2}$ kgf/cm²; $T_1 = 230{,}4$ K; $a_1 = 304{,}2$ m/s; $(\mu_m)_1 = 28{,}97$; $S_2 = 2{,}58$ kcal/(kgf·K); $i_0' = 2231$ kcal/kgf; $i_1 = 0{,}231 \cdot 10^6$ m²/s² $= 55{,}1$ kcal/kg; $V = 4268$ m/s; $M_1 = 14$; $i_2 = 2192$ kcal/kgf; $p = 3{,}03$ kgf/cm²; $p_2/p_1 = 251{,}1$; $\Delta\overline{V}_1 = 0{,}907$.

Continuando los cálculos obtenemos $(\mu_m) = 24$; $A = 0{,}498$; $B = 0{,}0839$; $\Delta\overline{V}_2 = 0{,}903$.

Los valores de $\Delta\overline{V}_1$ y $\Delta\overline{V}_2$ son muy próximos, por lo que no realizamos las siguientes aproximaciones, suponiendo que los valores hallados de la altura ($H = 30$ km) y de la velocidad de vuelo ($V_1 = 4268$ m/s) son definitivos. Un análisis más detallado nos muestra que la precisión de determinación de la altura de vuelo es notoriamente menor que la precisión de cálculo de la velocidad V_1. Por ello es conveniente efectuar cálculos paramétricos según el esquema del problema 4.58 y confeccionar las tablas para determinar H y V_1 según los valores prefijados (medidos) de p_0' y T_0'.

4.64. Prefijamos la altura de vuelo $H = 24$ km. En las tablas de la atmósfera normal hallamos $T = 216{,}7$ K; $a_1 = 295{,}1$ m/s y calculamos la velocidad de vuelo $V_1 = \sqrt{2c_{p1}(T_0' - T_1)} = 3094$ m/s, con la cual calculamos el número M. Entonces, $M_1 = V_1/a_1 = 10{,}49$.

Con la fórmula para la onda de choque normal calculamos la razón de las presiones:

$$p_0'/p_1 = 2^{-\frac{k}{k-1}}(k+1)^{-\frac{k+1}{k-1}}(kM_1^2 - k + 1)^{-\frac{1}{k-1}} M_1^{\frac{2k}{k-1}} = 7187.$$

De acuerdo con esta razón calculamos la presión: $p_1 = p_0'/(p_0'/p_1) = 1{,}391 \times 10^{-3}$ kgf/cm².

Ahora, con ayuda de las tablas de la atmósfera normal, conociendo p_1, podemos precisar la altura de vuelo: $H = 14{,}0$ km. Repitiendo los cálculos según la segunda aproximación, obtenemos el mismo valor de la altura.

4.65. Por la razón de las densidades medida es posible hallar la variación relativa de las componentes normales de las velocidades antes y después de la onda de choque, es decir, la magnitud $\Delta\overline{V}_n = (V_{n1} - V_{n2})/V_{n1}$. Para ello utilizamos la fórmula $\Delta\overline{V}_n = 1 - \rho_1/\rho_2$. Poniendo en ella los valores de $\Delta\overline{V}_n$, obtenemos para

los regímenes primero y segundo de trabajo del túnel aerodinámico $(\Delta \overline{V}_n)_1 = 0{,}7067$; $(\Delta \overline{V}_n)_2 = 0{,}9$, respectivamente.

Ahora determinamos las inclinaciones correspondientes de las ondas de choque oblicuas empleando la dependencia

$$\operatorname{tg} \theta_{ch} = \operatorname{ctg} \beta_{ch} \left[\frac{1}{2} \frac{\Delta \overline{V}_n}{1 - \Delta \overline{V}_n} - \sqrt{\frac{1}{4} \frac{\Delta \overline{V}_n^2}{(1 - \Delta \overline{V}_n)^2} - \frac{\operatorname{tg}^2 \beta_{ch}}{1 - \Delta \overline{V}_n}} \right].$$

Después de las correspondientes sustituciones obtenemos $(\operatorname{tg} \theta_{ch})_1 = 1{,}114$; $(\operatorname{tg} \theta_{ch})_2 = 0{,}6704$.

Empleando estos datos calculamos la razón de las velocidades:

$$(V_2/V_1)_1 = \sqrt{1 - (\operatorname{sen}^2 \theta_{ch})_1 \Delta \overline{V}_n (2 - \Delta \overline{V}_n)} = 0{,}7026; \quad (V_2/V_1)_2 = 0{,}8325.$$

Considerando el caso en que las capacidades caloríficas son constantes, hallamos $\mathbf{M}_1$ delante de la onda de choque:

$$(\mathbf{M}_1)_1 = \frac{1}{(\operatorname{sen} \theta_{ch})_1} \sqrt{\frac{2/(k+1)}{2/(k+1) - (\Delta \overline{V}_n)_1}} = 3{,}447;$$

$$(\mathbf{M}_1)_2 = \frac{1}{0{,}5567} \sqrt{\frac{2/(1{,}4+1)}{2/(1{,}4+1) - 0{,}9}}.$$

El número $(\mathbf{M}_1)_2$ resulta ser imaginario, lo que confirma que esta fórmula no es aplicable cuando las capacidades caloríficas son constantes y el número $\mathbf{M}_1$ no sobrepasa 5—6.

Los parámetros del gas detrás de la onda de choque con $(\mathbf{M}_1)_1 = 3{,}447$ se determinan en correspondencia con la condición de constancia de las capacidades caloríficas:

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)_1 = \left[\frac{2k}{k+1} (\mathbf{M}_1)_1^2 \operatorname{sen}^2 \theta_{ch} - \frac{k-1}{k+1}\right] \left[\frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1} (\mathbf{M}_1)_1^2 \operatorname{sen}^2 \theta_{ch}\right] \Big/ [(\mathbf{M}_1)_1^2 \operatorname{sen}^2 \theta_{ch}] = 2{,}2;$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} (\mathbf{M}_1)_1^2 \operatorname{sen}^2 \theta_{ch} - \frac{k-1}{k+1} = 13{,}72.$$

El cálculo del número $(\mathbf{M}_1)_2$ será realizado para el caso cuando hay disociación. Con este fin hay que conocer, adicionalmente, la temperatura $(T_1)_2$ y la presión $(p_1)_2$ delante de la onda de choque. Prefijamos estas magnitudes: $(T_1)_2 = 459$ K; $(p_1)_2 = 0{,}01$ kgf/cm². Resolvemos el problema según el método de las aproximaciones sucesivas. Tomamos $\mathbf{M}_1 = 15{,}2$ ($V_1 = 6460$ m/s); entonces la razón de las presiones detrás y delante de la onda de choque $p_2/p_1 = 1 + k\mathbf{M}_1^2 \operatorname{sen}^2 \theta_{ch} \Delta \overline{V}_n = 91{,}24$, mientras que la presión detrás de la onda de choque $(p_2)_2 = 0{,}9124$ kgf/cm². Detrás de ésta la entalpía

$$i_2 = i_1 + (V_1^2/2) \operatorname{sen}^2 \theta_{ch} [1 - (\rho_1/\rho_2)^2] = 6{,}863 \cdot 10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2,$$

donde $i_1 = c_{p1} T_1 = 1001 \cdot 459 = 0{,}4594 \cdot 10^6$ m²/s².

Más adelante, en el diagrama p — i hallamos $(T_2)_2 = 3710$ K y mediante las dependencias $\mu_m = f(p, T)$, para $(T_2)_2 = 3710$ K y $(p_2)_2 = 0{,}9124$ kgf/cm², determinamos $(\mu_{m1})_2 = 26{,}3$. Empleando la ecuación de estado precisamos el valor de $p_2/p_1 = 90{,}7$. Por consiguiente, es posible hallar otro número $\mathbf{M}$ y la

velocidad:

$$(\mathrm{M}_1)_2 = \sqrt{(p_2/p_1 - 1)/(k\,\mathrm{sen}^2\,\theta_{\mathrm{ch}}\Delta\bar{V}_n)} = 15{,}15 \quad (V_1 = 6470 \text{ m/s}).$$

Realizando el cálculo con la última aproximación, hallamos

$$(p_2)_2 = 0{,}907 \text{ kgf/cm}^2 \ (8{,}87\cdot10^4 \text{ Pa}); \quad i_2 = 6{,}884\cdot10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2;$$
$$T_2 = 3710 \text{ K}; \quad (\mu_{\mathrm{m}})_2 = 26{,}3.$$

4.66. Podemos determinar los parámetros detrás de la onda de choque, para el modelo del aire que consideramos, haciendo uso del método de las aproximaciones sucesivas. Primero, prefijamos la razón esperada de las densidades $\rho_2/\rho_1 = 15$, a la que corresponde la variación relativa de las componentes normales de la velocidad antes y después de la onda de choque: $\Delta\bar{V}_n = 1 - \rho_1/\rho_2 = 0{,}9333$. Con este valor determinamos $\bar{i}_2 = i_2/u_d$ (u_d es la energía característica de disociación):

$$\bar{i}_2 = V_{n1}^2\Delta\bar{V}_n(2 - \Delta\bar{V}_n)/2 = 1{,}12. \qquad (4.68)$$

A continuación, determinamos la razón $\rho_2/\rho_d = \bar{\rho}_2 = (\rho_2/\rho_1)(\rho_1/\rho_d) = 22{,}5 \times \times 10^{-7}$ y el valor $\log(\rho_d/\rho_2) = \log(1/\bar{\rho}_2) = 5{,}65$.

Ahora, de la dependencia gráfica para los parámetros característicos de la disociación $\alpha = f\,[i/u_d, \log(\rho_d/\rho)]$, de acuerdo con los valores $\log(\rho_d/\rho_2) = 5{,}65$ e $\bar{i}_2 = 1{,}12$, es posible hallar el grado de disociación $\alpha_2 = 0{,}73$. Con este valor precisamos $\Delta\bar{V}_n$, utilizando la fórmula

$$\Delta\bar{V}_n = [3/(7+\alpha_2)]\,(1 + \sqrt{1 + D/\bar{V}_{n1}^2}\,), \qquad (4.69)$$

en la que

$$D = (2/9)\,(7 + \alpha_2)\,(1 + \alpha_2)\,\alpha_2. \qquad (4.70)$$

Después de poner en ella los datos obtenemos $D = 2{,}169$; $\Delta\bar{V} = 0{,}9320$. Seguidamente, precisamos los valores relativos de la entalpía con ayuda de (4.68), $\bar{i}_2 = 1{,}12$ y la temperatura $\bar{T}_2 = T_2/T_d$ (T_d es la temperatura característica de disociación):

$$\bar{T}_2 = (\bar{i}_2 - \alpha_2)/(4 + \alpha_2) = 0{,}0824.$$

Este valor de la temperatura relativa puede calcularse empleando otra fórmula;

$$\bar{T}_2 = \bar{V}_{n1}^2\Delta\bar{V}_n(1 - \Delta\bar{V}_n)/(1 + \alpha_2) = 0{,}0825.$$

De estos dos valores elegimos el medio: $\bar{T}_2 = 0{,}5\,(0{,}0824 + 0{,}0825) = 0{,}0825$. Partiendo de la magnitud $\Delta\bar{V}_n = 0{,}932$, precisamos la densidad relativa $\rho_2/\rho_1 = = 1/(1 - \Delta\bar{V}_n) = 14{,}71$ y el valor de $\rho_2/\rho_d = \bar{\rho}_2 = (\rho_2/\rho_1)(\rho_1/\rho_d) = 22{,}06\cdot10^{-7}$. Con la segunda aproximación calculamos el grado de disociación:

$$\alpha_2 = [1/(2\bar{\rho}_2)]\,e^{-1/\bar{T}_2}\left(\sqrt{1 + 4\bar{\rho}_2 e^{-1/\bar{T}_2}} - 1\right) = 0{,}7570.$$

Tomando en consideración el carácter aproximado del cálculo, podemos tomar esta magnitud como definitiva. Conociendo $\alpha_2 = 0{,}757$, se calculan con nueva aproximación $D = 2{,}292$, $\Delta\bar{V}_n = 0{,}9365$, así como $\bar{i}_2 = 1{,}12$; $\bar{T}_2 = (\bar{i}_2 - \alpha_2)/(4 + + \alpha_2) = 0{,}0764$; $\rho_2/\rho_1 = 15{,}76$; $\bar{\rho}_2 = 15{,}76\cdot1{,}5\cdot10^{-7} = 2{,}364\cdot10^{-7}$. De las tablas de los parámetros característicos de disociación del aire podemos tomar las magnitudes ρ_d, p_d, u_d, T_d para el nitrógeno y oxígeno o bien para su mezcla aérea

y determinar los correspondientes valores absolutos de los parámetros detrás de la onda de choque.

4.67. Para determinar el grado de disociación del aire conociendo los valores de las razones de las presiones, densidades y temperaturas, para las condiciones tanto delante como detrás de la onda de choque, hay que emplear la correspondiente dependencia entre el grado de disociación y las indicadas razones:

$$\alpha_2 = (p_2/p_1)(\rho_1/\rho_2)(T_1/T_2) - 1. \qquad (4.71)$$

Al resolver el problema 4.59 obtuvimos: $p_2/p_1 = 102{,}9$; $\rho_1/\rho_2 = 0{,}1316$; $T_1/T_2 = 0{,}07465$. De acuerdo con estos datos $\alpha_2 = 0{,}01088$.

4.68. El grado de disociación detrás de la onda de choque

$$\alpha_2 = (\mu_m)_1/(\mu_m)_2 - 1. \qquad (4.72)$$

Haciendo para el aire $(\mu_m)_1 = 29{,}0$ y teniendo en cuenta que en correspondencia con el planteamiento $(\mu_m)_2 = 23{,}2$, obtenemos $\alpha_2 = 0{,}25$.

4.69. El grado de disociación detrás de la onda de choque, en un sector con longitud del recorrido de relajación, aumenta de modo gradual desde un valor nulo, inmediatamente detrás de la onda, hasta el valor en equilibrio. La causa de este fenómeno reside en el carácter del proceso de disociación. De inmediato detrás de la onda de choque la disociación aún no comienza ($\alpha = 0$), ya que para ello se requiere un considerable número de colisiones entre las moléculas. El estado de equilibrio de la disociación se establece gradualmente en el transcurso del tiempo de relajación, es decir, en la longitud del recorrido de relajación.

4.70. Examinemos el caso límite de desequilibrio, en que la variación a salto de los parámetros del gas transcurre con calores específicos constantes (el grado de disociación detrás de la onda de choque $\alpha = 0$). Entonces, la razón de las presiones detrás y delante de la onda (4.1) $p_2/p_1 = 729$ y el correspondiente valor absoluto de la presión $p_2 = (p_2/p_1)\,p_1 = 71{,}49 \cdot 10^4$ Pa y el cociente de las densidades (4.5) $\rho_2/\rho_1 = 5{,}952$, donde la densidad delante de la onda de choque $\rho_1 = p_1/(RT_1) = 1{,}366 \cdot 10^{-2}$ kg/m³.

Teniendo esto en cuenta, el valor absoluto de la densidad detrás de la onda de choque $\rho_2 = (\rho_2/\rho_1)\,\rho_1 = 8{,}13 \cdot 10^{-2}$ kg/m³. La razón de las temperaturas detrás de esta onda y delante de ella $T_2/T_1 = (p_2/p_1)(\rho_1/\rho_2) = 122{,}5$.

Determinemos ahora el grado de disociación en equilibrio α_e y los correspondientes parámetros que caracterizan el estado en equilibrio del gas. Para ello apliquemos las dependencias obtenidas para el modelo del aire en forma de la mezcla de gases biatómicos.

Con la primera aproximación prefijamos la razón de las densidades $\rho_2/\rho_1 = 10$, para lo que $\Delta\overline{V} = (V_1 - V_2)/V_1 = 1 - \rho_1/\rho_2 = 0{,}9$. La velocidad que aquí entra $V_1 = M_1 a_1$, donde $a_1 = \sqrt{T_1/T_1'}\,a_{288}$. A su vez, la temperatura T_1' se toma igual a 288 K. A ella corresponde la velocidad del sonido $a_{288} = 340$ m/s. Así, pues, $V_1 = 7919$ m/s.

En las tablas de los parámetros característicos de disociación del aire hallamos la velocidad característica de disociación $V_d = 5400$ m/s. De acuerdo con este valor $\overline{V}_1 = V_1/V_d = 1{,}467$ y la entalpía relativa $\bar{i}_2 = (\overline{V}_1^2/2)\,\Delta\overline{V}\,(2 - \Delta\overline{V}) = 1{,}070$.

Calculemos la densidad relativa $\bar{\rho}_1 = \rho_1/\rho_d$ empleando la ecuación $\bar{\rho}_1 = (p_1/p_d)/(T_1/T_d)$. Las variables que entran en esta ecuación serán determinadas de la manera siguiente.

En las tablas anteriormente indicadas encontramos $p_d = 3{,}7 \cdot 10^7$ kgf/cm², en tanto que la temperatura característica de disociación se calcula con la fórmula

$T_d = T_{dN_2} r_{N_2} + T_{dO_2} r_{O_2}$, en la que $T_{dN_2} = 113\,000$ K y $T_{dO_2} = 59\,000$ K son las temperaturas características de disociación del nitrógeno y oxígeno, respectivamente. Como sus fracciones en volumen en el aire $r_{N_2} = 0{,}765$, $r_{O_2} = 0{,}235$, resulta que $T_d = 100\,400$ K.

De acuerdo con estos datos

$$\bar{\rho}_1 = (p_1/p_d)/(T_1/T_d) = 1{,}085 \cdot 10^{-7};$$
$$[p_1 = 9{,}807 \cdot 10^2/(9{,}807 \cdot 10^4) = 10^{-2}\ \mathrm{kgf/cm^2}].$$

Con este valor, así como por el valor de $\rho_2/\rho_1 = 10$, hallamos

$$\bar{\rho}_2 = \rho_2/\rho_d = (\rho_2/\rho_1)\,(\rho_1/\rho_d) = 1{,}085 \cdot 10^{-6}.$$

El correspondiente logaritmo $\log(\rho_d/\rho_2) = 5{,}964$.

Con ayuda de los valores $\bar{i}_2 = 1{,}085$ y $\log(1/\bar{\rho}_2) = 5{,}964$, en la gráfica $\alpha = f\,[i/u_d, \log(\rho_d/\rho)]$ encontramos $\alpha_2 = 0{,}74$ y con este valor precisamos $\Delta\bar{V}_n$. Para ello, calculamos [véase (4.70)] $D = 2{,}214$ y, seguidamente, con (4.69), determinamos $\Delta\bar{V}_n = 0{,}9391$.

De acuerdo con (4.68), el correspondiente valor adimensional de la entalpía $\bar{i}_2 = 1{,}076$ y la razón de las densidades $\rho_2/\rho_1 = 1/(1 - 0{,}9391) = 16{,}42$. Entonces, $\bar{\rho}_2 = 16{,}42 \cdot 1{,}085 \cdot 10^{-7} = 1{,}782 \cdot 10^{-6}$.

Como $\log(1/\bar{\rho}_2) = 5{,}76$, en la gráfica mencionada más arriba, determinamos con la segunda aproximación $\alpha_2 = 0{,}72$. Con esta aproximación acabamos y encontramos definitivamente: $D = 2{,}124$; $\Delta\bar{V}_n = 0{,}9355$; $\rho_2/\rho_1 = 15{,}50$; $\bar{\rho}_2 = 1{,}683 \cdot 10^{-6}$.

Estimemos el tiempo de relajación, empleando la fórmula:

$$t_D = \{c\bar{\rho}_2\rho_d\,[\alpha + \alpha_e/(1 - \alpha_e)]\}^{-1}, \tag{4.73}$$

donde $c = (k_R/m_A^2)\,(1 + \alpha)\,\rho_d$ y $\alpha_e = \alpha_2$ es el grado de disociación en equilibrio.

En correspondencia con las tablas de los parámetros característicos de disociación del aire la densidad característica para la mezcla de aire $\rho_d = 135$ g/cm³ y $\bar{\rho}_2 = 1{,}683 \cdot 10^{-6}$.

Para la estimación aproximada de la influencia de la falta de equilibrio sobre el flujo de aire es posible examinar su modelo biatómico, constituido por una mezcla aditiva de oxígeno y nitrógeno. En tal caso, el coeficiente c se determina para el oxígeno, en tanto que el resto de los parámetros, en particular el grado de disociación en equilibrio α_e, la densidad y presión características, se determinan para el modelo biatómico del aire.

De acuerdo con esto la constante de la velocidad de recombinación $k_R = 8{,}4 \times 10^{14}$ cm⁶/(mol²·s) y la masa del átomo $m_A = 16$ g/mol.

Tomando en consideración que de inmediato detrás de la onda de choque $\alpha = 0$, obtenemos $c = 4{,}430 \cdot 10^{14}$cm³/(g·s). Para estos datos el tiempo de relajación $t_D = 2{,}321 \cdot 10^{-6}$ s. La correspondiente longitud del recorrido de relajación $x = 0{,}5\,(V_{\alpha=0} + V_e)\,t_D$, donde $V_{\alpha=0}$ y V_e son las velocidades del flujo en desequilibrio y en equilibrio del gas.

Empleando la ecuación del impulso para una fuerte onda de choque $p_2 + \rho_2 V_2^2 = \rho_1 V_1^2$, obtenemos

$$V_2 = V_{\alpha=0} = \sqrt{(\rho_1 V_1^2 - p_2)/\rho_2} = 1321\ \mathrm{m/s}.$$

Teniendo en cuenta los valores hallados más arriba $\Delta\bar{V} = (V_1 - V_2)/V_1 = 0{,}9355$ y $V_1 = 7919$ m/s, el valor de $V_2 = V_e = V_1\,(1 - \Delta\bar{V}) = 510{,}8$ m/s.

Así, pues, la longitud del recorrido de relajación $x = 2{,}126 \cdot 10^{-3}$ m.

Capítulo 5

Método de características

El método de características, elaborado con minuciosidad para resolver los sistemas de ecuaciones de flujos de gases uniformes, supersónicos y bidimensionales (axisimétricos planos o tridimensionales), rotacionales e irrotacionales, es uno de los métodos precisos de cálculo de la circulación alrededor de los cuerpos en movimiento en un medio gaseoso a velocidad supersónica. Durante la resolución numérica de los problemas según el método de características se determina el campo de velocidades en los puntos discretos del flujo perturbado. Por consiguiente, la búsqueda de los parámetros de la circulación se reduce a resolver un problema cinemático, es decir, hallar las velocidades del flujo de gas en ciertos puntos. Haciendo uso de la ecuación de estado y de la energía, a partir de los valores obtenidos de las velocidades, se calculan la presión y otros parámetros de la corriente de gas. Más adelante, con ayuda de la ley de distribución de la presión por la superficie del cuerpo se pueden calcular las fuerzas y momentos aerodinámicos, así como los correspondientes coeficientes aerodinámicos, es decir, resolver por completo el problema de la circulación alrededor del cuerpo dado (vehículo volante).

El método de características requiere un considerable volumen de cálculos, con la particularidad de que el resultado final no puede ser obtenido en forma analítica. Por esta causa, semejante método sólo se emplea en aquellos casos cuando las dependencias analíticas o empíricas existentes no aseguran la precisión necesaria. A estos casos se refieren, p. ej., la construcción del perfil de la parte supersónica de la tobera de los túneles aerodinámicos, en cuya salida hay que obtener un flujo de gas uniforme supersónico con parámetros prefijados.

Parte de las preguntas y los problemas del presente capítulo familiarizan con los fundamentos matemáticos del método de características, con las condiciones para las que hay soluciones de las ecuaciones características y es posible el cálculo de los flujos de gas por el método de características. Una serie de ellos está dedicada a la aclaración del sentido físico de las características, al examen de las condiciones de compatibilidad de las ecuaciones para ellas. Particular atención se presta a la aplicación práctica del método de características en los ejemplos de cálculo de las corrientes de Prandtl—Meyer y la resolución de algunos problemas, relacionados con flujos supersónicos planos o bien tridimensionales axisimétricos.

La peculiaridad del método de características consiste en que su realización está ligada con el empleo, extenso y directo, de muchas e importantse nociones y definiciones de dinámica de los gases, tales como las ondas de choque, líneas sónicas (de Mach), flujos unidimensionales o cónicos, flujos de gas isentrópicos (irrotacionales) o bien no isentrópicos (rotacionales).

Problemas y preguntas

5.1. La ecuación de continuidad, transformada mediante las ecuaciones de movimiento, se ha reducido a la forma

$$(V_x^2 - a^2)\,\partial V_x/\partial x + V_xV_y\,(\partial V_x/\partial y + \partial V_y/\partial x) + (V_y^2 - a^2)\,\partial V_y/\partial y - \varepsilon a^2 V_y/y = 0. \quad (5.1)$$

¿Qué tipos de movimiento de un gas pueden investigarse con ella?

5.2. Muestren que si varía la entropía o la entalpía de remanso en un flujo de gas, al pasar de una línea de corriente a otra, semejante flujo es rotacional.

5.3. Expresen de forma matemática el hecho de que la entropía de la partícula de gas, cuyo movimiento observamos, queda constante con este movimiento si no se toma en consideración el rozamiento interno y el transporte de calor debido a la conductibilidad térmica, es decir, si desde el punto de vista térmico el proceso es isentrópico.

5.4. A lo largo de la línea de corriente no varía la entalpía de remanso $i_0 = i + V^2/2$, que determina la energía total de la unidad de masa del gas. Muestren que en este caso la entropía también es constante.

5.5. El contenido del problema de Cauchy consiste en la búsqueda de la solución de la ecuación diferencial para el potencial φ en el entorno de la curva inicial

$$(V_x^2 - a^2)(\partial^2\varphi/\partial x^2) + 2V_xV_y\,[\partial^2\varphi/(\partial x\partial y)] + (V_y^2 - a^2)(\partial^2\varphi/\partial y^2) = 0, \quad (5.2)$$

que satisfaga ciertas condiciones adicionales prefijadas en dicha curva. Digan cuáles son esas condiciones.

5.6. Al resolver el problema de Cauchy para la búsqueda del potencial φ que determinamos es posible limitarse a calcular las segundas derivadas ($u = \varphi_{xx}$, $s = \varphi_{xy}$, $t = \varphi_{yy}$) en la curva dada, cuya ecuación en forma general es $F(x, y) = 0$. Con este fin hay que resolver el siguiente sistema de tres ecuaciones:

$$Au + 2Bs + Ct + H = 0; \quad dxu + dys + Ot - d\varphi_x = 0;$$
$$Ou + dxs + dyt - d\varphi_y = 0. \quad (5.3)$$

¿A qué condición las derivadas desconocidas se determinan unívocamente?

5.7. Sabemos que si el determinante fundamental del sistema de ecuaciones (5.3) $\Delta = 0$, dicho sistema tiene soluciones finitas, aunque no unívocas, sólo cuando los tres restantes determinantes particulares Δ_u, Δ_s, Δ_t son nulos. Muestren esto en el ejemplo del sistema algebraico de ecuaciones

$$Ox + Oy + Oz = 0; \quad 2x + 2y + Oz = 0; \quad -x + 5y + z = 3. \quad (5.4)$$

5.8. Del problema de Cauchy sabemos que las soluciones finitas, aunque no unívocas, de la función buscada φ en el entorno de cierta curva inicial existen si en el sistema (5.3) el determinante fundamental $\Delta = 0$. Desde el punto de vista geométrico esto significa que la curva inicial coincide con una curva extraordinaria, representada por la ecuación

$$A\,(dy/dx)^2 - 2B\,(dy/dx) + C = 0$$
$$(A = V_x^2 - a^2, \quad B = V_xV_y, \quad C = V_y^2 - a^2), \quad (5.5)$$

llamada característica. Sobre la base del análisis del sistema de ecuaciones (5.3), junto con (5.5), indiquen la condición adicional que debe cumplirse para obtener dichas soluciones.

5.9. La solución de la ecuación cuadrática característica con relación a la derivada dy/dx tiene la forma

$$(dy/dx)_{1,2} = y'_{1,2} = (B \pm \sqrt{B^2 - AC})/A. \quad (5.6)$$

¿En qué consiste el sentido geométrico de esta solución?

5.10. ¿Qué se entiende en el método de características por condiciones de compatibilidad y cuál es el sentido geométrico de éstas?

5.11. ¿En qué consiste la particularidad distintiva de las características respecto de otras curvas trazadas en el flujo (en el plano físico x, y)?

5.12. En el punto dado del flujo el vector velocidad está inclinado hacia el eje Ox bajo el ángulo $\beta = 40°$. Determinen el sentido de las características que pasan por ese punto si el número $\mathbf{M} = 2$.

5.13. Muestren que la ecuación característica en el plano físico, por su forma exterior, es igual para los flujos de gas bidimensional plano y tridimensional axisimétrico.

5.14. En cierto punto del flujo, mediante la fotografía por sombras, se han hallado los ángulos de inclinación de las ondas sónicas (de Mach) iguales a 18 y —12° (fig. 5.1). Determinen el sentido del vector velocidad y el número **M** en ese punto.

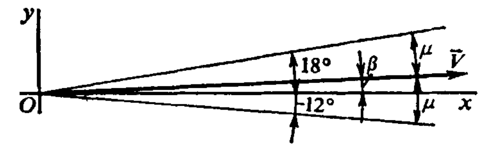


Fig. 5.1. Líneas de Mach en un flujo de gas

5.15. En dos puntos de flujos supersónicos uno frío y otro caliente (los índices adiabáticos del gas en estos flujos $k_1 > k_2$, respectivamente), las velocidades relativas $\lambda = V/a^*$ son iguales. Comparen los ángulos de inclinación de las características en los puntos indicados (μ_1 y μ_2).

5.16. Determinen los ángulos de inclinación de las características en el punto dado del flujo, si las componentes de la velocidad en él $V_x = 320$ y $V_y = 150$ m/s. La velocidad del sonido $a = 280$ m/s.

5.17. En el plano físico las características de la primera y segunda familias están inclinadas bajo ángulos de 45 y 13°. Determinen el sentido de las características adjuntas en el plano de la hodógrafa (vector velocidad).

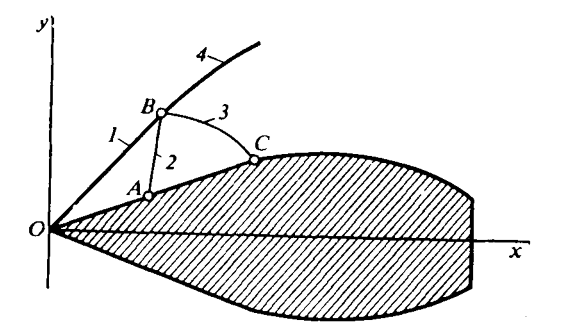


Fig. 5.2. Esquema de las ondas de choque delante del perfil:

1, onda de choque frontal; *2*, onda incidente — característica de la primera familia; *3*, onda reflejada — característica de la segunda familia; *4*, sector curvilíneo de la onda de choque

Fig. 5.3. Desviación del flujo supersónico

5.18. ¿Cómo varía la presión de remanso p_{02} con el aumento de la entropía de un gas ($dS/dn > 0$) al pasar de una línea de corriente a otra?

5.19. Indiquen el ámbito de un flujo supersónico junto a un perfil aguzado con pared curvilínea que se calcula según el método de características, tomando en consideración la influencia vorticial (fig. 5.2).

5.20. La ecuación para las características en el plano de la hodógrafa para un flujo supersónico plano tiene la forma

$$\beta = \pm\omega + \beta_{1,2}, \tag{5.7}$$

10—01650

donde el ángulo

$$\omega=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}(M^2-1)}-\operatorname{arctg}\sqrt{M^2-1} \qquad (5.8)$$

o bien

$$\omega=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2_{máx}-\lambda^2}}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{k+1}{k-1}\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2_{máx}-\lambda^2}}\,. \qquad (5.9)$$

¿Cuál es el sentido físico de este ángulo?

5.21. En la sección prefijada del chorro supersónico el número $M_1 = 5$ (el punto A en la fig. 5.3). Determinen el ángulo de desviación $\Delta\beta$ del chorro a partir de dicha sección al ensancharse ella hasta el estado caracterizado por el número $M_2 = 10$ (en el punto B). El flujo es isentrópico, el índice adiabático $k = c_p/c_v = 1{,}4$.

5.22. La desviación del flujo supersónico del estado inicial en el punto C (fig. 5.4), caracterizado por el número $M_1 = 3$, se determina con el ángulo $\Delta\beta = 10°$. Hallen el número M_2 en el punto D del flujo desviado para $k = c_p/c_v = 1{,}4$ y determinen si la indicada desviación del flujo se produce con compresión o expansión.

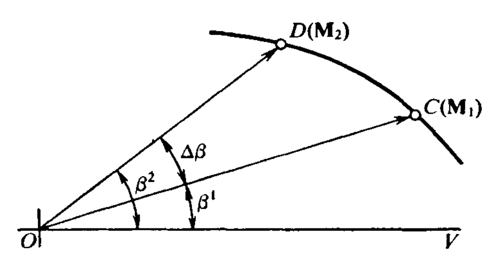


Fig. 5.4. Esquema para calcular el número M según el ángulo de desviación del flujo de gas

5.23. El flujo supersónico en cierta sección de un chorro de gas ($k = 1{,}4$) se caracteriza por el número $M_2 = 10$. ¿En cuánto se diferencia el ángulo de desviación de este flujo, contado desde el estado inicial del flujo con número $M_1 = 1$, del valor límite $\omega_{máx}$?

5.24. Hallen la desviación límite de un flujo que es necesaria para obtener la máxima velocidad, si el ángulo de dicha desviación se cuenta desde la dirección del flujo en el que el número $M = 5$ ($k = c_p/c_v = 1{,}4$).

5.25. El flujo de gas en cierta sección de un chorro se caracteriza por los siguientes parámetros: $M_1 = 3{,}2$, $p_1 = 1{,}2\cdot10^4$ Pa, $\rho_1 = 0{,}2001$ kg/m³, $T_1 = 209$ K. Determinen los correspondientes valores de estos parámetros, así como la velocidad V_2, en caso de un flujo isentrópico del gas con capacidades caloríficas constantes ($k = 1{,}4$) y al desviarse el chorro el ángulo $\Delta\beta = 13°$.

5.26. Un chorro de gas con número $M_a = 2{,}3$ y presión $p_a = 5{,}6\cdot10^4$ Pa en el plano de salida de una tobera supersónica sale a un medio inmóvil a una presión $p_H = 1{,}1\cdot10^4$ Pa. Determinen el ángulo de giro de chorro ($k = c_p/c_v = 1{,}4$).

5.27. Muestren que si en un flujo plano potencial (supersónico) una de las características de cierta familia es una recta, todas las demás características de esa familia también lo son.

5.28. En la fig. 5.5 se ofrece la disposición de las características adjuntas en el plano físico x, y (fig. 5.5, *a*) y en el plano de la hodógrafa λ_x, λ_y (fig. 5.5,*b*,*c*). Consideren los tipos de flujos supersónicos para los que hay semejante disposición de las características.

5.29. En la fig. 5.6 se muestran los esquemas de circulación alrededor de dos superficies iguales por un flujo plano supersónico. En uno de los esquemas las características tienen la forma de rectas, en el otro, son curvilíneas. ¿Cómo se puede explicar esta diferencia?

5.30. En dos puntos A y B con coordenadas $x_A = 10$ e $y_A = 10$, $x_B = 12$ e $y_B = 8$ son conocidas las velocidades de un flujo plano (o bien tridimensional axisimétrico) supersónico de gas $V_A = 800$, $V_B = 820$ m/s y sus direcciones, determinadas por los ángulos $\beta_A = 30°$, $\beta_B = 32°$ (fig. 5.7). Determinen la velocidad (el número M) y el ángulo de desviación del flujo en el punto C, en la intersección

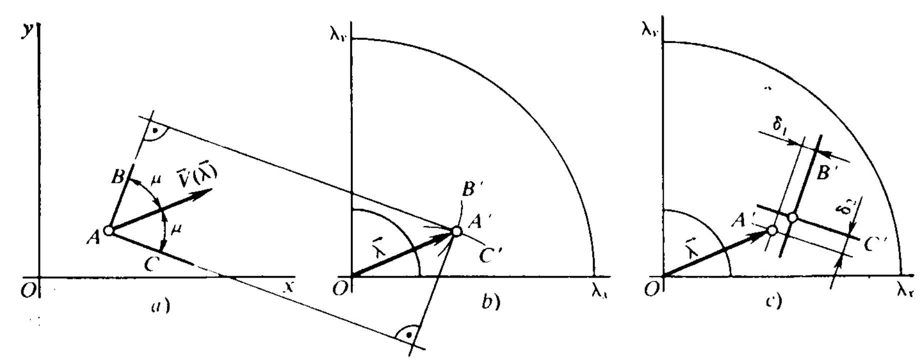


Fig. 5.5. Características conjugadas en el plano físico (*a*) y en el plano de la hodógrafa (*b*, *c*)

de las características de diversas familias que salen de los puntos A y B, a condición de que el flujo es isentrópico, la velocidad del flujo no perturbado $V_\infty = 750$ m/s, la temperatura $T_\infty = 288$ K, $k = c_p/c_v = 1{,}4$.

5.31. De acuerdo con los datos del problema 5.30 calculen la velocidad (el número M) en el punto C en la intersección de las características de diferentes

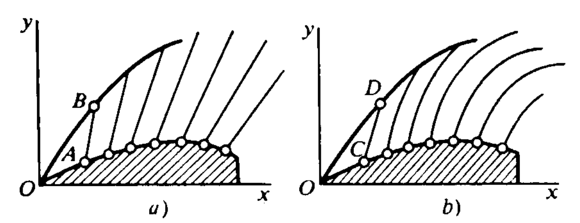


Fig. 5.6. Características en los perfiles:
a, en forma de rectas; *b*, curvilíneas

familias trazadas de los puntos A y B, a condición de que el flujo es no isentrópico. La variación de la entropía en los puntos A y B está prefijada mediante la disminución de la presión de remanso ($p_{02A} = 0{,}8p_0$ en el punto A; $p_{02B} = 0{,}77p_0$ en el punto B; p_0 es la presión de remanso en caso de compresión isentrópica).

5.32. Determinen la velocidad en la superficie de un sólido de revolución en el lugar de intersección de la característica de la segunda familia, trazada del punto D situado cerca de la superficie (fig. 5.8). Los datos del problema son los siguientes: la velocidad del flujo incidente $V_\infty = 750$ m/s; la temperatura $T_\infty = 288$ K; $k = c_p/c_v = 1{,}4$; la presión de remanso en la superficie $p_{02} = 0{,}77p_0$. Para el punto D esta presión $p_{02D} = 0{,}8p_0$, en tanto que la velocidad en ella $V_D = 800$ m/s. La ecuación de la generatriz en el entorno del punto D:

$$y = y_m\,(x/x_m)\,(2 - x/x_m), \tag{5.10}$$

donde $y_m = 1$; $x_m = 10$.

Las coordenadas de este punto $x_D = 5$; $y_D = 0{,}8$ y el ángulo de inclinación del vector velocidad en él $\beta_D = 5°$. Comparen la velocidad hallada (el número M) en el punto B con su correspondiente valor, obtenido sin tener en cuenta el carácter rotacional del flujo.

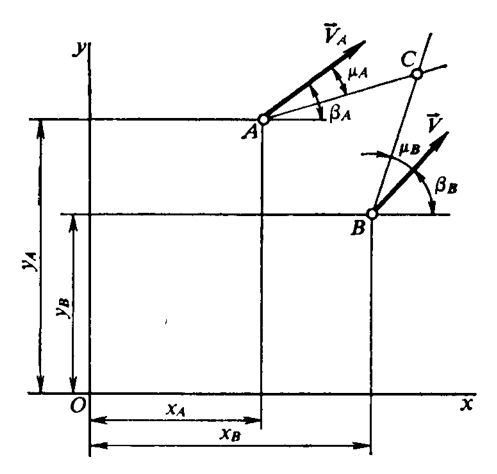


Fig. 5.7. Velocidad en la intersección de dos características

5.33. Sobre una onda de choque rectilínea, bajo el ángulo $\theta_{ch} = 30°$, en los puntos S y H inciden ondas de enrarecimiento situadas juntas entre sí [características *1* de la familia (fig. 5.9)]. Calculen la velocidad detrás de la onda de choque en el sector SH y determinen las correspondientes variaciones del ángulo de inclinación de ella. En el punto F, con coordenada $y_F = 10$, que se encuentra en la intersección de las características de la segunda familia SF y de la primera familia FH ($x_H - x_F = 0{,}5$), la velocidad $V_F = 950$ m/s; el ángulo de desviación del flujo $\beta_F = 11°$; la velocidad de flujo incidente $V_\infty = 1020$ m/s; la temperatura $T_\infty = 288$ K; $k = c_p/c_v = 1{,}4$.

5.34. Hallen los parámetros del aire (presión p_0 y densidad ρ_0) en la antecámara de un túnel aerodinámico supersónico con zona de trabajo abierta; determinen el área de la sección crítica y elijan la forma del contorno curvilíneo de la

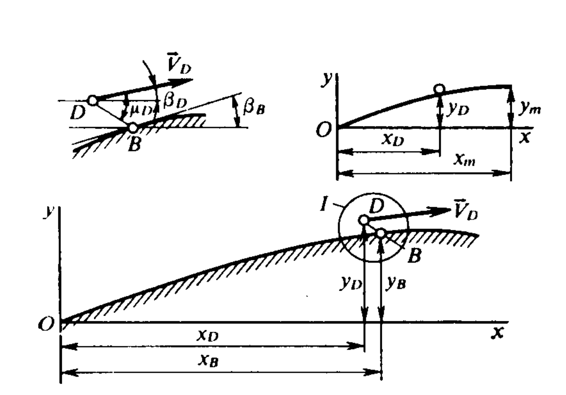


Fig. 5.8. Esquema para calcular la velocidad en la intersección de la característica con la pared

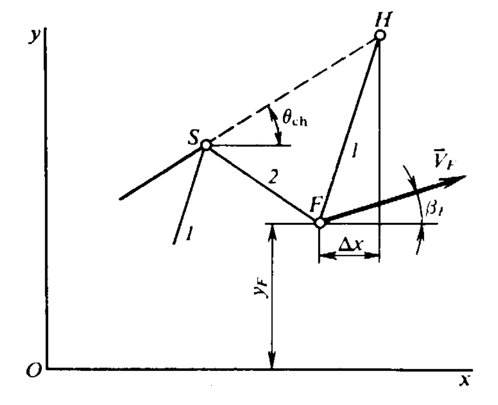


Fig. 5.9. Velocidad en la característica y en la onda de choque:

1 y *2*, carasterísticas de las familias primera y segunda

tobera que asegure la obtención en la salida de un flujo paralelo supersónico con número $M_\infty = 3$ y presión de 10^5 Pa. La sección cuadrada de la tobera tiene el área $S = 0{,}16$ m², la temperatura del aire en la antecámara $T_0 = 290$ K.

Solución de los problemas y respuestas a las preguntas

5.1. Con ayuda de la ecuación (5.1) podemos investigar flujos de gas uniformes, con la particularidad de que si en esta ecuación $\varepsilon = 0$ ella será válida para un flujo bidimensional plano, mientras que cuando $\varepsilon = 1$ valdrá para un flujo bidimensional espacial (axisimétrico). Además, esta ecuación permite estudiar tanto corrientes rotacionales (no isentrópicas) de gas, como irrotacionales (isentrópicas). En el primer caso, ella puede ser transformada en la ecuación para la función de corriente ψ:

$$(V_x^2-a^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+2V_xV_y\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}+(V_y^2-a^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\varepsilon}{y^{1-\varepsilon}}a^2V_x\left(1-\frac{V^2}{V_{\text{máx}}^2}\right)^{1/(1-k)}=$$
$$=\frac{k-1}{2k}\frac{V_{\text{máx}}^2}{RV}\left(1-\frac{V^2}{V_{\text{máx}}^2}\right)^{k/(1-k)}y^{\varepsilon}(a^2-V^2)\frac{dS}{dn}, \qquad (5.11)$$

donde $V_x = [1/(\rho y^{\varepsilon})]\,(\partial\psi/\partial y)$, $V_y = -[1/(\rho y^{\varepsilon})]\,(\partial\psi/\partial x)$ y, en el segundo caso, en la ecuación para el potencial de velocidad

$$(V_x-a^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2V_xV_y\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+(V_y^2-a^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\varepsilon\frac{a^2V_y}{y}=0. \qquad (5.12)$$

donde $V_x = \partial\varphi/\partial x$; $V_y = \partial\varphi/\partial y$; $\partial^2\varphi/(\partial x\,\partial y) = \partial V_x/\partial y = \partial V_y/\partial x$.

5.2. La ecuación de movimiento en la proyección sobre la normal n a cualquier línea de corriente tiene la forma

$$V^2/r = -(1/\rho)\,(dp/dn), \qquad (5.13)$$

donde V^2/r es la aceleración de la partícula de gas; r, el radio de curvatura de la línea de corriente.

A lo largo de cada línea de corriente es justa la ecuación de energía

$$V^2/2 + i = i_0. \qquad (5.14)$$

Derivando (5.14) por n, obtenemos

$$V\,(dV/dn) + di/dn = di_0/dn. \qquad (5.15)$$

Hay que tener en cuenta que a lo largo de la línea de corriente $i_0 = \text{const}$, por lo que $di_0 = 0$. En correspondencia con el segundo principio de la termodinámica, la variación de la entropía

$$dS = c_v dT/T + (p/T)\,d\,(1/\rho). \qquad (5.16)$$

Derivando la ecuación de estado $p = \rho RT$, obtenemos

$$d\,(p/\rho) = dp/\rho + pd\,(1/\rho) = RdT, \qquad (5.17)$$

de donde

$$pd\,(1/\rho) = RdT - dp/\rho. \qquad (5.18)$$

De las ecuaciones (5.16) y (5.18), hallamos

$$dS = c_v dT/T + (1/T)\,(RdT - dp/\rho).$$

De aquí, tomando en consideración que la entalpía $i = c_pT$ y la constante de los gases $R = c_p - c_v$, tendremos

$$TdS = di - dp/\rho. \qquad (5.19)$$

La ecuación (5.19) puede representarse en la forma

$$TdS/dn = di/dn - (1/\rho)\, dp/dn. \tag{5.20}$$

En esta forma la ecuación (5.20) caracteriza la variación de la entropía a lo largo de la normal a la línea de corriente, o sea, al pasar de una línea de corriente a otra. Sustituyendo en (5.20) el valor de di/dn de (5.15), obtenemos

$$(1/\rho)\, dp/dn = di_0/dn - VdV/dn - TdS/dn. \tag{5.21}$$

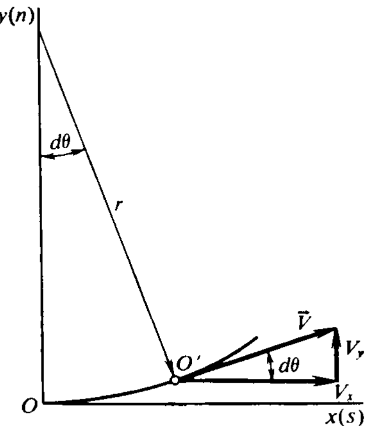


Fig. 5.10. Esquema de las líneas de corriente

Combinando esta expresión con la ecuación de movimiento (5.13), encontramos

$$V\,(dV/dn - V/r) = di_0/dn - TdS/dn. \tag{5.22}$$

Mostremos que el término $(dV/dn - V/r)$ es igual al valor doble del vórtice en el punto dado. Elijamos una línea de corriente (fig. 5.10) y tracemos una tangente a ella en el punto O tomado al azar. Dirijamos por la tangente el eje x y por la normal el y. En el punto O la derivada

$$\partial V_x/\partial y = dV/dn, \tag{5.23}$$

ya que el vector velocidad en este punto está dirigido por el eje x. Si con dS designamos un elemento del arco de la línea de corriente, entonces

$$\partial V_y/\partial x = \partial V_y/\partial S = Vd\theta/dS = V/r. \tag{5.24}$$

De (5.23) y (5.24) hallamos el vórtice doble:

$$2\omega_z = \partial V_y/\partial x - \partial V_x/\partial y = V/r - dV/dn. \tag{5.25}$$

Poniendo (5.25) en (5.22), obtenemos

$$-2V\omega_z = di_0/dn - TdS/dn. \tag{5.26}$$

De esta expresión se desprende que el vórtice $\omega_z = 0$, si

$$di_0/dn = 0 \quad \text{y} \quad dS/dn = 0. \tag{5.27}$$

En caso contrario (al haber pérdidas de energía o variación de la entropía al pasar de una línea de corriente a otra) el flujo es rotacional. Semejante flujo surge detrás de una onda curvilínea, ya que él se caracteriza por el valor de $dS/dn \neq 0$. Con esto, si semejante onda surge en un flujo no viscoso supersónico, $di_0/dn = 0$; si ella se forma en un flujo donde está de manifiesto el efecto de las fuerzas de viscosidad (p. ej., en la capa límite), $di_0/dn \neq 0$.

5.3. La condición para la constancia de la entropía corresponde a la igualdad a cero de la derivada total de la entropía con el tiempo, es decir,

$$dS/dt = 0. \tag{5.28}$$

Como se considera una partícula dada (fijada), el cálculo de dicha derivada se efectúa para la trayectoria (y no para lá línea de corriente) y tal cálculo es, ni más

ni menos, la derivación total:

$$dS/dt = \partial S/\partial t + V_x \partial S/\partial x + V_y \partial S/\partial y + V_z \partial S/\partial z = \partial S/\partial t + \vec{V} \operatorname{grad} S = 0.$$

5.4. De acuerdo con el primer principio de la termodinamica, la variación de la entropía

$$dS = di/T - dp/(\rho T). \tag{5.29}$$

Con arreglo a la condición de constancia de la entalpía de remanso i_0 a lo largo de la línea de corriente, $di + VdV = 0$, de donde $di = -VdV$. Además, para el movimiento a lo largo de la línea de corriente tenemos $VdV = -dp/\rho$ o bien $di = dp/\rho$. Introduciendo esto en (5.29), obtenemos la igualdad $dS = 0$, en correspondencia con la cual a lo largo de la línea de corriente $S =$ const.

5.5. La solución de la ecuación (5.2) para el potencial φ en el entorno del punto N (x, y) en la curva inicial puede representarse en forma de la serie:

$$\varphi(x_0, y_0) = \varphi(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[(\Delta x)^n \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} + \frac{n}{1}(\Delta x)^{n-1} \Delta y \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^{n-1}\partial y} + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{2}(\Delta x)^{n-2}(\Delta y)^2 \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^{n-2}\partial y^2} + \ldots + (\Delta y)^n \frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n}\right], \tag{5.30}$$

donde x_0, y_0 son las coordenadas del punto M situado muy cerca del punto N (x, y). La dístancia entre estos puntos se determina con los valores de $\Delta x = x_0 - x$; $\Delta y = y_0 - y$.

Con ayuda de la serie (5.30) podemos obtener la solución si en la curva que consideramos son conocidos los valores de la función φ y sus derivadas de cualquier orden $\partial^n\varphi/\partial x^n$, $\partial^n\varphi/(\partial x^{n-1}\partial y)$, etc. Como, por regla, en dicha curva están prefijados los valores de las derivadas de primer orden $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, adicionalmente hay que hallar las derivadas de un orden más alto. Cuando se resuelven problemas gasodinámicos es suficiente, por lo general, conocer las derivadas de segundo orden, o sea, $\partial^2\varphi/\partial x^2$, $\partial^2\varphi/(\partial x\partial y)$, $\partial^2\varphi/\partial y^2$. Por lo tanto, la solución del problema de Cauchy, en la clase de problemas que consideramos, está relacionada con la determinación de las condiciones complementarias que permitan hallar las indicadas derivadas de la función potencial φ de órdenes superiores que entran en (5.30).

5.6. Para resolver el sistema de ecuaciones (5.3) se emplea el método de determinantes. De acuerdo con él, las derivadas de segundo orden se buscan en la forma

$$u = \varphi_{xx} = \Delta_u/\Delta; \quad s = \varphi_{xy} = \Delta_s/\Delta; \quad t = \varphi_{yy} = \Delta_t/\Delta,$$

donde Δ_u, Δ_s, Δ_t son los determinantes particulares; Δ, el determinante fundamental del sistema de ecuaciones (5.3). Estas soluciones son unívocas si el determinante fundamental no es nulo en la curva inicial.

5.7. Para resolver el sistema prefijado de ecuaciones (5.4) confeccionamos los siguientes determinantes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Con ayuda de estos determinantes la solución del sistema se reduce a la forma indeterminada: $x = \Delta_1/\Delta = 0/0$; $y = \Delta_2/\Delta = 0/0$; $z = \Delta_3/\Delta = 0/0$. Semejante indeterminación en la solución puede ser evitada. Del sistema de ecuaciones se desprende de inmediato que él tiene un conjunto infinito de soluciones x; $y = 1 - x$; $z = 6x - 2$ que son finitas con valor finito (concreto) de x, a pesar de que todos los determinantes del sistema son iguales a cero. P. ej., para $x = 3$, los valores de $y = -2$, $z = 16$, mientras que para $x = 4$, los valores de $y = -3$, $z = 22$, etc.

5.8. Para la existencia de soluciones finitas, aunque no unívocas, de la función buscada φ [véase (5.2)], que se determina desarrollando (5.30), es preciso que todos los determinantes, incluido el fundamental, del sistema de ecuaciones (5.3) sean nulos, es decir, $\Delta = 0$, $\Delta_u = \Delta_s = \Delta_t = 0$.

5.9. La solución de (5.6) es un sistema de ecuaciones, características de dos familias, en forma diferencial, en tanto que los valores $(dy/dx)_{1,2}$ determinan los ángulos de inclinación de las tangentes a estas características en el punto que consideramos.

5.10. La ecuación (5.5) y la ecuación

$$A\,(y'q' - p') - 2Bq' - H = 0 \quad (p' = dp/dx,\ q' = dq/dx) \qquad (5.31)$$

que corresponden a la igualdad a cero de los determinantes particulares y fundamental del sistema (5.3) y que determinan las soluciones finitas, aunque no unívocas, para u, s, t, reciben el nombre de *condiciones de compatibilidad*. Desde el punto de vista geométrico, dichas condiciones significan que la solución de las ecuaciones para las características en el plano físico x, y son su aplicación sobre el plano p, q, es decir, son los puntos de las curvas descritas con la ecuación (5.31). Con otras palabras, al desplazamiento a lo largo de la característica en el plano x, y corresponde el desplazamiento a lo largo de la característica de esa misma familia en el plano p, q.

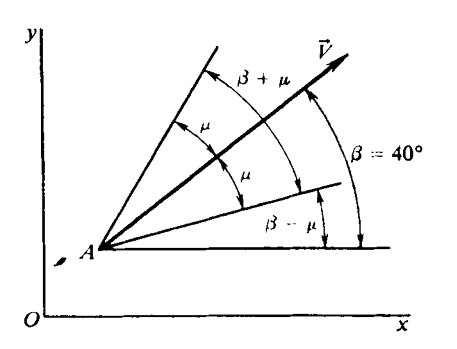


Fig. 5.11. Características en el plano físico

5.11. La singularidad distintiva de las características de otras curvas, trazadas en el flujo, consiste en que si a lo largo de la curva, que no es característica, podemos prefijar las condiciones iniciales de forma arbitraria, a lo largo de las características esto no se puede hacer. La explicación de este hecho reside en que las características deben satisfacer la ecuación diferencial (5.5) o bien (5.31).

5.12. De acuerdo con el número $\mathbf{M} = 2$ prefijado determinamos el ángulo de inclinación de las características (líneas de Mach) hacia el vector velocidad en el punto que consideramos $\mu = \pm\arcsen\,(1/\mathbf{M}) = \pm 30°$. Como según el planteamiento el vector velocidad forma con el eje Ox el ángulo $\beta = 40°$, la inclinación de dichas características hacia ese mismo eje se determina con los ángulos $\beta \pm \mu$ (fig. 5.11): $\beta + \mu = 70°$ (primera familia) y $\beta - \mu = 10°$ (segunda familia).

5.13. Los flujos de gas bidimensionales (planos o tridimensionales axisimétricos) se describen con la ecuación general (5.1). La forma concreta de la ecuación para cada uno de estos dos flujos se determina por la presencia del término libre a^2V_y/y.

Como sabemos la solución de estas ecuaciones, aunque no son unívocas, se realiza a condición de que los determinantes principal Δ y particulares Δ_u, Δ_s, Δ_t

del sistema (5.3) sean nulos. Con ello, a la igualdad a cero del determinante principal corresponde la condición de existencia de la característica en el plano físico del flujo de gas. De este modo, la ecuación de estas características tiene la forma (5.5) que sólo depende de los coeficientes A, B, C y, por lo tanto, es la misma para los flujos tanto plano, como tridimensional axisimétrico.

5.14. De acuerdo con el planteamiento del problema, las características de las familias primera y segunda están inclinadas hacia el eje Ox bajo los ángulos $\beta + \mu = 18°$ y $\beta - \mu = -12°$. Por consiguiente, el ángulo entre dichas características, en el punto que consideramos, es igual a $2\mu = 18° + 12° = 30°$, el propio ángulo $\mu = 15°$ y el correspondiente número $M = 1/\text{sen}\,\mu = 3{,}864$. El sentido del vector velocidad coincide con la bisectriz del ángulo entre las características y, por consiguiente, el ángulo de inclinación de este vector $\beta = (\beta + \mu) - \mu = 18° - 15° = 3°$.

5.15. Para hallar la respuesta hagamos uso de la ecuación de la «elipse de velocidades» isentrópica

$$\lambda_x^2/[(k+1)/(k-1)] + \lambda_y^2 = 1. \qquad (5.32)$$

El semieje menor de esta elipse es igual a uno, mientras que el mayor a $\sqrt{(k+1)/(k-1)}$. La elipse posee la propiedad de que cuando el extremo del vector velocidad $\vec{V}$ (o bien $\vec{\lambda}$) yace en ella y el centro de la misma coincide con el origen del vector, el semieje mayor coincide con el sentido de la característica de una de las familias en el plano del flujo.

Construyamos en cierta escala en una hoja de papel dos elipses de este tipo, en una de las cuales el semieje mayor $b_1 = [(k_1+1)/(k_1-1)]^{1/2}$ y en la otra, $b_2 = [(k_2+1)/(k_2-1)]^{1/2}$ (fig. 5.12). A continuación, tracemos desde el centro O el elemento del arco de una circunferencia igual a la velocidad λ prefijada y fijemos los puntos B y A de intersección de este arco con las ramas de la elipse.

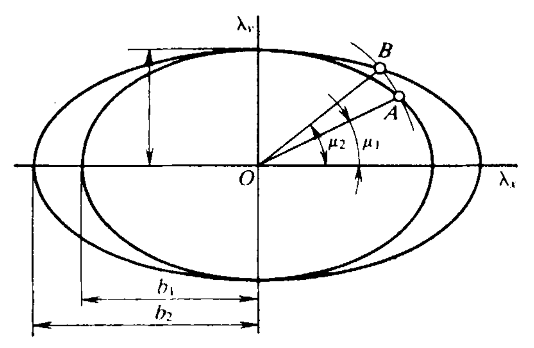


Fig. 5.12. Esquema de la elipse de velocidades

Los ángulos μ_1 y μ_2 de inclinación de las rectas OB y OA, respecto al semieje mayor, son los de inclinación de las características en los flujos caliente y frío, respectivamente. Como vemos, la característica en el flujo caliente está inclinada bajo un ángulo mayor.

5.16. Las características de las dos famiilas en el plano físico se describen con la ecuación

$$(dy/dx)_{1,2} = \text{tg}\,(\beta \pm \mu) = (V_x V_y \pm a\sqrt{V^2 - a^2})/(V_x^2 - a^2). \qquad (5.33)$$

Después de la correspondiente sustitución de las velocidades del flujo y del sonido para las características de la primera familia obtenemos $\text{tg}\,(\beta + \mu) = 4{,}516$ y para la segunda $\text{tg}\,(\beta - \mu) = -0{,}5157$. De acuerdo con estos resultados $\beta + \mu = 77{,}51°$; $\beta - \mu = -27{,}28°$, lo que significa que $\beta = 25{,}12°$; $\mu = 52{,}39°$.

5.17. La inclinación de las características en el plano de la hodógrafa (vector velocidad) puede ser determinada empleando la propiedad de perpendicularidad entre éstas y las características adjuntas al plano físico. De acuerdo con esto, la

inclinación de tales características se determina con los ángulos $\beta^2 = 45° + 90° = 135°$ (segunda familia) y $\beta^1 = 13° + 90° = 103°$ (primera familia).

5.18. Para el análisis utilizamos la ecuación

$$(1/R)\,(dS/dn) = -d \ln p_{02}/dn. \qquad (5.34)$$

De ella se deduce que con $dS/dn > 0$ la derivada $d \ln p_{02}/dn < 0$ y, por lo tanto, la presión de remanso p_{02} disminuye con el aumento de la entropía, al pasar de una línea de corriente a otra.

5.19. Durante la circulación supersónica alrededor de un perfil aguzado, con un sector de superficie cuneiforme, delante de él surge una onda de choque, cuyo sector rectilíneo está limitado por el punto B situado en la intersección de la onda con la característica trazada desde el extremo de la cuña. Detrás de este punto la onda de choque se curva, como resultado de la interacción con las ondas de enrarecimiento incidentes, formadas durante la circulación alrededor del sector curvilíneo del perfil (véase la fig. 5.2), y, como consecuencia, se produce la variación de su intensidad. A su vez, esto provoca el cambio de la entropía al pasar de una línea de corriente a otra, lo que resulta ser la causa del carácter rotacional del movimiento del gas detrás de la onda de choque.

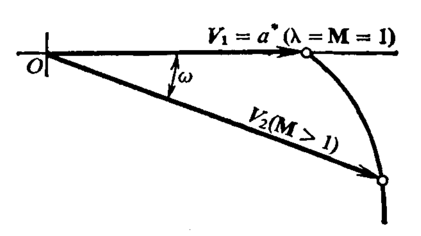


Fig. 5.13. Esquema para determinar el ángulo ω

La zona de influencia del carácter del movimiento sobre la circulación se limita por el ámbito situado dentro de la onda de choque curvilínea y la característica de la segunda familia BC que sale del punto B. La explicación de esto consiste en que las perturbaciones en el flujo supersónico se propagan sólo tras las características (líneas de Mach) en el plano físico del flujo.

5.20. El ángulo ω, determinado con (5.8) o bien (5.9), es igual al ángulo de desviación del flujo de gas durante la expansión isentrópica desde el punto donde $\mathbf{M} = 1$ hasta el estado caracterizado por cierto número arbitrario $\mathbf{M} > 1$, que es igual al límite superior al calcular la integral (5.8) (fig. 5.13).

5.21. Para los puntos A y B las ecuaciones de las características en el plano de la hodógrafa del vector velocidad tienen, respectivamente, la forma $\beta_A = -\omega_1 + \beta_1$; $\beta_B = -\omega_2 + \beta_1$. Sustrayendo de la segunda ecuación la primera, obtenemos

$$\beta_B - \beta_A = \Delta\beta = \omega_1 - \omega_2. \qquad (5.35)$$

En las tablas del flujo isentrópico supersónico, para $\mathbf{M}_1 = 5$ y $\mathbf{M}_2 = 10$, hallamos $\omega_1 = 76{,}92°$ y $\omega_2 = 102{,}32°$, respectivamente. Tomando en consideración estos datos $\Delta\beta = -25{,}4°$.

5.22. Resolviendo (5.35) hallamos $\omega_2 = \omega_1 - \Delta\beta$, donde, de acuerdo con el valor de $\mathbf{M}_1 = 3$, el ángulo $\omega_1 = 49{,}76°$ (véanse las tablas del flujo isentrópico supersónico). Así, pues, $\omega_2 = 49{,}76° - 10° = 39{,}76°$. Según este valor, en esas mismas tablas, hallamos el correspondiente número $\mathbf{M}_2 = 2{,}528$ en el punto D. Como vemos el número de Mach ha disminuido, es decir, el flujo transcurre con compresión.

5.23. El ángulo límite de desviación del flujo se determina de la condición

$$\omega_{\text{máx}} = (\pi/2)\left(\sqrt{(k+1)/(k-1)} - 1\right). \qquad (5.36)$$

Para $k = 1{,}4$ $\omega_{\text{máx}} = 130{,}46°$.

El ángulo ω_2, correspondiente al número $M_2 = 10$ prefijado (véanse las tablas del flujo isentrópico supersónico), es igual a 102,23°. Así, pues, la diferencia $\omega_{máx} - \omega_2 = 28,14°$.

5.24. De la ecuación para las características en el plano de la hodógrafa $\beta^1 = \omega + \beta_1$ se deduce que $\beta_{máx} = \omega_{máx} + \beta_1$. De este modo, el ángulo límite de desviación

$$\beta_{máx} - \beta = \Delta\beta_{máx} = \omega_{máx} - \omega. \qquad (5.37)$$

En las tablas del flujo isentrópico, partiendo del número $M = 5$, hallamos $\omega = 76,92°$. De acuerdo con esto $\Delta\beta_{máx} = 130,46° - 76,92° = 53,54°$.

5.25. Con el fin de resolver el problema utilizamos las tablas del flujo isentrópico supersónico. Para $M_1 = 3,2$, en ellas encontramos el ángulo $\omega_1 = 53,47°$, así como las funciones gasodinámicas $\lambda_1 = 2,008$; $\pi(\lambda_1) = 0,02023$; $\varepsilon(\lambda_1) = 0,06165$; $\tau(\lambda_1) = 0,3281$. Seguidamente, con la ecuación (5.35) determinamos $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\beta = 53,47° + 13° = 66,47°$. En esas mismas tablas, según el valor de ω_2, hallamos el número $M_2 = 4,052$ y las correspondientes funciones: $\lambda_2 = 2,144$; $\pi(\lambda_2) = 0,006145$; $\varepsilon(\lambda_2) = 0,02632$; $\tau(\lambda_2) = 0,2333$.

Examinemos cómo se calculan, partiendo de las funciones gasodinámicas halladas, los valores de los parámetros que caracterizan el flujo en el chorro. La presión, temperatura y densidad de remanso se calculan por las fórmulas

$$p_0 = p_1/\pi(\lambda_1); \quad T_0 = T_1/\tau(\lambda_1); \quad \rho_0 = \rho_1/\varepsilon(\lambda_1). \qquad (5.38)$$

Para un flujo isentrópico estos parámetros quedan constantes y, por consiguiente, ellos pueden ser utilizados para calcular los correspondientes valores de la presión, temperatura y densidad, así como la velocidad en la sección prefijada del chorro:

$$p_2 = p_1\pi(\lambda_2)/\pi(\lambda_1) = 3,645\cdot 10^3 \text{ N/m}^2;$$

$$\rho_2 = \rho_1\varepsilon(\lambda_2)/\varepsilon(\lambda_1) = 8,543\cdot 10^{-2} \text{ kg/m}^3;$$

$$T_2 = T_1\tau(\lambda_2)/\tau(\lambda_1) = 148,6 \text{ K}.$$

La velocidad del sonido $a_2 = 20,1\sqrt{T_2} = 245$ m/s y la correspondiente velocidad del flujo de gas $V_2 = a_2M_2 = 990,7$ m/s.

5.26. Durante la salida del chorro de gas, simultáneamente, transcurre su giro acompañado de la expansión, a causa de la cual la presión estática en el chorro se hace igual a la contrapresión (la presión en el medio circundante). Semejante expansión del gas es un proceso isentrópico, caracterizado por la presión constante de remanso p_0, que se determina de la relación $p_0 = p_a/[\pi(\lambda_a)]$. Con el valor conocido de la contrapresión p_H es posible calcular la función gasodinámica

$$\pi(\lambda_H) = p_H/p_0 = p_H\pi(\lambda_a)/p_a. \qquad (5.39)$$

Para las condiciones prefijadas en las tablas del flujo isentrópico supersónico, según el número $M_a = 2,3$, hallamos $\lambda_a = 1,756$; $\pi(\lambda_a) = 7,997\cdot 10^{-2}$; $\omega_a = 34,28°$. De acuerdo con estos datos $\pi(\lambda_H) = 0,01571$. En esas mismas tablas determinamos la función $\lambda_H = 2,042$, el número $M_H = 3,373$ y el ángulo $\omega_H = 56,47°$. Por el valor de este ángulo hallamos el de giro del chorro: $\Delta\beta = \omega_H - \omega_a = 22,19°$.

5.27. Consideremos un flujo plano supersónico alrededor de una superficie convexa (fig. 5.14,*a*). Las regiones no perturbada y perturbada de ese flujo están separadas por una característica (que llamaremos característica de la primera

familia) trazada desde el punto O, es decir, el límite de separación entre los sectores rectilíneo y curvilíneo del perfil, alrededor del cual transcurre la circulación. Esta característica ON es una recta, lo que sigue de su ecuación

$$dy/dx = \lambda_1 = \operatorname{tg}(\beta + \mu) = \operatorname{tg}\mu_\infty, \tag{5.40}$$

en la que $\mu_\infty = \operatorname{arcsen}(1/\mathbf{M}_\infty) = \text{const.}$

Ahora, examinemos la característica de esta familia que sale del punto O_1. En forma diferencial su ecuación tiene la forma (5.33):

$$dy/dx = \lambda_1 = (V_x V_y + a\sqrt{V^2 - a^2})/(V_x^2 - a^2).$$

Para determinar la forma de esta característica consideremos las características en el plano de la hodógrafa (fig. 5.14,b). Tracemos en dicho plano el vector $\vec{V}_\infty$ hasta la intersección en el punto A' con la epicicloide que es la característica de la

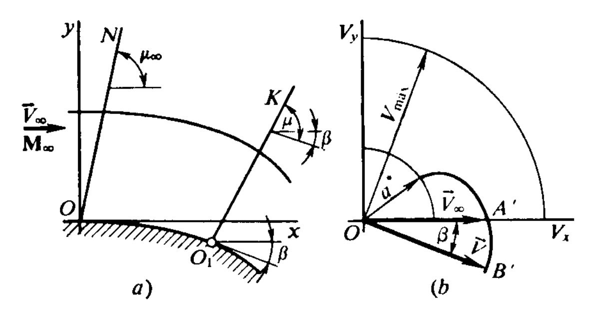


Fig. 5.14. Cálculo de la expansión isentrópica de un gas:
a, plano físico; *b*, plano de la hodógrafa

segunda familia en el plano de la hodógrafa. La epicicloide que pasa por el punto A' (extremo de este vector) es la característica de la segunda familia en el plano de la hodógrafa. Al desplazarse a lo largo de la característica ON en el plano físico nos situaremos en el plano de la hodógrafa en el mismo punto A'. Así, pues, (ya que las velocidades son iguales en valor y sentido) para toda la región perturbada del flujo, la característica de la segunda familia en el plano de la hodógrafa es la misma epicicloide que pasa por el punto A'. En ella podemos hallar el punto B' correspondiente al punto O_1 en el perfil donde la velocidad es $\vec{V}$. Al punto B' corresponde la característica O_1K de la primera familia, a lo largo de la cual la velocidad $\vec{V}$ es, evidentemente, constante en valor y sentido. De aquí se deduce que, de acuerdo con (5.33), esta característica, como todas las demás de esta familia, es una *línea recta*.

5.28. Consideremos la ecuación para las características adjuntas en el plano físico x, y y en el plano de la hodógrafa λ_x, λ_y. Para las características en el plano x, y empleamos las ecuaciones en la forma (5.33). Si en el punto A del flujo conocemos el número local $\mathbf{M}$, la inclinación de la característica será determinada por el ángulo $\mu = \operatorname{arcsen}(1/\mathbf{M})$. De este modo, la forma de la característica en el plano físico no depende de si el flujo es plano o tridimensional axisimétrico, rotacional o potencial, sino que se determina por la distribución de las velocidades (números de Mach, véase la fig. 5.5,a).

Por su sentido físico estas características son líneas de Mach. Pero la forma de las características en el plano de la hodógrafa no es igual para los flujos considerados. En la fig. 5.5,b, se muestran las características en el plano de la hodógrafa

para el flujo *plano potencial*, que son *epicicloides*, cuyas ecuaciones en forma diferencial tienen el aspecto

$$d\lambda_x + \lambda_{1,2} d\lambda_y = 0. \qquad (5.41)$$

Analicemos las características en la fig. 5.5,*c*. Como se ve ellas están desplazadas en el valor del desplazamiento δ_1, δ_2 con relación a las características del flujo plano potencial. Esto está condicionado por ser otra la forma de semejantes características:

$$d\lambda/\lambda \mp \operatorname{tg} \mu d\beta - \varepsilon (dx/y) f_1 (\mu, \beta) \pm [dx/(kR)] (dS/dn) f_2 (\mu, \beta) = 0, \qquad (5.42)$$

donde $f_1 (\mu, \beta)$; $f_2 (\mu, \beta)$ son ciertas funciones del número **M** y de la inclinación del vector velocidad; S, la entropía; R, la constante de los gases.

De acuerdo con la ecuación (5.42) el desplazamiento de la característica con relación a las epicicloides es posible en los sigientes casos: 1) el flujo es plano supersónico ($\varepsilon = 0$) y rotacional (no potencial, $dS/dn \neq 0$); 2) el flujo es tridimensional axisimétrico ($\varepsilon = 1$), ya sea potencial $(dS/dn) = 0$), o bien rotacional (no potencial $dS/dn \neq 0$).

5.29. Como es conocido de aerodinámica de los flujos de gas supersónicos potenciales, durante la circulación plana irrotacional alrededor de una superficie todas las características de una familia son líneas rectas, si por lo menos una de ellas lo es (*AB* en la fig. 5.6,*a*). Con ello hay que tener en cuenta que todo flujo detrás de una onda de choque curvilínea no es potencial (rotacional) y el esquema aceptado del flujo con características rectilíneas es un modelo de cálculo que no toma en consideración el carácter rotacional del movimiento.

A grandes velocidades de circulación se hace necesario tener en cuenta semejante carácter del movimiento detrás de la onda de choque curvilínea y, con ello, utilizar las ecuaciones de las características que se distinguen de las correspondientes ecuaciones para los flujos potenciales. Por esta causa la forma de tales características en el plano del flujo rotacional es distinta que en el plano de un flujo potencial, aunque en el flujo rotacional puede existir una característica en forma de una recta (*CD* en la fig. 5.6,*b*) que es el límite entre el flujo junto a la punta cuneiforme y el flujo en la pared curvilínea.

5.30. La solución de este problema está, ante todo, ligada con la determinación de la velocidad máxima del flujo:

$$V^2_{\text{máx}} = \{(2a^2_\infty)/[(k-1) V^2_\infty] + 1\} V^2_\infty. \qquad (5.43)$$

A la temperatura $T_\infty = 288$ K y con el valor de $k = 1{,}4$ la velocidad del sonido $a_\infty = 340{,}2$ m/s; por lo tanto, $V^2_{\text{máx}} = 2{,}029 V^2_\infty$. Según este valor de $V^2_{\text{máx}}$, así como por las velocidades prefijadas V_∞, V_A y V_B, hallamos los números **M** locales en los puntos A y B:

$$\mathbf{M}_A = \{[(k-1)/2][(V^2_{\text{máx}}/V^2_\infty)(V^2_\infty/V^2_A) - 1]\}^{1/2} = 2{,}526; \quad M_B = 2{,}678. \qquad (5.44)$$

En correspondencia, los ángulos de inclinación de las líneas de Mach $\mu_A = \arcsin (1/\mathbf{M}_A) = 23{,}32°$; $\mu_B = \arcsin (1/\mathbf{M}_B) = 21{,}93°$.

Así, pues, el ángulo de inclinación de la característica de la primera familia, que sale del punto B, $\beta_B + \mu_B = 53{,}93°$ y el respectivo valor del ángulo para la característica de la segunda familia, trazada del punto A, $\beta_A - \mu_A = 6{,}68°$. Bajo estos ángulos están trazados los segmentos de rectas, es decir, los elementos de las características, por los puntos A y B, respectivamente, hasta la intersección en el punto C (véase la fig. 5.7). Para determinar las coordenadas x_C, y_C de éste

hay que resolver un sistema de ecuaciones para las características de las familias primera y segunda que pasan, respectivamente, por los puntos B y A:

$$\left.\begin{aligned} y_C-y_B&=(x_C-x_B)\,\mathrm{tg}\,(\beta_B+\mu_B);\\ y_C-y_A&=(x_C-x_A)\,\mathrm{tg}\,(\beta_A-\mu_A). \end{aligned}\right\} \quad (5.45)$$

Poniendo en (5.45) los datos y resolviendo el sistema obtenido, hallamos $x_C =$ $= 13{,}78$; $y_C = 10{,}44$.

Flujo plano. Para calcular la velocidad en el punto C hagamos uso de la ecuación para las características en el plano de la hodógrafa:

$$\Delta\omega_B - \Delta\beta_B = 0 \text{ (primera familia)}; \quad (5.46)$$

$$\Delta\omega_A + \Delta\beta_A = 0 \text{ (segunda familia)}. \quad (5.47)$$

Realizando en (5.47) la sustitución

$$\left.\begin{aligned} \Delta\omega_A&=\omega_C-\omega_A=\Delta\omega_B+\omega_B-\omega_A;\\ \Delta\beta_A&=\beta_C-\beta_A=\Delta\beta_B+\beta_B-\beta_A, \end{aligned}\right\} \quad (5.48)$$

hallamos $\Delta\omega_B + \omega_B - \omega_A + \Delta\beta_B + \beta_B - \beta_A = 0$.

Resolviendo esta ecuación junto con (5.46) respecto de $\Delta\omega_B$ y $\Delta\beta_B$, obtenemos

$$\Delta\omega_B = \omega_C - \omega_B = 0{,}5\,[(\beta_A - \beta_B) + (\omega_A - \omega_B)];$$
$$\Delta\beta_B = \Delta\omega_B = \beta_C - \beta_B = 0{,}5\,[(\beta_A - \beta_B) + (\omega_A - \omega_B)].$$

En las tablas del flujo isentrópico supersónico, a partir de $\mathbf{M}_A = 2{,}526$ y $\mathbf{M}_B = 2{,}678$, hallamos $\omega_A = 39{,}79°$ y $\omega_B = 43{,}13°$, respectivamente. Teniendo en cuenta estos datos, $\Delta\omega_B = -2{,}67°$, de donde $\omega_C = \omega_B + \Delta\omega_B = 40{,}46°$.

En las indicadas tablas, por este valor, hallamos el número $\mathbf{M}_C = 2{,}558$. El ángulo de giro del flujo $\Delta\beta_B$ se determina según el valor de $\Delta\omega_B$: $\Delta\beta_B = \Delta\omega_B =$ $= \beta_C - \beta_B = -2{,}67°$. De acuerdo con este valor, el ángulo de inclinación del vector velocidad en el punto C: $\beta_C = \beta_B + \Delta\beta_B = 29{,}33°$.

Flujo tridimensional axisimétrico. En este caso, para las características en el plano de la hodógrafa empleamos el sistema

$$\Delta\omega_B - \Delta\beta_B - (\Delta x_B/y_B)l_B = 0 \text{ (primera familia)}; \quad (5.49)$$

$$\Delta\omega_A + \Delta\beta_A - (\Delta x_A/y_A)\,m_A = 0 \text{ (segunda familia)}, \quad (5.50)$$

donde

$$l_B = \mathrm{sen}\,\beta_B\,\mathrm{sen}\,\mu_B/\cos\,(\beta_B + \mu_B); \quad (5.51)$$

$$m_A = \mathrm{sen}\,\beta_A\,\mathrm{sen}\,\mu_A/\cos\,(\beta_A - \mu_A). \quad (5.52)$$

Realizando en (5.50) la sustitución de acuerdo con (5.48), obtenemos

$$\Delta\omega_B + \Delta\beta_B + \omega_B - \omega_A + \beta_B - \beta_A - (\Delta x_A/y_A)\,m_A = 0. \quad (5.53)$$

Resolviendo (5.53) junto con (5.49), hallamos

$$\Delta\beta_B = 0{,}5\,\{[(\Delta x_A/y_A)\,m_A - (\Delta x_B/y_B)\,l_B] - (\omega_B - \omega_A) - (\beta_B - \beta_A)\}. \quad (5.54)$$

Por este valor de $\Delta\beta_B$, determinamos

$$\Delta\omega_B = \Delta\beta_B + (\Delta x_B/y_B)\,l_B. \quad (5.55)$$

Calculemos los parámetros por separado que entran en las relaciones obtenidas:

$$\Delta x_A = x_C - x_A = 3{,}78; \quad \Delta x_B = x_C - x_B = 1{,}78; \quad m_A = 0{,}1993;$$
$$l_B = 0{,}336; \quad \Delta\beta_B = \beta_C - \beta_B = -2{,}654°.$$

De acuerdo con este valor de $\Delta\beta_B$ el ángulo $\beta_C = \beta_B + \Delta\beta_B = 29{,}34°$. A continuación, calculamos $\Delta\omega_B = 1{,}629°$; $\omega_C = \omega_B + \Delta\omega_B = 44{,}76°$. En las tablas del flujo isentrópico supersónico, según el valor del ángulo ω_C, hallamos en el punto C el número $\mathbf{M}_C = 2{,}753$.

5.31. Flujo plano. Para determinar la velocidad en el punto C hay que hacer uso del siguiente sistema de ecuaciones para las características:

$$\Delta\omega_B - \Delta\beta_B - [\Delta x_B/(kp_{02B})]\,(\Delta p_{02}/\Delta n)\,c_B = 0 \text{ (primera familia)}; \quad (5.56)$$
$$\Delta\omega_A + \Delta\beta_A + [\Delta x_A/(kp_{02B})]\,(\Delta p_{02}/\Delta n)\,t_A = 0 \text{ (segunda familia)}, \quad (5.57)$$

donde

$$\Delta p_{02} = p_{02A} - p_{02B}; \quad (5.58)$$
$$c_B = \operatorname{sen}^2\mu_B \cos\mu_B/\cos(\beta_B + \mu_B); \quad (5.59)$$
$$t_A = \operatorname{sen}^2\mu_A \cos\mu_A/\cos(\beta_A - \mu_A); \quad (5.60)$$
$$\Delta n = (AC)\operatorname{sen}\mu_A + (BC)\operatorname{sen}\mu_B. \quad (5.61)$$

Sustituyendo en (5.57) los valores de $\Delta\omega_A$ y $\Delta\beta_A$ de acuerdo con (5.48), obtenemos la ecuación

$$\Delta\omega_B + \Delta\beta_B + \omega_B - \omega_A + \beta_B - \beta_A + [\Delta x_A/(kp_{02B})]\,(\Delta p_{02}/(\Delta n)\,t_A = 0) \quad (5.62)$$

Resolviendo las ecuaciones (5.62) y (5.56), hallamos

$$\Delta\beta_B = (^1/_2)\,\{-[1/(kp_{02B})]\,(\Delta p_{02}/\Delta n)\,(\Delta x_A t_A + \Delta x_B c_B) - (\omega_B - \omega_A) - (\beta_B - \beta_A)\}. \quad (5.63)$$

A esta solución corresponde el valor de

$$\Delta\omega_B = \Delta\beta_B + [\Delta x_B/(kp_{02B})]\,(\Delta p_{02}/\Delta n)\,c_B. \quad (5.64)$$

Realicemos los cálculos necesarios, haciendo uso de los datos obtenidos al resolver el problema 5.30:

$$t_A = 0{,}1449; \quad c_B = 0{,}2197;$$
$$\Delta p_{02}/p_{02B} = (p_{02A} - p_{02B})/p_{02B} = (0{,}8p_0 - 0{,}77p_0)/(0{,}77p_0) = 0{,}03896;$$
$$AC = (x_C - x_A)/\cos(\beta_A - \mu_A) = 3{,}806;$$
$$BC = (x_C - x_B)/\cos(\beta_B + \mu_B) = 3{,}023; \quad \Delta n = 2{,}636; \quad \Delta\beta_B = -2{,}954°.$$

Por este valor de $\Delta\beta_B$ hallamos el ángulo $\beta_C = \beta_B + \Delta\beta_B = 29{,}05°$. Seguidamente, calculamos $\Delta\omega_B = -2{,}718°$.

Teniendo en cuenta este valor en el punto C determinamos el ángulo $\omega_C = \omega_B + \Delta\omega_B = 40{,}41°$. En las tablas del flujo isentrópico supersónico, a este ángulo corresponde el número $\mathbf{M}_C = 2{,}556$.

Flujo tridimensional axisimétrico. Empleemos las siguientes ecuaciones para las características:

$$\Delta\omega_B - \Delta\beta_B - (\Delta x_B/y_B)\, l_B - [\Delta x_B/(kp_{02\,B})]\,(\Delta p_{02}/\Delta n)\, c_B = 0; \qquad (5.65)$$

$$\Delta\omega_A + \Delta\beta_A - (\Delta x_A/y_A)\, m_A + [\Delta x_A/(kp_{02\,B})]\,(\Delta p_{02}/\Delta n)\, t_A = 0. \qquad (5.66)$$

Sustituyendo en (5.66), de acuerdo con (5.48), los valores de $\Delta\omega_A$ y $\Delta\beta_A$, obtenemos

$$\Delta\omega_B + \Delta\beta_B + \omega_B - \omega_A + \beta_B - \beta_A - (\Delta x_A/y_A)\, m_A + {} + [\Delta x_A/(kp_{02\,B})]\,(\Delta p_{02}/\Delta n)\, t_A = 0, \qquad (5.67)$$

con la particularidad de que en (5.65) y (5.66) los valores de l_B y m_A se calculan con (5.51) y (5.52). Resolviendo conjuntamente las ecuaciones (5.65) y (5.67), hallamos

$$\Delta\beta_B = (^1/_2)\,\{-[1/(kp_{02\,B})]\,(\Delta p_{02}/\Delta n)\,(\Delta x_A t_A + \Delta x_B c_B) + {} + [(\Delta x_A/y_A)\, m_A - (\Delta x_B/y_B)\, l_B] - (\omega_B - \omega_A) - (\beta_B - \beta_A)\}. \qquad (5.68)$$

Según este valor de $\Delta\beta_B$ determinamos

$$\Delta\omega_B = \Delta\beta_B + (\Delta x_B/y_B)\, l_B + [\Delta x_B/(kp_{02\,B})]\,(\Delta p_{02}/\Delta n)\, c_B. \qquad (5.69)$$

Empleando la solución del problema (5.30) calculamos el incremento del ángulo: $\Delta\beta_B = -2{,}952°$.

Tomando esto en consideración, en el punto C la inclinación del vector velocidad $\beta_C = \beta_B + \Delta\beta_B = 29{,}05°$.

A continuación, hallamos $\Delta\omega_B = 1{,}567°$ y determinamos el ángulo $\omega_C = \omega_B + \Delta\omega_B = 44{,}697°$.

En las tablas del flujo isentrópico supersónico, de acuerdo con este valor de ω_C, hallamos el número $\mathbf{M}_C = 2{,}75$ para el punto C.

Comparando los valores obtenidos de β_C y $\mathbf{M}_C$ con los correspondientes valores determinados al resolver el problema 5.30, llegamos a la conclusión de que el carácter rotacional del movimiento del gas provoca cierta disminución del ángulo de inclinación del vector velocidad y del número local **M**.

5.32. Al principio determinamos el número **M** en el punto D. Con este fin empleamos la fórmula (5.44). En la solución del problema 5.30 fue obtenido el valor de $V^2_{\text{máx}}/V^2_\infty = 2{,}029$ que al emplearlo nos permite determinar $\mathbf{M}_D = 2{,}526$. El correspondiente ángulo de Mach $\mu_D = \operatorname{arcsen}(1/\mathbf{M}_D) = 23{,}32°$. El ángulo de inclinación del elemento de la característica de la segunda familia, trazado desde el punto D, $\beta_D - \mu_D = -18{,}32°$. Esta característica (véase la fig. 5.8) corta la pared en el punto B, cuyas coordenadas x_B, y_B se determinan resolviendo las ecuaciones de la característica

$$y_B - y_D = (x_B - x_D)\operatorname{tg}(\beta_D - \mu_D)$$

y de la generatriz del sólido de revolución dado

$$y_B = y_m\,(x_B/x_m)\,[2 - (x_B/x_m)].$$

Poniendo aquí los datos y resolviendo el sistema de ecuaciones obtenido, hallamos $x_B = 5{,}117$; $y_B = 0{,}7616$.

Ahora, determinemos el correspondiente ángulo de inclinación del vector velocidad, igual al ángulo de inclinación de la tangente a la generatriz en el punto B. Para ello, calculamos primero la derivada: $dy/dx = (2y_m/x_m)\,(1 - x/x_m)$. Intro-

duciendo aquí el valor de $x = x_B$, obtenemos $(dy/dx)_B = \text{tg}\,\beta_B = 0{,}09765$; $\beta_B = 5{,}578°$.

Con el fin de determinar la velocidad en el punto B empleamos la ecuación para la característica de la segunda familia en el plano de la hodógrafa

$$\Delta\omega_D = -\Delta\beta_D + (\Delta x_D/y_D)\, m_D - [\Delta x_D/(kp_{02D})]\,(\Delta p_{02}/\Delta n)\, t_D, \qquad (5.70)$$

donde $\Delta\omega_D = \omega_B - \omega_D$; $\Delta\beta_D = \beta_B - \beta_D$; $\Delta x_D = x_B - x_D$; $m_D = \text{sen}\,\beta_D \times \text{sen}\,\mu_D/\cos(\beta_D - \mu_D)$; $t_D = \text{sen}^2\,\mu_D \cos\mu_D/\cos(\beta_D - \mu_D)$; $(1/p_{02D})(\Delta p_{02}/\Delta n) = (p_{02D} - p_{02B})\cos(\beta_D - \mu_D)/[p_{02D}(x_D - x_B)\,\text{sen}\,\mu_D]$.

Realizamos los cálculos necesarios: $\Delta x_D = 0{,}117$; $\Delta\beta_D = 0{,}578°$; $m_D = 0{,}03635$; $t_D = 0{,}1516$; $(1/p_{02D})(\Delta p_{02}/\Delta n) = -0{,}7685$; $\Delta\omega_D = -0{,}8313°$.

Conociendo $\mathbf{M}_D = 2{,}526$, en las tablas del flujo isentrópico supersónico, hallamos $\omega_D = 39{,}73°$. Por el valor de $\Delta\omega_D$ calculamos en el punto B el ángulo $\omega_B = \omega_D + \Delta\omega_D = 38{,}9°$.

Conociendo ω_B, en las ya indicadas tablas, determinamos el número $\mathbf{M}_B = 2{,}491$.

Ahora calculamos el número **M** sin tomar en consideración el carácter rotacional de movimiento del gas. En tal caso

$$\Delta\omega_D = -\Delta\beta_D + (\Delta x_D/y_D)\, m_D = -0{,}2734,$$

en tanto que el correspondiente ángulo $\omega_B = \omega_D + \Delta\omega_D = 39{,}46°$.

En dichas tablas, conociendo ω_B, hallamos $\mathbf{M}_B = 2{,}515$. Como vemos este número **M**, hallado sin tener en cuenta el carácter rotacional de movimiento del gas, es mayor que en el flujo no isentrópico.

5.33. Los cálculos necesarios se pueden empezar determinando el ángulo β_C de inclinación del vector velocidad detrás de la onda de choque oblicua en el punto S:

$$\text{tg}\,\beta_{CS} = \text{ctg}\,\theta_{CS}\,(\mathbf{M}_\infty^2\,\text{sen}^2\,\theta_{CS} - 1)\,\{1 + [(k+1)/2 - \text{sen}^2\,\theta_{CS}]\,\mathbf{M}_\infty^2\}^{-1}. \qquad (5.71)$$

Teniendo en cuenta que $\theta_{CS} = 30°$ y $\mathbf{M}_\infty = 1020/340 = 3$, hallamos $\text{tg}\,\beta_{CS} = 0{,}2267$ y el correspondiente ángulo $\beta_{CS} = 12{,}77°$. Ahora, determinamos los parámetros relativos del gas detrás de la onda de choque de (4.29), (4.33), (4.38) y (4.22), así como el número **M** detrás de ella:

$$\mathbf{M}_{2S} = \{[2/(k+1)]\,\text{sen}^{-2}\,(\theta_{CS} - \beta_{CS})\,[(\rho_2/\rho_1)_S - (k-1)/(k+1)]^{-1}\}^{1/2}. \qquad (5.72)$$

Realicemos los cálculos: $(\rho_2/\rho_1)_S = 1{,}862$; $p_2/p_1 = 2{,}452$; $(V_2^2/V_\infty^2)_S = 0{,}8221$; $V_{2S} = \sqrt{0{,}8221\,V_\infty^2} = 924{,}8$ m/s; $\mathbf{M}_{2S} = 2{,}367$; $(p_{02}/p_0)_S = 0{,}9355$.

Para efectuar los posteriores cálculos son necesarias las derivadas en el punto S:

$$(d\theta_C/d\beta_C)_S = (\rho_2/\rho_1)_S\,\{2\cos^2(\theta_C - \beta_C)_S\,[1 - (\rho_2/\rho_1)_S\,(k-1)/(k+1)] - \cos^2(\theta_C - \beta_C)_S/\cos^2\theta_{CS} + (\rho_2/\rho_1)_S\}^{-1} = 0{,}9779;$$

$$[d(\rho_2/\rho_1)/d\beta_C]_S = (\rho_2/\rho_1)_S\,[\text{tg}\,\theta_{CS}\cos^2(\theta_C - \beta_C)_S]^{-1} \times \{(d\theta_C/d\beta_C)_S\,[\cos^2(\theta_C - \beta_C)_S/\cos^2\theta_{CS} - (\rho_2/\rho_1)_S] + (\rho_2/\rho_1)_S\} = 4{,}35;$$

$$(d\mathbf{M}_2/d\beta_C)_S = -\mathbf{M}_{2S}\,\{\text{ctg}\,(\theta_C - \beta_C)_S\,[(d\theta_C/\beta_C)_S - 1] + \mathbf{M}_{2S}^2[(k+1)/4]\,\text{sen}^2\,(\theta_C - \beta_C)_S\,[d(\rho_2/\rho_1)/d\beta_C]_S\} = -3{,}206.$$

Además, calculamos las derivadas:

$$(d\omega_2/d\mathbf{M}_2)_S = \sqrt{\mathbf{M}_{2S}^2 - 1}\,\{\mathbf{M}_{2S}\,[1 + \mathbf{M}_{2S}^2\,(k-1)/2]\}^{-1} = 0{,}4273;$$

$$(d\omega_2/d\beta_C)_S = (d\mathbf{M}_2/d\beta_C)_S\,(d\omega_2/d\mathbf{M}_2)_S = -1{,}37.$$

11—01650

Ahora determinemos el número M en el punto F, para lo que hacemos uso de (5.44). En correspondencia con (5.43) $V^2_{máx}/V^2_\infty = 1{,}556$. Teniendo esto en cuenta $\mathrm{M}_F = 2{,}508$. En las tablas del flujo isentrópico supersónico, según este valor de M_F, determinamos $\omega_F = 39{,}31°$.

A continuación podemos hallar el ángulo de inclinación del flujo en el punto H. Con este fin empleamos la fórmula para la variación del ángulo ω al pasar a lo largo de la característica del punto F al H:

$$\Delta\omega_F = \omega_{2H} - \omega_F = \omega_{2S} + (d\omega_2/d\beta_C)_S\,\Delta\beta_F - \omega_F, \qquad (5.73)$$

donde $\Delta\beta_F = \beta_H - \beta_F$.

Simultáneamente hacemos uso de la ecuación para la característica de la primera familia en el plano de la hodógrafa

$$\Delta\omega_F - \Delta\beta_F - l_F\,(\Delta x_F/y_F) - [\Delta x_F/(kp_{02F})]\,(\Delta p_{02}/\Delta n)\,c_F = 0, \qquad (5.74)$$

donde $\Delta x_F = x_H - x_F$;

$$l_F = \text{sen}\,\beta_F\,\text{sen}\,\mu_F/\cos(\beta_F + \mu_F);\quad c_F = \text{sen}^2\,\mu_F\cos\mu_F/\cos(\beta_F + \mu_F); \qquad (5.75)$$

$$(1/p_{02F})(\Delta p_{02}/\Delta n) = (p_{02H} - p_{02F})\cos(\beta_F + \mu_F)/[p_{02F}(x_H - x_F)\,\text{sen}\,\mu_F]. \qquad (5.76)$$

Resolviendo las ecuaciones (5.73) y (5.74) respecto de $\Delta\beta_F$, obtenemos

$$\Delta\beta_F = [(d\omega_2)/d\beta_C)_S - 1]^{-1}\,[\omega_F - \omega_{2S} + (\Delta x_F/y_F)\,l_F + {} + \Delta x_F/(kp_{02F})\,(\Delta p_{02}/\Delta n)\,c_F]. \qquad (5.77)$$

Con la primera aproximación, despreciando la variación de la entropía (o bien, lo que es lo mismo, la presión de remanso detrás de la onda de choque), de (5.77) determinamos el valor de $\Delta\beta_F$. Calculando previamente $l_F = 0{,}09242$, hallamos $\Delta\beta_F = -1{,}534°$.

Ahora, tomemos la variación del ángulo β_C, a lo largo del sector de la onda de choque SH, igual al cambio del valor que le corresponde a lo largo de la característica de la primera familia FH (es decir, $\Delta\beta_{SH} = \Delta\beta_{FH} = \beta_H - \beta_F$). Entonces, con la primera aproximación, es posible determinar el número M en el punto H:

$$\mathrm{M}_{2H} = \mathrm{M}_{2S} + (d\mathrm{M}_2/d\beta_C)_S\,\Delta\beta_{SH},$$

donde $\mathrm{M}_{2S} = \mathrm{M}_2 = 2{,}367$; $(d\mathrm{M}_2/d\beta_C)_S = -3{,}206$; $\Delta\beta_{SH} = \Delta\beta_{FH} = -0{,}02677$ rad.

Poniendo estos datos obtenemos $\mathrm{M}_{2H} = 2{,}453$.

Tomamos la presión de remanso p_{02F} en (5.76) igual al correspondiente valor de ella en el punto S, es decir, $p_{02F} = 0{,}9355p_0$ y el valor de p_{02H} en el punto H se determina con los números M_{2H} y $\mathrm{M}_\infty = 3$. Para ello hacemos uso de las ecuaciones (4.29), (4.33) y

$$\mathrm{M}^2_{2H}/\mathrm{M}^2_\infty = (p_1/p_2)_H\,(\rho_2/\rho_1)_H\,[\cos^2\theta_{CH} + (\rho_1/\rho_2)^2_H\,\text{sen}^2\,\theta_{CH}]. \qquad (5.78)$$

Resolviendo las tres ecuaciones (4.29), (4.33) y (5.78) para el punto H determinamos el ángulo precisado de la onda de choque $\theta_{CH} = 28{,}14°$ y, a continuación, calculamos las razones entre las presiones y las densidades: $(p_2/p_1)_H = 2{,}169$; $(\rho_2/\rho_1)_H = 1{,}715$.

De acuerdo con (4.38) el cociente de las presiones de remanso constituye $(p_{02}/p_0)_H = 0{,}9544$.

Más adelante calculamos: $(1/p_{02F})\,(\Delta p_{02}/\Delta n) = 0{,}08341$; $c_F = 0{,}1773$; $\Delta\beta_{FH} = = \beta_H - \beta_F = -1{,}661°$.

El respectivo ángulo de inclinación del flujo detrás de la onda de choque en el punto H es igual a $\beta_{CH} = \beta_F + \Delta\beta_{FH} = 9{,}339°$. Según este valor precisamos el ángulo de la onda, para lo que utilizamos la fórmula (5.71):

$$\operatorname{tg} 9{,}339° = \operatorname{ctg} \theta_{CH} (3^2 \operatorname{sen}^2 \theta_{CH} - 1) \{1 + [(1{,}4 + 1)/2 - \operatorname{sen}^2 \theta_{CH}] \, 3^2\}^{-1}.$$

Resolviendo esta ecuación, hallamos $\theta_{CH} = 26{,}79°$.

5.34. Primero, por los valores de $p_\infty = 1 \cdot 10^5$ Pa y $M_\infty = 3$, determinamos la presión en la antecámara del túnel (presión de remanso):

$$p_0 = p_\infty [1 + (M_\infty^2)(k-1)/2]^{k/(k-1)} =$$
$$= 10^5 [1 + (3^2)(1{,}4-1)/2]^{1{,}4/(1{,}4-1)} = 3{,}674 \cdot 10^6 \text{ Pa}.$$

Con la ecuación de estado hallamos la densidad de remanso:

$$\rho_0 = p/(RT_0) = 3{,}674 \cdot 10^6/(287 \cdot 290) = 44{,}14 \text{ kg/m}^3.$$

La densidad y la temperatura del flujo en la salida de la tobera respectivamente serán

$$\rho_\infty = \rho_0 [1 + (M_\infty^2)(k-1)/2]^{-1/(k-1)} = 3{,}365 \text{ kg/m}^3;$$
$$T_\infty = T_0 [1 + (M_\infty^2)(k-1)/2]^{-1} = 103{,}6 \text{ K}.$$

Ahora, determinamos el número $\mathrm{Re}_\infty = \rho_\infty V_\infty l/\mu_\infty$, donde $l = 0{,}4$ m es la anchura de la tobera. Suponiendo que a temperatura normal $T_H = 288$ K la velocidad del sonido en el aire $a_H = 340$ m/s, hallamos el correspondiente valor de esta velocidad en la salida de la tobera: $a_\infty = 20{,}1 \sqrt{T_\infty} = 204{,}6$ m/s. Así, pues, la velocidad del flujo $V_\infty = a_\infty M_\infty = 613{,}8$ m/s.

Tomando en consideración que a la temperatura $T_H = 288$ K la viscosidad dinámica $\mu_H = 1{,}79 \cdot 10^{-5}$ Pa·s, calculamos los correspondientes valores de este coeficiente para las condiciones existentes en la salida de la tobera: $\mu_\infty = \mu_H (T_\infty/T_H)^n = 8{,}2298 \cdot 10^{-4}$ Pa·s. De acuerdo con los datos obtenidos el número $\mathrm{Re}_\infty = 1{,}004 \cdot 10^6$.

El área de la sección crítica de la tobera $S^* = S\rho_\infty V_\infty/(\rho^* a^*)$, donde $\rho_\infty V_\infty/(\rho^* a^*) = q$ es el caudal relativo específico que es función del número M_∞. En las tablas del flujo isentrópico supersónico, según el valor de $M_\infty = 3$, hallamos $q = 0{,}2361$ y calculamos $S^* = Sq = 0{,}03778$ m².

Representemos en una hoja de papel (fig. 5.15) el contorno de la tobera en forma de una recta que coincide con el radio de una circunferencia $r_A = S\, 360°/(2\pi 2\gamma l)$. De acuerdo con los datos experimentales, tomamos el ángulo de divergencia de la tobera $2\gamma = 40°$. En correspondencia con esto $r_A = 0{,}573$ m. De modo análogo calculamos la distancia hasta la sección crítica: $r^* = S^*\, 360°/(2\pi 2\gamma l) = 0{,}1353$ m.

Desde el punto O, como desde el centro, tracemos en el semiplano superior siete rectas radiales situadas entre sí cerca (fig. 5.16). De acuerdo con lo dicho el pequeño ángulo entre las rectas vecinas $\Delta\gamma = 2{,}5°$. Hallemos ahora la intersección de estas rectas con la característica de la segunda familia trazada desde el punto A. Esta característica tiene la forma de una quebrada. Su elemento en forma de la recta AA_1 está representado en la figura bajo un ángulo $\mu_\infty = -\arcsin(1/M_\infty) = -19{,}47°$. Para las posteriores construcciones empleamos la ecuación para las características de la segunda familia en el plano de la hodógrafa $\Delta\omega = -\Delta\beta$. Como $\Delta\beta = \Delta\gamma$ sustituimos $\Delta\omega = -\Delta\gamma$.

Considerando los puntos A y A_1, hallamos $\Delta\omega_A = \omega_{A1} - \Delta\omega_A$, de donde para el punto A_1 el ángulo $\omega_{A1} = \omega_A + \Delta\omega_A = \omega_A - \Delta\gamma$.

En las tablas del flujo isentrópico supersónico, según el valor de $M_\infty = 3$, hallamos $\omega_A = 49{,}757°$ y calculamos $\omega_{A1} = 49{,}757° - 2{,}5° = 47{,}257°$. A conti-

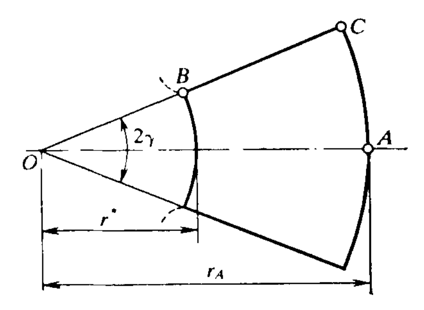


Fig. 5.15. Tobera supersónica no perfilada

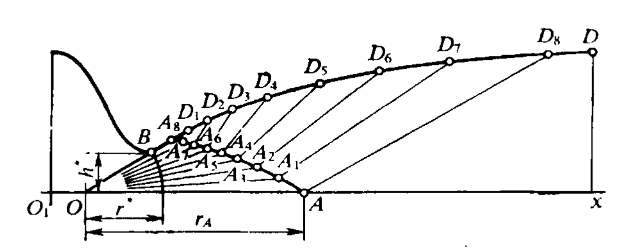


Fig. 5.16. Esquema del fuselado del perfil de una tobera supersónica

nuación, en la tabla determinamos el correspondiente número $M_{A1} = 2{,}87$ y el ángulo $\mu_{A1} = 20{,}39°$. Bajo este ángulo trazamos hacia la recta OA_1 una recta hasta su intersección con el radio vecino en el punto A_2, etc. Los posteriores cálculos y construcciones (fig. 5.16) se realizan por analogía con lo anterior. Los resultados de dichos cálculos se ofrecen en la tabla 5.1.

Tabla 5.1

Puntos	ω, grados	M	μ, grados	Puntos	ω, grados	M	μ, grados
A	49,757	3	19,47	A_4	39,757	2,527	23,31
A_1	47,257	2,864	20,43	A_5	37,257	2,421	24,40
A_2	44,757	2,753	21,30	A_6	34,757	2,319	25,56
A_3	42,257	2,638	22,28	A_7	32,257	2,220	26,77

Después de obtener los valores de ω, **M** y μ para el punto A_7 en la última línea radial intermedia, desde ella trazamos, bajo el ángulo $\mu_7 = -26{,}77°$ hacia dicha línea, una recta hasta su intersección con el contorno rectilíneo superior de la tobera en el punto A_8. Tras este punto el contorno de la tobera, que debe asegurar la obtención en la salida de un flujo uniforme paralelo, se construye del modo siguiente. El sector inicial de este contorno tras el punto A_8 coincide con el sentido de la velocidad en la pared y es una recta que continúa el contorno OA_8 hasta su intersección en el punto D_1 con la característica de la primera familia A_7D_1, trazada bajo el ángulo $\mu = 26{,}77°$ a la recta OA_7. Detrás del punto D_1 el elemento del contorno coincide con el sentido de la velocidad en el punto A_7. Obtenemos dicho elemento trazando desde el punto D_1 una recta paralela al rayo OA_7 hasta su intersección en el punto D_2 con la característica de la primera familia A_6D_2.

De manera análoga realizamos la construcción de los demás sectores del contorno. Tras el punto D_8, que yace en la característica AD_8, el sector del contorno es paralelo al eje de la tobera. El contorno que coincide con la línea A_8D_8, construido en forma de una curva uniforme, asegura la obtención en la salida de la tobera un flujo paralelo supersónico con el número M_∞ prefijado.

Capítulo 6

Un perfil y un ala de envergadura finita en el flujo de un fluido incompresible

En este capítulo se aducen problemas y preguntas relacionados con la aplicación de la teoría aerodinámica al cálculo de la circulación alrededor del perfil del ala, así como del ala de envergadura finita con el flujo de un fluido incompresible. Con ello, al considerar la circulación alrededor del perfil podemos adoptarlo como un sector elemental de una superficie sustentadora que pertenece a un ala de envergadura infinita. Así, pues, la teoría de circulación alrededor de un perfil es la base de la aerodinámica del ala de envergadura infinita.

Al calcular la circulación alrededor de un perfil y de un ala de envergadura finita con el flujo de un fluido incompresible se supone que en caso de semejante circulación se forma un flujo perturbado plano, lo que, claro está, es una idealización, ya que durante la circulación alrededor de perfiles, pertenecientes a las alas de envergadura finita, y cuando tiene lugar la circulación directa alrededor de alas de envergadura finita surge un flujo tridimensional. Pero las características obtenidas constituyen uno de los parámetros fundamentales que se emplean al realizar el cálculo de las características análogas de alas reales. Además, son posibles casos cuando en sectores aislados de las alas la circulación tiene, prácticamente, carácter plano.

Un importante problema en la aerodinámica del perfil del ala, alrededor de la cual circula un flujo uniforme incompresible, es el cálculo de los coeficientes aerodinámicos de perfiles delgados (agudos) débilmente curvados, dispuestos bajo pequeño ángulo de ataque. Alrededor de tales perfiles el flujo es poco perturbado, por lo que la circulación alrededor del perfil puede ser calculada sustituyendo éste por un sistema de torbellinos distribuidos continuamente a lo largo de la línea media del perfil. El método basado en la sustitución del perfil por un sistema de torbellinos supone que las dimensiones transversales del perfil son pequeñas en comparación con la longitud de la cuerda del perfil, es decir, de hecho se examina la circulación no alrededor del propio perfil, sino de su línea central.

Un método eficaz para estudiar las propiedades del flujo plano es el método de la variable compleja que, en aerodinámica, encuentra extensa aplicación. Esta relación entre aerodinámica del flujo plano paralelo de un fluido incompresible y la teoría bien elaborada de las funciones de la variable compleja permite resolver exitosamente también problemas relacionados con el carácter tridimensional del flujo.

Singular importancia adquirió este método en la teoría del ala, ya que permite determinar el potencial complejo del flujo y la fuerza resultante de presión de éste sobre el sólido.

Hay que indicar que el cálculo directo del potencial complejo del flujo presenta considerables complicaciones. Por esta causa, en muchos problemas el potencial complejo se halla por vía indirecta, mediante el método de las transformaciones conformes, que tienen gran importancia en la teoría del ala, alrededor de la cual circula el flujo plano paralelo de un fluido no viscoso. Haciendo uso de este método se pueden determinar las características geométricas y aerodinámicas de los perfiles obtenidos con ayuda de la representación conforme de un círculo por medio de funciones unívocas (aplicaciones) elegidas especialmente para esto. Para comprender la esencia de semejante transformación, aquí se ofrecen problemas sobre la transformación del círculo en un segmento y de éste en una circunferencia.

La base de la teoría moderna del ala es el *teorema de Zhukovski* sobre la fuerza sustentadora (sustentación). Al investigar la circulación de un fluido no viscoso alrededor de un sólido, N.E. Zhukovski propuso buscar la fuente del influjo de las

fuerzas sobre el sólido en el surgimiento de la circulación de la velocidad, condicionada por la presencia de un torbellino. El científico obtuvo la fórmula para determinar la sustentación cuando tiene lugar la circulación adherida con un fluido incompresible alrededor de un contorno arbitrario. *M.V. Keldish* y *F.I. Frankl* demostraron que la fórmula de Zhukovski es también justa para un gas compresible a velocidades subsónicas del flujo.

La idea de Zhukovski de sustituir el ala por uno o varios torbellinos adyacentes, ligados inmóvilmente con el ala, que crean en el flujo la misma circulación de velocidad por cualquier contorno cerrado que crea en realidad el ala, permite resolver muchos problemas prácticos de hidrodinámica del ala de envergadura infinita.

Un eficaz método para resolver problemas de hidrodinámica acerca de la circulación alrededor de alas de envergadura finita fue propuesto por el científico ruso *S.A. Chapliguin* y consiste en sustituir las mencionadas alas por un sistema de torbellinos en forma de herradura cuadrada (en П). La particularidad específica de la circulación alrededor de alas de envergadura finita es la deflexión de la corriente y la presencia de resistencia inducida.

Es de indicar que los resultados obtenidos en aerodinámica de pequeñas velocidades, en particular en la suposición de que el flujo es de un fluido incompresible, no sólo tienen importancia por sí solos, sino que también se utilizan en las investigaciones aerodinámicas a grandes velocidades de movimiento.

Problemas y preguntas

6.1. Determinen los coeficientes aerodinámicos de un perfil delgado, alrededor del cual circula un fluido incompresible bajo el ángulo de ataque $\alpha = 0{,}1$ rad. Los contornos del perfil, cuya cuerda $b = 1$ m, están prefijados en un sistema de ejes ligados al perfil con las ecuaciones $y_s = 0{,}2x\,(1 - x/b)$ (lado superior); $y_i = -0{,}12x\,(1 - x/b)$ (lado inferior).

6.2. Para $\alpha = 0{,}1$ rad calculen los coeficientes aerodinámicos de un perfil delgado, simétrico respecto de su cuerda, ubicado en un flujo incompresible.

6.3. La fuerza de sustentación en el sector de un ala de envergadura infinita con área $S_{ala} = 10$ m², siendo el ángulo de ataque $\alpha = 0{,}04$ rad y la velocidad de vuelo $V_\infty = 100$ m/s a la altitud $H = 1000$ m, es igual a $Y_a = 2\cdot 10^4$ N. Para el perfil del ala la derivada $c_{y_a}^{\alpha} = \partial c_{y_a}/\partial\alpha = 5$ 1/rad. Determinen el ángulo de la fuerza libre de sustentación, así como el coeficiente de la fuerza de sustentación para $\alpha = 0{,}07$ rad.

6.4. La fórmula conforme $\sigma = \zeta + 1/\zeta$ permite efectuar la transformación de un círculo en el plano $\zeta = \xi + i\eta$ en un segmento en el plano $\sigma = z + iy$. Hallen el radio del círculo y la longitud del segmento, así como determinen a lo largo de qué eje se dispone dicho segmento.

6.5. La función conforme $\sigma = \zeta - 1/\zeta$ permite transformar un segmento en el plano $\sigma = z + iy$ en una circunferencia en el plano $\zeta = \xi + i\eta$. Hallen el radio de la circunferencia y la longitud del segmento, así como determinen el carácter de la disposición de él en el plano σ.

6.6. El potencial complejo del flujo incompresible alrededor de un cilindro circular de radio unitario en el plano $\zeta = \xi + i\eta$ tiene la forma $W = -iV_\infty\,(\zeta + 1/\zeta)$, donde V_∞ es la velocidad del flujo no perturbado. Hallen la distribución de la presión y determinen la fuerza aerodinámica que actúa sobre el cilindro.

6.7. Hallen la distribución del coeficiente de presión por la superficie de una placa alrededor de la cual circula un flujo incompresible en sentido transversal (fig. 6.1).

6.8. Durante la circulación alrededor de un cilindro circular de radio unidad de un flujo incompresible circulatorio progresivo en el plano $\sigma = x + iy$ (fig. 6.2),

el potencial complejo tiene la forma $W = V_\infty (\sigma + 1/\sigma) + i\,[\Gamma/(2\pi)] \ln \sigma$. Hallen la distribución de velocidades (presiones) por la superficie del cilindro, determinen la fuerza de sustentación Y_a y la resistencia al avance X_a, así como la posición de los puntos críticos (puntos de remanso total) en el cilindro a la velocidad $V_\infty = 50$ m/s, la circulación $\Gamma = 314$ m²/s y la densidad del flujo de aire $\rho_\infty = 1{,}225$ kg/m³.

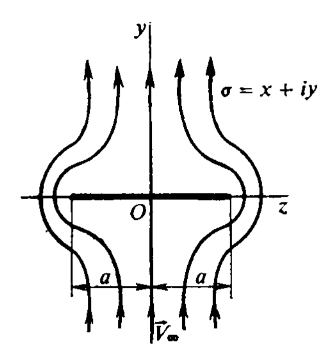


Fig. 6.1. Circulación transversal alrededor de una placa (el plano es $\sigma = z + iy$)

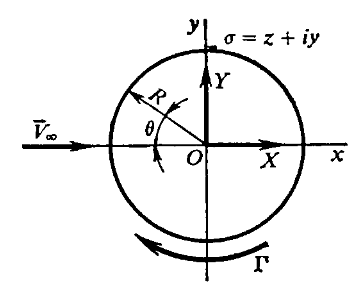


Fig. 6.2. Un cilindro en un flujo circulatorio progresivo (el plano es $\sigma = x + iy$)

6.9. Un cilindro circular de radio $R = 0{,}5$ m, que gira a una velocidad angular $\omega = 20$ 1/s, se encuentra en un flujo de aire, cuya velocidad en el infinito $V_\infty = 50$ m/s. Determinen el coeficiente de la sustentación y la fuerza que actúa por la unidad de longitud del cilindro.

6.10. Alrededor de una placa con cuerda $2a = 2$ m y envergadura $l = 1$ m circula un flujo de aire incompresible a una velocidad $V_\infty = 100$ m/s bajo un pequeño ángulo de ataque $\alpha = 0{,}1$ rad. Hallen la distribución de velocidades y presiones, la fuerza de sustentación y la circulación de velocidad alrededor de la placa.

6.11. Determinen la circulación media de velocidad por el contorno del perfil del ala de un vehículo volante de masa $G = 25 \cdot 10^4$ N que realiza un vuelo horizontal con velocidad $V_\infty = 200$ m/s a la altitud $H = 10$ km. La envergadura del ala $l = 30$ m.

6.12. Un ala de forma rectangular en la planta, cuya envergadura es $l = 8$ m, crea una fuerza de sustentación $Y_a = 4{,}9 \cdot 10^4$ N al moverse en la atmósfera (densidad del aire $\rho_\infty = 1{,}225$ kg/m³) a la velocidad $V_\infty = 100$ m/s. Determinen el ángulo de deflexión del flujo detrás del ala.

6.13. Las mediciones muestran que el ángulo de deflexión del flujo detrás de un ala de forma elíptica en la planta $\varepsilon = 2°$. Determinen la fuerza de sustentación de dicha ala a condición de que su área en la planta $S_{\text{ala}} = 10$ m² y la envergadura $l = 8$ m. La velocidad del flujo de aire $V_\infty = 100$ m/s y la densidad $\rho_\infty = 1{,}225$ kg/m³.

6.14. Expliquen a qué conduce la aparición del ángulo de deflexión del flujo detrás de un ala de envergadura finita.

6.15. Según los datos del problema 6.13 determinen el coeficiente y la fuerza de la resistencia inducida del ala de forma elíptica.

6.16. ¿Cómo varía el ángulo de deflexión del flujo al pasar a un ala de envergadura finita con menor alargamiento?

6.17. ¿Qué sucede con el ángulo real de ataque de un ala de envergadura finita si aumentamos su alargamiento?

6.18. Comparen el coeficiente de la resistencia inducida de un ala de envergadura finita con el correspondiente coeficiente de otra ala de esa misma forma, pero con mayor alargamiento.

6.19. Determinen el coeficiente de la fuerza de sustentación c_{y_a} y de la resistencia inducida c_{xi} de un ala de forma trapezoidal en la planta y alrededor de la cual circula el flujo de un fluido incompresible bajo un ángulo de ataque $\alpha = 0{,}035$ rad. El ala está estructurada de perfiles de una misma familia, con la particularidad de que para el perfil, cuya cuerda $b = b_A = 0{,}1$ m, el espesor relativo $\bar{c} = 0{,}15$ y la curvatura relativa $\bar{f} = 0{,}08$. El alargamiento del ala $\lambda_{\text{ala}} = l^2/S_{\text{ala}} = 8$.

6.20. Para los datos del problema 6.19 construyan la polar $c_{y_a} = f(c_{x_a})$ en la banda $0 < c_{y_a} < 1$, suponiendo que el coeficiente de la resistencia (al avance) del perfil del ala $c_{x\text{ per}} = 0{,}01$.

Solución de los problemas y respuestas a las preguntas

6.1. Para determinar las características de un perfil delgado, alrededor del cual circula un flujo incompresible, hacemos uso de las conocidas dependencias para los coeficientes de la fuerza de sustentación y del momento

$$c_{y_a\text{ inc}} = 2\pi(\alpha + \varepsilon_0); \tag{6.1}$$

$$-m_{z_a\text{ inc}} = 2(\pi\varepsilon_0/4 - \mu_0) + c_{y_a\text{ inc}}/4, \tag{6.2}$$

donde

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_0 &= (-1/\pi)\int_0^\pi \beta(1-\cos\theta)\,d\theta; \\ \mu_0 &= (-1/4)\int_0^\pi \beta(1-\cos 2\theta)\,d\theta. \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

El coeficiente β es igual a la derivada dy/dx calculada con la ecuación $y = y(x)$ de la línea central del perfil (fig. 6.3) y el ángulo θ está ligado con la coordenada x mediante la dependencia

$$x = b(1 - \cos\theta)/2. \tag{6.4}$$

La ecuación de la línea central del perfil prefijado: $y = 0{,}5(y_s + y_i) = 0{,}04x(1 - x/b)$. De aquí la derivada $\beta = dy/dx = 0{,}04(1 - 2x/b)$. Sustituyendo aquí x de acuerdo con (6.4) hallamos $\beta = dy/dx = 0{,}04\cos\theta$. Calculemos ε_0 y μ_0 por las fórmulas (6.3)

$$\varepsilon_0 = (-0{,}04/\pi)\int_0^\pi \cos\theta(1-\cos\theta)\,d\theta = 0{,}02 \text{ rad};$$

$$\mu_0 = (-0{,}04/4)\int_0^\pi \cos\theta(1-\cos 2\theta)\,d\theta = 0.$$

Con (6.1) y (6.2) determinamos los coeficientes $c_{y_a\,\text{inc}} = 0,7539$; $-m_{z_a\,\text{inc}} = 0,2199$ y el correspondiente coeficiente del centro de presión $(c_p)_{\text{inc}} = x_p/b = -m_{z_a\,\text{inc}}/c_{y_a\,\text{inc}} = 0,2917$.

6.2. Para un perfil simétrico la ecuación de su línea central $y = 0$ y, por lo tanto, el coeficiente $\beta = dy/dx = 0$. Por esta razón, los parámetros $\varepsilon_0 = 0$ y $\mu_0 = 0$ [véase (6.3)] y en correspondencia con (6.1) y (6.2) los coeficientes aerodinámicos del perfil $c_{y_a\,\text{inc}} = 2\pi\alpha = 0,6283$; $-m_{z_a\,\text{inc}} = c_{y_a\,\text{inc}}/4 = \pi\alpha/2 = 0,1571$.

Empleando estos datos el coeficiente del centro de presión $(c_p)_{\text{inc}} = -m_{z_a\,\text{inc}}/c_{y_a\,\text{inc}} = 0,25$.

6.3. El coeficiente de la fuerza de sustentación del perfil (ala de envergadura infinita)

$$c_{y_a} = c_{y_a}^{\alpha} (\alpha - \alpha_0), \tag{6.5}$$

donde α_0 es el ángulo de la fuerza libre de sustentación.

Además,

$$c_{y_a} = Y_a/[(\rho_\infty V_\infty^2/2) S_{\text{ala}}]. \tag{6.6}$$

De (6.5) y (6.6) hallamos $\alpha_0 = \alpha - Y_a/[(\rho_\infty V_\infty^2/2) S_{\text{ala}} c_{y_a}^{\alpha}]$.

Para la altitud $H = 1000$ m en las tablas de la atmósfera normal hallamos $\rho_\infty = 1,112$ kg/m³ y calculamos $\alpha_0 = -0,03194$ rad.

Con la fórmula (6.5), para $\alpha = 0,07$ rad, el coeficiente de la fuerza de sustentación $c_{y_a} = 0,5097$.

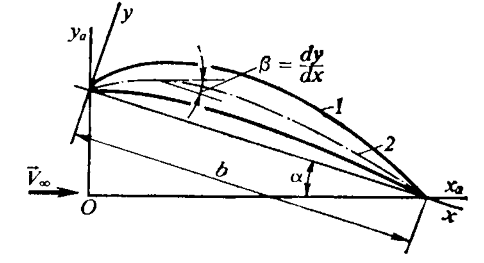


Fig. 6.3. Perfil en un flujo incompresible (*1*) y su línea media (*2*)

6.4. Representemos la fórmula $\sigma = \zeta + 1/\zeta$ en la forma $\sigma = z + iy = \xi + i\eta + (\xi - i\eta)/(\xi^2 + \eta^2)$. Tomando en ella $\xi^2 + \eta^2 = R^2$, después de dividir en las partes real e imaginaria, determinamos $z = \xi\,(1 + 1/R^2)$ e $iy = i\eta\,(1 - 1/R^2)$.

Para obtener el segmento en el plano yz (fig. 6.4), situado a lo largo del eje z, hacemos $iy = 0$ y hallamos el valor $R = 1$. Con ello, $z = 2\xi$, lo que corresponde al segmento de una recta de longitud $2a = 4$.

6.5. Reduzcamos la fórmula $\sigma = \zeta - 1/\zeta$ a la forma $\sigma = z + iy = \xi + i\eta - (\xi - i\eta)/(\xi^2 + \eta^2)$. Como $\xi^2 + \eta^2 = R^2$, $\sigma = z + iy = \xi\,(1 - 1/R^2) + i\eta\,(1 + 1/R^2)$. De aquí se deduce que, para obtener un segmento situado en el eje vertical, hay que tomar el radio de la circunferencia $R = 1$ (con ello, la parte real $z = 0$). Al valor $R = 1$ corresponde la igualdad $y = 2\eta$ y la longitud del segmento vertical $2a = 4$ (fig. 6.5).

6.6. Tomemos la derivada del potencial complejo $W = -iV_\infty\,(\zeta + 1/\zeta)$ según la variable $\zeta = \xi + i\eta$:

$$dW/d\zeta = -iV_\infty\,(1 - 1/\zeta^2).$$

Esta variable recibe el nombre de *velocidad compleja*. Su módulo determina el valor absoluto de la velocidad en el punto del flujo que se considera. De acuerdo con la ecuación de Bernoulli la presión en tal punto

$$p = p_0 - (\rho_\infty/2)\,(dW/d\zeta)^2 = p_0 - (\rho_\infty V_\infty^2/2)\,(1 - 1/\zeta^2)^2,$$

donde p_0 es la presión en el punto de remanso total en el cilindro (en el punto crítico).

Empleando la *fórmula de Zhukovski—Chapliguin* determinamos la fuerza aerodinámica: $R_a = X - iY = (i\rho_\infty/2) \oint (dW/d\zeta)^2 \, d\zeta$.

Poniendo en ella el valor de $dW/d\zeta$, obtenemos $R_a = (i\rho_\infty/2) \oint V_\infty^2 (1 - 1/\zeta^2) \, d\zeta = 0$. De este modo, con la corriente sin circulación del flujo de un fluido no viscoso incompresible alrededor de un cilindro circular la fuerza resul-

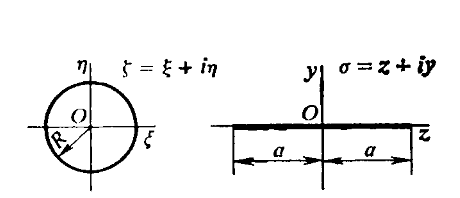


Fig. 6.4. Esquema de una transformación conforme

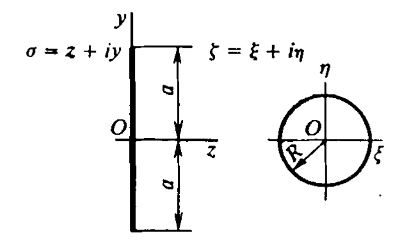


Fig. 6.5. Transformación conforme de un segmento de recta en una circunferencia

tante de presión del flujo sobre el sólido es nula. Este efecto aerodinámico lleva el nombre de *paradoja de Euler—d'Alembert*.

6.7. El potencial de velocidad para una placa alrededor de la cual en sentido transversal circula un flujo incompresible a una velocidad V_∞ (véase la fig. 6.1), tiene la forma $\varphi = \pm V_\infty \sqrt{a^2 - z^2}$, donde el signo «+» corresponde a la superficie superior y el «—», a la inferior. La velocidad en la placa $V_z = \partial\varphi/\partial z = \mp V_\infty z/\sqrt{a^2 - z^2}$. De acuerdo con esta fórmula en el punto con coordenada $z = 0$ la velocidad $V_z = 0$, mientras que en los bordes laterales, donde $z = \pm a$, la velocidad $V_z \to \infty$. En correspondencia con la ecuación de Bernoulli $V_\infty^2/2 + p_\infty/\rho_\infty = V_z^2/2 + p/\rho_\infty$ el coeficiente de presión

$$\bar{p} = (p - p_\infty)/(\rho_\infty V_\infty^2/2) = 1 - V_z^2/V_\infty^2. \qquad (6.7)$$

Introduciendo aquí el valor de V_z, obtenemos $\bar{p} = 1 - z^2/(a^2 - z^2)$. En los puntos de las superficies superior e inferior con coordenada $z = 0$ el valor de $\bar{p} = 1$, en tanto que en los bordes laterales $(z = \pm a)$ el coeficiente de presión adquiere el valor $-\infty$. Prácticamente, este valor no se realiza y el coeficiente real de presión tiene valor finito. En la mayor parte de la placa él es positivo. En particular, en los puntos con coordenadas $z = \pm a/2$ el coeficiente $\bar{p} = 1/3$, mientras que en los puntos con coordenadas $z = \pm 2a/3$ el valor de $\bar{p} = 1/5$. La distribución del coeficiente de presión por las superficies superior e inferior de la placa es la misma y, por ello, la resistencia aerodinámica es nula.

6.8. La velocidad compleja se determina como la derivada del potencial complejo: $dW/d\sigma = V_\infty (1 - 1/\sigma^2) + i\Gamma/(2\pi\sigma)$. Para los puntos del contorno del cilindro de radio unitario ($R = 1$, véase la fig. 6.2) la variable $\sigma = x + iy = e^{i\theta}$. De acuerdo con esta expresión hallamos la distribución de la velocidad por la superficie sometida a la circulación. Para los puntos críticos (los de remanso total) de dicha superficie, donde la velocidad es igual a cero, la derivada $dW/d\sigma = 0$ y, por lo tanto, $V_\infty (1 - e^{-2i\theta}) = -i (\Gamma/2\pi) e^{-i\theta}$. Multiplicando las dos partes

de esta igualdad por $e^{i\theta}$ y dividiéndolas por V_∞, obtenemos $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = -i\,[\Gamma/(2\pi V_\infty)]$. Como $(e^{i\theta} - e^{-i\theta})/(2i) = \operatorname{sen}\theta_{cr}$, $\operatorname{sen}\theta_{cr} = -\Gamma/(4\pi V_\infty)$. Con los valores de Γ y V_∞ es posible hallar los ángulos θ_{cr} que determinan la posición de los puntos críticos (en la fig. 6.6 los puntos A y B). Poniendo en la expresión aducida los datos, obtenemos que $\operatorname{sen}\theta_{cr} = -0{,}4997$. En correspondencia con este valor (fig. 6.6) $\theta_{cr}^A = -30°$ y $\theta_{cr}^B = -150°$.

La distribución de presiones se determina con la ecuación de Bernoulli:

$$p = p_\infty + \rho_\infty V_\infty^2/2 - (\rho_\infty/2)\,(dW/d\sigma)^2 =$$
$$= p_\infty + \rho_\infty V_\infty^2/2 - (\rho_\infty/2)\,[V_\infty^2 + V_\infty^2/\sigma^4 - 2V_\infty^2/\sigma^2 + i\Gamma V_\infty/(\pi\sigma) -$$
$$- i\Gamma V_\infty/(\pi\sigma^3) - \Gamma^2/(4\pi^2\sigma^2)].$$

El coeficiente de presión

$$\bar{p} = (p - p_\infty)/(\rho_\infty V_\infty^2/2) =$$
$$= 1 - [1 + 1/\sigma^4 - 2/\sigma^2 + i\Gamma/(\pi V_\infty \sigma) - i\Gamma/(\pi V_\infty \sigma^3) - \Gamma^2/(4\pi^2 V_\infty^2 \sigma^2)].$$

Poniendo aquí el valor de $\sigma = e^{i\theta}$ hallamos el coeficiente de presión en cualquier punto en la superficie del cilindro determinado por el ángulo θ.

Para determinar la fuerza de presión resultante sobre el cilindro, aplicamos la fórmula de Zhukovski—Chapliguin

$$R_a = X - iY = (i\rho_\infty/2)\oint (dW/d\sigma)^2\, d\sigma.$$

Poniendo aquí la expresión para la velocidad compleja e integrándola, hallamos $R_a = X - iY = -i\rho_\infty V_\infty \Gamma$. De acuerdo con este resultado $X = X_a = 0$; $Y = Y_a = \rho_\infty V_\infty \Gamma$. Poniendo aquí los datos hallamos la fuerza de sustentación para el cilindro de anchura unitaria: $Y_a = 1{,}923 \cdot 10^4$ N.

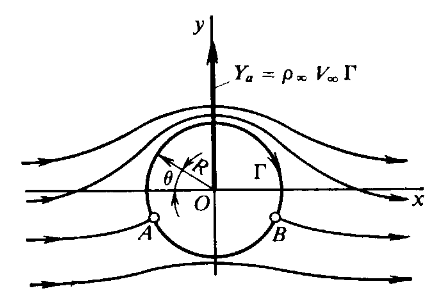


Fig. 6.6. Cilindro en un flujo circulatorio progresivo

6.9. La circulación de un flujo plano paralelo alrededor de un cilindro en rotación es análoga a la corriente circulatoria alrededor del cilindro en semejante flujo. En tal caso la circulación de velocidad $\Gamma = 2\pi R V$, donde $V = \omega R$ es la velocidad lineal en la superficie del cilindro. Así, pues $\Gamma = 2\pi R^2\omega$.

Según la fórmula de Zhukovski, la fuerza de sustentación que actúa sobre el cilindro de longitud unitaria $Y_a = \rho_\infty V_\infty \Gamma$ o bien $Y_a = \rho_\infty V_\infty 2\pi R^2 \omega$. Poniendo aquí ρ_∞, hallamos $Y_a = 1924$ N/m.

El coeficiente de la fuerza de sustentación (para el área característica $S = 2R \cdot 1$) $c_{y_a} = Y_a/(q_\infty S) = 2\pi R\omega/V_\infty = 1{,}257$.

6.10. La fuerza de sustentación, que actúa sobre una placa de envergadura l, es igual a $Y_a = 2\pi\alpha a l \rho_\infty V_\infty^2$. Poniendo aquí $\rho_\infty = 1{,}225$ kg/m³, hallamos $Y_a = 0{,}7697 \cdot 10^4$ N.

El correspondiente coeficiente de la fuerza de sustentación $c_{y_a} = Y_a/[(\rho_\infty V_\infty^2/2) \times 2al] = 2\pi\alpha = 0{,}6283$.

La circulación de velocidad alrededor de la placa $\Gamma = -Y_a/(l\rho_\infty V_\infty) = -62{,}83$ m²/s. El signo «—» corresponde al sentido horario de la circulación.

La velocidad en la placa

$$V = V_\infty (1 \pm \alpha \sqrt{(a-x)/(a+x)}) = V_\infty (1 \pm 0{,}1 \sqrt{(1-x)/(1+x)}),$$

donde el signo «+» corresponde a la superficie superior y el «—», a la inferior.

Para $x = 1$ m (punto en el borde de salida) $V = V_\infty$. Al punto en el borde de ataque ($x = -1$ m) le corresponde un valor infinitamente grande de la velocidad ($V \to \pm\infty$). En las condiciones reales de circulación alrededor de alas delgadas estas velocidades son grandes, pero finitas.

La velocidad en el punto $x = -12/13$ m (junto al borde de ataque) $V = 100\ (1 \pm 0{,}5)$. En el lado superior $V = 150$ m/s y en el inferior $V = 50$ m/s.

Empleando la fórmula (6.7) hallamos el coeficiente de presión:

$$\bar{p} = \mp 0{,}2 \sqrt{(1-x)/(1+x)} - 0{,}01\,(1-x)/(1+x).$$

En el borde de salida ($x = 1$ m) el coeficiente de presión $\bar{p} = 0$, mientras que en el de ataque ($x = -1$ m) el valor absoluto de este coeficiente es infinitamente grande, lo que en la práctica no es real. En el entorno de dicho borde (con $x = -12/13$ m) el coeficiente de presión $\bar{p} = \mp 1 - 0{,}25$. En el lado superior $\bar{p} = -1{,}25$ y en el inferior, $\bar{p} = 0{,}75$. Estos valores son próximos a los reales.

6.11. Durante el vuelo uniforme horizontal de un vehículo volante su fuerza de sustentación es igual a su peso G. Así, pues, empleando la fórmula de Zhukovski determinamos $Y_a = \rho_\infty V_\infty \Gamma_m l = G$, de donde $\Gamma_m = G/(\rho_\infty V_\infty l)$.

En las tablas de la atmósfera normal para la altura $H = 10$ km, hallamos la densidad $\rho_\infty = 0{,}4136$ kg/m³.

Calculamos la circulación media de velocidad por el contorno del perfil del ala del vehículo volante: $\Gamma_m = 100{,}7$ m²/s.

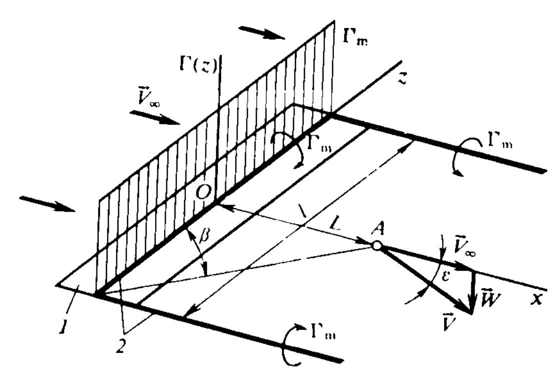


Fig. 6.7. Esquema para determinar el ángulo de deflexión del flujo tras el ala (*1*) debido a un vórtice en herradura cuadrada (*2*)

6.12. El sistema de torbellinos equivalente a un ala de envergadura finita, de forma rectangular en la planta, induce en el flujo velocidades adicionales y, de este modo, provoca la *deflexión del flujo*. Con la fórmula de Zhukovski $Y_a = \rho_\infty V_\infty \Gamma_m l$ determinamos la circulación media de velocidad por la envergadura del ala: $\Gamma_m = Y_a/(\rho_\infty V_\infty l) = 50$ m²/s.

Para el ala que consideramos de envergadura l, el sistema de torbellinos puede sustituirse por un torbellino en herradura cuadrada (en П) con circulación constante Γ_m; con esto, la distancia entre los torbellinos libres (enrollados) se toma igual a la envergadura del ala l.

Determinemos el ángulo de deflexión del flujo ε, provocado por semejante sistema de torbellinos en cierto punto A (fig. 6.7) situado a una distancia L del ala:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2' = [\Gamma_m\,(1 + \operatorname{sen}\beta)]/(\pi V_\infty l \operatorname{sen}\beta). \tag{6.8}$$

La igualdad $\varepsilon = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2'$ significa que la deflexión del flujo se provoca por el torbellino ligado (ε_1) y por cada uno de dos libres (ε_2'). Como vemos en la fig. 6.7, el ángulo β en (6.8) se determina con la relación $\operatorname{sen}\beta = L/\sqrt{L^2 + l^2/4}$. En parti-

cular, para los puntos situados a la distancia $L = 3$ m, sen $\beta = 0{,}6$ y el ángulo de deflexión del flujo, de acuerdo con (6.8), $\varepsilon = 1/(6\pi)$ rad ($\approx 3°$).

6.13. El ángulo de deflexión del flujo para un ala de envergadura finita, de forma arbitraria en la planta,

$$\varepsilon = (c_{y_a}/\pi\lambda_{\text{ala}})\,(1 + \tau), \qquad (6.9)$$

donde τ es un coeficiente que toma en consideración la deflexión del flujo a lo largo de la envergadura y que depende de la forma del ala en la planta, así como de la posición del punto en el que se determina el valor del ángulo de deflexión del flujo.

En el ala de forma elíptica en la planta la deflexión del flujo es constante a lo largo de la envergadura y se calcula con la fórmula (6.9) en la que $\tau = 0$. Así, pues,

$$\varepsilon = c_{y_a}/(\pi\lambda_{\text{ala}}). \qquad (6.10)$$

La fuerza de sustentación del ala $Y_a = c_{y_a}\,(\rho_\infty V_\infty^2/2)\,S_{\text{ala}}$ o según (6.10),

$$Y_a = \varepsilon\pi\lambda_{\text{ala}}\,(\rho_\infty V_\infty^2/2)\,S_{\text{ala}}. \qquad (6.11)$$

Teniendo en cuenta que $\lambda_{\text{ala}} = l^2/S_{\text{ala}}$ y poniendo en (6.11) los datos, obtenemos $Y_a = 4{,}299 \cdot 10^4$ N.

6.14. La deflexión del flujo que surge detrás del ala de envergadura finita provoca la disminución del ángulo de ataque en el valor del ángulo de deflexión ε. En correspondencia con esto, el valor real del ángulo de ataque

$$\alpha_r = \alpha - \varepsilon, \qquad (6.12)$$

donde α es el ángulo de ataque de montaje.

A su vez, esto provoca la desviación del vector de la fuerza aerodinámica ya que él debe ser normal al sentido de la velocidad verdadera. Como resultado de tal

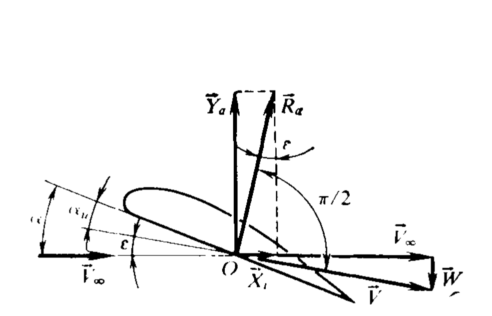


Fig. 6.8. Esquema de la resistencia inducida

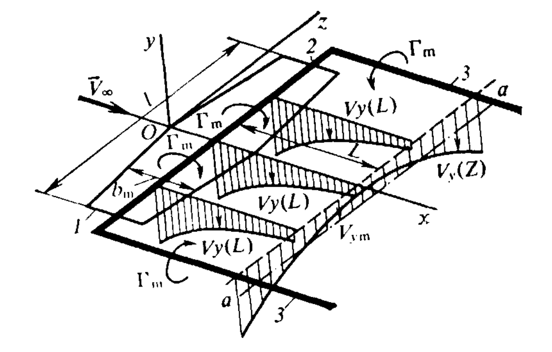


Fig. 6.9. Dependencia entre el ángulo de deflexión y el alargamiento:
1, ala; *2* y *3*, vórtices adherido y libre

desviación aparece la componente X_i, dirigida a lo largo del vector velocidad del flujo no perturbado, llamada *resistencia inducida*. Como vemos en la fig. 6.8 el valor de $X_i = \varepsilon Y_a$.

6.15. Si dividimos la resistencia inducida $X_i = \varepsilon Y_a$ por $(\rho_\infty V_\infty^2/2)\,S_{\text{ala}}$, obtenemos el coeficiente de resistencia inducida

$$c_{xi} = \varepsilon c_{y_a} \qquad (6.13)$$

o bien, haciendo uso de (6.10),

$$c_{xi} = \pi\lambda_{ala}\varepsilon^2. \qquad (6.14)$$

Poniendo aquí el valor de $\lambda_{ala} = l^2/S_{ala} = 8^2/10$ y $\varepsilon = 2°$ (0,03491 rad), obtenemos $c_{xi} = 0{,}0245$. La correspondiente resistencia inducida $X_i = c_{xi} \times$ $\times$ $(\rho_\infty V_\infty^2/2)\, S_{ala} = 0{,}1501 \cdot 10^4$ N.

6.16. El ángulo de deflexión detrás del ala se determina con la dependencia (6.9) y, de acuerdo con ella, crece al disminuir el alargamiento $\lambda_{ala} = l/b_m$. Desde el punto de vista físico esto puede explicarse del modo siguiente. La deflexión del flujo está condicionada por el sistema de torbellinos en forma de herradura cuadrada que, en el medio que rodea al ala, induce cierto campo de velocidades dirigidas en sentido vertical, con la particularidad que la inducción provocada por los torbellinos decrece con rapidez con la distancia (fig. 6.9). Analicemos la deflexión media del flujo a lo largo de cierta línea a — a, yacente detrás del ala en el plano de los torbellinos.

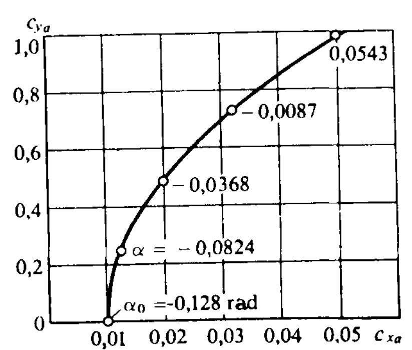


Fig. 6.10. Polar del ala

Las velocidades $V_y(z)$ inducidas por los torbellinos libres, que se derraman de las puntas del ala, varían en la dirección de la envergadura de ésta, con ello el valor medio de la velocidad inducida V_{ym} y, por lo tanto, el ángulo medio de deflexión con el valor constante de la intensidad del torbellino $\Gamma_m = (^1/_2)\, c_{ym} b_m V_\infty$ es tanto mayor cuanto menor sea la envergadura del ala l y viceversa. La velocidad $V_y(L)$, inducida por el torbellino ligado, y el ángulo de deflexión provocado por ella a una distancia L del ala son proporcionales a la intensidad del torbellino, es decir, a la circulación media Γ_m, que, de acuerdo con la ecuación de ligazón, para valores constantes del coeficiente de la fuerza de sustentación y de la velocidad del flujo incidente es tanto mayor cuanto mayor sea la cuerda del ala b_m.

Así, pues, el ángulo medio sumario de la deflexión del flujo detrás del ala es tanto mayor cuanto menor sea la envergadura y mayor la cuerda del ala, es decir, mientras menor sea el alargamiento del ala a lo largo de la envergadura, caracterizado por el alargamiento $\lambda_{ala} = l/b_m$.

6.17. En correspondencia con las expresiones (6.12) y (6.9) el ángulo real de ataque:

$$\alpha_r = \alpha - \varepsilon = \alpha - [c_{y_a}/(\pi\lambda_{ala})]\,(1 + \tau). \qquad (6.15)$$

Como vemos en (6.15), este ángulo crece al aumentar el alargamiento aproximándose al valor del ángulo de ataque de montaje α. El ángulo real de ataque (véase la fig. 6.8) se mide con relación al sentido real del flujo junto al ala, que se diferencia del sentido del flujo no perturbado a cuenta del surgimiento de la deflexión del flujo. Como sigue de (6.9), la deflexión del flujo disminuye al aumentar el alargamiento del ala (véase el problema 6.16).

6.18. En correspondencia con (6.13) el coeficiente de la resistencia inducida disminuye al decrecer el ángulo de deflexión del flujo. Semejante influencia del alargamiento sobre la resistencia inducida puede explicarse del modo siguiente. Desde el punto de vista físico la aparición de la resistencia inducida está condi-

cionada por las pérdidas de parte de la energía cinética del ala en movimiento consumida por la formación de los vórtices que se derraman de sus bordes. Con ello, mientras mayor sea el alargamiento, tanto menor será el ángulo sumario medio de deflexión del flujo detrás del ala a cuenta de la menor influencia inductora de dichos torbellinos. En correspondencia, menor será la parte de la energía cinética del ala en movimiento que se gasta en la formación de los torbellinos, lo que conduce a la disminución de la resistencia inducida.

6.19. El coeficiente de la fuerza de sustentación del ala, compuesta de perfiles de una misma familia y alrededor de la cual circula un flujo incompresible, se determina con la fórmula

$$c_{y_a} = c_{y_a}^{\alpha}(\alpha - \alpha_0)/[1 + c_{y_a}^{\alpha}(1+\tau)/(\pi\lambda_{\text{ala}})], \qquad (6.16)$$

donde la derivada

$$c_{y_a}^{\alpha} = 2\pi(1+0{,}77\bar{c})\sqrt{1+(\bar{f}/2)^2}, \qquad (6.17)$$

es el «ángulo de sustentación cero»

$$\alpha_0 = -1{,}6\,\bar{f}. \qquad (6.18)$$

El coeficiente de la resistencia inducida del ala en un flujo incompresible

$$c_{xi} = c_{y_a}^2(1+\delta)/(\pi\lambda_{\text{ala}}). \qquad (6.19)$$

Los parámetros δ y τ dependen de la forma del ala en el plano. En particular, para el ala trapezoidal $(1+\delta)/\pi = (1+\tau)/\pi = 0{,}318$.

Calculamos $\alpha_0 = -0{,}128$ rad; $c_{y_a}^{\alpha} = 7{,}014$; $c_{y_a} = 0{,}8935$; $c_{xi} = 0{,}03173$.

6.20. El coeficiente total de resistencia del ala $c_{x_a} = c_{x\,\text{per}} + c_{xi}$, donde el coeficiente de resistencia (al avance) del perfil $c_{x\,\text{per}} = 0{,}01$ (según el planteamiento del problema) y c_{xi}, el coeficiente de resistencia inductiva que se determina con (6.19). En el caso dado $c_{xi} = 0{,}03975 c_{y_a}^2$.

Así, pues, $c_{x_a} = 0{,}01 + 0{,}03975\, c_{y_a}^2$. Prefijando una serie de valores de c_{y_a} $(0 < c_{y_a} < 1)$ es posible calcular los correspondientes valores de c_{x_a}. Con los resultados de los cálculos se construye la polar $c_{y_a} = f(c_{x_a})$ mostrada en la fig. 6.10.

Capítulo 7

Un perfil en el flujo de un gas compresible

El cálculo de la circulación de un flujo subsónico compresible alrededor de un perfil requiere la resolución de ecuaciones para el potencial de velocidades de un flujo plano bidimensional:

$$(V_x^2 - a^2)\,\partial^2\varphi/\partial x^2 + 2V_xV_y\partial^2\varphi/\partial x\partial y + (V_y^2 - a^2)\,\partial^2\varphi/\partial y^2 = 0.$$

Si el perfil es delgado y las perturbaciones que introduce pequeñas, esta ecuación se puede simplificar reduciéndola en una ecuación lineal con coeficientes constantes de las segundas derivadas parciales:

$$(a_\infty^2 - V_\infty^2)\,\partial^2\varphi'/\partial x^2 + a_\infty^2\partial^2\varphi'/\partial y^2 = 0.$$

Las ecuaciones aducidas del potencial de perturbación ofrecen la posibilidad de investigar la circulación de un flujo subsónico compresible alrededor de un perfil delgado, situado bajo un pequeño ángulo de ataque, en particular, convertir la resolución del problema sobre la circulación de un flujo compresible alrededor de un perfil prefijado en la solución del problema sobre la circulación de un flujo incompresible alrededor de otro perfil modificado. Con esto, para determinar el coeficiente de presión y los coeficientes aerodinámicos se emplea extensamente la regla de Prandtl—Glauert. Si el perfil sometido a la circulación introduce en el flujo perturbaciones finitas, las ecuaciones linealizadas no sirven. Al estudiar semejante flujo hay que utilizar las ecuaciones no lineales de dinámica de los gases.

Un método eficaz de investigación de flujos subsónicos con grandes perturbaciones fue propuesto por el académico soviético *S.A. Chapliguin* en su obra "Sobre los chorros de gas", donde se aducen ecuaciones que forman la base matemática de la teoría de los flujos potenciales subsónicos. Las ecuaciones de Chapliguin son el cimiento de múltiples métodos de aerodinámica de flujos compresibles. Basándose en ellos, el académico soviético *S.A. Kristianóvich* elaboró un método que permite tomar en consideración la influencia de la compresibilidad sobre la circulación alrededor de perfiles de diversa forma. De acuerdo con este método, primero se resuelve el problema de la circulación de un flujo incompresible convencional alrededor de cierto perfil asimismo convencional y, a continuación, los resultados obtenidos se calculan de nuevo para las condiciones de circulación de un flujo compresible real alrededor del perfil concreto. Este nuevo cálculo se basa en el empleo de la dependencia funcional entre la velocidad verdadera relativa $\lambda = V/a^*$ de un flujo compresible y el valor de la velocidad convencional adimensional Λ en los correspondientes puntos de los perfiles prefijado y convencional.

El método de Kristianóvich proporciona la posibilidad de calcular de nuevo los parámetros de la circulación en el perfil para cualquier número $M_\infty > 0$ (es decir, teniendo en cuenta la compresibilidad), si se conoce la distribución de dichos parámetros alrededor de ese mismo perfil cuando alrededor de él circula un flujo incompresible. Además, este método permite recalcular los parámetros de la circulación al pasar de un número $M_{\infty 1} > 0$ a otro $M_{\infty 2} > 0$. Como sabemos, el método de Kristianóvich sirve a condición de que en el perfil, por todo lugar, la velocidad sea subsónica. El número crítico M del flujo incidente ($M_{\infty crit}$) también puede ser hallado con el método de Kristianóvich.

Al calcular la resistencia de ondas de choque del perfil del ala, alrededor del cual circula un flujo a velocidad supersónica ($M_\infty > M_{\infty crit}$) es posible hacer uso del método propuesto por el profesor soviético *G.F. Burago*, mientras que durante las investigaciones de la circulación de un flujo supersónico alrededor del perfil,

el método que combina la teoría de las ondas de choque oblicuas y los flujos de Prandtl—Meyer (para el perfil del ala en forma de una placa delgada y para los perfiles lineales) y el método de características (para los perfiles curvilíneos).

Al calcular la circulación de un flujo hipersónico alrededor de una placa delgada se emplea extensamente la ley de la semejanza hipersónica, lo que simplifica considerablemente el cálculo. También se simplifica el cálculo de los coeficientes aerodinámicos de una placa situada en un flujo supersónico poco perturbado (linealizado). Si alrededor de un perfil delgado aguzado circula un flujo hipersónico con tan pequeños ángulos de ataque que en sus superficies superior e inferior, en todos los puntos, los números locales M sobrepasan considerablemente la unidad y, además, las condiciones de un flujo isentrópico se conservan alrededor del contorno inferior ($\alpha > 0$), entonces, para el cálculo de la circulación alrededor de semejante perfil es posible aplicar relaciones simplificadas para las características. Al calcular la circulación alrededor de un perfil delgado, situado en un flujo supersónico bajo un pequeño ángulo de ataque, podemos hacer uso de los resultados de la teoría de linealización del flujo supersónico.

Al calcular las características aerodinámicas de los perfiles de alas en flecha ha de tenerse en cuenta el efecto de deslizamiento que, como veremos en problemas aducidos en el siguiente parágrafo, en grado considerable determina las propiedades aerodinámicas de las alas en flecha de envergadura finita. Tomando en consideración el indicado efecto de deslizamiento para calcular las características aerodinámicas de los perfiles pertenecientes a las alas en flecha o a las deslizantes es posible emplear todos los métodos indicados más arriba.

La singularidad del cálculo de la circulación de un flujo disociado alrededor del perfil del ala consiste en que una serie de parámetros de la circulación se determina mediante las correspondientes tablas o bien gráficas. Esto acarrea la necesidad de que, durante los cálculos de tal circulación, sea preciso emplear el método de las aproximaciones sucesivas.

Problemas y preguntas

7.1. Supongamos que al flujo de gas linealizado, que circula alrededor de un perfil delgado, corresponde el flujo de un fluido incompresible con el mismo potencial de velocidades que para un gas compresible. ¿De qué modo, en el caso dado, se deformará el perfil y cambiará o no el ángulo de ataque al pasar del flujo compresible al incompresible?

7.2. ¿Cuál es la dependencia entre los coeficientes de la fuerza de sustentación y el momento longitudinal del perfil, cuando alrededor de él circula un flujo de gas linealizado subsónico compresible ($M_\infty < M_{\infty\ crit}$) y un flujo de gas incompresible con iguales ángulos de ataque?

7.3. El coeficiente de la fuerza de sustentación $c_{y_a\,\mathrm{inc}}$ de un perfil delgado con cuerda $b = 2$ m, alrededor del cual circula un flujo de gas incompresible bajo el ángulo de ataque $\alpha = 0{,}1$ rad, es igual a 0,3. Determinen el valor de c_{y_a}, así como la circulación de velocidad Γ para dicho perfil, cuando alrededor de él circula un flujo de gas poco perturbado (linealizado) bajo el mismo ángulo de ataque con $M_\infty = 0{,}5$ y la temperatura del aire $T_\infty = 288$ K ($a_\infty = 340$ m/s).

7.4. Hallen los ángulos de ataque de un perfil delgado en las condiciones de flujos de un gas incompresible ($M_\infty = 0$) y compresible ($M_\infty = 0{,}5$), si el coeficiente de la fuerza de sustentación del perfil $c_{y_a} = 0{,}15$.

7.5. Hallen las variaciones relativas de la presión $\Delta p/p_\infty = (p - p_\infty)/p_\infty$, de la velocidad del sonido $\Delta a/a_\infty = (a - a_\infty)/a_\infty$ y del número de Mach $\Delta M/M_\infty = (M - M_\infty)/M_\infty$ para $M_\infty = 0{,}8$, si sabemos que la perturbación de la velocidad, provocada por un perfil delgado, se determina con el cociente $u/V_\infty = 0{,}01$, donde u es la velocidad de la perturbación en la dirección de la velocidad V_∞.

7.6. Sea que para cierto perfil conocemos el número crítico $M_{\infty\,crít}$ del flujo subsónico incidente. ¿Cómo variará dicho número si el perfil se engruesa? ¿Variará el número crítico $M_{\infty\,crít}$ del flujo incidente al aumentar el ángulo de ataque del perfil?

7.7. En la fig. 7.1 se muestra la distribución del coeficiente de presión por un perfil, obtenida mediante su ensayo en un túnel aerodinámico de baja velocidad con $M_\infty \approx 0$. Determinen para este perfil el número crítico $M_{\infty\,crít}$.

7.8. Durante el vuelo en la atmósfera a la altitud $H = 5$ km con velocidad $V_\infty = 200$ m/s en cierto punto del perfil del ala la velocidad alcanza la del sonido. ¿A qué es igual dicha velocidad?

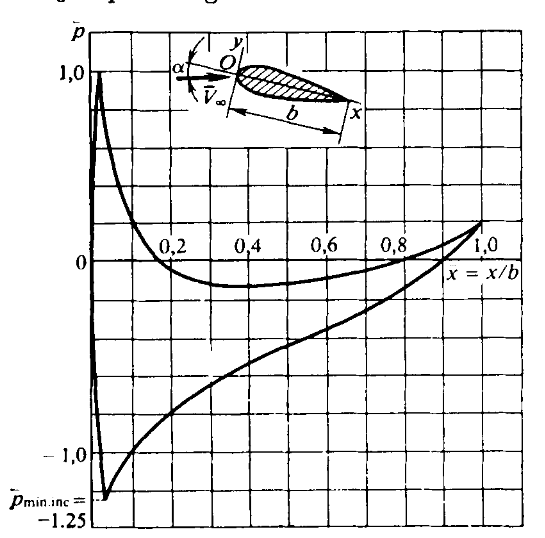


Fig. 7.1. Distribución del coeficiente de presión por el perfil en un flujo incompresible

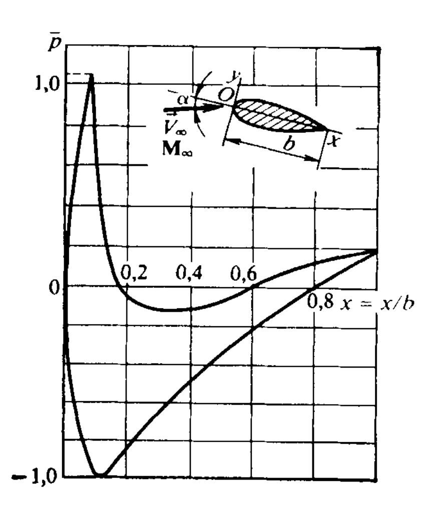


Fig. 7.2. Distribución del coeficiente de presión por el perfil en un flujo subsónico

7.9. Al circular un fluido incompresible alrededor de un perfil, la velocidad límite en su superficie es 1,5 veces mayor que la del flujo incidente. Determinen el número $M_{\infty\,crít}$ y la velocidad del flujo que a éste corresponde a la altura $H = 7$ km.

7.10. En un sector del ala de envergadura infinita de área $S_{ala} = 10$ m², con un ángulo de ataque $\alpha = 0{,}07$ rad y velocidad de vuelo $V_\infty = 250$ m/s, a la altura $H = 8$ km, la fuerza de sustentación $Y_a = 1{,}96 \cdot 10^4$ N. Para el perfil la derivada $c_{y_a}^{\alpha} = \partial c_{y_a}/\partial\alpha = 5{,}5$ 1/rad. Determinen el ángulo de la fuerza libre de sustentación α_0 y el coeficiente de la fuerza de sustentación a la velocidad $V_\infty = 200$ m/s y $\alpha = 0{,}1$ rad.

7.11. En la fig. 7.2 se muestra la distribución de los coeficientes de presión por el perfil, obtenida para $M_\infty = 0{,}5$. Hallen el número crítico $M_{\infty\,crít}$ del flujo incidente de aire correspondiente a la indicada distribución.

7.12. Realicen el recálculo, para el número $M_\infty = 0{,}5$, de la curva de distribución del coeficiente de presión por el perfil (fig. 7.3) alrededor del cual circula un flujo incompresible de aire.

7.13. Se ofrece la curva de distribución del coeficiente de presión en el perfil (fig. 7.4), obtenida al circular a su alrededor un flujo de aire con número $M_{\infty\,1} = 0{,}4$. Recalculen esta curva para el número $M_{\infty\,2} = 0{,}6$.

7.14. Determinen el coeficiente de resistencia de onda de choque para cierto valor M_∞ ($M_{\infty\,crít} < M_\infty < 1$), a condición de que conocemos la distribución del coeficiente de presión alrededor de dicho perfil, obtenida a pequeñas velocidades del flujo incidente de aire (véase el problema 7.7). Para uno de los números M_∞ determinen la fuerza de la resistencia de la onda de choque de un sector en un ala de envergadura $l = 1$ m (la cuerda del perfil $b = 2$ m) durante el vuelo en la atmósfera en las cercanías de la superficie terrestre.

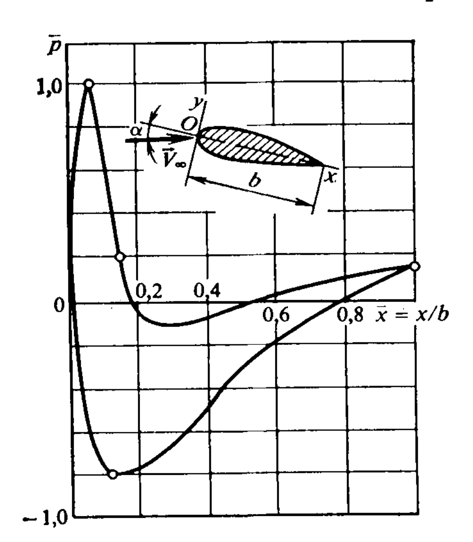


Fig. 7.3. Diagrama de coordenadas para un perfil simétrico en un flujo incompresible con $\alpha \neq 0$

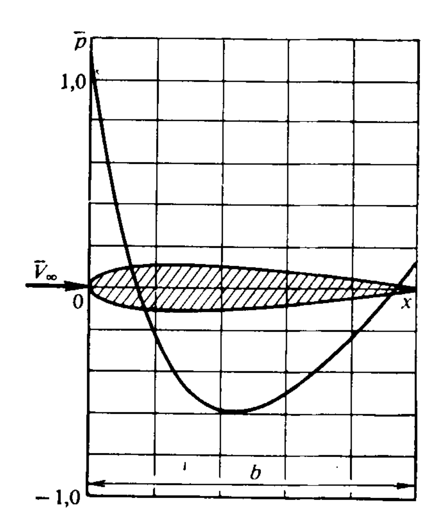


Fig. 7.4. Diagrama de coordenadas para un perfil simétrico en un flujo subsónico

7.15. Una superficie plana aerodinámica está desviada respecto del sentido de la velocidad V_∞ del flujo incidente de aire que la contornea bajo un ángulo $\beta = 0{,}52$ rad. Determinen el ángulo de la onda centrada (abanico de enrarecimiento), el carácter del flujo de esta onda, así como los parámetros del gas en la superficie desviada a condición de que el número $M_\infty = 2$ y $k = c_p/c_v = 1{,}4$.

7.16. Determinen los parámetros del flujo perturbado en el lado superior de una placa, alrededor de la cual circula un flujo hipersónico de aire con número $M_\infty = 10$ y $k = c_p/c_v = 1{,}4$ para $\alpha = 0{,}1$ rad. Suponiendo que el flujo alrededor de otra placa, situada bajo un ángulo de ataque $\alpha = 0{,}05$ rad, ofrece semejanza aerodinámica calculen los parámetros de la circulación a su alrededor.

7.17. Dos alas en forma de placas delgadas están situadas en flujos supersónicos de aire ($k = c_p/c_v = 1{,}4$), con números $M_\infty = 5$ y $M_\infty = 20$, bajo iguales ángulos de ataque $\alpha = 0{,}1$ rad. Determinen las características aerodinámicas de estas alas.

7.18. Determinen los parámetros de la circulación de un flujo de aire supersónico alrededor de un perfil para $M_\infty = 5$; $k = c_p/c_v = 1{,}4$ bajo un ángulo de ataque $\alpha = 0{,}35$ rad. El contorno del perfil (fig. 7.5) está dado con la ecuación $y = \pm 2c\,(x/b)\,(1 - x/b)$, donde $c = 2$; $b = 12$.

7.19. Hallen los parámetros de la circulación alrededor de un perfil simétrico (fig. 7.6), cuyo contorno en el sector delantero es una cuña con la mitad del ángulo en el vértice $\beta_0 = 0{,}26$ rad y en el resto del contorno, una curva parabólica descri-

ta con la ecuación $y = 2c(x/b)(1 - x/b)$, donde $c = 2$; $b = 10$. El número M del flujo de aire incidente $M_\infty = 5$, el ángulo de ataque $\alpha = 0$ rad, la razón de las capacidades caloríficas para el aire $k = c_p/c_v = 1{,}4$.

7.20. Calculen los parámetros de la circulación isentrópica de flujos supersónicos de aire con números $M_\infty = 3$ y 20 ($k = c_p/c_v = 1{,}4$) alrededor de dos perfiles iguales bajo el ángulo de ataque $\alpha = 0{,}1$. El contorno de los perfiles (véase la

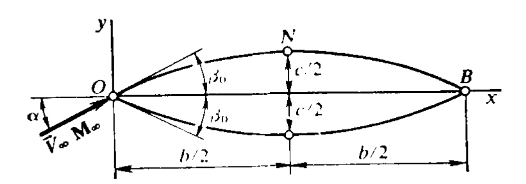


Fig. 7.5. Esquema de un perfil simétrico

Fig. 7.6. Perfil simétrico con punta en forma de cuña

fig. 7.5) viene asignado con la ecuación $y = \pm 2c(x/b)(1 - x/b)$, donde $c = 1$; $b = 20$.

7.21. Determinen los coeficientes de las fuerzas aerodinámicas, del momento de cabeceo, del centro de presión, así como el rendimiento aerodinámico del perfil (véase la fig. 7.5), descrito con la ecuación del contorno $y = \pm 2c(x/b)(1 - x/b)$, donde $c = 1$; $b = 20$. El perfil está situado bajo el ángulo de ataque $\alpha = 0{,}1$ rad en un flujo supersónico de aire con números $M_\infty = 3$ y 20. La razón de las capacidades caloríficas para el aire $k = c_p/c_v = 1{,}4$.

7.22. Calculen las características aerodinámicas de un perfil simétrico romboidal (de doble cuña) ($c = 2$; $b = 20$; fig. 7.7) alrededor del cual circula, bajo el ángulo de ataque $\alpha = 0{,}05$ rad, un flujo supersónico de aire con números $M_\infty = 3$ y 20. La razón de las capacidades caloríficas $k = c_p/c_v = 1{,}4$.

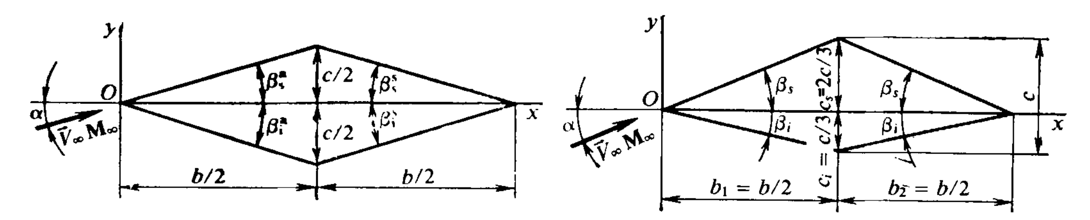


Fig. 7.7. Perfil simétrico en forma de rombo

Fig. 7.8. Perfil cuadrangular

7.23. Hallen la ecuación de la polar de resistencia $c_{x\,\mathrm{ch}} = f(c_{y_a})$ y determinen el ángulo de ataque α_0 correspondiente a la fuerza de sustentación nula ($c_{y_a} = 0$) para el perfil cuadrangular (fig. 7.8) de un grosor relativo $\bar{c} = c/b = 0{,}15$, para $M_\infty = 2$. Efectúen el análisis de las relaciones obtenidas en función de la forma del perfil y el número M_∞ del flujo incidente.

7.24. Para los datos del problema 7.23 determinen el rendimiento aerodinámico máximo y el ángulo de ataque más conveniente.

7.25. Calculen las características aerodinámicas de un perfil asimétrico romboidal ($b = 8$; $c_s = 2$; $|c_i| = 1$; fig. 7.9) alrededor del cual circula un flujo supersónico de aire con número $M_\infty = 5$ y razón de las capacidades caloríficas $k = c_p/c_v = 1{,}4$, bajo ángulo nulo de ataque.

7.26. ¿Cuáles serán los coeficientes aerodinámicos y las fuerzas y el momento, correspondientes a ellos, para el sector de longitud $\Delta z = 1$ m de un ala delgada (fig. 7.10) con ángulo de deslizamiento $\chi = 1{,}05$ rad, alrededor de la cual circula un flujo de aire a velocidad $V_\infty = 100$ m/s bajo el ángulo de ataque $\alpha = 0{,}1$ rad? El contorno del perfil con cuerda $b_n = 1$ m está dado con las ecuaciones $y_s = 0{,}2\,x\,(1 - x/b_n)$; $y_i = -0{,}12\,x\,(1 - x/b_n)$. La densidad del flujo de aire $\rho_\infty = 1{,}225$ kg/m³.

7.27. Un ala deslizante (véase el problema 7.26 y la fig. 7.10) está en movimiento a una velocidad que corresponde al número $M_\infty = 0{,}5$ bajo el ángulo de ataque

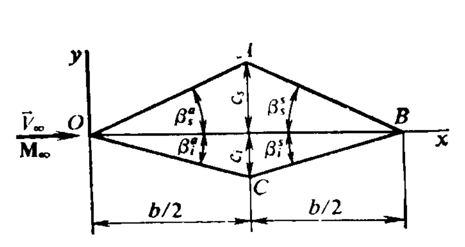


Fig. 7.9. Perfil asimétrico en forma de rombo

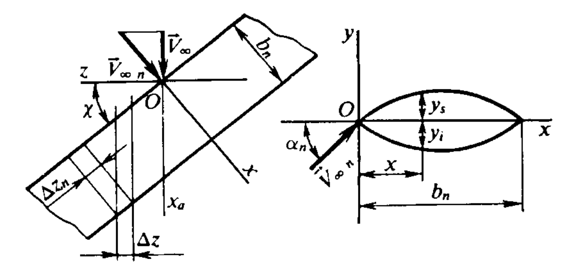


Fig. 7.10. Esquema de un ala deslizante

$\alpha = 0{,}1$ rad. Determinen los coeficientes aerodinámicos de esta ala, calculados según la presión dinámica $q_\infty = 0{,}5\,\rho_\infty V_\infty^2$.

7.28. Determinen las características aerodinámicas de un ala deslizante (véase el problema 7.26 y la fig. 7.10) en movimiento por la atmósfera cerca de la superficie terrestre con $M_\infty = 1{,}2$, bajo el ángulo de ataque $\alpha = 0{,}1$ rad.

7.29. Calculen la circulación alrededor del sector de un ala de longitud $\Delta z = 1$ m en movimiento con deslizamiento, bajo un ángulo $\chi = 1{,}05$ rad con $M_\infty = 3$, en un medio aéreo ($k = c_p/c_v = 1{,}4$) a una presión $p_\infty = 9{,}8\cdot 10^4$ Pa. El contorno del perfil simétrico en los ejes de coordenadas xOy (fig. 7.10) está dado con la ecuación $y = \pm 2c\,(x/b_n)\,(1 - x/b_n)$, donde $c = 0{,}05$ m es el grosor máximo; $b_n = 1$ m, la cuerda del perfil.

7.30. Determinen los parámetros de la circulación de un flujo de gas en disociación, alrededor de un perfil aguzado (véase la fig. 7.5), cuyo contorno se describe con la ecuación $y = \pm 2\,c\,(x/b)\,(1 - x/b)$, donde $c = 2$; $b = 4$. El perfil se mueve en la atmósfera de aire a la altura $H = 20$ km y velocidad $V_\infty = 5000$ m/s, bajo el ángulo de ataque $\alpha = 0{,}09$ rad.

7.31. Hallen los coeficientes aerodinámicos del perfil de un ala en forma de placa plana con cuerda $b = 2$ m y de longitud $l = 5$ m (fig. 7.11) alrededor de la cual circula un flujo supersónico de aire en disociación bajo el ángulo de ataque $\alpha = 0{,}35$ rad, así como la correspondiente fuerza de sustentación, la resistencia y el momento respecto del borde de ataque. Los parámetros del flujo incidente: $V_\infty = 5000$ m/s; $p_\infty = 9{,}8\cdot 10^4$ Pa; $T_\infty = 4000$ K.

7.32. Determinen los parámetros del gas en la parte superior de un perfil, en el punto A con coordenada $x_A = 6$, a condición de que alrededor del perfil circula un flujo de aire en disociación, bajo el ángulo de ataque $\alpha = 0{,}3$ rad, a una velocidad $V_\infty = 4000$ m/s. La presión y la temperatura del flujo incidente son $p_\infty = 9{,}8\cdot 10^2$ Pa, $T_\infty = 4000$ K, respectivamente. La ecuación del contorno del perfil (fig. 7.12): $y = \pm 2\,c\,(x/b)\,(1 - x/b)$, donde $c = 1$; $b = 10$.

7.33. En el lado superior de una placa (véase la fig. 7.11), alrededor de la cual, bajo el ángulo de ataque $\alpha = 0{,}35$ rad, circula un flujo de aire en disociación, son conocidas la presión $p_\infty = 9{,}8 \cdot 10^2$ Pa, la temperatura $T_\infty = 3500$ K y la velocidad $V_\infty = 4000$ m/s. Determinen los parámetros del flujo incidente.

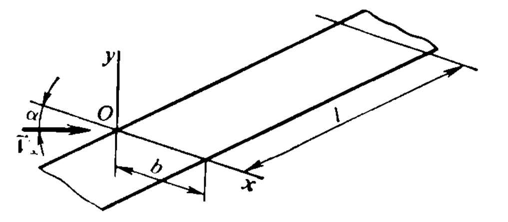


Fig. 7.11. Placa en un flujo supersónico

Fig. 7.12. Perfil simétrico curvilíneo

7.34. Un perfil descrito con la ecuación del contorno (fig. 7.12) $y = \pm 2c\,(x/b)\,(1 - x/b)$, donde $c = 1$, $b = 10$, está sometido, bajo el ángulo de ataque $\alpha = 0{,}3$ rad, a la circulación de un flujo de aire en disociación a la velocidad $V_\infty = 4000$ m/s. La presión y la temperatura del aire en dicho flujo son $p_\infty = 9{,}8 \cdot 10^2$ Pa, $T_\infty = 5000$ K, respectivamente. Hallen las coordenadas y_A, x_A del punto A, en el que el valor del número $\mathbf{M}_A = \mathbf{M}_\infty + 0{,}5$.

Solución de los problemas y respuestas a las preguntas

7.1. En correspondencia con los datos de la teoría linealizada de la circulación los ángulos de ataque de perfiles delgados, uno de los cuales está situado en un flujo incompresible (α_{inc}), mientras que el otro, en un flujo compresible (α), están entre sí ligados con la dependencia $\alpha_{\text{inc}} = \alpha\,(\gamma/\sqrt{1 - \mathbf{M}_\infty^2})$, donde γ es cierto parámetro, tomado al azar, que se determina de la condición $\varphi_0' = \varphi'\gamma$, en la que φ_0' y φ' son los potenciales de velocidades en los flujos incompresible y compresible, respectivamente.

Las correspondientes coordenadas de los puntos del perfil y_0 e y se hallan de la relación $y_0 = y\,(\gamma/\sqrt{1 - \mathbf{M}_\infty^2})$. Según el planteamiento del problema φ_0' y φ' son iguales; por lo tanto el parámetro $\gamma = 1$, de acuerdo con lo cual

$$\alpha_{\text{inc}} = \alpha/\sqrt{1 - \mathbf{M}_\infty^2}\,; \tag{7.1}$$

$$y_0 = y/\sqrt{1 - \mathbf{M}_\infty^2}\,. \tag{7.2}$$

Así, pues, a un flujo linealizado de un gas compresible, que circula alrededor de un perfil delgado, le corresponde el flujo de un fluido incompresible que tenga el mismo potencial de velocidades, pero que circule alrededor de un perfil cuyo grosor, lo mismo que el ángulo de ataque, es mayor $1/\sqrt{1 - \mathbf{M}_\infty^2}$ veces.

Desde el punto de vista físico esto encuentra su explicación en el hecho de que con el aumento del número $\mathbf{M}_\infty$ de la circulación subsónica, la propiedad de compresibilidad del medio conduce al aumento más intenso de las velocidades de perturbación, provocadas por la presencia de un sólido delgado, con la particularidad de que el aumento es proporcional a $1/\sqrt{1 - \mathbf{M}_\infty^2}$. Semejante fenómeno está condicionado porque en el gas compresible, al aumentar las velocidades locales en los

hilillos junto al sólido, la disminución de la presión acarrea el decrecimiento de la densidad, lo que, a su vez, debido a la constancia del caudal local de los hilillos, igual al caudal $\rho_\infty V_\infty$ en el flujo no perturbado delante del sólido, debe ser compensado por un crecimiento más notorio de la velocidad local que en el flujo compresible, siendo iguales las demás condiciones. Este crecimiento de las velocidades de perturbación en el flujo compresible se compensa con el aumento del grosor y el ángulo de ataque del mismo perfil, pero alrededor del cual circula el flujo de un fluido incompresible.

7.2. En correspondencia con la teoría linealizada de la circulación en dos perfiles iguales, situados bajo un mismo ángulo de ataque, los coeficientes de presión en los correspondientes puntos de los perfiles en flujos compresible $\bar{p}$ e incompresible $\bar{p}_{\text{inc}}$ están ligados entre sí con la dependencia

$$\bar{p} = \bar{p}_{\text{inc}} / \sqrt{1 - \mathrm{M}_\infty^2}. \tag{7.3}$$

Empleando las conocidas expresiones para los coeficientes de la fuerza de sustentación y del momento longitudinal

$$c_{y_a} = \int_0^1 (\bar{p}_1 - \bar{p}_s)\, d\bar{x}; \tag{7.4}$$

$$m_{z_a} = \int_0^1 (\bar{p}_1 - \bar{p}_s)\, \bar{x}\, d\bar{x}, \tag{7.5}$$

así como la dependencia (7.3), hallamos la dependencia entre los coeficientes c_{y_a} y m_{z_a} en flujos compresible e incompresible:

$$c_{y_a} = c_{y_a\,\text{inc}} / \sqrt{1 - \mathrm{M}_\infty^2}; \tag{7.6}$$

$$m_{z_a} = m_{z_a\,\text{inc}} / \sqrt{1 - \mathrm{M}_\infty^2}. \tag{7.7}$$

De las fórmulas (7.6) y (7.7) se desprende que para un mismo perfil, situado bajo igual ángulo de ataque, los coeficientes de la fuerza de sustentación y del momento en el flujo compresible son $1/\sqrt{1 - \mathrm{M}_\infty^2}$ veces mayores que en el incompresible. Semejante variación de los coeficientes aerodinámicos está condicionada por un aumento más considerable de las velocidades locales en un perfil alrededor del cual circula un flujo compresible (véase el problema 7.1), lo que conduce a un enrarecimiento más fuerte (reducción del coeficiente de presión) en el lado superior del perfil (con ángulo positivo de ataque). Como sigue de (7.4) y (7.5), en este caso, los coeficientes de la fuerza de sustentación y del momento crecen.

7.3. Con (7.6) hallamos el coeficiente de la fuerza de sustentación de un perfil en el flujo compresible: $c_{y_a} = 0{,}3464$.

De acuerdo con la fórmula de Zhukovski la fuerza de sustentación del ala de envergadura unitaria de perfil prefijado, alrededor de la cual circula el flujo incompresible, $Y_{a\,\text{inc}} = \rho_\infty V_\infty \Gamma_{\text{inc}}$.

Además, $Y_{a\,\text{inc}} = c_{y_a\text{inc}} \rho_\infty V_\infty^2 b/2$. De aquí, la circulación de la velocidad $\Gamma_{\text{inc}} = c_{y_a\text{inc}} V_\infty b/2 = c_{y_a\text{inc}} \mathrm{M}_\infty a_\infty b/2 = 51\ \mathrm{m^2/s}$.

Para un flujo linealizado el coeficiente $c_{y_a\,\text{inc}}$ está ligado con el coeficiente c_{y_a} y el número M_∞ con la dependencia (7.6). Tomando en consideración la última

fórmula podemos considerar que una dependencia análoga existe entre Γ_{inc}, Γ y M_∞. Así, pues, para un flujo compresible $\Gamma = c_{y_a} V_\infty b/2$ y

$$\Gamma = \Gamma_{\text{inc}} (c_{y_a}/c_{y_a \text{ inc}}) = \Gamma_{\text{inc}}/\sqrt{1-M_\infty^2}. \quad (7.8)$$

De acuerdo con esto $\Gamma = 58{,}89$ m²/s.

7.4. Para un perfil delgado en un flujo incompresible el coeficiente de la fuerza de sustentación

$$c_{y_a \text{ inc}} = 2\pi\alpha_{\text{inc}}, \quad (7.9)$$

de donde $\alpha_{\text{inc}} = c_{y_a \text{inc}}/(2\pi) = 0{,}02387$.

En correspondencia con la teoría linealizada de la circulación, en el flujo compresible tendrá el mismo coeficiente de la fuerza de sustentación, que en el incompresible, otro perfil adelgazado $1/\sqrt{1-M_\infty^2}$ veces y sometido a la circulación bajo un ángulo de ataque menor

$$\alpha = \alpha_{\text{inc}} \sqrt{1-M_\infty^2}. \quad (7.10)$$

Después de poner los datos hallamos $\alpha = 0{,}02067$.

7.5. De la ecuación linealizada de Bernoulli $p - p_\infty = -\rho_\infty V_\infty u$, donde p es la presión en el flujo perturbado, hallamos

$$\Delta p/p_\infty = (p - p_\infty)/p_\infty = -kM_\infty^2 u/V_\infty, \quad (7.11)$$

ya que $a_\infty^2 = kp_\infty/\rho_\infty$ y $V_\infty^2/a_\infty^2 = M_\infty^2$. Haciendo $k = c_p/c_v = 1{,}4$, hallamos la variación relativa de la presión: $\Delta p/p_\infty = 0{,}00896$. La velocidad del sonido en el flujo perturbado $a = a_\infty - (k-1)\, V_\infty u/(2a_\infty)$, de donde

$$\Delta a/a_\infty = (a - a_\infty)/a_\infty = -(k-1)\, M_\infty^2 u/(2V_\infty). \quad (7.12)$$

Poniendo aquí los valores, obtenemos $\Delta a/a_\infty = -0{,}00128$.

De la relación $M = M_\infty \{1 + (u/V_\infty)\, [1 + (k-1)\, M_\infty^2/2]\}$, hallamos

$$\Delta M/M_\infty = (M - M_\infty)/M_\infty = (u/V_\infty)[1 + (k-1)M_\infty^2/2] \quad (7.13)$$

o bien $\Delta M/M_\infty = 0{,}01128$.

7.6. Recibe el nombre de *número crítico* $M_{\infty\ \text{crít}}$ tal número de Mach de un flujo no perturbado subsónico, con el cual en cierto punto de una superficie sometida a circulación la velocidad se hace igual a la local del sonido.

Al aumentar el grosor del perfil disminuye el número $M_{\infty\ \text{crít}}$ del flujo subsónico incidente. Esto se explica debido a que el aumento del grosor del perfil conduce a una mayor constricción del hilillo del fluido y al aumento de la velocidad local del flujo. Por consiguiente, la velocidad sónica en el perfil engrosado se alcanza a menor velocidad del flujo incidente. Al crecer el ángulo de ataque del perfil el número $M_{\infty\ \text{crít}}$ disminuye, lo que se explica, asimismo, por la mayor constricción de los hilillos del fluido y la disminución de la velocidad local subsónica, relacionada con esto.

7.7. De acuerdo con la hipótesis de Kristianóvich la velocidad sónica local, a la que corresponde el número crítico $M_{\infty\ \text{crít}}$ del flujo incidente, surge en aquel lugar del perfil donde, con la circulación de un flujo incompresible, se observa mayor enrarecimiento. S. A. Kristianóvich estableció la ligazón entre el coeficiente mínimo de presión $p_{\text{mín inc}}$, correspondiente a dicho enrarecimiento, y el número $M_{\infty\ \text{crít}}$. En correspondencia con la distribución prefijada $\bar{p}$ en la fig. 7.1, hallamos

$\bar{p}_{\min\ \text{inc}} = -1{,}25$. Con este valor, en la gráfica de Kristianóvich $M_{\infty\text{crít}} = f(\bar{p}_{\min\ \text{inc}})$ hallamos $M_{\infty\text{crít}} = 0{,}5$.

También es posible calcular $M_{\infty\ \text{crít}}$ por el método de Kristianóvich basado en la aplicación de la tabla de velocidades relativas $\Lambda = f(\lambda)$ obtenida por él.

Por el valor de $\bar{p}_{\min\ \text{inc}} = -1{,}25$ calculamos la velocidad relativa del flujo convencional incompresible alrededor del perfil: $\Lambda_\infty = V_{\infty\ \text{inc}}/a^* = 0{,}7577/\sqrt{1 - \bar{p}_{\min\ \text{inc}}} = 0{,}5051$. En la tabla de Kristianóvich $\Lambda = f(\lambda)$ hallamos los valores de $\lambda_{\infty\ \text{crít}} = 0{,}5371$ y $M_{\infty\ \text{crít}} = 0{,}5025$ correspondientes a $\Lambda_\infty = 0{,}5051$.

7.8. Determinamos el número M correspondiente al movimiento asignado del ala. En las tablas de la atmósfera normal para la altura $H = 5$ km, hallamos $a_\infty = 320{,}5$ m/s y calculamos $M_\infty = V_\infty/a_\infty = 0{,}6240$.

De acuerdo con el planteamiento del problema este número M es el crítico $M_{\infty\ \text{crít}}$. Empleando la gráfica de Kristianóvich $M_{\infty\ \text{crít}} = f(\bar{p}_{\min\ \text{inc}})$ determinamos el coeficiente mínimo de presión en el perfil del ala correspondiente a $M_{\infty\ \text{crít}} = 0{,}6240$; $\bar{p}_{\min\ \text{inc}} = -0{,}7$. Según la hipótesis de Kristianóvich en ese lugar del perfil donde $\bar{p} = \bar{p}_{\min\ \text{inc}}$ la velocidad local es igual a velocidad local del sonido. Ella se determina con la ecuación $V = V_\infty\sqrt{1 - \bar{p}_{\min\ \text{inc}}} = 260{,}7$ m/s.

7.9. La velocidad local en la superficie está ligada con el coeficiente de presión mediante la relación (3.28). Como a la velocidad local límite corresponde el valor mínimo del coeficiente de presión, entonces, $V_{\text{lím}} = V_\infty\sqrt{1 - \bar{p}_{\min\ \text{inc}}}$, de donde $\bar{p}_{\min\ \text{inc}} = 1 - (V_{\text{lím}}/V_\infty)^2 = -1{,}25$.

En la gráfica de Kristianóvich $M_{\infty\ \text{crít}} = f(\bar{p}_{\min\ \text{inc}})$ hallamos el valor del número crítico de Mach del flujo incidente correspondiente a $\bar{p}_{\min\ \text{inc}} = -1{,}25$; $M_{\infty\ \text{crít}} = 0{,}5$.

A la altura de $H = 7000$ m, tendremos $T_\infty = 228 - 0{,}0065\ H = 242{,}5$K.

Para $k = c_p/c_v = 1{,}4$ y $R = 287$ J/(kg·K) la velocidad del sonido correspondiente a la indicada temperatura $a_\infty = \sqrt{kRT_\infty} = 312{,}2$ m/s. La velocidad del flujo que corresponde a $M_{\infty\ \text{crít}}$, $V_{\infty\ \text{crít}} = M_{\infty\ \text{crít}} a_\infty = 156{,}1$ m/s.

7.10. Determinemos el coeficiente de la fuerza sustentadora a la velocidad de vuelo $V_\infty = 250$ m/s y la altura $H = 8$ km, siendo $\alpha = 0{,}07$ rad, con la fórmula $c_{y_a} = 2Y_a/(\rho_\infty V_\infty^2 S_{\text{ala}})$, en la que $\rho_\infty = 0{,}5259$ kg/m³, se ha hallado en las tablas de la atmósfera normal para la altura $H = 8$ km. Calculamos $c_{y_a} = 0{,}1193$.

Determinemos el número M_∞ correspondiente a las indicadas condiciones de movimiento. Para $H = 8$ km, en las tablas de la atmósfera normal hallamos $a_\infty = 308{,}1$ m/s. Entonces $M_\infty = V_\infty/a_\infty = 0{,}8114$, es decir, la circulación alrededor del ala se efectúa con el flujo de un fluido compresible.

Empleando la dependencia (7.6) entre los coeficientes c_{y_a} y $c_{y_a\ \text{inc}}$ en los flujos compresible e incompresible encontramos $c_{y_a\ \text{inc}} = 0{,}06973$. Además, el coeficiente de la fuerza de sustentación del perfil en el flujo incompresible se determina con la relación (6.5), de donde el ángulo de ataque de la fuerza libre de sustentación $\alpha_0 = \alpha - c_{y_a\ \text{inc}}/c_{y_a}^{\alpha} = 0{,}05732$.

En el flujo incompresible con $\alpha = 0{,}1$ rad [véase (6.5)] el coeficiente de sustentación del perfil $c_{y_a\text{inc}} = 0{,}2347$. A la velocidad del flujo $V_\infty = 200$ m/s, a la altura $H = 8$ km, corresponde el número $M_\infty = V_\infty/a_\infty = 0{,}6491$.

En el flujo compresible ($M_\infty = 0{,}6491$), de acuerdo con (7.6), el coeficiente de la fuerza de sustentación $c'_{y_a} = 0{,}3085$.

7.11. En la gráfica de la fig. 7.2 establecemos que con $M_\infty = 0,5$ el coeficiente mínimo de presión en el perfil $\bar{p}_{min} = -1,0$. Calculemos el coeficiente mínimo de presión en un flujo incompresible que corresponda a dicho valor. Primero, para $k = 1,4$, determinamos la velocidad relativa $\lambda = \lambda_\infty$ que corresponde al número $M = M_\infty = 0,5$ [véase (3.40)], $\lambda_\infty = 0,5345$.

Según este valor, en la tabla de Kristianóvich $\Lambda = f(\lambda)$ hallamos la velocidad relativa del flujo convencional incompresible: $\Lambda_\infty = 0,4981$. A continuación, por el coeficiente $\bar{p}_{min} = -1,0$, determinamos la razón entre las presiones absolutas: $p_{min}/p_\infty = \bar{p}_{min} k M_\infty^2/2 + 1 = 0,825$.

La velocidad local relativa

$$\lambda = \{[(k+1)/(k-1)]\,[1 - (p_{min}/p_\infty)^{(k-1)/k}\,(1 + [(k - 1)/2]\,M_\infty^2)^{-1}]\}^{1/2} = 0,7692. \tag{7.14}$$

Según el valor $\lambda = 0,7692$, en la tabla $\Lambda = f(\lambda)$ encontramos la velocidad local relativa del flujo convencional incompresible $\Lambda = 0,6686$. Empleando la ecuación de Bernoulli calculamos el correspondiente coeficiente de presión: $\bar{p}_{min\ inc} = 1 - (\Lambda/\Lambda_\infty)^2 = -0,8018$.

En la gráfica de Kristianóvich $M_{\infty\ crit} = f(\bar{p}_{min\ inc})$ determinamos el número crítico M del flujo incidente: $M_{\infty\ crit} \approx 0,58$.

7.12. En la fig. 7.3 hallamos el coeficiente mínimo de presión $\bar{p}_{min\ inc} = -0,8$ y, de acuerdo con él, determinamos en la gráfica de Kristianóvich $M_{\infty crit} = f(\bar{p}_{min\ inc})$ el número crítico de Mach $M_{\infty\ crit} = 0,58$. Como el número asignado $M_\infty = 0,5$ es menor que $M_{\infty\ crit} = 0,58$, el régimen de circulación del flujo compresible alrededor del perfil es subcrítico y para el recálculo de la presión se puede utilizar el método de Kristianóvich. Según el número $M_\infty = 0,5$, para $k = 1,4$, calculamos la velocidad relativa $\lambda_\infty = 0,5345$ (véase el problema 7.11).

En la tabla de Kristianóvich $\Lambda = f(\lambda)$ encontramos la velocidad convencional del flujo incompresible $\Lambda_\infty = 0,4981$ y por la ecuación de Bernoulli, prefijando los valores a recalcular de los coeficientes de presión en un flujo incompresible ($\bar{p}_{inc}$), calculamos las velocidades locales relativas del flujo convencional incompresible: $\Lambda = \Lambda_\infty \sqrt{1 - \bar{p}_{inc}}$. Con los valores hallados de Λ, en la tabla $\Lambda = f(\lambda)$ encontramos las velocidades locales relativas del flujo real λ. A continuación, por las fórmulas del flujo isentrópico determinamos la razón de las presiones:

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{1-(k-1)\lambda^2/(k+1)}{1-(k-1)\lambda_\infty^2/(k+1)}\right)^{k/(k-1)} = \frac{\pi(\lambda)}{\pi(\lambda_\infty)}$$

y el coeficiente de presión:

$$\bar{p} = [2/(kM_\infty^2)]\,(p/p_\infty - 1) = [2/(kM_\infty^2)]\,[\pi(\lambda)/\pi(\lambda_\infty) - 1].$$

P. ej., para el punto en el que $\bar{p}_{inc} = 0,2$, tenemos $\Lambda = 0,4451$; $\lambda = 0,4652$; $p/p_\infty = 1,041$; $\bar{p} = 0,2286$.

Los resultados del cálculo de la distribución del coeficiente de presión por el perfil para $M_\infty = 0,5$, según el método de Kristianóvich, se muestran en la fig. 7.13.

7.13. Para empezar hallamos el número crítico M del perfil, que corresponde a la distribución asignada de $\bar{p}$ (véase la fig. 7.4). Por el número $M = M_{\infty 1} = 0,4$, y $k = 1,4$, según la fórmula (3.40), determinamos $\lambda = \lambda_{\infty 1} = 0,4311$ y en la tabla de Kristianóvich $\Lambda = f(\lambda)$, para este valor de $\lambda_{\infty 1}$, encontramos el valor de $\Lambda_{\infty 1} = 0,4195$.

Como en la fig. 7.4 el coeficiente mínimo de presión $\bar{p}_{\min} = -0{,}6$, tendremos $p_{\min}/p_\infty = \bar{p}_{\min}\, k\, \mathrm{M}_{\infty 1}^2/2 + 1 = 0{,}9328$.

En correspondencia con esto la velocidad local relativa [véase (7.14)] $\lambda = 0{,}5503$. Para este valor de λ, en la tabla $\Lambda = f(\lambda)$, encontramos el valor de $\Lambda = 0{,}5144$ y, seguidamente, conociendo $\Lambda_{\infty 1} = 0{,}4195$, determinamos el coeficiente $\bar{p}_{\min\ \mathrm{inc}} = 1 - (\Lambda/\Lambda_\infty)^2 = -0{,}5036$. Empleando este valor, en la gráfica de Kristianóvich $\mathrm{M}_{\infty\ \mathrm{crít}} = f(\bar{p}_{\min\ \mathrm{inc}})$, hallamos $\mathrm{M}_{\infty\ \mathrm{crít}} = 0{,}66$. Como el número prefijado $\mathrm{M}_{\infty 2} < M_{\infty\ \mathrm{crít}}$, el recálculo de la distribución de presión para el número $\mathrm{M}_{\infty 2} = 0{,}6$ puede realizarse con el método de Kristianóvich.

Para concretizar elegimos en la curva (véase la fig. 7.4) el punto con $\bar{p}' = 0{,}4$ y hallamos el valor de $\bar{p}''$ en ese punto correspondiente a $\mathrm{M}_{\infty 2} = 0{,}6$. Primero determinamos la razón de las presiones $p'/p_\infty = \bar{p}'\, k\, \mathrm{M}_{\infty 1}^2/2 + 1 = 1{,}045$, a continua-

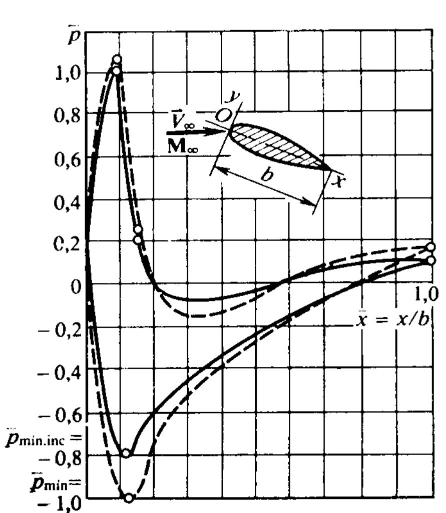


Fig. 7.13. Diagramas de coordenadas para un perfil simétrico:
———, flujo incompresible; — — — —, flujo compresible

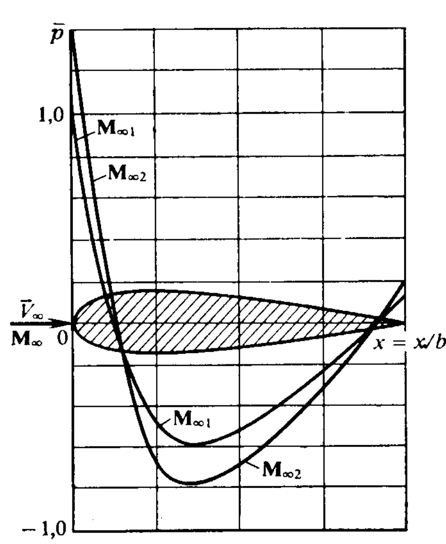


Fig. 7.14. Diagramas de coordenadas para un perfil simétrico en un flujo subsónico

ción, con la fórmula (7.14), suponiendo que en ella $p_{\min} = p'$, calculamos la velocidad local relativa $\lambda' = 0{,}3462$ y en la tabla $\Lambda = f(\lambda)$ encontramos el valor de $\Lambda' = 0{,}3365$. El correspondiente coeficiente de presión del fluido incompresible $\bar{p}_{\mathrm{inc}} = 1 - (\Lambda'/\Lambda_{\infty 1})^2 = 0{,}3566$.

Efectuamos el recálculo de este coeficiente para el número $\mathrm{M}_{\infty 2} = 0{,}6$ (véase la solución del problema 7.12). Haciendo $\mathrm{M} = \mathrm{M}_{\infty 2}$, con (3.40) determinamos el valor de $\lambda = \lambda_{\infty 2} = 0{,}6348$ y en la tabla $\Lambda = f(\lambda)$ hallamos $\Lambda_{\infty 2} = 0{,}5831$. Ahora, para el coeficiente de presión calculado $\bar{p}_{\mathrm{inc}} = 0{,}3566$ calculamos $\Lambda'' = \Lambda_{\infty 2}\sqrt{1 - \bar{p}_{\mathrm{inc}}} = 0{,}4677$. En la tabla $\Lambda = f(\lambda)$ vemos que a este valor corresponde $\lambda'' = 0{,}4462$.

Hallemos la razón de las presiones

$$p''/p_\infty = \{[1 - (k-1)\,\lambda''^2/(k+1)]/[1 - (k-1]\,\lambda_{\infty 2}^2/(k+1)]\}^{k/(k-1)} = 1{,}131$$

y el correspondiente coeficiente de presión $\bar{p}'' = [2/(kM^2_{\infty 2})](p''/p_\infty - 1) = 0{,}5198$.

De manera análoga se realiza el recálculo de estos coeficientes para otros puntos de la curva. Los resultados de dicho recálculo se encuentran en la fig. 7.14.

7.14. Para el flujo incidente hallamos el número crítico $M_{\infty\ crít}$. Empleando el método de Kristianóvich, por el valor de $\bar{p}_{mín\ inc} = -1{,}25$, determinamos $M_{\infty\ crít} = 0{,}5$ (véase la solución del problema 7.7). Para los números M_∞, que varían en el intervalo $M_{\infty\ crít} < M_\infty < 1$, la circulación alrededor del perfil se caracteriza porque en su entorno surge una zona de velocidades supersónicas y, debido a esto, se forma una onda de choque local. Esto conduce a la redistribución de la presión en la cola del perfil y a la aparición de una resistencia adicional, llamada de ondas de choque. Según datos, proporcionados por Serebriski y Kristianóvich, para $M_\infty \leqslant M_{\infty crít} + 0{,}15$, el coeficiente de dicha resistencia

$$c_{x\ ch} = A\ (M_\infty - M_{\infty\ crít})^3, \tag{7.15}$$

donde, de acuerdo con datos experimentales, $A = 11$.

En particular, siendo $M_\infty = 0{,}55$, el coeficiente de resistencia de ondas de choque $c_{x\ ch} = 0{,}001375$.

Determinamos la fuerza de la resistencia de ondas de choque del sector del ala con las dimensiones prefijadas ($b = 2$ m, $l = 1$ m) y $M_\infty = 0{,}55$. A la velocidad del sonido en el aire $a_\infty = 341$ m/s la de vuelo cerca de la Tierra $V_\infty = M_\infty a_\infty = 187{,}6$ m/s. La fuerza de la resistencia de ondas de choque $X_{ch} = c_{x ch} \times (\rho_\infty V_\infty^2/2) S_{ala}$, donde $\rho_\infty V_\infty^2/2 = 2{,}156 \times 10^4$ N/m²; $S_{ala} = l\ b = 2$ m². Tomando todo esto en consideración $X_{ch} = 59{,}29$ N.

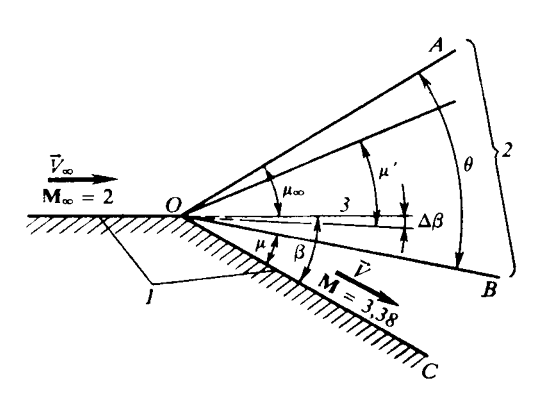


Fig. 7.15. Flujo supersónico junto a un ángulo obtuso:
1, superficie sometida a circulación; *2*, abanico de enrarecimiento; *3*, dirección del flujo incidente

7.15. El flujo plano supersónico que circula alrededor de la superficie, que con la dirección del flujo no perturbado forma un ángulo obtuso mayor que 180°, lleva el nombre de *abanico o flujo en expansión de Prandtl—Meyer*. Envolviendo el ángulo, el flujo se expande y, por consiguiente, su velocidad aumenta y la presión y la densidad disminuyen. Se llama *onda centrada de enrarecimiento* (*abanico de expansión*) el conjunto de la infinidad de líneas de Mach que salen de los puntos de la superficie alrededor de la cual circula un flujo supersónico considerado como el flujo de Prandtl—Meyer (fig. 7.15). Este abanico de enrarecimiento está limitado por la línea de Mach OA [su ángulo de inclinación hacia el vector de velocidad $\vec{V}_\infty$ es igual a $\mu_\infty = \arcsen (1/M_\infty)$] y la línea de Mach OB, para la que el ángulo de su inclinación hacia la nueva dirección del flujo OC es igual a $\mu = \arcsen (1/M)$, con la particularidad de que debido a la expansión del flujo supersónico $M > M_\infty$ y $\mu < \mu_\infty$.

De la teoría de características es conocido que al desviarse el flujo al ángulo β

$$\omega = \beta + \omega_\infty, \tag{7.16}$$

donde ω y ω_∞ son funciones de los números M en los flujos desviado e incidente, respectivamente.

Con $k = 1,4$, en las tablas del flujo isentrópico supersónico, para $M_\infty = 2$, hallamos $\omega_\infty = 26,4°$. Entonces (tomando en consideración que $\beta = 0,52$ rad $= 30°$), la función $\omega = 56,4°$. En esa misma tabla, de acuerdo con el valor de $\omega = 56,4°$ obtenido, para la superficie desviada encontramos el número $M = 3,38$. El correspondiente ángulo de Mach $\mu = \arcsin(1/M) = 17,1°$. La razón de las presiones

$$p/p_\infty = \{[1 + (k-1)M_\infty^2/2]/[1 + (k-1)M^2/2]\}^{k/(k-1)} = 0,1218.$$

De modo análogo calculamos la razón de las temperaturas

$$T/T_\infty = [1 + (k-1)M_\infty^2/2]/[1 + (k-1)M^2/2] = 0,5479.$$

En la fig. 7.15 vemos que el ángulo del abanico de enrarecimiento

$$\theta = (\mu_\infty + \beta) - \mu, \tag{7.17}$$

donde $\mu_\infty = \arcsin(1/M_\infty) = 30°$. Así, pues, $\theta = 42,9°$.

Al pasar por el abanico de enrarecimiento el flujo gira a un ángulo $\beta = 30°$ y sufre expansión. Con ello, el número M aumenta del valor $M_\infty = 2$ hasta $M = 3,38$ en la superficie desviada. Hallemos el número M′ que corresponde a la desviación del flujo de la dirección inicial a cierto ángulo $\Delta\beta$. Para ello empleamos la ecuación

$$\omega = \Delta\beta + \omega_\infty. \tag{7.18}$$

Prefijando el valor de $\Delta\beta$ encontramos el valor de ω y, seguidamente, el del número M′. En particular, tomamos $\Delta\beta = 3,6°$, entonces $\omega = 30°$. En las tablas del flujo isentrópico supersónico encontramos el correspondiente número $M' = 2,13$ y el ángulo $\mu' = \arcsin(1/M') = 28°$. La línea de Mach, situada en el abanico de enrarecimiento, se traza desde el punto de inflexión bajo el ángulo $\mu' = 28°$ hacia el plano desviado del sentido del vector $\vec{V}_\infty$ bajo el ángulo $\Delta\beta = 3,6°$. Prefijando una serie de valores del ángulo $\Delta\beta$ es posible efectuar el cálculo completo del flujo en el abanico de enrarecimiento.

7.16. Hallamos el parámetro de la semejanza hipersónica $K = M_\infty\alpha = 1$ y determinamos el correspondiente coeficiente de presión

$$\bar{p} = [(k+1)/2 - \sqrt{[(k+1)/2]^2 + 4/K^2}]\alpha^2 = -0,132\,\alpha^2$$

o bien, con $\alpha = 0,1$ rad, el coeficiente $\bar{p} = -0,01132$.

Para la placa hallamos $M = [1/M_\infty - (k-1)\alpha/2]^{-1} = 12,5$.

Investiguemos un flujo aerodinámico similar alrededor de la otra placa con ángulo de ataque $\alpha = 0,05$ rad. Para ella $K = M_\infty\alpha = 1$, por ello $M_\infty = K/\alpha = 20$.

Como la relación $\bar{p}/\alpha^2 = -1,132$, $\bar{p} = -1,132\,\alpha^2 = 2,825\cdot10^{-3}$. El correspondiente número $M = 25$.

7.17. Determinamos los parámetros de la semejanza supersónica para las placas $K_1 = M_{\infty1}\alpha = 0,5$; $K_2 = M_{\infty2}\alpha = 2$. Estos parámetros se diferencian considerablemente. El primero de ellos corresponde a la circulación linealizada, el segundo, a

la hipersónica. Para la *circulación linealizada* los coeficientes aerodinámicos se determinan por las siguientes fórmulas:

$$(\bar{p}_1-\bar{p}_s)/\alpha^2=c_{y_a}/\alpha^2=c_{x_a}/\alpha^3=4/K_1; \quad -m_{z_a}/\alpha^2=2/K_1.$$

El valor excesivo del coeficiente de presión en los lados inferior y superior de la placa $\bar{p}_1-\bar{p}_s=4\alpha^2/K_1=0{,}08$, mientras que los coeficientes aerodinámicos $c_{y_a}=4\alpha^2/K_1=0{,}08$, $c_{x_a}=4\alpha^3/K_1=0{,}008$; $-m_{z_a}=2\alpha^2/K_1=0{,}04$.

El correspondiente rendimiento aerodinámico $K=c_{y_a}/c_{x_a}=1/\alpha=10$ y el coeficiente del centro de presión $c_p=x_p/b=-m_{z_a}/c_{y_a}=0{,}5$.

Examinemos el caso de la *circulación hipersónica*. Los coeficientes aerodinámicos se calculan con las fórmulas

$$(\bar{p}_1-\bar{p}_s)/\alpha^2=c_{y_a}/\alpha^2=c_{x_a}/\alpha^3=2\bar{K}; \quad -m_{z_a}/\alpha^2=\bar{K},$$

donde $\bar{K}=\sqrt{[(k+1)/4]^2+1/K_2^2}$.

Después de poner aquí los valores de $K_2=2$ y $k=c_p/c_v=1{,}4$, obtenemos $\bar{K}=0{,}7810$. De acuerdo con esto $\bar{p}_1-\bar{p}_s=2\bar{K}\alpha^2=0{,}01562$; $c_{y_a}=2\bar{K}\alpha^2=0{,}01562$; $c_{x_a}=2\bar{K}\alpha^3=0{,}001562$; $-m_{z_a}=\bar{K}\alpha^2=0{,}00781$.

Notemos que el rendimiento aerodinámico y el coeficiente del centro de presión son los mismos que en el caso de la circulación linealizada.

7.18. Determinemos el carácter del flujo del gas en los lados superior e inferior del perfil. Para ello calculemos el ángulo β de inclinación de la tangente respecto del contorno del perfil:

$$dy/dx=\operatorname{tg}\beta=\pm 2\,(c/b)\,(1-2x/b)=\pm(1/3)\,(1-x/b).$$

En el punto yacente en el borde de ataque del perfil (véase la fig. 7.5) $(dy/dx)_0=\operatorname{tg}\beta_0=\pm 1/3$; $|\beta_0'|=18{,}43°$. Como el ángulo de ataque $\alpha=0{,}35$ rad $=20°$ es mayor que $\beta_0=18{,}43°$ junto a la punta del perfil, la circulación por el lado superior transcurrirá con expansión y en el inferior, con compresión provocada por el surgimiento de la onda de choque.

Examinemos la circulación a la largo del lado superior. En un punto arbitrario del contorno $\omega=\omega_\infty+(\alpha-\beta)$. En las tablas del flujo isentrópico supersónico, para $M_\infty=5$, hallamos $\omega_\infty=76{,}92°$ y determinamos $\omega=96{,}92°-\beta$. Según los valores de ω para los puntos elegidos con diversos ángulos de inclinación de las tangentes β, en las indicadas tablas encontramos los correspondientes números M, a partir de los que calculamos la razón de las presiones y el coeficiente de presión:

$$p/p_\infty=\{[1+(k-1)\,M_\infty^2/2]/[1+(k-1)\,M^2/2]\}^{k/(k-1)}=[6/(1+0{,}2M^2)]^{3,5};$$
$$\bar{p}=[2/(kM_\infty^2)]\,(p/p_\infty-1)\,]=0{,}05714\,(p/p_\infty-1).$$

Para los tres puntos O $(x=0)$, N $(x=b/2=6)$ y B $(x=b=12)$, mostrados en la fig. 7.5, los coeficientes de presión $\bar{p}_O=-1{,}123\cdot 10^{-2}$; $\bar{p}_N=-5\,472\times 10^{-2}$; $\bar{p}_B=-5{,}713\cdot 10^{-2}$.

Calculemos la circulación por el lado inferior del perfil (fig. 7.16). Determinamos los parámetros del gas en el punto O que yace inmediatamente detrás de la onda de choque oblicua. En este caso, los parámetros conocidos son el número $M_\infty=5$ y el ángulo de desviación del flujo detrás de la onda de choque $\beta_{ch}=\alpha+|\beta_0|=38{,}43°$.

El ángulo de inclinación de la onda $\theta_{ch\,O}$ se calcula con la ecuación

$$\operatorname{tg}\theta_{ch\,O} = \operatorname{ctg}\beta_{ch}\,[0{,}5\,(\rho_{ch}/\rho_\infty - 1) - \sqrt{(1/4)\,(\rho_{ch}/\rho_\infty - 1)^2 - (\rho_{ch}/\rho_\infty)\operatorname{tg}^2\beta_{ch}}\,], \quad (7.19)$$

en la que la razón de las densidades para las condiciones después y antes de la onda de choque

$$\rho_{ch}/\rho_\infty = M_\infty^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta_{ch\,O}/[2/(k+1) + (k-1)\,M_\infty^2\,\mathrm{sen}^2\theta_{ch\,O}/(k+1)]. \quad (7.20)$$

Con la primera aproximación prefijamos el valor límite de $\rho_{ch}/\rho_\infty = 6$ y por la ecuación (7.19) hallamos $\operatorname{tg}\theta_{ch\,O} = 1{,}171$; $\theta_{ch\,O} = 49{,}43°$.

El ángulo real de la onda de choque es mayor que el valor hallado de $\theta_{ch\,O}$, por lo que tomamos, aproximadamente, $\theta_{ch\,O} = 60°$ y, haciendo uso de (7.20), precisamos la razón de las densidades: $\rho_{ch}/\rho_\infty = 4{,}742$.

Ahora, con la ecuación (7.19), determinamos el ángulo de la onda de choque con la segunda aproximación: $\operatorname{tg}\theta_{ch\,O} = 1{,}474$; $\theta_{ch\,O} = 55{,}77°$.

Teniendo esto en cuenta encontramos los nuevos valores $\rho_{ch}/\rho_\infty = 4{,}643$; $\operatorname{tg}\theta_{ch\,O} = 1{,}502$; $\theta_{ch\,O} = 56{,}34°$.

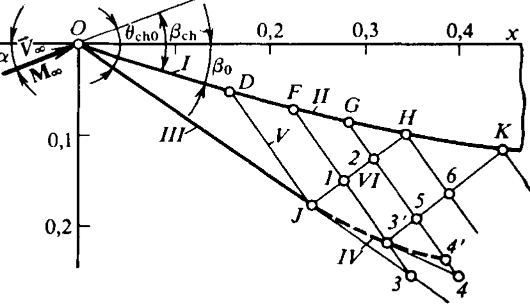


Fig. 7.16. Corriente supersónica del lado inferior del perfil:
I y *II*, sectores del perfil rectilíneo y curvilíneo; *III* y *IV*, sectores rectilíneo y curvilíneo de la onda de choque; *V* y *VI*, elementos de las características de las familias primera y segunda

Con esto acabamos las aproximaciones. Por los valores hallados de ρ_{ch}/ρ_∞ y $\theta_{ch\,O}$ se determina el número M_{ch} detrás de la onda de choque, así como la razón de las presiones estáticas p_{ch}/p_∞ en la onda de choque y las presiones de remanso p_0'/p_0 (p_0' es la presión de remanso detrás de la onda de choque):

$$M_{ch} = [2/(k+1)]^{1/2}/\{\mathrm{sen}\,(\theta_{ch\,O} - \beta_{ch})\,[(\rho_{ch}/\rho_\infty) - (k-1)/(k+1)]^{1/2}\}; \quad (7.21)$$

$$p_{ch}/p_\infty = [\rho_{ch}/\rho_\infty - (k-1)/(k+1)]/\{1 - [(k-1)/(k+1)]\,\rho_{ch}/\rho_\infty\}; \quad (7.22)$$

$$p_0'/p_0 = (p_\infty/p_{ch})^{1/(k-1)}(\rho_{ch}/\rho_\infty)^{k(k-1)}. \quad (7.23)$$

Ponemos en estas fórmulas los datos y obtenemos $M_{ch} = 1{,}413$; $p_{ch}/p_\infty = 19{,}72$; $p_0'/p_0 = 0{,}1241$.

En el punto O el coeficiente de presión $\bar{p} = (p_{ch} - p_\infty)/(\rho_\infty V_\infty^2/2) = [2/(k\,M_\infty^2)]\,(p_{ch}/p_\infty - 1) = 1{,}073$.

Supongamos que en el entorno del punto O (los sectores del contorno del perfil OD y de la onda de choque OJ) son rectilíneos. Con ello, elegimos el punto D de las condiciones con las que en él la inclinación de la tangente sea menor que en el punto O en (1/2)°, es decir, $\beta_D = \beta_O - (1/2)° = 17{,}93°$ (para comodidad hemos omitido el signo menos). Poniendo en la ecuación de la tangente al contorno $\operatorname{tg}\beta_D = 0{,}324$, de ella hallamos $(1/3)\,(1 - x_D/6) = 0{,}324$, de donde $x_D = 0{,}175$. Con la ecuación del contorno determinamos la coordenada $y_D = (x_D/6)\,(2 - x_D/6) = 0{,}057$.

En el punto D el número $M_D = M_{ch} = 1{,}413$ y el ángulo de Mach $\mu_D = \arcsen\,(1/M_D) = 45{,}17°$. La ecuación de la característica DJ de la primera familia: $y_J - y_D = \operatorname{tg}\,(\beta_D + \mu_D)\,(x_J - x_D)$. La ecuación del sector rectilíneo de la onda de choque OJ tiene la forma $y_J = \operatorname{tg}\,(\theta_{ch\,O} - \alpha)\,x_J$. Poniendo en estas ecuaciones los valores conocidos y resolviendo el sistema respecto de y_J y x_J, hallamos $y_J = 0{,}171$, $x_J = 0{,}233$.

Ahora, examinemos el punto F (fig. 7.16) a una distancia $\Delta x = 0{,}06$ del punto D, es decir, con coordenadas $x_F = x_D + \Delta x = 0{,}235$; $y_F = (x_F/6)\,(2 - x_F/6) = 0{,}076$.

Hallemos la inclinación de la tangente a este punto: $(dy/dx)_F = \operatorname{tg}\beta_F = (1/3)\,(1 - x_F/6) = 0{,}320$; $\beta_F = 17{,}77°$.

El correspondiente número $\mathbf{M}$ se calcula del modo siguiente. De acuerdo con el número $\mathbf{M}_D = 1{,}413$, en la tabla de los flujos isentrópicos supersónicos hallamos el ángulo $\omega_D = 9{,}26°$. Eligiendo para el punto D el valor medio del ángulo $(\beta_D)_m = (\beta_0 + \beta_D)/2 = 18{,}18°$ calculamos el ángulo $\omega_F = \omega_D + [(\beta_D)_m - \beta_F] = 9{,}68°$.

En esa misma tabla, según el valor de $\omega_F = 9{,}68°$, encontramos $\mathbf{M}_F = 1{,}424$ y el correspondiente ángulo de Mach $\mu_F = \operatorname{arcsen}(1/\mathbf{M}_F) = 44{,}61°$.

Tracemos desde el punto F el elemento de la característica de la primera familia $F1$, es decir, $y_1 - y_F = \operatorname{tg}(\beta_F + \mu_F)\,(x_1 - x_F)$ y desde el punto J en la onda de choque, el elemento de la característica de la segunda familia $J1$, es decir, $y_1 - y_J = \operatorname{tg}(\beta_J - \mu_J)\,(x_1 - x_J)$.

Después de poner los datos en $[\beta_J = (\beta_D)_m]$ y de resolver las ecuaciones obtenidas hallamos las coordenadas del punto 1, o sea, $y_1 = 0{,}150$; $x_1 = 0{,}274$.

Calculemos la variación del ángulo de inclinación de la línea de corriente durante el desplazamiento a lo largo de la característica del punto 1 al 3 que yace en la continuación de la onda de choque rectilínea:

$\Delta\beta_1 = \beta_3 - \beta_1 = [(d\omega/d\beta)_J - 1]^{-1}\,\{\omega_1 - \omega_J + [\Delta x_1/(k\,p'_{01})]\Delta p'_0 c_1/(\Delta n)\}$,

donde $(d\omega/d\beta)_J = (d\mathbf{M}/d\beta_{\text{ch}})_J\,(d\omega/d\mathbf{M})_J$; $\Delta x_1 = x_3 - x_1$; $\Delta p'_0 = p'_{01} - p'_{03}$; $\Delta n = \cos(\beta_1 + \mu_1)/(\Delta x_1 \operatorname{sen}\mu_1)$; $(d\omega/d\mathbf{M})_J = \sqrt{\mathbf{M}_J^2 - 1}\,\{\mathbf{M}_J\{1 + [(k-1)/2\mathbf{M}_J^2]\}\}^{-1}$; $(d\mathbf{M}/d\beta_{\text{ch}})_J = -\mathbf{M}_J\,\{\operatorname{ctg}(\theta_{\text{ch}\,O} - \beta_{\text{ch}})\,(d\theta_{\text{ch}}/d\beta_{\text{ch}} - 1) + [(k+1)/4]\,\mathbf{M}_J^2 \times \operatorname{sen}^2(\theta_{\text{ch}\,O} - \beta_{\text{ch}})\,(d/d\beta_{\text{ch}})\,(\rho_{\text{ch}}/\rho_\infty)\}$; $(d/d\beta_{\text{ch}})\,\rho_{\text{ch}}/\rho_\infty = (\rho_{\text{ch}}/\rho_\infty) \times \{1/[\operatorname{tg}\theta_{\text{ch}\,O}\cos^2(\theta_{\text{ch}\,O} - \beta_{\text{ch}}]\}\,\{(d\theta_{\text{ch}\,O}/d\beta_{\text{ch}})\,[\cos^2(\theta_{\text{ch}\,O} - \beta_{\text{ch}})/\cos^2\theta_{\text{ch}\,O} - \rho_{\text{ch}}/\rho_\infty] + \rho_{\text{ch}}/\rho_\infty\}$; $d\theta_{\text{ch}\,O}/d\beta_{\text{ch}} = (\rho_{\text{ch}}/\rho_\infty)\,\{2\cos^2(\theta_{\text{ch}\,O} - \beta_{\text{ch}}) \times + \{1 - [(k-1)/(k+1)]\rho_{\text{ch}}/\rho_\infty\} - \cos^2(\theta_{\text{ch}\,O} - \beta_{\text{ch}})/\cos^2\theta_{\text{ch}\,O} - \rho_{\text{ch}}/\rho_\infty\}^{-1}$.

Calculamos: $d\theta_{\text{ch}\,O}/d\beta_{\text{ch}} = 2{,}204$; $(d/d\beta_{\text{ch}})\rho_{\text{ch}}/\rho_\infty = 3{,}113$; $(d\mathbf{M}/d\beta_{\text{ch}})_J = -5{,}741$; $(d\omega/d\mathbf{M})_J = 0{,}5053$; $(d\omega/d\beta)_J = -2{,}901$.

El ángulo $\omega_1 = \omega_F = 9{,}68°$ y $\omega_J = \omega_D = 9{,}26°$. Es evidente que $\mu_1 = \mu_F = 44{,}61°$ y $\beta_1 = \beta_F = 17{,}77°$.

La coordenada x_3 del punto 3 se halla al resolver el sistema de ecuaciones: $y_3 - y_1 = \operatorname{tg}(\beta_1 + \mu_1)\,(x_3 - x_1)$; $y_3 = \operatorname{tg}(\theta_{\text{ch}\,O} - \alpha)\,x_3$. Después de poner los datos y de resolver dichas ecuaciones, obtenemos $x_3 = 0{,}317$; $y_3 = 0{,}232$.

Con el fin de hallar los valores de $\Delta p'_0 = p'_{03} - p'_{01}$ hay que conocer p'_{03}, tomando en consideración la curvatura de la onda de choque. Para la primera aproximación tomamos que la desviación del flujo en este punto disminuye en el valor $\Delta\beta_D = (\beta_D)_m - \beta_F = 0{,}42°$, es decir, es igual a $\beta'_{\text{ch}} = \beta_{\text{ch}} - \Delta\beta_D = 38{,}02°$. Con este valor de β'_{ch} y el número $\mathbf{M}_\infty$ precisamos el ángulo θ_{ch}, suponiendo que el valor de $\rho_{\text{ch}}/\rho_\infty$ es el mismo e igual a 4,643. Por la ecuación (7.19) determinamos $\operatorname{tg}\theta_{\text{ch}} = 1{,}453$; $\theta_{\text{ch}} = 55{,}46°$.

Con este valor de θ_{ch} precisamos la razón de las densidades: $\rho_{\text{ch}}/\rho_\infty = 4{,}634$ y, a continuación, el ángulo de la onda de choque: $\operatorname{tg}\theta_{\text{ch}} = 1{,}461$; $\theta_{\text{ch}} = 55{,}61°$. Según el valor de $\theta_{\text{ch}} = 55{,}61°$ encontramos la razón de las presiones [véase (7.22)] $p_{\text{ch}}/p_\infty = 19{,}62$ y la razón de las presiones de remanso [véase (7.23)] $p'_{03}/p_0 = 0{,}1263$.

Seguidamente determinamos

$$\Delta p'_0/p'_{01} = (p'_{03}/p_0 - p'_{01}/p_0)/(p'_{01}/p_0), \tag{7.24}$$

donde $p'_{01}/p_0 = 1{,}1241$ fue hallada con anterioridad. Hallamos $\Delta p'_0/p'_{01} = 0{,}01773$. Después de esto calculamos

$$\Delta x_1/\Delta n = \cos(\beta_1 + \mu_1)/\mathrm{sen}\, \mu_1 = 0{,}6601;$$
$$c_1 = \mathrm{sen}^2 \mu_1 \cos \mu_1/\cos(\beta_1 + \mu_1) = 0{,}7573.$$

Ahora calculamos $\Delta\beta_1 = \beta_3 - \beta_1 = -0{,}0037$ rad; $\Delta\beta_1 = -0{,}22°$ y hallamos el ángulo de desviación del flujo detrás de la onda de choque en el nuevo punto $3'$: $\beta'_{ch} = \alpha + \beta_1 + \Delta\beta_1 = 37{,}55°$.

Determinamos el correspondiente número **M**. Para ello, calculamos: $\Delta\omega_1 = \omega_J + (d\omega/d\beta_{ch})_J \Delta\beta_1 - \omega_1 = 0{,}17°$; $\omega_{3'} = \Delta\omega_1 + \omega_1 = 9{,}85°$.

En las tablas del flujo isentrópico supersónico, conociendo el ángulo $\omega_{3'} = 9{,}85°$, hallamos $\mathbf{M}_{3'} = 1{,}431$.

Precisemos el ángulo de inclinación de la onda de choque empleando la fórmula (7.21) en la forma

$$\mathbf{M}_{3'}^2 \,\mathrm{sen}^2(\theta_{ch} - \beta'_{ch}) = [2/(k+1)]\,[\rho_{ch}/\rho_\infty - (k-1)/(k+1)]^{-1}$$

y tomando $\rho_{ch}/\rho_\infty = 4{,}634$. Después de las sustituciones y cálculos obtenemos $\theta_{ch} = 55{,}15°$.

Hallamos las coordenadas del punto $3'$ con las ecuaciones

$$y_{3'} - y_1 = \mathrm{tg}\,(\beta_{3'} + \mu_{3'})\,(x_{3'} - x_1); \quad y_{3'} - y_J = \mathrm{tg}\,(\theta_{ch} - \alpha)\,(x_{3'} - x_J),$$

donde $\beta_{3'} = \beta_1 + \Delta\beta_1 = 17{,}55°$; $\mu_{3'} = \mathrm{arcsen}\,(1/\mathbf{M}_{3'}) = 44{,}37°$.

Seguidamente de efectuar las sustituciones y resolver estas ecuaciones, obtenemos $y_{3'} = 0{,}229$; $x_{3'} = 0{,}316$.

Ahora elijamos en el contorno el punto G cerca del F de forma que $x_G = x_F + \Delta x = 0{,}295$, La otra coordenada de este punto $y_G = (x_G/6)\,(2 - x_G/6) = 0{,}096$. Aquí, la inclinación de la tangente $(dy/dx)_G = \mathrm{tg}\,\beta_G = (1/3)\,(1 - x_G/6) = 0{,}3169$; $\beta_G = 17{,}58°$. A continuación determinamos $\omega_G = \omega_F + (\beta_F - \beta_G) = 9{,}85°$.

En la tabla del flujo isentrópico supersónico hallamos $\mathbf{M}_G = 1{,}431$ y el ángulo $\mu_G = \mathrm{arcsen}\,(1/\mathbf{M}_G) = 44{,}37°$.

Tracemos desde el punto G el elemento de la característica de la primera familia $G2$:

$$y_2 - y_G = \mathrm{tg}\,(\beta_G + \mu_G)\,(x_2 - x_G). \tag{7.25}$$

Del punto 1 trazamos el elemento de la característica de la segunda familia *1 2*

$$y_2 - y_1 = \mathrm{tg}\,(\beta_1 - \mu_1)\,(x_2 - x_1). \tag{7.26}$$

Después de las correspondientes sustituciones en las ecuaciones (7.25), (7.26) y de su resolución, hallamos las coordenadas del punto *2*, es decir, $x_2 = 0{,}313$; $y_2 = 0{,}130$.

Ahora desde el punto 2 trazamos el elemento de la característica de la primera familia *2—5*, o sea, $y_5 - y_2 = \mathrm{tg}\,(\beta_2 + \mu_2)\,(x_5 - x_2)$ y desde el punto $3'$, el elemento de la característica de la segunda familia $3' - 5'$, es decir, $y_5 - y_{3'} = \mathrm{tg}\,(\beta_{3'} - \mu_{3'})\,(x_5 - x_{3'})$.

Después de las sustituciones y la resolución de estas ecuaciones, hallamos $y_5 = 0{,}208$; $x_5 = 0{,}355$.

13—01650

A continuación, determinemos la dirección del flujo al pasar del punto *2* al punto *5*:

$$\Delta\beta_2 = 0{,}5 \{ - [1/k\, p'_{02})] (\Delta p'_0/\Delta n) (\Delta x_{3'}\, t_{3'} + \Delta x_2 c_2) - (\omega_2 - \omega_{3'}) - (\beta_2 - \beta_{3'})\}$$

Calculamos:

$$f = (x_5 - x_2) \operatorname{sen} \mu_{3'} \cos(\beta_2 + \mu_2) = 0{,}01381;$$

$$e = (x_5 - x_{3'}) \operatorname{sen} \mu_2 \cos(\beta_{3'} - \mu_{3'}) = 0{,}02443;$$

$$[1/(k\, p'_{02})]\, \Delta p'_0/\Delta n = (p'_{03}/p_0 - p'_{01}/p_0) \cos(\beta_2 + \mu_2) \cos(\beta_{3'} - \\ - \mu_{3'})/[k\, (p'_{01}/p_0)\, (f + e)] = 0{,}1271$$

[aquí el valor de $(p'_{03}/p_0 - p'_{01}/p_0)/(p'_{01}/p_0)$, que se calcula con la fórmula (7.24), fue determinado con anterioridad y es igual a 0,01613];

$$\Delta x_{3'} = x_5 - x_{3'} = 0{,}039; \quad \Delta x_2 = x_5 - x_2 = 0{,}042;$$

$$t_{3'} = \operatorname{sen}^2 \mu_{3'} \cos \mu_{3'}/\cos(\beta_{3'} - \mu_{3'}) = 0{,}3902;$$

$$c_2 = \operatorname{sen}^2 \mu_2 \cos \mu_2/\cos(\beta_2 + \mu_2) = 0{,}7403.$$

En correspondencia con estos resultados $\Delta\beta_2 = -0{,}0034$ rad ($-0{,}19°$).
Así, pues, en el punto *5* el ángulo $\beta_5 = \beta_2 + \Delta\beta_2 = 17{,}39°$.
El incremento del ángulo ω

$$\Delta\omega_2 = \Delta\beta_2 + [\Delta x_2/(k p'_{02})]\, \Delta p'_{02} c_2/\Delta n = 0{,}0006 \text{ rad } (0{,}03°).$$

De acuerdo con esto $\omega_5 = \omega_2 + \Delta\omega_2 = 9{,}88°$.
En las tablas del flujo isentrópico supersónico hallamos $\mathbf{M}_5 = 1{,}433$ y $\mu_5 = \arcsen(1/\mathbf{M}_5) = 44{,}25°$.
Después de esto, desde el punto 2 trazamos el elemento de la característica de la segunda familia $2H$ hasta su intersección con la pared en el punto H:

$$y_H - y_2 = \operatorname{tg}(\beta_2 - \mu_2)(x_H - x_2). \tag{7.27}$$

De acuerdo con la ecuación del contorno

$$y_H = (x_H/6)(2 - x_H/6). \tag{7.27'}$$

Resolviendo las ecuaciones (7.27) y (7.27′) y poniendo los datos, hallamos $y_H = 0{,}112$; $x_H = 0{,}350$.
Calculamos el ángulo de inclinación de la tangente en el punto H: $(dy/dx)_H = \operatorname{tg}\beta_H = (1/3)(1 - x_H/6) = 0{,}3139$; $\beta_H = 17{,}43°$. El correspondiente ángulo $\omega_H = \omega_G + (\beta_G - \beta_H) = 10°$.
En las tablas del flujo isentrópico supersónico, según este valor de ω_H, hallamos el número $\mathbf{M}_H = 1{,}436$ y el ángulo de Mach $\mu_H = 44{,}14°$.
En el punto H y por todo el espacio ante él, limitado con la característica JH, el flujo es irrotacional. Pero más abajo en la corriente se observa la influencia de la onda de choque encorvada, lo que se manifiesta por la variación de la entropía. Semejante influencia se debe tener en cuenta al calcular los parámetros del flujo y elegir, según el método de características, las correspondientes dependencias. El cálculo de este tipo se lleva a cabo de la siguiente forma. De los puntos *5* y H se trazan las características de diferentes familias hasta su intersección en el punto 6, cuyas coordenadas se determinan resolviendo las ecuaciones $y_6 - y_H = \operatorname{tg}(\beta_H + \mu_H)(x_6 - x_H)$; $y_6 - y_5 = \operatorname{tg}(\beta_5 - \mu_5)(x_6 - x_5)$.
Después de poner aquí las magnitudes conocidas, hallamos $y_6 = 0{,}191$; $x_6 = 0{,}393$.

La variación del ángulo β en el punto 6: $\Delta\beta_H = 0{,}5\{-[1/(kp'_{0H})](\Delta p'_0/\Delta n)(\Delta x_5 t_5 + \Delta x_H c_H) - (\omega_H - \omega_5) - (\beta_H - \beta_5)\}$.
Calculamos:

$$f = (x_6 - x_H)\ \mathrm{sen}\ \mu_5 \cos(\beta_H + \mu_H) = 0{,}01441;$$

$$e = (x_6 - x_5)\ \mathrm{sen}\ \mu_H \cos(\beta_5 - \mu_5) = 0{,}02352;$$

$$[1/(kp'_{0H})]\Delta p'_0/\Delta n = (p'_{06} - p'_{0H})\cos(\beta_H + \mu_H)\cos(\beta_5 - \mu_5)/[kp'_{0H}(f + e)] = 0{,}1293;$$

$$\Delta x_5 = x_6 - x_5 = 0{,}038; \quad \Delta x_H = x_6 - x_H = 0{,}043;$$

$$t_5 = \mathrm{sen}^2\ \mu_5 \cos\mu_5/\cos(\beta_5 - \mu_5) = 0{,}3921;$$

$$c_H = \mathrm{sen}^2\ \mu_H \cos\mu_H/\cos(\beta_H + \mu_H) = 0{,}7253.$$

En correspondencia con estos datos $\Delta\beta_H = -0{,}0044$ rad ($-0{,}25°$).
Así, pues, para el punto 6 el ángulo $\beta_6 = \beta_H + \Delta\beta_H = 17{,}18°$ y el incremento del ángulo ω

$$\Delta\omega_H = \Delta\beta_H + [\Delta x_6/(kp'_{0H})]\Delta p'_0 c_H/\Delta n = -0{,}004 \text{ rad } (-0{,}02°).$$

Entonces, $\omega_6 = \omega_H + \Delta\omega_H = 9{,}98°$.
En las tablas del flujo isentrópico supersónico, conociendo $\omega_6 = 10°$, hallamos el valor de $\mathbf{M}_6 = 1{,}441$ y el ángulo de Mach $\mu_6 = 43{,}94°$.
Ahora, del punto 6 trazamos el elemento de la característica de la segunda familia $6K$ hasta su intersección en el punto K del contorno (el segmento $6K$ en la fig. 7.16). Las coordenadas de este punto se determinan por las ecuaciones de la característica $y_K - y_6 = \mathrm{tg}(\beta_6 - \mu_6)(x_K - x_6)$ y del contorno del perfil $y_K = (x_K/6)(2 - x_K/6)$.
Como resultado de la resolución de estas ecuaciones hallamos $y_K = 0{,}151$; $x_K = 0{,}475$.
Para determinar el número $\mathbf{M}_K$ en el punto K empleamos la ecuación $\Delta\omega_6 = \Delta\beta_6 + [\Delta x_6/(kp'_{0K})]\Delta p'_0 t_6/\Delta n$.
Calculamos:

$$[1/(kp'_{0K})]\Delta p'_0/\Delta n = (p'_{06} - p'_{0K})\cos(\beta_6 - \mu_6)/[kp'_{0K}(x_K - x_6)\ \mathrm{sen}\ \mu_6] = 0{,}2542;$$

$$\Delta x_6 = x_K - x_6 = 0{,}082; \quad t_6 = \mathrm{sen}^2\mu_6 \cos\mu_6/\cos(\beta_6 - \mu_6) = 0{,}3891.$$

Después de poner los datos, hallamos $\Delta\omega_6 = 0{,}0125$ rad ($0{,}72°$). El correspondiente ángulo $\omega_K = \omega_6 + \Delta\omega_6 = 10{,}72°$.
En las tablas del flujo isentrópico supersónico, según este valor de ω_K, encontramos $\mathbf{M}_K = 1{,}462$ y $\mu_K = 43{,}16°$.
De manera análoga se realizan los cálculos para el resto de la región del flujo y como resultado de ellos se determina la distribución de los números $\mathbf{M}$ por el contorno alrededor del cual transcurre la circulación y se construye la onda de choque en forma de una quebrada. A continuación, con la fórmula:

$$p/p_\infty = (p'_0/p_0)\{[1 + (k-1)\mathbf{M}_\infty^2/2)]/[1 + (k-1)\mathbf{M}^2/2]\}^{k/(k-1)}, \quad (7.28)$$

en la cual el valor de p'_0/p_0 fue determinado más arriba, hallamos el valor de $p/p_\infty = 0{,}1241\ [6/(1 + 0{,}2\,\mathbf{M}^2)]^{3{,}5}$. El correspondiente coeficiente de presión

$$\bar{p} = [2/(k\mathbf{M}_\infty^2)](p/p_\infty - 1) = 0{,}05714\,(p/p_\infty - 1).$$

Los resultados del cálculo de $\bar{p}$ se ofrecen a continuación:

Puntos	O	D	F	G	H	K
Coeficiente de presión $\bar{p}$	1,086	1,086	1,071	1,060	1,053	1,018

7.19. Para elegir el método de cálculo examinemos el carácter general de la circulación alrededor del perfil. Con este fin determinamos el flujo detrás de la onda de choque que surge delante de la cuña. Con la ecuación (7.19) hallamos el ángulo de inclinación de la onda, suponiendo que la razón de las densidades es el valor límite $\rho_{ch}/\rho_\infty = 6$ y tomando en consideración que $\beta_0 = 0{,}26$ rad $= 15°$. En tal caso, $\operatorname{tg}\theta_{ch\ O} = 0{,}3356$; $\theta_{ch\ O} = 18{,}55°$.

En el caso real el ángulo de la onda de choque es mayor que el valor obtenido, por lo que, con la primera aproximación, prefijamos el valor de $\theta_{ch\,O} = 24°$ y, haciendo uso de (7.20), hallamos la razón de las densidades: $\rho_{ch}/\rho_\infty = 2{,}722$. Seguidamente, con la ecuación (7.19) precisamos el ángulo de inclinación de la onda de choque: $\operatorname{tg}\theta_{ch\ O} = 0{,}4581$; $\theta_{ch\ O} = 24{,}61°$.

Realicemos una aproximación más: $\rho_{ch}/\rho_\infty = 2{,}783$; $\operatorname{tg}\theta_{ch\ O} = 0{,}4483$; $\theta_{ch\ O} = 24{,}15°$.

El valor obtenido del ángulo de inclinación lo consideramos definitivo y calculamos la correspondiente razón de las densidades: $\rho_{ch}/\rho_\infty = 2{,}744$.

De acuerdo con (7.21), el número de Mach detrás de la onda de choque $\mathbf{M}_{ch} = 3{,}573$ y el correspondiente ángulo de Mach $\mu_{ch} = \operatorname{arcsen}(1/\mathbf{M}_{ch}) = 16{,}25°$.

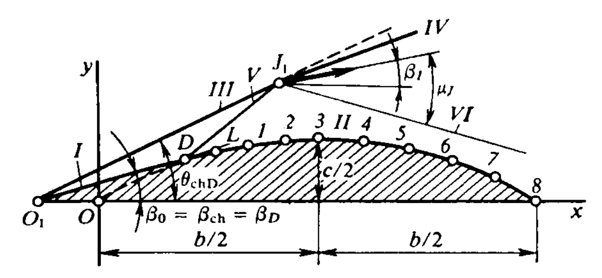


Fig. 7.17. Corriente supersónica en torno a un perfil:
I, *II* (*III*, *IV*), sectores rectilíneo y curvilíneo del perfil (onda de choque); *V*, línea de Mach; *VI*, onda reflejada; O_1, *D*, *L*, *1*—*8*, puntos del perfil

Hallamos las coordenadas del punto D [donde la inclinación de la tangente hacia el eje $\beta_D = \beta_{ch} = \beta_0 = 15°$ (fig. 7.17)] con la fórmula

$$\operatorname{tg}\beta_D = (dy/dx)_D = 2\,(c/b)\,(1 - 2\,x_D/b).$$

Poniendo aquí los datos obtenemos $x_D = 1{,}65$ (esta coordenada se cuenta desde el punto O; fig. 7.17).

La otra coordenada $y_D = 2c\,(x_D/b)\,(1 - x_D/b) = 0{,}55$. La coordenada del punto D, que se cuenta desde el punto O_1 (desde el borde de ataque del perfil), $x'_D = y_D/\operatorname{tg}\beta_0 = 2{,}05$.

Tomando el origen de coordenadas en el punto O, obtenemos para el punto O_1 la coordenada $x_{O1} = x_D - x'_D = -0{,}40$.

Tracemos desde el punto D la característica de la primera familia DJ hasta la intersección en el punto J con la onda de choque $y_D - y_J = \operatorname{tg}(\beta_D + \mu_D) \times (x_D - x_J)$. Resolviendo esta ecuación junto con la ecuación de la línea de la onda $y_J = \operatorname{tg}\theta_{ch\ O}\,x_J$, hallamos las coordenadas del extremo del sector rectilíneo de la onda de choque $y_J = 1{,}28$; $x_J = 2{,}85$.

Tracemos desde el punto J la característica de la segunda familia $y - y_J = \mathrm{tg}\,(\beta_J - \mu_J)(x - x_J)$. Tomando aquí $\mu_J = \mu_D$, $\beta_J = \beta_D$ y poniendo los correspondientes datos, obtenemos $y = 1{,}342 - 0{,}0218\,x$.

A la distancia $x = b/2 = 5$ la coordenada del punto de la característica es $y = 1{,}233$ y en el extremo del perfil donde $x = b = 10$, esa coordenada $y = 1{,}124$. Así, pues, la característica, que es la línea sónica reflejada de la onda de choque, no cruzará el perfil. Por lo tanto, la onda de choque curvilínea formada detrás del punto J y el flujo rotacional que surge en esta región no influyen sobre la circulación alrededor del perfil. En correspondencia con esto, el flujo en el contorno del perfil puede considerarse isentrópico y para su cálculo emplear la ecuación de las características en la forma $\omega_L = \omega_D + (\beta_D - \beta_L)$, donde L es un punto en el perfil tomado al azar (fig. 7.17).

Supongamos que la coordenada de ese punto $x_L = 2$. Hallemos el ángulo de inclinación de la tangente en dicho punto:

$$\mathrm{tg}\,\beta_L = (dy/dx)_L = 2\,(c/b)\,(1 - x_L/b) = 0{,}24; \quad \beta_L = 13{,}49°.$$

En las tablas para el flujo isentrópico supersónico, conociendo $\mathbf{M}_D = \mathbf{M}_{\mathrm{ch}} = 3{,}573$, hallamos $\omega_D = 59{,}66°$ y determinamos $\omega_L = 61{,}17°$. En esas mismas tablas, según $\omega_L = 61{,}17°$, encontramos $\mathbf{M}_L = 3{,}674$ y el ángulo de Mach $\mu_L = \mathrm{arcsen}\,(1/\mathbf{M}_L) = 15{,}79°$. La presión en el punto L que examinamos se calcula con la fórmula (7.28), en la que $p = p_L$, (p_0'/p_0) se determina por (7.23) y la razón de las presiones $(p_{\mathrm{ch}}/p_\infty)$, por (7.22).

Efectuamos los cálculos tomando $\rho_{\mathrm{ch}}/\rho_\infty = 2{,}744$; $p_{\mathrm{ch}}/p_\infty = 4{,}749$; $p_0'/p_0 = 0{,}6821$; $p_L/p_\infty = 4{,}703$.

El correspondiente coeficiente de presión $\bar{p}_L = [2/(k\mathbf{M}_\infty^2)]\,(p_L/p_\infty - 1) = 0{,}2116$.

Del mismo modo calculamos el número $\mathbf{M}$ y los coeficientes de presión en otros puntos del contorno (*1* — *8*, véase la fig. 8.17) prefijando sus coordenadas. Los resultados de este cálculo se aducen en la tabla 7.1.

Tabla 7.1

Puntos	Coordenadas		Número M	Coeficientes de presión $\bar{p}$	Puntos	Coordenadas		Número M	Coeficientes de presión $\bar{p}$
	x	y				x	y		
O_1	−0,40	0	3,573	0,2422	*4*	6	0,96	5,261	−0,01511
D	1,65	0,55	3,573	0,2422	*5*	7	0,84	5,822	−0,03432
L	2	0,64	3,674	0,2116	*6*	8	0,64	6,491	−0,04564
1	3	0,84	3,991	0,1451	*7*	9	0,36	7,463	−0,05222
2	4	0,96	4,352	0,07034	*8*	10	0	8,202	−0,05431
3	5	1,0	4,764	0,01943					

Examinemos el contorno de la onda de choque detrás del sector rectilíneo O_1J (fig. 7.18). La forma de este contorno se determina con los ángulos de su inclinación θ_{ch} en los puntos l, I, II, ... situados en las características trazadas en el perfil desde los puntos L, *1*, *2*, .., respectivamente. Mostremos como se halla el ángulo de inclinación de la onda de choque en el punto l ($\theta_{\mathrm{ch}\ l}$). Su valor se determina según el ángulo β_l de desviación del flujo en dicho punto igual a β_L (a lo largo de la característica rectilínea Ll el ángulo de inclinación del vector velocidad no varía).

De esta forma, $\beta_l = \beta_L = 13{,}49°$. Según este ángulo y el número $\mathbf{M}_\infty = 5$ de la gráfica $\theta_{ch} = f(\beta_{ch}, \mathbf{M}_\infty)$, en calidad de la primera aproximación, tomamos $\theta_{ch\ l} = 23°$ y con la ecuación (7.20) hallamos la razón de las densidades $\rho_{ch}/\rho_\infty = 2{,}601$.

A continuación, con la fórmula (7.19) precisamos el ángulo de inclinación de la onda de choque: $\operatorname{tg}\theta_{ch\ l} = 0{,}4113$, de donde $\theta_{ch\ l} = 22{,}36°$.

Con este ángulo hallamos la nueva razón de las densidades $\rho_{ch}/\rho_\infty = 2{,}504$ y precisamos el ángulo de inclinación de la onda de choque: $\operatorname{tg}\theta_{ch\ l} = 0{,}4181$; $\theta_{ch\ l} = 22{,}69°$.

Bajo este ángulo, desde el punto J, trazamos en la onda el elemento de la onda de choque Jl. Por analogía se determinan los demás puntos (I, II, ...) y los correspondientes ángulos de inclinación ($\theta_{ch\ I}$, $\theta_{ch\ II}$...).

7.20. Con el fin de elegir el procedimiento adecuado de cálculo determinemos el carácter general de la circulación. Examinemos el flujo en el punto O del borde de

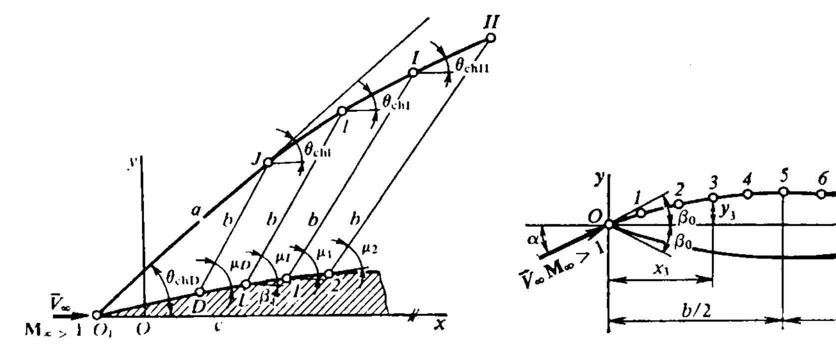


Fig. 7.18. Construcción de la onda de choque: *a*, sector rectilíneo de la onda de choque; *b*, línea de Mach; *c*, perfil

Fig. 7.19. Perfil simétrico curvilíneo en un flujo supersónico: *1—10*, puntos en el perfil

ataque (fig. 7.19). Este flujo se determina con el ángulo de inclinación de la tangente en la punta; $\operatorname{tg}\beta_O = (dy/dx)_{x=0} = \pm 2\,(c/b)\,(1 - 2x/b)_{x=0} = \pm 0{,}1$; $\beta_O = \pm 0{,}1$ rad.

Analizando el lado inferior para el punto O (con $\mathbf{M}_\infty = 3$ y $\mathbf{M}_\infty = 20$) hallamos los correspondientes parámetros: $K = \mathbf{M}_\infty(\alpha - \beta_O) = 0{,}6$; $K = 4$. De acuerdo con los valores obtenidos del parámetro K, el primer caso ($K < 1$) corresponde al flujo linealizado y el segundo ($K > 1$), a la circulación poco perturbada a velocidad hipersónica.

Circulación hipersónica ($\mathbf{M}_\infty = 20$). Como $\alpha = \beta_O$, en el *lado superior*

$$\mathbf{M} = \{1/\mathbf{M}_\infty + [(k-1)/2]\,(\alpha - \beta)\}^{-1} = [0{,}05 - 0{,}2\,(0{,}1 - \beta)]^{-1}.$$

En el punto O del borde de ataque, donde $\beta = \beta_O = \alpha = 0{,}1$ rad, el número $\mathbf{M}$ es el mismo que en el flujo incidente. En el punto vecino 1 con coordenada $x_1 = 2$, donde el ángulo $\beta_1 \approx \operatorname{tg}\beta_1 = (2c/b)\,(1 - 2x_1/b) = 0{,}08$ rad, el número de Mach $\mathbf{M}_1 = 21{,}74$. Del mismo modo calculamos el número $\mathbf{M}$ para otros puntos en el lado superior del perfil. En estos puntos los coeficientes de presión

$$\bar{p} = (\alpha - \beta)^2\{(k+1)/2 - \sqrt{[(k+1)/2]^2 - 4/K^2}\}.$$

Poniendo aquí los valores $k = 1{,}4$, $\alpha = 0{,}1$ rad y, teniendo en cuenta que $K = \mathbf{M}_\infty(\alpha - \beta) = 20\ (0{,}1 - \beta)$, hallamos $\bar{p} = (6/5)(0{,}1 - \beta)\ \ [(0{,}1 - \beta) -$

$-(1/20)\sqrt{K^2-25/9}]$. En particular, en el punto O ($\beta=\beta_O=\alpha=0{,}1$ rad) el coeficiente de presión $\bar{p}_O=0$ y en el punto vecino *1*, donde $\beta=\beta_1=0{,}08$ rad y $K=0{,}4$, este coeficiente $\bar{p}_1=-15{,}82\cdot10^{-4}$.

Consideremos el *lado inferior*. El coeficiente de presión en un punto arbitrario de este lado

$$\bar{p}=(\alpha-\beta)^2\{(k+1)/2+\sqrt{[(k+1)/2]^2+4/K^2}\}$$

o bien, como $\alpha=0{,}1$ rad; $k=1{,}4$; $\mathbf{M}_\infty=20$ y $K=\mathbf{M}_\infty(\alpha-\beta)=20\,(0{,}1-\beta)$.

$$\bar{p}=(6/5)\,(0{,}1-\beta)\,[(0{,}1-\beta)+(1/20)\sqrt{K^2+25/9}].$$

En el punto O, donde $\beta_O=-0{,}1$ rad y $K=4$ el valor de $\bar{p}_O=0{,}09999$ y en el punto vecino, donde $\beta=-0{,}08$ sad, $K=3{,}6$, el coeficiente $\bar{p}=0{,}08172$.

En el punto *10* del borde de salida, donde $\beta_{10}=0{,}1$ rad, el valor de $\bar{p}_{10}=$ $=0$. De modo análogo determinamos los coeficientes de presión en los demás puntos del lado inferior del perfil. Hallemos la distribución de los números **M**. Primero calculamos el número **M** en el punto del borde de ataque, haciendo uso de la fórmula

$$\mathbf{M}_0^2/\mathbf{M}_\infty=K_{\text{ch}}^2/\{[2\,k\,K_{\text{ch}}^2/(k+1)-(k-1)/(k+1)]\,[2/(k+1)+$$
$$+(k-1)\,K_{\text{ch}}^2/(k+1)\};$$

$$K_{\text{ch}}=\mathbf{M}_\infty\theta_{\text{ch}\,O}=\bar{p}_O\mathbf{M}_\infty/[2(\alpha-\beta_O)].$$

En el punto O el coeficiente $\bar{p}_O=0{,}1$, la diferencia de los ángulos $(\alpha-\beta_O)=$ $=0{,}2$ rad, por ello $K_{\text{ch}}=5$.

En concordancia con ello $\mathbf{M}_O^2/\mathbf{M}_\infty^2=0{,}1701$; $\mathbf{M}_O=8{,}249$.

Tras el borde de ataque el número

$$\mathbf{M}=[1/\mathbf{M}_O-(k-1)\,(\beta_O-\beta)/2]^{-1}=[0{,}1212-0{,}2\;(0{,}1+\beta)]^{-1}.$$

P. ej., en el punto con coordenada $x=2$, donde $\beta=-0{,}08$ rad, el número $\mathbf{M}=8{,}532$, en el punto *10* del borde de salida ($x_{10}=20$; $\beta_{10}=0{,}1$ rad) $\mathbf{M}_{10}=$ $=12{,}31$.

Por analogía determinamos el número **M** en el resto de los puntos del contorno inferior. El resultado del cálculo de los parámetros de la circulación alrededor del perfil se aducen en la tabla 7.2.

Circulación linealizada ($\mathbf{M}_\infty=3$). Por el *lado superior* del perfil el coeficiente de presión $\bar{p}=-2\,(\alpha-\beta)/\sqrt{\mathbf{M}_\infty^2-1}=0{,}7071\,(0{,}1-\beta)$. En el punto O del borde de ataque donde $\beta=\beta_O=0{,}1$ rad, este coeficiente $\bar{p}_O=0$. En el punto vecino *1* ($x_1=2$, $\beta=\beta_1=0{,}08$ rad), $\bar{p}_1=-0{,}01414$. En el punto *10* del borde de salida ($x_{10}=20$; $\beta=\beta_{10}=-0{,}10$ rad) $\bar{p}_{10}=-0{,}1414$.

De modo análogo se calculan los coeficientes de presión de los demás puntos del contorno superior.

En el *lado inferior* del perfil el coeficiente de presión

$$\bar{p}=2\,(\alpha-\beta)/\sqrt{\mathbf{M}_\infty^2-1}=0{,}7071\,(0{,}1-\beta).$$

En el punto O del borde de ataque ($x=0$, $\beta=\beta_O=-0{,}1$ rad) $\bar{p}_O=0{,}1414$ y en el punto vecino, donde $x=2$ y $\beta=-0{,}08$ rad, $\bar{p}=0{,}1273$.

Tabla 7.2

Puntos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Superficie superior											
$\beta = \beta_s$	0,10	0,08	0,06	0,04	0,02	0	−0,02	−0,04	−0,06	−0,08	−0,10
$\mathbf{M}$	20	21,74	23,81	26,32	29,41	33,33	38,52	45,51	55,51	71,44	100
$-\bar{p}\cdot 10^4$	0	15,82	25,11	31,05	34,64	36,02	37,61	38,52	39,24	39,71	40,0
Superficie inferior											
$\beta = \beta_i$	−0,10	−0,08	−0,06	−0,04	−0,02	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
$\mathbf{M}$	8,249	8,532	8,854	9,171	9,522	9,903	10,32	10,84	11,22	11,81	12,27
$\bar{p}\cdot 10^2$	9,999	8,472	6,521	5,092	3,844	2,773	1,882	1,471	0,6442	0,2502	0

Tabla 7.3

Puntos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Superficie superior											
β	0,10	0,08	0,06	0,04	0,02	0	−0,02	−0,04	−0,06	−0,08	−0,10
$-\bar{p}$	0	0,01414	0,02842	0,04254	0,05664	0,07071	0,08501	0,09902	0,1134	0,1273	0,1414
Superficie inferior											
β	−0,10	−0,08	−0,06	−0,04	−0,02	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
$\bar{p}$	0,1414	0,1273	0,1134	0,09902	0,08501	0,07071	0,05664	0,04254	0,02842	0,01414	0

En el punto *10* del borde de salida, para el que $x_{10} = 20$ y $\beta_{10} = 0{,}1$ rad, el coeficiente de presión es nulo. Para los demás puntos determinamos los coeficientes de presión de forma análoga. Todos los resultados del cálculo se aducen en la tabla 7.3.

7.21. Para determinar los coeficientes aerodinámicos en el perfil de la forma dada empleamos los resultados de distribución de la presión obtenidos en la solución del problema 7.20. Los coeficientes aerodinámicos de las fuerzas longitudinal y normal se calculan, respectivamente, con las fórmulas

$$c_x = -\int_0^1 \bar{p}_1 \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 d\bar{x} + \int_0^1 \bar{p}_s \left(\frac{dy}{dx}\right)_s d\bar{x}; \tag{7.29}$$

$$c_y = \int_0^1 (\bar{p}_1 - \bar{p}_s)\, d\bar{x}. \tag{7.30}$$

En el sistema de ejes ligados a la trayectoria el coeficiente de resistencia de ondas de choque (con pequeño ángulo de ataque $\alpha = 0{,}1$ rad)

$$c_{x_a} = c_y\alpha + c_x = 0{,}1\, c_y + c_x \tag{7.31}$$

y el coeficiente de la fuerza de sustentación

$$c_{y_a} = c_y - c_x\alpha = c_y - 0{,}1\, c_x. \tag{7.32}$$

El coeficiente de momento de cabeceo

$$-m_{z_a} = -\mathrm{M}_{z_a}/(q_\infty b^2) = \int_0^1 (\bar{p}_1 - \bar{p}_s)\,\bar{x}\, d\bar{x} + \int_0^1 [\bar{p}_1\bar{y}_1 (dy/dx)_1 - \bar{p}_s\bar{y}_s (dy/ds)_s]\, d\bar{x}, \tag{7.33}$$

donde $\bar{x} = x/b$, $\bar{y} = y/b$.

El coeficiente del centro de presión

$$c_\mathrm{p} = x_\mathrm{p}/b = -m_{z_a}/c_y. \tag{7.34}$$

En las dependencias aducidas entran las derivadas dy/dx para las superficies superior e inferior:

$$(dy/dx)_{s,1} = \pm(1 - 2\bar{x}) \approx \beta_{s,1}. \tag{7.35}$$

En las coordenadas relativas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ la ecuación del contorno tiene la forma

$$\bar{y} = \pm 2\bar{c}\bar{x}\,(1 - \bar{x}) = \pm\, 0{,}1\bar{x}\,(1 - \bar{x}). \tag{7.36}$$

Introduzcamos en la fórmula (7.29) el valor de $dy/dx \approx \beta$:

$$c_x = -\int_0^1 \bar{p}_1\beta_1\, d\bar{x} + \int_0^1 \bar{p}_s\beta_s\, d\bar{x}. \tag{7.29'}$$

Velocidades hipersónicas ($\mathrm{M}_\infty = 20$). Las integrales en las dependencias aducidas se determinan aproximadamente empleando alguna fórmula de integración

numérica (p. ej., la del trapecio). Con los datos de la tabla 7.2 hallamos la función subintegral $f_1(\bar{x}) = -\bar{p}_i (dy/dx)_i + \bar{p}_s (dy/dx)_s = -\bar{p}_i\beta_i + \bar{p}_s\beta_s$ para diversos valores de $\bar{x}$ en el intervalo 0—1 con un paso $\Delta\bar{x} = 0{,}1$ (fig. 7.20). Después de efectuar la integración numérica (7.29') obtenemos $c_x = 0{,}001657$.

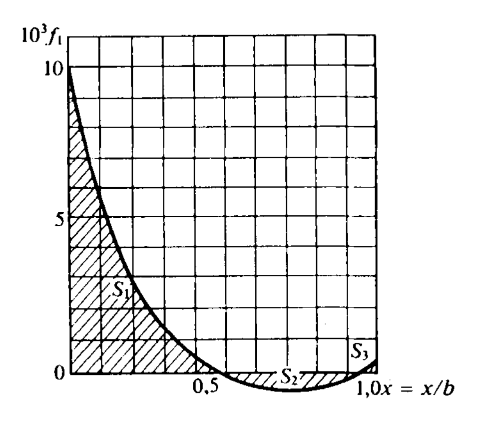


Fig. 7.20. Gráfica de la función $f_1(\bar{x})$

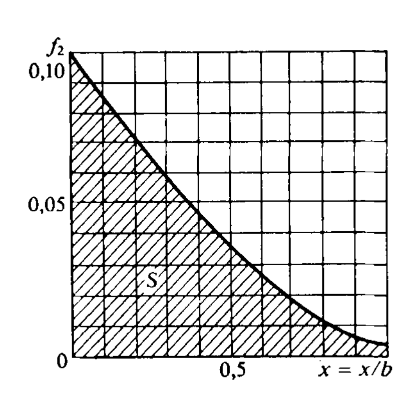


Fig. 7.21. Gráfica de la función $f_2(\bar{x})$

A continuación, en correspondencia con la fórmula (7.30), determinamos la función $f_2(\bar{x}) = \bar{p}_i - \bar{p}_s$ empleando los datos de la indicada tabla 7.2 (fig. 7.21). La posterior integración numérica proporciona $c_y = 0{,}03952$. Con los datos obtenidos hallamos el coeficiente de la resistencia de ondas de choque $c_{x_a} = 0{,}005609$ y el de la fuerza de sustentación $c_{y_a} = 0{,}03935$. El correspondiente rendimiento aerodinámico $K = c_{y_a}/c_{x_a} = 7{,}016$.

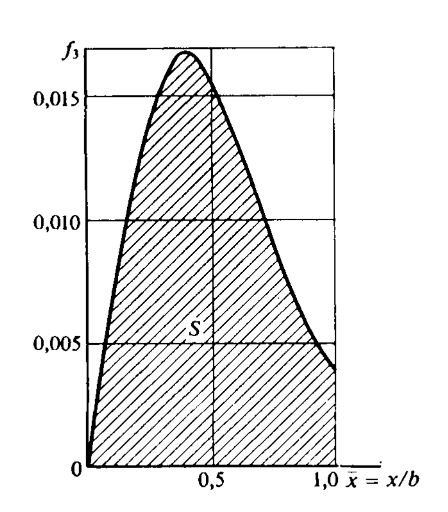


Fig. 7.22. Gráfica de la función $f_3(\bar{x})$

Para calcular el coeficiente del momento por la fórmula (7.33), con ayuda de los datos de la tabla 7.2, calculamos la función $f_3(\bar{x}) = (\bar{p}_i - \bar{p}_s)\bar{x} + \bar{p}_i\beta_i\bar{y}_i - \bar{p}_s\beta_s\bar{y}_s$ (fig. 7.22) y, después de realizar la integración numérica, obtenemos $-m_{z_a} = 0{,}01112$.

Según los valores hallados de m_{z_a} y c_y se calcula el coeficiente del centro de presión $c_p = x_p/b = -m_{z_a}/c_y = 0{,}2813$.

Circulación linealizada ($M_\infty = 3$). Los coeficientes de presión en los lados superior e inferior del perfil son, respectivamente,

$$\bar{p}_s = -2(\alpha - \beta_s)/\sqrt{M_\infty^2 - 1} = -0{,}1414\bar{x};$$
$$\bar{p}_i = 2(\alpha - \beta_i)/\sqrt{M_\infty^2 - 1} = 0{,}1414(1 - \bar{x}).$$

Introduciendo estas expresiones, así como los valores de $\beta_{s,i}$, $\bar{y}_{s,i}$ [véanse (7.35), (7.36)], en las fórmulas (7.29'), (7.30) (7.33) e integrando, obtenemos: $c_x = -0{,}004713$; $c_y = 0{,}1414$; $-m_{z_a} = 0{,}07071$.

El coeficiente c_y del perfil es el mismo que para una placa con ángulo de ataque α: $c_y = 4\alpha/\sqrt{M_\infty^2 - 1} = 0{,}1414$.

El correspondiente coeficiente del momento para la placa bajo ese mismo ángulo de ataque $m_{z_a} = -c_y/2 = -0{,}07071$ coincide así mismo con el valor obtenido para el perfil delgado. Teniendo en cuenta que para una placa de anchura b la coordenada del centro de presión $x_p = b/2$, el coeficiente $c_p = x_p/b = -m_{z_a}/c_y = 0{,}5$. Este mismo resultado se obtiene para un perfil delgado con la circulación linealizada.

7.22. Con el fin de elegir el método de cálculo determinamos los regímenes del flujo alrededor del perfil de la forma y dimensiones indicadas. En la fig. 7.7 vemos que $\beta_{s,i} = \pm c/b = \pm 0{,}1$ rad. Los parámetros de semejanza, calculados según el ángulo $\beta_{s,i}$, son los siguientes: para el número $M_\infty = 3$ el valor de $K = M_\infty |\beta_{s,i}| = 0{,}3$; para el número $M_\infty = 20$ el valor de $K = M_\infty |\beta_{s,i}| = 2$.

De acuerdo con estos valores de K acordamos que en el primer caso el flujo es *linealizado* (($K < 1$) y en el segundo, *hipersónico débilmente perturbado* ($K > 1$). Examinemos la determinación de los coeficientes aerodinámicos para cada caso por separado.

Flujo hipersónico. El coeficiente de presión en el área de ataque de la superficie superior

$$\bar{p}_s^a = (\alpha - \beta_s^a)^2 \{(k+1)/2 + \sqrt{[(k+1)/2]^2 + 4/K^2}\}$$

o bien, ya que $K^2 = M_\infty^2 (\alpha - \beta_s^a)^2$,

$$\bar{p}_s^a = (\alpha - \beta_s^a)\{(\alpha - \beta_s^a)(k+1)/2 + (2/M_\infty)\sqrt{(K^2/4)[(k+1)/2]^2 + 1}\}.$$

Tomando en consideración que $(k+1)/2 = 1,2$; $M_\infty = 20$; $|\alpha - \beta_s^a| = 0{,}05$ rad; $K = M_\infty |\alpha - \beta_s^a| = 1$, determinamos que $\bar{p}_s^a = 0{,}008831$.

En el área de salida

$$\bar{p}_s^s = (\alpha - \beta_s^s)\{(\alpha - \beta_s^s)(k+1)/2 - (2/M_\infty)\sqrt{(K^2/4)[(k+1)/2]^2 + 1}\}.$$

Teniendo en cuenta que $\alpha - \beta_s^s = 0{,}15$ rad y $K = M_\infty(\alpha - \beta_s^s) = 3$, obtenemos $\bar{p}_s^s = -0{,}003887$.

De forma análoga, para la superficie inferior calculamos las dos áreas. En el área de ataque

$$\bar{p}_i^a = (\alpha - \beta_i^a)\{(\alpha - \beta_i^a)(k+1)/2 + (2/M_\infty)\sqrt{(K^2/4)[(k+1)/2]^2 + 1}\},$$

Como $(\alpha - \beta_i^a) = 0{,}15$ rad y $K = M_\infty(\alpha - \beta_i^a) = 3$,
el coeficiente $\bar{p}_i^a = 0{,}05789$.

En el área de salida, donde $\alpha < \beta_i^s$ surge un flujo de enrarecimiento y el coeficiente de presión

$$\bar{p}_i^s = (\alpha - \beta_i^s)\{(\alpha - \beta_i^s)[(k+1)/2] - (2/M_\infty)\sqrt{(K^2/4)[(k+1)/2]^2 + 1}\}.$$

Como $|\alpha - \beta_i^s| = 0{,}05$ y $K = M_\infty |\alpha - \beta_i^s| = 1$, $\bar{p}_i^s = -0{,}002831$.

Determinemos ahora los coeficientes aerodinámicos de las fuerzas longitudinal y normal. Para el perfil romboidal

$$c_x = -\bar{p}_i (dy/dx)_i + \bar{p}_s (dy/dx)_s = -\bar{p}_i^a \beta_i^a - \bar{p}_i^s \beta_i^s + \bar{p}_s^a \beta_s^a + \bar{p}_s^s \beta_s^s = 0{,}007344;$$

$$c_y = \bar{p}_i^a + \bar{p}_i^s - \bar{p}_s^a - \bar{p}_s^s = 0{,}05012.$$

Los correspondientes coeficientes de resistencia (aerodinámica) y de la fuerza de sustentación (en los ejes ligados a la trayectoria) $c_{x_a} = c_x + c_y\alpha = 0{,}00985$; $c_{y_a} = c_y - c_x\alpha = 0{,}04975$.

El coeficiente de momento de cabeceo

$$-m_{z_a} = \frac{-M_{z_a}}{q_\infty b^2} = \int_0^{1/2} (\bar{p}_i^a - \bar{p}_s^a)\,\bar{x}\,d\bar{x} + \int_{1/2}^{1} (\bar{p}_i^s - \bar{p}_s^s)\,\bar{x}\,d\bar{x} +$$

$$+ \int_0^{1/2} (\bar{p}_i^a\beta_i^a\bar{x}\beta_i^a - \bar{p}_s^a\beta_s^a\bar{x}\beta_s^a)\,d\bar{x} + \int_{1/2}^{1} \{\bar{p}_i^s\beta_i^s[-(1-\bar{x})]\beta_i^s - \bar{p}_s^s\beta_s^s[-(1-\bar{x})]\beta_s^s\}\,d\bar{x}.$$

Después de poner los valores y de integrar, obtenemos $-m_{z_a} = 0{,}006849$.

De acuerdo con estos valores de c_y y m_{z_a} el coeficiente del centro de presión $c_p = x_p/b = -m_{z_a}/c_y = 0{,}1366$.

Circulación linealizada. Los coeficientes de presión de las áreas de ataque, respectivamente arriba y abajo, son iguales a

$$\bar{p}_s^a = -2(\alpha - \beta_s^a)/\sqrt{M_\infty^2 - 1} = 0{,}03536;$$
$$\bar{p}_i^a = 2(\alpha - \beta_i^a)/\sqrt{M_\infty^2 - 1} = 0{,}1061.$$

En las áreas de salida

$$\bar{p}_s^s = -2(\alpha - \beta_s^s)/\sqrt{M_\infty^2 - 1} = -0{,}1061;$$
$$\bar{p}_i^s = 2(\alpha - \beta_i^s)/\sqrt{M_\infty^2 - 1} = -0{,}03536.$$

Hallamos los correspondientes coeficientes aerodinámicos del perfil:

$$c_x = -\bar{p}_i^a\beta_i^a - \bar{p}_i^s\beta_i^s + \bar{p}_s^a\beta_s^a + \bar{p}_s^s\beta_s^s = 0{,}02839;$$
$$c_y = \bar{p}_i^a + \bar{p}_i^s - \bar{p}_s^a - \bar{p}_s^s = 0{,}1415;$$
$$c_{x_a} = 0{,}03546; \quad c_{y_a} = 0{,}1401; \quad -m_{z_a} = 0{,}03524.$$

Tomando en consideración los valores de m_{z_a} y c_y el coeficiente del centro de presión $c_p = x_p/b = -m_{z_a}/c_y = 0{,}249$.

7.23. Aduzcamos la expresión para el coeficiente de la fuerza de sustentación y de la resistencia al avance, haciendo uso de la teoría aerodinámica de la segunda aproximación:

$$c_{y_a} = 4c_1\alpha + 2c_2A_2; \tag{7.37}$$
$$c_{x\ \text{ch}} = 4c_1\alpha^2 + 6c_2\alpha A_2 + 2\,c_1B_2, \tag{7.38}$$

donde $c_1 = (M_\infty^2 - 1)^{-1/2}$; $c_2 = 0{,}25\,(M_\infty^2 - 1)^{-2}[(M_\infty^2 - 2)^2 + kM_\infty^4]$;

$$A_2 = \int_0^1 (y_i'^2 - y_s'^2)\,d\bar{x}; \quad B_2 = \int_0^1 (y_i'^2 + y_s'^2)\,d\bar{x}; \quad \bar{x} = x/b,$$

$\bar{y} = f(\bar{x})$ es la ecuación del contorno del perfil; los índices «i» y «s» corresponden a las superficies inferior y superior del perfil, respectivamente.

Combinando (7.37) y (7.38) y despreciando en la expresión obtenida los términos de órdenes superiores, hallamos la ecuación de la polar del perfil:

$$c_{x\ \mathrm{ch}} = c_{y_a}^2/(4c_1) + c_{y_a}c_2A_2/(2c_1) + 2c_1B_2. \qquad (7.39)$$

Para el perfil romboidal (véase la fig. 7.8) los coeficientes A_2 y B_2 se determinan con las fórmulas

$$A_2 = (\bar{c}_\mathrm{i}^2 - \bar{c}_\mathrm{s}^2)(1/\bar{b}_1 + 1/\bar{b}_2);\ B_2 = (\bar{c}_\mathrm{i}^2 + \bar{c}_\mathrm{s}^2)(1/\bar{b}_1 + 1/\bar{b}_2).$$

Para la forma del perfil prefijada en el problema $\bar{b}_1 = \bar{b}_2 = 0{,}5$:

$$\bar{c}_\mathrm{i} = -c/(3b) = -\bar{c}/3 = -0{,}05;\ \bar{c}_\mathrm{s} = 2c/(3b) = 2\bar{c}/3 = 0{,}1.$$

Calculamos los coeficientes $A_2 = -0{,}03$; $B_2 = 0{,}05$ y determinamos $c_1 = 0{,}5773$; $c_2 = 0{,}7333$.

Después de poner los valores de A_2, B_2, c_1 y c_2 en (7.39) obtenemos la siguiente ecuación de la polar del perfil romboidal prefijado en el planteamiento del problema: $c_{x\ \mathrm{ch}} = 0{,}4331\ c_{y_a}^2 - 0{,}01905\ c_{y_a} + 0{,}05773$.

El ángulo de la fuerza libre de sustentación α_0 se halla con la ecuación (7.37) para $c_{y_a} = 0$:

$$\alpha_0 = -c_2A_2/(2c_1). \qquad (7.40)$$

Poniendo aquí los valores conocidos para el perfil prefijado obtenemos $\alpha_0 = 0{,}01905$ rad.

Analicemos las relaciones (7.37) — (7.40). Advertiremos que los coeficientes c_1 y c_2 no dependen del ángulo de ataque y de la forma del perfil, ya que son funciones del número M_∞ del flujo incidente. Las magnitudes A_2 y B_2 son funciones que sólo dependen de la forma geométrica del perfil. En la ecuación (7.37) vemos que a velocidades supersónicas, como también a las subsónicas, el coeficiente de la fuerza de sustentación es una función lineal del ángulo de ataque. Pero si, p. ej., en el flujo incompresible la inclinación de la curva $c_y = f(\alpha)$ es del orden de 2π, a velocidades supersónicas dicha inclinación $c_y^\alpha = dc_y/d\alpha = 4c_1 = 4/\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}$ depende del número M_∞ y posee valores considerablemente menores. P. ej., con $\mathrm{M}_\infty = 2$ la inclinación $c_y^\alpha = 2{,}309$ y con $\mathrm{M}_\infty = 5$, $c_y^\alpha = 0{,}8165$.

Empleando (7.38) es posible obtener la expresión para el coeficiente de resistencia con la fuerza libre de sustentación:

$$c_{x\ \mathrm{ch}_0} = 2c_1B_2. \qquad (7.41)$$

Como aquí vemos el coeficiente $c_{x\ \mathrm{ch}0}$ disminuye al aumentar el número M_∞ y crece al aumentar el grosor del perfil. Los coeficientes c_1 y c_2, dependientes del número M_∞, siempre son positivos. De la relación (7.40) se desprende que el signo del ángulo de la fuerza libre de sustentación depende del signo de A_2. Este coeficiente es función de la curvatura de las superficies inferior y superior del perfil. Si la curvatura de la superficie superior es mayor que la de la inferior (para el perfil romboidal esto significa que $c_\mathrm{s} > |c_\mathrm{i}|$) la variable $A_2 < 0$ y el ángulo α_0 es positivo. Si la superficie inferior es de curvatura mayor que la superior, $A_2 > 0$ y el ángulo α_0 es negativo.

De este análisis se deduce que siendo $\alpha = 0$ el perfil con concavidad positiva (la superficie superior tiene curvatura mayor que la inferior) tiene fuerza negativa de sustentación. Esto es completa contraposición a lo que se observa a velocidades subsónicas. Para el perfil de la forma prefijada α_0 depende del número M_∞, lo que

se determina por la razón c_2/c_1 que crece al aumentar el número M_∞. Así, pues, para el perfil prefijado a velocidades supersónicas el ángulo de la fuerza libre de sustentación aumenta al crecer el número M_∞ del flujo incidente.

7.24. De las relaciones (7.37), (7.38) y (7.41), obtenemos

$$c_{x\ \mathrm{ch}}/c_{y_a} = c_{y_a}/(4\ c_1) + c_2 A_2/c_1 + c_{x\mathrm{ch}0}/c_{y_a}. \tag{7.42}$$

Es evidente que el rendimiento aerodinámico máximo $(c_{y_a}/c_{x\ \mathrm{ch}})_{\mathrm{máx}}$ se crea cuando el primer miembro de la ecuación (7.42) tiene el valor mínimo. Derivando el segundo miembro de la ecuación (7.42) por c_y e igualándolo a cero, hallamos el valor de c_{y_a} correspondiente a $(c_{x\ \mathrm{ch}}/c_{y_a})_{\mathrm{mín}}$:

$$c_{y_a} = 2\sqrt{c_1 c_{x\ \mathrm{ch}_0}}. \tag{7.43}$$

Poniendo (7.43) en (7.42), obtenemos

$$(c_{y_a}/c_{x\ \mathrm{ch}})_{\mathrm{máx}} = [c_2 A_2/(2c_1) + \sqrt{c_{x\ \mathrm{ch}_0}/c_1}]^{-1}. \tag{7.44}$$

Poniendo en (7.44) los valores de $c_1 = 0{,}5773$; $c_2 = 0{,}7333$; $A_2 = -0{,}03$; $c_{x\ \mathrm{ch}_0} = 0{,}05773$, hallados en la solución del problema 7.23, calculamos el rendimiento máximo del perfil romboidal $(c_{y_a}/c_{x\ \mathrm{ch}})_{\mathrm{máx}} = 3{,}365$.

El coeficiente de la fuerza de sustentación con el rendimiento (aerodinámico) máximo $c_{y_a} = 0{,}3651$ y el ángulo más conveniente de ataque [de acuerdo con (7.37)] $\alpha_{\mathrm{conv}} = (c_{y_a} - 2c_2A_2/(4\ c_1) = 0{,}1772$ rad.

7.25. Por las dimensiones geométricas asignadas del perfil determinamos los ángulos (véase la fig. 7.9):

$$\beta_s^a = \beta_s^a = |\beta_s^s| = \mathrm{arctg}\ (2\ c_s/b) = 26{,}57°;$$

$$\beta_i = |\beta_i^a = \beta_i^s = \mathrm{arctg}\ (2\ |\ c_i\ |\ /b) = 14{,}04°.$$

Estos ángulos determinan el carácter de la circulación alrededor del perfil y los valores de los correspondientes parámetros en sus lados superior e inferior.

Area de ataque (superior) *OA*. Por el ángulo $\beta_s = 26{,}57°$ y $M_\infty = 5$ determinamos el ángulo de inclinación de la onda de choque θ_{ch}^s. Primero, haciendo uso de la conocida dependencia $\theta_{\mathrm{ch}} = f\ (\beta_{\mathrm{ch}}, M_\infty)$ hallamos el valor aproximado de $\theta_{\mathrm{ch}}^s = 37{,}67°$ y calculamos la razón de las densidades con (7.20) $\rho_{\mathrm{ch}}/\rho_\infty = 3{,}912$. Con ella precisamos el ángulo de inclinación de la onda de choque [véase (7.19)]: $\mathrm{tg}\ \theta_{\mathrm{ch}}^s = 0{,}7785$; $\theta_{\mathrm{ch}}^s = 37{,}9°$. A continuación, efectuamos la siguiente aproximación: $\rho_{\mathrm{ch}}/\rho_\infty = = 3{,}921$; $\mathrm{tg}\ \theta_{\mathrm{ch}}^s = 0{,}7752$; $\theta_{\mathrm{ch}}^s = 37{,}78°$.

Como definitivo tomamos este valor del ángulo de la onda de choque. A él corresponde la razón de las densidades $\rho_{\mathrm{ch}}/\rho_\infty = 3{,}913$.

Empleando (7.6), (7.21) y (7.23), hallamos los valores de $p_{\mathrm{ch}}/p_\infty = p_{OA}/p_\infty = 10{,}77$; $(p_0'/p_0) = 0{,}3091$; $M_{\mathrm{ch}} = M_{OA} = 2{,}404$, así como el coeficiente de presión $\bar{p}_{OA} = [2/(kM_\infty^2)]\ (p_{OA}/p_\infty - 1) = 0{,}5583$.

Area de ataque (inferior) *OC*. Por el ángulo de inclinación de esta área $\beta_i = 14{,}04°$ y $M_\infty = 5$, en la gráfica $\theta_{\mathrm{ch}} = f\ (\beta_{\mathrm{ch}}, M_\infty)$, hallamos el ángulo aproximado de la onda de choque $\theta_{\mathrm{ch}}^i = 23{,}50°$ y determinamos la correspondiente razón de las densidades $\rho_{\mathrm{ch}}/\rho_\infty = 2{,}661$. A continuación, precisamos el ángulo de la onda de choque $\mathrm{tg}\ \theta_{\mathrm{ch}}^i = 0{,}4275$; $\theta_{\mathrm{ch}}^i = 23{,}15°$ y hacemos una aproximación más al determinar $\rho_{\mathrm{ch}}/\rho_\infty = 2{,}612$; $\mathrm{tg}\ \theta_{\mathrm{ch}}^i = 0{,}4326$; $\theta_{\mathrm{ch}}^i = 23{,}39°$.

Considerando que este valor del ángulo de la onda de choque es definitivo encontramos la correspondiente razón de las densidades $\rho_{ch}/\rho_\infty=2{,}655$, así como $p_{ch}/p_\infty = p_{OC}/p_\infty = 4{,}463$; $(p'_0/p_0)_i = 0{,}7285$; $M_{OC} = 3\,572$; $\bar{p}_{OC} = [2/(kM_\infty^2)] \times (p_{OC}/p_\infty - 1) = 0{,}1979$.

Consideremos la circulación alrededor de las áreas de salida, lo que se acompaña de la expansión de flujo supersónico.

Área de salida (superior) AB. Según el número $M_{OA} = 2{,}40$, en las tablas del flujo isentrópico supersónico hallamos el ángulo $\omega_{OA} = 36{,}7°$. Seguidamente, en esas mismas tablas, según el valor de $\omega_{AB} = \omega_{OA} + 2\beta_s = 89{,}85°$, determinamos $M_{AB} = 6{,}794$ y $p_{AB}/p'_0 = [1 + (k-1)\,M_{AB}^2/2]^{-k/(k-1)} = 0{,}0002929$.

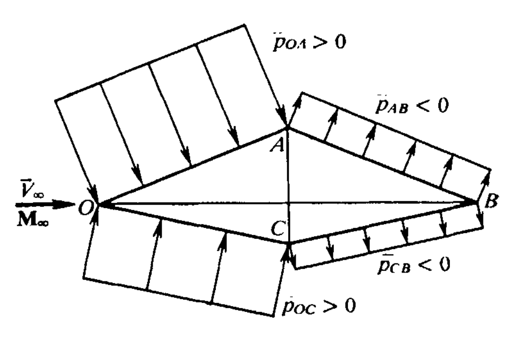


Fig. 7.23. Distribución del coeficiente de presión por un perfil no simétrico romboidal en un flujo supersónico

El correspondiente coeficiente de presión $\bar{p}_{AB} = [2/(kM_\infty^2)]\,[(p_{AB}/p'_0)\,(p'_0/p_0) \times (p_0/p_\infty) - 1] = -0{,}05443$, donde $p_\infty/p_0 = [1 + (k-1)\,M_\infty^2/2]^{-k/(k-1)} = 0{,}001891$.

Área de salida (inferior) CB. Según el número $M_{OC} = 3{,}57$, en las tablas del flujo isentrópico supersónico hallamos $\omega_{OC} = 59{,}6°$ y según el ángulo $\omega_{CB} = \omega_{OC} + 2\beta_i = 87{,}68°$, el número $M_{CB} = 6{,}43$. A continuación, calculamos la razón

$$p_{CB}/p'_0 = [1 + (k-1)\,M_{CB}^2/2]\varepsilon^{k/(k-1)} = 0{,}0004165$$

y el coeficiente de presión

$$\bar{p}_{CB} = [2/(kM_\infty^2)]\,[(p_{CB}/p'_0)\,(p'_0/p_0)\,(p_0/p_\infty) - 1] = -0{,}04797.$$

En la fig. 7.23 se muestra la distribución del coeficiente de presión por el perfil romboidal. Hallemos las características aerodinámicas del perfil correspondientes a esa distribución. El coeficiente de la resistencia de ondas de choque:

$$c_{x_a} = (\bar{p}_{OA} + |\,\bar{p}_{AB}\,|)\ \mathrm{tg}\,\beta_s/2 + (\bar{p}_{OC} + |\,\bar{p}_{CB}\,|)\ \mathrm{tg}\,\beta_i/2 = 0{,}1842;$$

el coeficiente de la fuerza de sustentación

$$c_{y_a} = (\bar{p}_{OC} - \bar{p}_{OA} + \bar{p}_{CB} - \bar{p}_{AB})/2 = -0{,}1769;$$

el coeficiente del momento de cabeceo

$$-m_{z_a} = (\bar{p}_{OC} - \bar{p}_{OA})\,(1/8) + (\bar{p}_{CB} - \bar{p}_{AB})\,(3/8) = -0{,}04301;$$

el coeficiente del centro de presión $c_p = -m_{z_a}/c_{y_a} = 0{,}2431$.

7.26. La circulación de un flujo incompresible a cierta velocidad V_∞ bajo un ángulo de ataque α alrededor de un ala deslizante es equivalente a la circulación alrededor de un ala recta a la velocidad $V_{\infty n} = V_\infty \cos\chi$ con ángulo de ataque $\alpha_n = \alpha/\cos\chi$. Los coeficientes de semejante ala pueden determinarse con las fórmulas (6.1) y (6.2), respectivamente, a condición de que el ángulo de ataque se tome igual al valor de $\alpha_n = \alpha/\cos\chi$. Durante el cálculo con dichas fórmulas también hay que conocer el coeficiente β que debe tomarse igual a la derivada dy/dx calculada según la ecuación $y = y\,(x)$ de la línea central del perfil en el plano xOy (véase la fig. 7.10) y, además, el ángulo θ ligado con la coordenada x mediante la dependencia $x = (b_n/2)\,(1 - \cos\theta)$.

Hallemos la ecuación de la línea central del perfil dado: $y = (1/2)(y_s + y_i) = 0{,}04x(1 - x/b_n)$.

De acuerdo con esta ecuación $\beta = dy/dx = 0.04(1 - 2x/b_n)$. Introduciendo aquí la sustitución $x = (b_n/2)(1 - \cos\theta)$, obtenemos $\beta = 0{,}04 \cos\theta$. Teniendo en cuenta esta expresión, calculamos con (6.3) $\varepsilon_0 = 0{,}02$ rad; $\mu_0 = 0$.

Con estos valores de ε_0, μ_0 y el ángulo de ataque (considerando que $\chi = 1{,}05$ rad $= 60°$) $\alpha_n = \alpha/\cos\chi = 0{,}2$ rad, hallamos los coeficientes $c_{y_a \text{inc}}$ y $m_{z_a \text{inc}}$, reducidos a la presión dinámica $q_{\infty n} = \rho_\infty V^2_{\infty\, n}/2$:

$$c_{y_a \text{inc}} = 2\pi(\alpha_n + \varepsilon_0) = 0{,}44\pi = 1{,}382;$$

$$-m_{z_a \text{inc}} = 2(\pi\varepsilon_0/4 - \mu_0) + c_{y_a \text{inc}}/4 = 0{,}12\pi = 0{,}3770.$$

El correspondiente coeficiente del centro de presión $(c_p)_{\text{inc}} = x_p/b = -m_{z_a \text{inc}}/c_{y_a \text{inc}} = 0{,}2727$.

La fuerza de sustentación $Y_{a \text{inc}} = c_{y_a \text{inc}} q_{\infty n} S_{\text{ala}}$, donde la presión dinámica $q_{\infty n} = \rho_\infty V^2_{\infty n}/2 = \rho_\infty V^2_\infty \cos^2\chi/2 = 0{,}1531 \cdot 10^4$ N/m²; el área del sector del ala $S_{\text{ala}} = \Delta z b_n/\cos\chi = 2$ m².

Teniendo en cuenta estos datos $Y_{a \text{ inc}} = 0{,}4232 \cdot 10^4$N. El momento respecto del borde de ataque

$$M_{z_a \text{inc}} = m_{z_a \text{inc}} q_{\infty n} S_{\text{ala}} b_n = -0{,}1154 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Consideremos la fuerza de succión que surge durante la circulación subsónica alrededor de un ala cuyo borde de ataque pudiese estar redondeado. Sabemos que para un perfil delgado simétrico, sometido a circulación bajo un ángulo de ataque, el coeficiente de la fuerza de sustentación $c_{y_a \text{inc}} = 2\pi(\alpha + \varepsilon_0)$. Su valor se puede considerar como la suma de dos componentes: $c_{y_a \text{inc}\ 1} = 2\pi\alpha$ que es el coeficiente para una placa plana bajo el ángulo de ataque α y $c_{y_a \text{inc}\ 2} = 2\pi\varepsilon_0$, el coeficiente que corresponde al valor para un perfil en forma de un arco ligeramente curvado que se describe con la ecuación de la línea central $y = (y_s + y_i)/2$, bajo el ángulo de ataque cero.

Examinemos si este perfil crea fuerza de succión. Para ello, calculemos primero la derivada $dc_{y_a \text{ inc}\ 2}/d\theta$. Como $\varepsilon_0 = -(1/\pi)\int\limits_0^\pi \beta(1 - \cos\theta)\, d\theta$, resulta que $dc_{y_a \text{ inc}\ 2}/d\theta = -2\beta(1 - \cos\theta)$. Teniendo además en cuenta que $\bar{x} = x/b_n = (1 - \cos\theta)/2$, hallamos que $d\bar{x} = \operatorname{sen}\theta\, d\theta/2$. Así, pues, $dc_{y_a \text{ inc}\ 2}/d\bar{x} = -4\beta \times (1 - \cos\theta)/\operatorname{sen}\theta$. Esta fórmula también se puede expresar con los coeficientes locales de presión en los lados inferior y superior: $dc_{y_a \text{ inc}\ 2}/d\bar{x} = \bar{p}_i - \bar{p}_s = \Delta\bar{p}$. Sabemos que para un perfil delgado el coeficiente de presión está ligado con la componente adicional de la velocidad V'_x por la expresión $\bar{p} = -2V'_x/V_{\infty n}$.

Suponiendo que en los lados superior e inferior los valores de V'_x sólo se diferencian por su signo, para el valor absoluto de V'_x obtendremos la dependencia $V'_x = \Delta\bar{p} V_{\infty n}/4$ de acuerdo con la cual $V'_x = (V_{\infty n}/4)(dc_{y_a \text{ inc}\ 2}/d\bar{x}) = -(1 - \cos\theta)\beta V_{\infty n}/\operatorname{sen}\theta$.

La fuerza de succión de un ala recta de envergadura unitaria $T_1 = \pi\rho_\infty c^2$, donde $c^2 = \lim\limits_{x \to x_{\text{b.a}}} [(V'_x)^2(x - x_{\text{b.a}})]$.

Como en el caso dado la coordenada del borde de ataque $x_{b.a} = 0$, por lo visto $c^2 = \lim_{x \to 0} [(V'_x)^2 x]$. Poniendo aquí $x = \bar{x} b_n = (b_n/2)(1 - \cos\theta)$ y $(V'_x)^2$, obtenemos

$$c^2 = \lim_{\theta \to 0} \{[V^2_{\infty n} \beta^2 (1 - \cos\theta)^2/\text{sen}^2\,\theta]\,(b_n/2)\,(1 - \cos\theta)\},$$

donde $\beta = dy/dx = 0{,}04 \cos\theta$.

Señalemos que $c = 0$. De este modo, de acuerdo con la fórmula para la fuerza de succión $T_1 = \pi\rho_\infty c^2$, un perfil delgado en forma de un arco ligeramente curvado, bajo el ángulo de ataque cero, no crea la indicada fuerza. La fuerza de succión se crea por una placa delgada con borde de ataque redondeado para la que $c^2 = b_n \alpha_n^2 V^2_{\infty n}$. En un sector del ala deslizante de anchura Δz (véase la fig. 7.10) la fuerza de succión

$$T = (T_1 \Delta z_n) \cos\chi = \pi\alpha^2 \rho_\infty V^2_\infty b_n \Delta z = 0{,}03848 \cdot 10^4\text{N}.$$

7.27. Como la forma y las dimensiones del ala, así como el ángulo de ataque son los mismos que en el problema 7.26, aquí podemos hacer uso de los datos obtenidos al resolver dicho problema y que se refieren a las condiciones de circulación de un flujo incompresible.

Realicemos el recálculo del coeficiente de la fuerza de sustentación para la presión dinámica $q_\infty = 0{,}5\,\rho_\infty V^2_\infty$. Entonces, $c'_{y_a \text{inc}} = c_{y_a \text{inc}} V^2_{\infty n}/V^2_\infty = c_{y_a \text{inc}} \cos^2\chi$. Como $c_{y_a \text{inc}} = 1{,}382$ y $\chi = 1{,}05$ rad $= 60°$, $c'_{y_a \text{inc}} = 0{,}3455$.

El coeficiente del momento se calcula según la presión dinámica $q_\infty = 0{,}5\,\rho_\infty V^2_\infty$ y la cuerda $b_{\text{ala}} = b_n/\cos\chi$:

$$m'_{z_a \text{inc}} = m_{z_a \text{inc}} (V^2_{\infty n}/V^2_\infty)\,(b_n/b_{\text{ala}}) = m_{z_a \text{inc}} \cos^3\chi = -0{,}04712.$$

El coeficiente del centro de presión $(c'_p)_{\text{inc}} = x_p/b_{\text{ala}} = -m'_{z_a \text{inc}}/c'_{y_a \text{inc}} = 0{,}1364$. Para el caso de la circulación incompresible determinemos el coeficiente de la fuerza de succión (véase el problema 7.26):

$$(c'_{xT})_{\text{inc}} = 2T/(\rho_\infty V^2_\infty S_{\text{ala}}) = 2\pi\alpha^2 \cos\chi = 0{,}03142$$

y, después calculamos los correspondientes coeficientes tomando en consideración la influencia del número M:

$$c'_{y_a} = c'_{y_a \text{inc}}/\sqrt{1 - \text{M}^2_\infty} = 0{,}3988; \quad m'_{z_a} = m'_{z_a \text{inc}}/\sqrt{1 - \text{M}^2_\infty} = -0{,}05441;$$

$$c'_{x\text{T}} = (c'_{x\text{T}})_{\text{inc}}/\sqrt{1 - \text{M}^2_\infty} = 0{,}03628.$$

7.28. Elijamos en el borde de ataque del ala deslizante cierto punto, considerándolo como fuente de perturbaciones. Desde este punto pasará la línea de Mach que con el sentido del vector $\vec{V}_\infty$ forma un ángulo $\mu_\infty = \text{arcsen}\,(1/\text{M}_\infty) = 56{,}44°$. Como el ángulo de deslizamiento ($\chi = 1{,}05$ rad $= 60°$) $\chi > \pi/2 - \mu_\infty = 33{,}56°$, la componente de la velocidad $V_{\infty n}$, normal al borde de ataque, es menor que la velocidad del sonido, es decir, $V_{\infty n} = V_\infty \cos\chi < a_\infty$. Por lo tanto, el borde de ataque es subsónico y es preciso calcular la circulación en correspondencia con las dependencias de aerodinámica subsónica.

Primero hallemos las características del perfil en un flujo incompresible. Como el perfil es simétrico, tendremos $c_{y_a \text{inc}} = 2\pi\alpha_n$, donde $\alpha_n = \alpha/\cos\chi$. El valor de

$c_{y_a\,\mathrm{inc}}$ se ha calculado según la presión dinámica $\rho_\infty V^2_{\infty n}/2$. Para el otro valor de la presión dinámica, igual a $q_\infty = 0,5\ \rho_\infty V^2_\infty$

$$c'_{y_a\,\mathrm{inc}} = c_{y_a\mathrm{inc}}\,(V^2_{\infty n}/V^2_\infty) = (2\pi\alpha/\cos\chi)\cos^2\chi = 2\pi\alpha\cos\chi = 0,3142.$$

Teniendo en cuenta la compresibilidad

$$c'_{y_a} = c'_{y_a\,\mathrm{inc}}/\sqrt{1-\mathrm{M}^2_{\infty n}} = c'_{y_a\,\mathrm{inc}}/\sqrt{1-\mathrm{M}^2_\infty\cos^2\chi} = 0,3928.$$

El coeficiente del momento $-\,m_{z_a\mathrm{inc}} = \pi\alpha_n/2 = \pi\alpha/(2\cos\chi)$.

Efectuemos el recálculo de este valor para la presión dinámica q_∞, con lo que obtenemos $-\,m'_{z_a\mathrm{inc}} = [\pi\alpha/(2\cos\chi)]V^2_{\infty n}/V^2_\infty = \pi\alpha\ \cos\ \chi/2 = 0,07854$.

Contando la compresibilidad

$$m'_{z_a} = m'_{z_a\,\mathrm{inc}}/\sqrt{1-\mathrm{M}^2_{\infty n}} = m'_{z_a\,\mathrm{inc}}/\sqrt{1-\mathrm{M}^2_\infty\cos^2\chi} = -0,09818.$$

Refiriendo este valor a la cuerda $b_{\mathrm{ala}} = b_n/\cos\chi = 2$ m, obtenemos

$$m'_{z_a\,\mathrm{ala}} = m'_{z_a}(b_n/b_{\mathrm{ala}}) = m'_{z_a}\cos\chi = -0,04909.$$

Calculado según la presión dinámica $q_\infty = 0,5\rho_\infty V^2_\infty$ (véase la solución del problema 7.27), el coeficiente de la fuerza de succión de un medio incompresible $(c'_{xT})_{\mathrm{inc}} = 0,03142$. Tomando en consideración la compresibilidad $c'_{xT} = (c'_{xT})_{\mathrm{inc}}/\sqrt{1-\mathrm{M}^2_\infty\cos^2\chi} = 0,03928$.

Determinemos los respectivos fuerza y momento que actúan en el sector del ala de área $\Delta S_{\mathrm{ala}} = \Delta z\,(b_n/\cos\chi) = 2\mathrm{m}^2$. Haciendo $\rho_{\mathrm{atm}} = \rho_\infty = 1,225$ kg/m³, $a_{\mathrm{atm}} = a_\infty = 340$ m/s, a la velocidad de movimiento $V_\infty = \mathrm{M}_\infty a_\infty = 408$ m/s, hallamos:

$$Y_a = c'_{y_a}\rho_\infty V^2_\infty S_{\mathrm{ala}}/2 = 8,010\cdot 10^4\ \mathrm{N};$$

$$M_{z_a} = m'_{z_a\,\mathrm{ala}}\rho_\infty V^2_\infty S_{\mathrm{ala}} b_{\mathrm{ala}}/2 = 2,002\cdot 10^4\ \mathrm{N\cdot m};$$

$$T = c'_{xT}\rho_\infty V^2_\infty S_{\mathrm{ala}}/2 = 0,8010\cdot 10^4\ \mathrm{N}.$$

7.29. Calculemos la componente de la velocidad $V_{\infty n} = V_\infty\cos\chi$ normal al borde de ataque. Como $V_\infty = \mathrm{M}_\infty a_\infty$, tenemos (con $\chi = 1,05$ rad $= 60°$) $V_{\infty n} = \mathrm{M}_\infty a_\infty\cos\chi = 1,5\ a_\infty$. Así, pues, la componente normal de la velocidad $V_{\infty n}$ resulta ser supersónica; de modo que para el cálculo de la circulación alrededor del perfil es necesario emplear las relaciones de aerodinámica supersónica.

Debido a que $\mathrm{M}_{\infty n} = \mathrm{M}_\infty\cos\chi = 1,5$ es pequeño y el perfil delgado, para el cálculo de los coeficientes aerodinámicos es posible emplear las relaciones de la teoría linealizada.

El coeficiente de presión en el perfil $\bar{p}_n = \pm\,2\alpha_{ni}/\sqrt{\mathrm{M}^2_{\infty n}-1}$. Al efectuar el recálculo de este coeficiente para la presión dinámica $q_\infty = 0,5kp_\infty\mathrm{M}^2_\infty$ obtenemos

$$\bar{p} = \bar{p}_n\,(V^2_{\infty n}/V^2_\infty) = \pm\,2\alpha_{ni}\cos^2\chi/\sqrt{\mathrm{M}^2_\infty\cos^2\chi-1}.$$

Aquí el ángulo de ataque para una placa local en el ala $\alpha_{ni} = \alpha_n - \beta_{1(s)} = \alpha/\cos\chi - \beta_{1(s)}$. Por fin, obtenemos

$$\bar{p} = \pm\,2\,(\alpha/\cos\chi - \beta_{1(s)})\cos^2\chi/\sqrt{\mathrm{M}^2_\infty\cos^2\chi-1}.$$

En esta expresión el signo « + » corresponde al lado inferior y el « — », al superior. Hallemos los valores de los ángulos empleando la ecuación del contorno

$$\beta_{1(s)} \approx \mp\,(d/dx)\,[2\,c\,(x/b_n)\,(1-x/b_n)] = \mp\,0,01\,(1-2\,x).$$

En correspondencia con esto $\bar{p}_{i(s)} = \pm 0{,}4472\,[0{,}2 \pm (0{,}1 - 0{,}2\,x)]$. En el lado inferior $\bar{p}_i = 0{,}08944\,(1{,}5 - x)$, en el superior $\bar{p}_s = -0{,}08944\cdot(0{,}5 + x)$.

Ahora, calculamos el coeficiente de la fuerza normal

$$c_y = \int_0^1 (\bar{p}_i - \bar{p}_s)\,d\bar{x} = 0{,}1789 \quad (\bar{x} = x/b)$$

y el coeficiente de la fuerza longitudinal

$$c_x = -\int_0^1 \bar{p}_i\beta_i\,d\bar{x} + \int_0^1 \bar{p}_s\beta_s\,d\bar{x} = 0{,}002981.$$

Los correspondientes coeficientes de la fuerza de sustentación y de la resistencia (aerodinámica) (en coordenadas ligadas a la trayectoria):

$$c_{y_a} = c_y - \alpha_n c_x = 0{,}1783; \quad c_{x_a} = c_x + \alpha_n c_y = 0{,}03876.$$

Las componentes del coeficiente de la fuerza de sustentación $c'_{y_a} \approx c_{y_a} = 0{,}1783$ y del coeficiente de la fuerza de resistencia $c'_{x_a} = c_{x_a}\cos\chi = 0{,}01938$.

El coeficiente del momento con relación al punto en el borde de ataque [véase la fórmula (7.33) en la que la segunda integral se toma igual a cero]

$$-m_{z_a} = \int_0^1 (\bar{p}_i - \bar{p}_s)\,\bar{x}\,d\bar{x} = 0{,}08944.$$

El coeficiente del centro de presión $c_p = x_p/b_n = -m_{z_a}/c_y = 0{,}5$.

Calculemos las fuerzas y los momentos que actúan sobre el sector del ala del área $S_{ala} = \Delta z b_n/\cos\chi = 2\ \text{m}^2$. La fuerza de sustentación $Y_a = c'_{y_a} q_\infty S_{ala}$. Como aquí la presión dinámica $q_\infty = kp_\infty M_\infty^2/2 = 6{,}174\cdot 10^5$ Pa, $Y_a = 22{,}02 \times \times 10^4$ N.

La fuerza de resistencia $X_a = c'_{x_a} q_\infty S_{ala} = 2{,}393\cdot 10^4$ N y el momento $M_{z_a} = m_{z_a} q_\infty S_{ala} b = -11{,}04\cdot 10^4$ N·m.

7.30. Comenzamos a resolver el problema determinando los parámetros del medio por el que se mueve el perfil. En la tabla de la atmósfera normal hallamos para la altitud $H = 20$ km:

$$p_\infty = (p_H/p_t)\,p_t = 5{,}455\cdot 10^{-2}\cdot 1{,}013\cdot 10^5 = 0{,}05526\cdot 10^5\ \text{Pa};$$
$$\rho_\infty = (\rho_H/\rho_t)\,\rho_t = 7{,}255\cdot 10^{-2}\cdot 1{,}255 = 0{,}08887\ \text{kg/m}^3;$$
$$T_\infty = 216{,}7\ \text{K},\ a_\infty = 295{,}1\ \text{m/s};\quad \mu_{m\infty} = 28{,}97\ \text{kg/kmol}.$$

Tomamos $k = c_{p\infty}/c_{v\infty} = 1{,}4$ y $c_{p\infty} = 1002$ J/(kg·K). La correspondiente entalpía $i_\infty = c_{p\infty}T_\infty = 0{,}2171\cdot 10^6\ \text{m}^2/\text{s}^2$.

Según las velocidades $V_\infty = 5000$ m/s y la del sonido $a_\infty = 295{,}1$ m/s calculamos $M_\infty = V_\infty/a_\infty = 16{,}94$.

La presión dinámica del flujo incidente $q_\infty = 0{,}5\,k_\infty p_\infty M_\infty^2 = 11{,}10\cdot 10^6$Pa. La entalpía de remanso $i_0 = V_\infty^2/2 + i_\infty = 12{,}72\cdot 10^6\ \text{m}^2/\text{s}^2$.

Determinamos los parámetros de la circulación a lo largo de las superficies cuneiformes en el borde de ataque del perfil, arriba y abajo. Estos parámetros son iguales a los correspondientes valores directamente detrás de las ondas de choque

oblicuas formadas delante de la cuña con ángulo $\beta_{ch.s}$ y de la cuña con el ángulo $\beta_{ch.i}$ (fig. 7.24).

La onda de choque formada en el lado superior se calcula según el ángulo de desviación del flujo $\beta_{ch.s} = \beta_{Os} - \alpha$, donde el ángulo β_{Os} se determina por la ecuación del contorno del perfil $\operatorname{tg}\beta = dy/dx = \pm 2\,(c/b)\,(1 - 2x/b)$. Haciendo aquí $x = 0$, para el lado superior (signo más) hallamos $\operatorname{tg}\beta_{Os} = 1$; $\beta_{Os} = 45°$ y $\beta_{ch.s} = \beta_{Os} = 40°$. Calculemos los parámetros del gas en la onda de choque teniendo en cuenta la disociación (véase la solución del problema análogo 4.59). Como resultado de semejante cálculo, obtenemos:

$$\theta^{s}_{ch} = \theta^{s}_{ch\,O} = 46°30'; \quad p_{ch.s} = 10{,}88\cdot 10^5 \text{ Pa}; \quad i_{ch.s} = 6{,}921\cdot 10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2;$$

$$T_{ch.s} = 4140 \text{ K}; \; (\mu_m)_{ch.s} = 26{,}23 \text{ kg/k mol}; \; S_{ch.s} = 10{,}32 \times \times 10^3 \text{ m}^2/(\text{s}^2\cdot\text{K});$$

$$a_{ch.s} = 1260 \text{ m/s}; \; V_{ch.s} = 3400 \text{ m/s};$$

$$\mathbf{M}_{ch.s} = V_{ch.s}/a_{ch.s} = 2{,}698.$$

En el lado inferior el cálculo de la onda de choque se debe efectuar por el ángulo de desviación del flujo $\beta_{ch.i} = |\beta_{Oi}| + \alpha$. Como $|\beta_{Oi}| = \beta_{Os} = 45°$, $\beta_{ch.i} = 50°$. A continuación, los parámetros se calculan de la misma forma que para el lado superior. Como resultado hallamos:

$$\theta^{i}_{ch} = \theta^{i}_{ch\,O} = 60°; \quad p_{ch.i} = 15{,}09\cdot 10^5 \text{ Pa}; \quad i_{ch.i} = 9{,}495\cdot 10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2;$$

$$T_{ch.i} = 5120 \text{ K}; \; (\mu_m)_{ch.i} = 24{,}92 \text{ kg/kmol}; \; S_{ch.i} = 10{,}83\cdot 10^3 \text{ m}^2/(\text{s}^2\cdot\text{K});$$

$$a_{ch.i} = 1470 \text{ m/s}; \; V_{ch.i} = 2520 \text{ m/s}; \; \mathbf{M}_{ch.i} = V_{ch.i}/a_{ch.i} = 1{,}714.$$

Empleando los datos acerca de los parámetros del gas en el borde de ataque es posible calcular la circulación alrededor de toda la superficie.

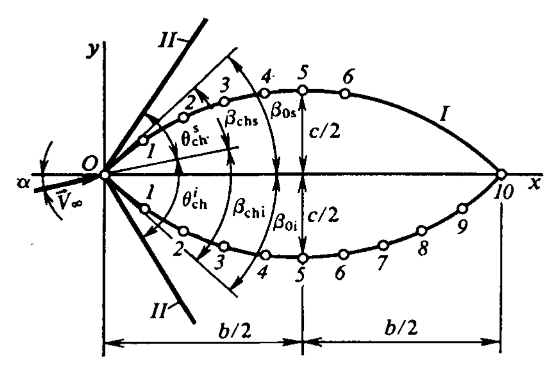


Fig. 7.24. Perfil del ala (I) en un flujo disociado con onda de choque (II): 1—10, puntos en el perfil

Lado inferior. En este lado del perfil calculamos los parámetros del gas suponiendo que el flujo es isentrópico. Para la entalpía de remanso $i_0 = 12{,}72\cdot 10^6$ m²/s², así como para los parámetros inmediatamente detrás de la onda de choque en el punto O, la entropía $S_{ch.i} = S_O = 10{,}83\cdot 10^3 \text{m}^2/(\text{s}^2\cdot\text{K})$ y la velocidad $V_{ch.i} = V_O = 2520$ m/s (o bien la entalpía $i_{ch.i} = i_O = 9{,}495\cdot 10^6$ m²/s²) en las tablas para el flujo isentrópico supersónico de aire disociado hallamos el ángulo $\omega_{ch.i} = \omega_O = 22{,}50°$.

A continuación, encontramos los ángulos β de inclinación de las tangentes en los puntos elegidos: determinamos la diferencia $\Delta\beta = \beta_{Oi} - \beta$ y en cada uno de estos puntos calculamos los valores de $\omega = \omega_O + |\Delta\beta|$. En las indicadas tablas, para $S_{ch.i} = S_O = 10{,}83\cdot 10^3 \text{m}^2/(\text{s}^2\cdot\text{K})$ e $i_0 = 12{,}72\cdot 10^6$ m²/s² y de acuerdo con los valores de los ángulos ω hallamos los correspondientes parámetros del gas: V, i, a, $\mathbf{M}$. Seguidamente, según los valores de i y S determinamos en el diagrama

$i - S$ los valores de la presión p, calculamos la diferencia $\Delta p = p - p_\infty$ y el coeficiente de presión $\bar{p} = \Delta p/q_\infty$.

Como ejemplo examinemos semejante cálculo para el punto *1* en el lado inferior del perfil (fig. 7.24). Encontramos (para $x_1 = 0{,}4$); tg $\beta_1 = -0{,}8$; $\beta_1 = -38{,}66°$; $\Delta\beta_1 = 6{,}34°$; $\omega_1 = 28{,}84°$.

Para $S_{ch.i} = S_O = 10{,}83 \cdot 10^3 \text{m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{K})$ e $i_0 = 12{,}72 \cdot 10^6$ m²/s², en las tablas para el flujo isentrópico supersónico de aire disociado, hallamos: $V_1 = 2709$ m/s; $i_1 = 9{,}031 \cdot 10^6$ m²/s²; $a_1 = 1408$ m/s; $M_1 = 1{,}924$.

Conociendo $i_1 = 9{,}031 \cdot 10^6$ m²/s² y $S_{ch.i} = S_O = 10{,}83 \cdot 10^3$ m²/(s²·K) hallamos en el diagrama $i - S$ la presión $p_1 = 9{,}807 \cdot 10^5$ Pa (10 kgf/cm²). A continuación, calculamos $\Delta p_1 = p_1 - p_\infty = 9{,}752 \cdot 10^5$ Pa y el correspondiente coeficiente de presión $\bar{p}_1 = \Delta p_1/q_\infty = 0{,}8786$.

De igual manera calculamos los demás puntos del contorno inferior (tabla 7.4).

Lado superior. Según la entalpía de remanso $i_0 = 12{,}72 \cdot 10^6$ m²/s², la entropía $S_{ch.s} = S_0 = 10{,}32 \cdot 10^3$ m²/(s²·K) y la velocidad $V_{ch.s} = V_O = 3400$ m/s (o bien la entalpía $i_{ch.s} = i_0 = 6{,}921 \cdot 10^6$ m²/s²) en la punta del perfil, en las tablas para el flujo isentrópico supersónico de aire disociado hallamos $\omega_{ch.s} = \omega_O = 52°$. Más adelante, prefijamos al azar una serie de puntos y para cada uno de ellos calculamos el ángulo de inclinación de la tangente $\beta = \text{arctg}\,(dy/dx)$ y la diferencia de ángulos $\Delta\beta = \beta_{Os} - \beta$. De acuerdo con estos valores se calculan los ángulos $\omega = \omega_O + \Delta\beta$ para los que en esas mismas tablas, según los valores de $S_{ch.s} = S_0 = 10{,}32 \cdot 10^3$ m²/(s²·K) e $i_0 = 12{,}72 \cdot 10^6$ m²/s², encontramos los correspondientes parámetros.

Como ejemplo calculamos los parámetros en el punto *1*. Como la coordenada de este punto es $x_1 = 0{,}4$, tendremos tg$\beta_1 = 0{,}8$; $\beta_1 = 38{,}66°$; $\Delta\beta_1 = 6{,}34°$; $\omega_1 = 58{,}34°$.

En las tablas para el flujo isentrópico supersónico de aire disociado, por este valor de ω_1, para $S_{ch.s} = S_0 = 10{,}32 \cdot 10^3$ m²/(s²·K) e $i_0 = 12{,}72 \cdot 10^6$ m²/s², hallamos: $V_1 = 3560$ m/s; $i_1 = 6{,}752 \cdot 10^6$ m²/s²; $a_1 = 1220$ m/s y $M_1 = 2{,}918$. Seguidamente, para $i_1 = 6{,}752 \cdot 10^6$ m²/s² y $S_{ch.s} = S_0 = 10{,}32 \cdot 10^3$m²/(s²·K), en el diagrama $i - S$ encontramos la presión $p_1 = 9{,}316 \cdot 10^5$ Pa (9,5 kgf/cm²), calculamos la diferencia $\Delta p_1 = p_1 - p_\infty = 9{,}261 \cdot 10^5$ Pa y el coeficiente de presión $\bar{p}_1 = \Delta p_1/q_\infty = 0{,}8343$.

De igual forma se calculan los parámetros de la circulación para otros puntos en la superficie superior del perfil (tabla 7.5).

7.31. Determinemos los parámetros necesarios para el cálculo del flujo incidente. Para la temperatura $T_\infty = 4000$ K y la presión $p_\infty = 9{,}8 \cdot 10^2$ Pa, en el diagrama i—S, hallamos $i_\infty = 8{,}850 \cdot 10^6$ m²/s²; $S_\infty = 13{,}11 \cdot 10^3$m²/(s²·K); $\rho_\infty = 68{,}65 \cdot 10^{-5}$ kg/m³ y en el diagrama a—i, para los valores de S_∞ e i_∞ encontramos la velocidad del sonido $a_\infty = 1300$ m/s.

De la gráfica en la fig. 1.30, para p_∞ y T_∞ hallamos la masa media molar $\mu_{m\infty} \approx 24$ kg/kmol. Después calculamos el número $M_\infty = V_\infty/a_\infty = 3{,}846$ y la entalpía de remanso $i_0 = V_\infty^2/2 + i_\infty = 21{,}35 \cdot 10^6$ m²/s². Tomando en consideración estos parámetros del flujo incidente calculamos la circulación a lo largo de las superficies superior e inferior de la placa.

Superficie superior. En ella se observa una corriente de expansión provocada por el giro del flujo al ángulo $\alpha = 0{,}35$ rad $= 20°$ con relación al vector $\vec{V}_\infty$. Determinamos la velocidad del flujo según el método de características del modo siguiente. En las tablas del flujo isentrópico supersónico de aire disociado, para $S_\infty = 13{,}11 \cdot 10^3$m²/(s²·K) e $i_0 = 21{,}35 \cdot 10^6$ m²/s², según $V_\infty = 5000$ m/s (o bien

Tabla 7.4

Puntos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6	4,0
tg β	−1,0	−0,8	−0,6	−0,4	−0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
M	1,714	1,924	2,149	2,482	2,830	3,234	3,640	4,042	4,423	4,727	5,067
$\bar{p}$	1,354	0,8786	0,6068	0,3476	0,1578	0,09423	0,04918	0,01790	0,006859	0,0008	−0,002155

Tabla 7.5

Puntos	0	1	2	3	4	5	6
x	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
tg β	1,0	0,8	0,6	0,4	0,2	0	−0,2
M	2,698	2,918	3,216	3,532	3,962	4,444	4,987
$\bar{p}$	0,9748	0,8343	0,4704	0,2350	0,1038	0,03275	0,004094

$i_\infty = 8{,}850 \cdot 10^6$ m²/s²), encontramos el ángulo $\omega_\infty = 96°46'$ y, a continuación, se calcula $\omega = \omega_\infty + \alpha = 116{,}76°$. Con este valor de ω, en las indicadas tablas, para $S_\infty = 13{,}11 \cdot 10^3$m²/(s²·K) e $i_0 = 21{,}35 \cdot 10^6$ m²/s², hallamos: $V_s = 5425$ m/s; $i_s = 6{,}581 \cdot 10^6$ m²/s²; $a_s = 1078$ m/s; $\mathbf{M}_s = 5{,}032$ y en el diagrama $i—S$, para $i_s = 6{,}581 \cdot 10^6$ m²/s² y $S_\infty = 13{,}11 \cdot 10^3$ m²/(s²·K), se determinan la presión $p_s = 148{,}1$ Pa ($1{,}51 \cdot 10^{-3}$ kgf/cm²), la temperatura $T_s = 2910$ K y la densidad $\rho_s = 15{,}69 \cdot 10^{-5}$ kg/m³ ($1{,}6 \cdot 10^{-5}$ kgf·s²/m⁴). El correspondiente coeficiente de presión $\bar{p}_s = 2\,(p_s - p_\infty)/(\rho_\infty V_\infty^2) = -0{,}09694$.

Superficie inferior. En esta superficie los parámetros del gas disociado son los mismos que detrás de una onda de choque oblicua provocada por el giro del flujo al ángulo $\beta_{ch} = \alpha = 0{,}35$ rad $= 20°$. Tal giro del flujo $\mathbf{M}_\infty = 3{,}846$, estando el gas no disociado, de acuerdo con la dependencia $\theta_{ch} = f\,(\beta_{ch}, \mathbf{M}_\infty)$, provoca la inclinación de la onda de choque al ángulo $\theta_{ch} = 33°$. En el flujo disociado el correspondiente ángulo de la onda es menor. Con la primera aproximación tomemos su valor igual a 30°. A continuación, calculamos (véase la solución del problema 4.59): $\Delta\bar{V}_n = 0{,}694^6$; $p_1/p_\infty = 4{,}041$; $p_1 = (p_1/p_\infty)\,p_\infty = 3960$ Pa; $i_1 = 11{,}68 \cdot 10^6$ m²/s².

Conociendo $i_1 = 11{,}68 \cdot 10^6$ m²/s² y $p_1 = 3960$ Pa (0,04 kgf/cm²), en la gráfica $T = f\,(p, i)$ encontramos $T_1 = 4550$ K y en la gráfica $\mu_m = f\,(p, T)$, para T_1 y p_1, determinamos la masa media molar $(\mu_m^{\cdot})_1 \approx 23$ kg/kmol.

Ahora, calculamos $A = 0{,}385^6$; $B = 0{,}04278$ y, con la segunda aproximación, determinamos $\Delta\bar{V}_n = 0{,}7107$; tg $\theta_{ch} = 0{,}5263$; $\theta_{ch} = 27{,}76°$.

Al valor hallado de θ_{ch} corresponden los parámetros $p_1/p_\infty = 3{,}704$; $p_1 = 3630$ Pa; $i_1 = 11{,}31 \cdot 10^6$ m²/s².

Al mismo tiempo, en el diagrama $i—S$, por los valores de p_1 e i_1, se determina la temperatura $T_1 = 4420$ K. Después de esto ya podemos de nuevo calcular $A = 0{,}3684$ y $B = 0{,}03902$, lo que con la tercera aproximación nos proporciona los valores de $\Delta\bar{V}_n = 0{,}6791$ y $tg\ \theta_{ch} = 0{,}5362$ ($\theta_{ch} = 28{,}20°$) que poco se diferencian de los hallados con la segunda aproximación.

Tomando en definitiva $\theta_{ch} = 28{,}20°$; $p_1 = 3630$ Pa (0,037 kgf/cm²); $i_1 = 11{,}31 \cdot 10^6$ m²/s² y $T_1 = 4420$ K, en el diagrama $i—p$ encontramos la entropía $S_1 = 14{,}12 \cdot 10^3$ m²/(s²·K) y la densidad $\rho_0 = 22{,}05 \cdot 10^{-5}$ kg/m³; en el diagrama $a—i$, para $i_1 = 11{,}31 \cdot 10^6$ m²/s² y $S_1 = 14{,}12 \cdot 10^3$ m²/(s²·K), hallamos la velocidad del sonido $a_1 = 1430$ m/s.

Seguidamente, (véase el problema 4.59) calculamos $V_{1.v} = 759{,}4$ m/s; $V_1 = V_{1.v}/\text{sen}\,(\theta_{ch} - \alpha) = 5320$ m/s; $\mathbf{M}_1 = 3{,}720$ y determinamos el correspondiente coeficiente de presión $\bar{p}_1 = 2\,(p_1 - p_\infty)/(\rho_\infty V_\infty^2) = 0{,}3088$.

Con los valores hallados de $\bar{p}_s$ y $\bar{p}_1$ calculamos el coeficiente de la fuerza normal $c_y = \bar{p}_1 - \bar{p}_s = 0{,}4057$. Es evidente que el coeficiente de la fuerza longitudinal $c_x = 0$.

El coeficiente de la fuerza de sustentación (en coordenadas ligadas a la trayectoria) $c_{y_a} = c_y \cos\alpha = 0{,}3812$ y el coeficiente de resistencia de ondas de choque $c_{x\ ch} = c_y$ sen $\alpha = 0{,}1388$.

El coeficiente del momento respecto del borde de ataque $-m_{z_a} = c_y\,(x_p/b) = 0{,}2028$.

Según los coeficientes aerodinámicos, para un sector del ala de área $S_{ala} = bl = 10$ m², calculamos la sustentación $Y_a = c_{y_a}\rho_\infty V_\infty^2 S_{ala}/2 = 3{,}271 \times 10^4$ N; la resistencia de ondas de choque $X_{ch} = c_{x\ ch}\rho_\infty V_\infty^2 S_{ala}/2 = 1{,}191 \times 10^4$ N y el momento $M_{z_a} = m_{z_a}\rho_\infty V_\infty^2 S_{ala} b/2 = -3{,}481 \cdot 10^4$ N·m.

7.32. Vamos a determinar los parámetros del flujo incidente de aire disociado, haciendo uso de los diagramas de las funciones termodinámicas del aire. En el diagrama $i—p$, según la presión $p_\infty = 9{,}8\cdot10^2$ Pa (0,01 kgf/cm²) y la temperatura $T_\infty = 4000$ K, hallamos $i_\infty = 8{,}850\cdot10^6$ m²/s²; $S_\infty = 13{,}11\cdot10^3$ m²/(s²·K); $\rho_\infty = 68{,}65\cdot10^{-5}$ kg/m³ y en el diagrama $a—i$, por los valores de i_∞ y S_∞, la velocidad del sonido $a_\infty = 1300$ m/s. A continuación, se determina la entalpía de remanso: $i_0 = V_\infty^2/2 + i_\infty = 16{,}85\cdot10^6$ m²/s².

Ahora, analicemos el carácter de la circulación a lo largo del lado superior del perfil, es decir, aclaremos si ella transcurre con compresión o expansión del flujo. Con este fin, calculamos el ángulo del borde de ataque igual al de inclinación de la tangente al contorno en el punto $x = 0$: $(dy/dx)_{x=0} = \text{tg}\ \beta_0 = 2c/b = 0{,}2$; $\beta_0 = 11{,}31°$.

El ángulo de ataque prefijado ($\alpha = 17{,}19°$) es mayor que el ángulo de aguzado hallado, por lo que la circulación a lo largo del lado superior transcurre con expansión. Para calcular esta circulación hacemos lo siguiente. Primero, para los valores de $S_\infty = 13{,}11\cdot10^3$m²/(s²·K); $i_0 = 16{,}85\cdot10^6$ m²/s²; $V_\infty = 4000$ m/s, en las tablas del flujo isentrópico supersónico encontramos el ángulo $\omega_\infty = 72{,}94°$. A este valor de ω_∞ añadimos el ángulo $\Delta\beta_A$, al que se desvía el flujo del sentido de $\vec{V}_\infty$ cuando el contorno se somete a la circulación en el punto A. Para calcular el ángulo $\Delta\beta_A$ determinamos el ángulo de inclinación de la tangente respecto del contorno en dicho punto ($x_A = 6$):

$$(dy/dx)_{x_A} = \text{tg}\ \beta_A = 2\,(c/b)\,(1 - 2x_A/b) = -\,0{,}04; \quad \beta_A = -\,2{,}29°.$$

Así, pues, el ángulo al que se desvía el flujo es $\Delta\beta_A = \alpha - \beta_A = 19{,}48°$. El correspondiente valor de $\omega = \omega_\infty + \Delta\beta_A = 92{,}42°$. En las correspondientes tablas, según este valor de ω, así como los de $S_\infty = 13{,}11\cdot10^3$m²/(s²·K) e $i_0 = 16{,}85\cdot10^6$ m²/s², hallamos:

$$V_A = 4440 \text{ m/s}; \ i_A = 7{,}145\cdot10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2; \ a_A = 1140 \text{ m/s}; \quad \text{M}_A = 3{,}895.$$

En el diagrama $i—S$, de acuerdo con $i_A = 7{,}145\cdot10^6$m²/s² y $S_\infty = 13{,}11 \times 10^3$m²/(s²·K), se halla la presión $p_A = 235{,}2$ Pa y se calcula el correspondiente coeficiente de presión $\bar{p}_A = 2\,(p_A - p_\infty)/(\rho_\infty V_\infty^2) = -0{,}1356$.

7.33. Para resolver el problema empleamos los diagramas de las funciones termodinámicas del aire a altas temperaturas. En el diagrama $i—S$, según los valores de $p_s = 980$ Pa y $T_s = 3500$ K, determinamos la entalpía $i_s = 7{,}752 \times 10^6$ m²/s² y la entropía $S_s = 12{,}82\cdot10^3$m²/(s²·K) y en el diagrama $a—i$, por i_s y S_s, la velocidad del sonido $a_s = 1230$ m/s. El correspondiente número $\text{M}_s = V_s/a_s = 3{,}252$ y la entalpía de remanso $i_0 = i_s + V_s^2/2 = 15{,}75\cdot10^6$ m²/s².

Conociendo i_0, S_s, V_s, en las tablas del flujo isentrópico supersónico de aire disociado, se halla el ángulo $\omega_s = 73{,}42°$. Sustrayendo de éste el ángulo $\alpha = 0{,}35$ rad $= 20°$ se obtiene $\omega_\infty = \omega_s - \alpha = 53{,}42°$. Según este valor del ángulo, así como por i_0 y S_s, en esas mismas tablas hallamos $V_\infty = 3440$ m/s, $i_\infty = 9{,}905\cdot10^6$ m²/s², $a_\infty = 1370$ m/s, y, a continuación, calculamos $\text{M}_\infty = V_\infty/a_\infty = 2{,}511$. En el diagrama $i - S$, para i_∞ y $S_\infty = S_s$, encontramos la presión $p_\infty = 49{,}03\cdot10^2$ Pa, la densidad $\rho_\infty = 29{,}42\cdot10^{-4}$ kg/m³ y la temperatura $T_\infty = 4240$ K.

7.34. Encontremos los parámetros del flujo incidente. Primero, en el diagrama $p—i$, según la presión $p_\infty = 9{,}8\cdot10^2$ Pa (0,01 kgf/cm²) y la temperatura $T_\infty = 5000$ K, hallamos la entalpía $i_\infty = 15{,}15\cdot10^6$ m²/s², la entropía $S_\infty =$

$= 14{,}52 \cdot 10^3 m^2/(s^2 \cdot K)$, la densidad $\rho_\infty = 50{,}99 \cdot 10^{-5}$ kg/m³, y, seguidamente, por la entalpía $i_\infty = 15{,}15 \cdot 10^6$ m²/s² y la entropía $S_\infty = 14{,}52 \cdot 10^3 m^2/(s^2 \cdot K)$ en el diagrama a—i, se determina la velocidad del sonido $a_\infty = 1470$ m/s. El correspondiente número $M_\infty = V_\infty / a_\infty = 2{,}721$.

Calculemos el ángulo del perfil aguzado:

$$(dy/dx)_{x=0} = \operatorname{tg} \beta_0 = 2c/b = 0{,}2; \quad \beta_0 = 11{,}31°.$$

Así, pues, el ángulo de ataque $\alpha = 0{,}3$ rad $= 17{,}19°$ es mayor que el ángulo de aguzado $\beta_0 = 11{,}31°$, por lo que la circulación a lo largo del lado inferior transcurre con compresión y del superior, con expansión. El punto prefijado A se encuentra en el lado superior, ya que el número $M_A = M_\infty + 0{,}5 = 3{,}221$, o sea, es mayor que el número M del flujo incidente.

Las coordenadas de este punto se determinan del modo siguiente. Calculemos la entalpía de remanso $i_0 = V_\infty^2/2 + i_\infty = 23{,}15 \cdot 10^6$ m²/s² y con su valor, para $S_\infty = 14{,}52 \cdot 10^3 m^2/(s^2 \cdot K)$ y $V_\infty = 4000$ m/s, en las tablas para el flujo isentrópico supersónico de aire disociado, encontramos el ánglo $\omega_\infty = 61{,}95°$. En esas mismas tablas, por los valores de i_0, S_∞ y $M_A = 3{,}221$, para el punto A determinamos el ángulo $\omega_A = 86{,}72°$. La diferencia de los ángulos $\omega_A - \omega_\infty$ nos proporciona el ángulo de desviación del flujo en el punto A del sentido de $\vec{V}_\infty$: $\Delta\beta_A = \alpha - \beta_A = \omega_A - \omega_\infty = 24{,}77°$. De aquí $\beta_A = \alpha - \Delta\beta_A = -7{,}58°$; $\operatorname{tg} \beta_A = -0{,}1331$.

Derivemos la ecuación del contorno superior: $dy/dx = \operatorname{tg} \beta = 2 (c/b) (1 - 2x/b) = 0{,}2 (1 - 0{,}2x)$. De acuerdo con esto $\operatorname{tg} \beta_A = 0{,}2 (1 - 0{,}2 x_A)$, de donde $x_A = (1 - \operatorname{tg} \beta_A/0{,}2)/0{,}2 = 8{,}328$. La segunda coordenada $y_A = 2c (x_A/b) (1 - x_A/b) = 0{,}2785$.

Capítulo 8

El ala en un flujo supersónico

El problema fundamental de aerodinámica de las alas de envergadura finita, alrededor de las cuales circula un flujo supersónico, es el cálculo de la distribución de la presión, la fuerza de sustentación y la resistencia de ondas de choque, así como los respectivos coeficientes aerodinámicos.

Al calcular las características aerodinámicas de las alas hay que tener en cuenta las peculiaridades de la circulación supersónica a su alrededor que consisten en que las pequeñas perturbaciones sólo se propagan por el flujo y en los márgenes del cono de Mach (onda de choque esférica) con semiángulo en el vértice $\mu_\infty = \arcsin(1/M_\infty)$.

Por esta causa en el flujo supersónico la influencia de los extremos del ala sólo se observa en parte de la superficie, en las regiones limitadas por los conos de Mach, trazados por los bordes de ataque de las secciones marginales.

Sobre las características aerodinámicas del ala, alrededor de la cual circula un flujo supersónico, ejerce considerable influencia el carácter de los bordes de ataque (así como centrales y de salida). Si la línea sónica pasa por el borde de ataque (borde de ataque subsónico), la circulación alrededor de las secciones del ala resbaladiza en la región del borde de ataque es análoga a la circulación subsónica. Pero si la línea sónica pasa por detrás del borde de ataque (borde de ataque supersónico), sobre éste incide un flujo no perturbado supersónico y, entonces, no hay interacción entre las superficies superior e inferior (trasdós e intradós) del ala.

Estas singularidades de la circulación de flujo supersónico alrededor de las alas conduce a que en sus superficies se creen diversas regiones de influencia, lo que se manifiesta en la variación de las correspondientes características aerodinámicas.

Con el fin de determinar dichas características ($\bar{p}$, X_{ch}, $c_{x\,ch}$) de un ala delgada de forma arbitraria en la planta con perfil simétrico, sometida a la circulación de un flujo poco perturbado supersónico, con ángulo nulo de ataque ($c_{y_a} = 0$) se utiliza el *método de fuentes*. De acuerdo con él al investigar la circulación alrededor del ala su superficie se sustituye por un sistema de fuentes repartidas. La determinación del potencial de éstas en un punto de la superficie de ala, tomado al azar, permite calcular la distribución de la presión si vienen asignados la forma del ala en la planta, el tipo del perfil y número de Mach del flujo incidente M_∞.

En las preguntas y problemas, aducidos más adelante, se considera el cálculo según el método de las fuentes de semialas triangulares y alas de perfil simétrico, con bordes de ataque subsónicos y supersónicos y situadas bajo el ángulo de ataque nulo ($c_{y_a} = 0$). También puede aplicarse este método para calcular alas triangulares de perfil simétrico que tienen borde medio con distinto carácter de los bordes de ataque y medio y con ángulo de ataque $\alpha = 0$.

Para estudiar las características aerodinámicas de alas triangulares (en forma de placas delgadas o bien de superficies de grosor finito de perfil simétrico), situadas bajo el ángulo de ataque, también se puede utilizar el método de fuentes si el borde de ataque de tales alas es supersónico.

En otros casos relacionados con el estudio de las características aerodinámicas supersónicas de las alas con bordes de ataque subsónicos, cuando hay ángulo de ataque (o bien alas análogas con perfil no simétrico y $\alpha = 0$) es preciso emplear el *método de dipolos*. Él permite calcular la circulación supersónica alrededor de un ala triangular con bordes de ataque subsónicos para $\alpha \neq 0$.

Los resultados del cálculo de la circulación linealizada supersónica alrededor de alas triangulares puede utilizarse para determinar las características aerodiná-

micas de superficies sustentadoras en forma de placas cuadrangulares, pentagonales y hexagonales. Si los bordes de salida y laterales de tales alas son supersónicos, la circulación a su alrededor se caracteriza por la ausencia de zonas de influencia mutua de los sectores de cola y laterales, limitados por la intersección del cono de Mach con el ala. Debido a esto, el coeficiente de presión sobre la superficie del ala es el mismo que en el respectivo punto de una placa triangular y la fórmula para su cálculo se elige tomando en consideración la forma del borde de ataque (subsónico o supersónico).

Cuando los bordes laterales de semejantes alas son subsónicos hay que contar con la influencia de dichos bordes sobre el flujo del gas en las regiones del ala limitadas por las correspondientes líneas de Mach y los indicados bordes.

La circulación supersónica alrededor de un ala delgada de envergadura finita de forma rectangular en la planta, bajo pequeño ángulo de ataque, se caracteriza por la influencia de los bordes de ataque supersónico y laterales subsónicos sobre el flujo perturbado junto a la superficie. Con esto, la influencia simultánea del borde de ataque y de uno de los bordes laterales existe en los límites de los conos de Mach con los vértices en los ángulos del ala, si las generatrices de estos conos se cruzan fuera del ala. Pero si estas generatrices se cruzan en la superficie del ala, surge una zona más, donde sobre el flujo perturbado actúan ambos bordes simultáneamente.

Problemas y preguntas

8.1. Una semiala de forma triangular con perfil simétrico delgado (fig. 8.1) está ubicada en un flujo supersónico ($M_\infty = 1{,}5$; $p_\infty = 9{,}8 \cdot 10^4$ Pa; $k = c_p/c_v = 1{,}4$) bajo un ángulo de ataque $\alpha = 0$. Determinen la distribución de la presión sobre

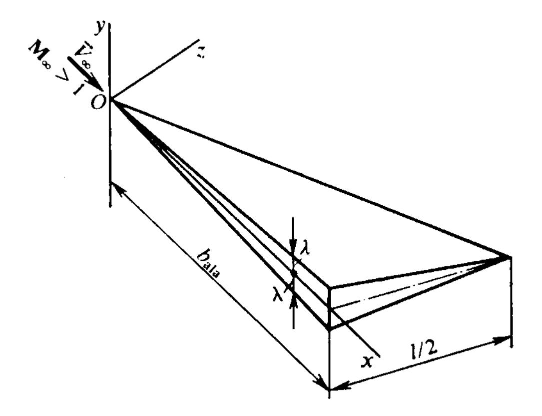


Fig. 8.1. Semiala de forma triangular

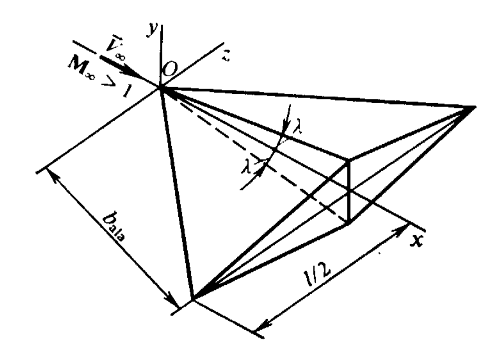


Fig. 8.2. Esquema de un ala de forma triangular

la superficie del ala y fuera de ella en el entorno de la cuerda de raíz y del borde de ataque, así como hallen la resistencia de ondas de choque de la semiala de dimensiones $b_{ala} = 5$ m; $l/2 = 4$m; $\lambda = 0{,}1$ rad.

8.2. Calculen la distribución de la presión en el ala y en el entorno de sus bordes de ataque, así como hallen la resistencia de ondas de choque de esta ala, cuando alrededor de ella circula un flujo supersónico bajo el ángulo de ataque nulo. El ala (fig. 8.2) tiene las siguientes dimensiones: $b_{ala} = 5$ m; $l/2 = 4$m; $\lambda = 0{,}1$ rad. Los parámetros del flujo incidente: $M_\infty = 1{,}5$; $p_\infty = 9{,}8 \cdot 10^4$ Pa; $k = c_p/c_v = 1{,}4$.

8.3. En las superficies de alas delgadas, alrededor de las cuales circula un flujo supersónico linealizado, muestren las regiones con diferente carácter del movimiento perturbado para el borde supersónico de un ala plana triangular (fig. 8.3, *a*) y para un ala plana rectangular (fig. 8.3, *b*), al cumplirse la condición $\lambda_{\mathrm{a\,la}}\sqrt{M_\infty^2 - 1} > 2$, donde $\lambda_{\mathrm{a\,la}} = l/b$ es el alargamiento del ala.

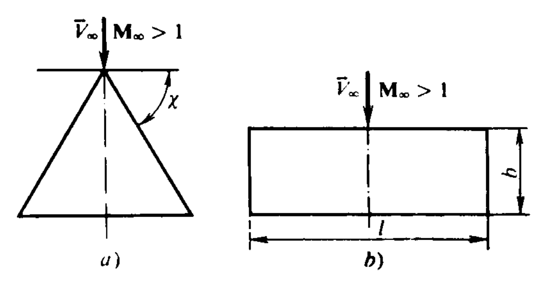


Fig. 8.3. Alas planas triangular (*a*) y rectangular (*b*)

8.4. Una semiala infinita, cuya forma y dimensiones se adujeron en el problema 8.1 (véase la fig. 8.1), está sometida a la circulación de un flujo supersónico con número $M_\infty = 2{,}5$ para el ángulo de ataque $\alpha = 0$. Hallen la distribución de la presión por la superficie del ala y en el entorno del borde lateral tras sus límites, así como determinen la resistencia de ondas de choque. La presión del flujo incidente de aire $p_\infty = 9{,}8 \cdot 10^4$ Pa, el índice adiabático $k = c_p/c_v = 1{,}4$.

8.5. El ala de forma triangular en la planta, cuyas dimensiones se ofrecieron en el problema 8.2 (véase la fig. 8.2), está ubicada bajo el ángulo de ataque $\alpha = 0$ en un flujo supersónico ($M_\infty = 2{,}5$; $p_\infty = 9{,}8 \cdot 10^4$ Pa; $k = c_p/c_v = 1{,}4$). Calculen la distribución de la presión en el ala y su resistencia de ondas de choque.

8.6. Hallen la distribución de la presión, la fuerza de resistencia y el coeficiente de esta fuerza para un ala delgada triangular con perfil romboidal simétrico al estar ella sometida a la circulación de un flujo supersónico ($M_\infty = 1{,}3$; $p_\infty = 9{,}8 \cdot 10^4$ Pa; $k = c_p/c_v = 1{,}4$) bajo el ángulo de ataque $\alpha = 0$. Las dimensiones fundamentales de esta ala (fig. 8.4) son las siguientes: $l = 6$ m; $b_{\mathrm{a\,la}} = 5$ m; $b' = 2$ m; $c = 0{,}2$ m.

8.7. El ala delgada triangular de perfil simétrico romboidal (fig. 8.4) tiene las siguientes dimensiones: $l = 8$ m; $b_{\mathrm{ala}} = 5$m; $b' = 3$ m; $c = 0{,}6$m. Hallen la distribución de la presión, la fuerza de resistencia y el coeficiente de esta fuerza a condición de que alrededor del ala circula un flujo supersónico, bajo el ángulo de ataque $\alpha = 0$, cuyos parámetros son $M_\infty = 1{,}3$; $p_\infty = 9{,}8 \cdot 10^4$ Pa; $k = c_p/c_v = 1{,}4$.

8.8. Un flujo supersónico ($M_\infty = 2$; $p_\infty = 9{,}8 \cdot 10^4$ Pa; $k = c_p/c_v = 1{,}4$) circula alrededor de un ala triangular delgada de perfil simétrico romboidal (fig. 8.4), situada bajo el ángulo de ataque $\alpha = 0$ y de dimensiones $b_{\mathrm{a\,la}} = 4$ m; $b' = 2$ m; $l = 8$ m; $c = 0{,}4$ m. Calculen la distribución de la presión por el ala, su resistencia y el respectivo coeficiente.

8.9. Hallen la distribución de la presión, la fuerza de sustentación, la resistencia y el momento, así como los correspondientes coeficientes aerodinámicos para un ala plana triangular, en forma de una placa delgada (fig. 8.5), alrededor de la cual circula un flujo supersónico bajo pequeño ángulo de ataque $\alpha = 0{,}1$ rad. La envergadura y la cuerda de raíz del ala son iguales a $l = 8$ m; $b_{\mathrm{a\,la}} = 5$ m, respectivamente. Los parámetros del flujo incidente: $M_\infty = 1{,}4$; $p_\infty = 9{,}8 \cdot 10^4$ Pa; $k = c_p/c_v = 1{,}4$.

8.10 Muestren el carácter de distribución de la carga $\Delta \bar{p} = \bar{p}_i - \bar{p}_s$ por la envergadura de un ala delgada plana triangular con bordes supersónicos durante el movimiento directo e invertido (fig. 8.6). Muestren que los coeficientes de la fuerza de sustentación y de resistencia de ondas de choque de semejantes alas son iguales si están situadas bajo el mismo ángulo pequeño de ataque.

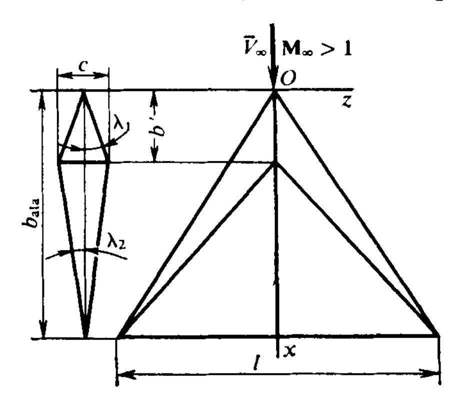


Fig. 8.4. Ala triangular con perfil simétrico romboidal

Fig. 8.5. Ala plana triangular

8.11. Un ala delgada plana y de forma triangular en el plano (véase la fig. 8.5) se encuentra en un flujo supersónico bajo un pequeño ángulo de ataque $\alpha = 0{,}1$ rad. Hallen la distribución de la presión, la fuerza de sustentación, la resistencia y el momento, así como los respectivos coeficientes aerodinámicos para los

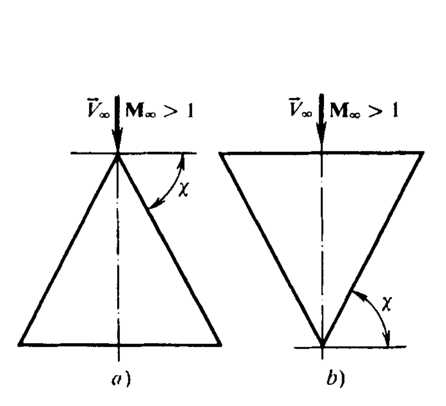


Fig. 8.6. Ala plana triangular en movimiento directo o normal (*a*) e invertido (*b*)

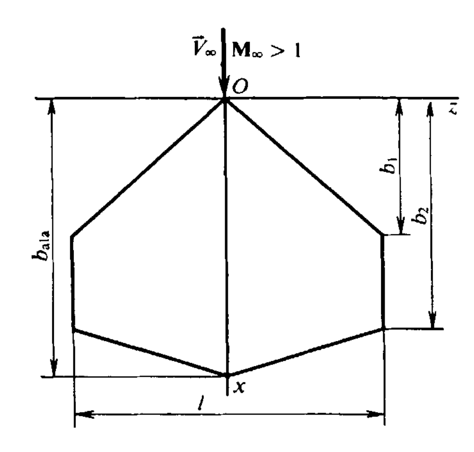


Fig. 8.7. Ala plana hexagonal

siguientes parámetros del flujo incidente: $M_\infty = 2$; $p_\infty = 9{,}8 \cdot 10^4$ Pa; $k = c_p/c_v = 1{,}4$. La envergadura y la cuerda de raíz son iguales a $l = 8$ m; $b_{ala} = 5$ m, respectivamente.

8.12. Un ala delgada plana y hexagonal (fig. 8.7) de dimensiones $b_{ala} = 7$ m; $b_1 = 3$ m; $b_2 = 6$ m; $l = 5$ m está sometida a la circulación de un flujo supersónico bajo un pequeño ángulo de ataque $\alpha = 0{,}1$ rad. Calculen la distribución de la

presión, la fuerza de sustentación y la resistencia, así como los correspondientes coeficientes aerodinámicos. Los parámetros del flujo incidente: $M_\infty = 1,4$; $p_\infty = 9,8 \cdot 10^4$ Pa; $k = c_p/c_v = 1,4$.

8.13. Determinen el ángulo γ del borde lateral de un ala delgada plana (fig. 8.8) con el cual, en el caso de la circulación linealizada de un flujo supersónico con número $M_\infty > 2$, no se observa la influencia de los extremos del ala.

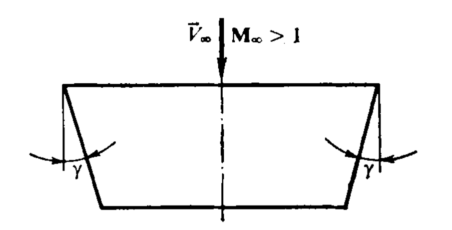


Fig. 8.8. Ala plana cuadrangular

8.14. Hallen la fuerza de sustentación, la resistencia al avance y el momento, así como los correspondientes coeficientes aerodinámicos de un ala delgada rectangular en movimiento por una atmósfera de aire ($p_\infty = 9,8 \cdot 10^4$ Pa; $k = c_p/c_v = 1,4$) a velocidad supersónica ($M_\infty = 2$) bajo un pequeño ángulo de ataque $\alpha = 0,1$ rad. La cuerda del ala $b = 2$ m; su envergadura $l = 6$ m.

8.15. Calculen los parámetros de la circulación alrededor de un ala delgada rectangular situada en un flujo supersónico con número $M_\infty = 1,4$ ($p_\infty = 9,8 \times 10^4$ Pa; $k = c_p/c_v = 1,4$) bajo un pequeño ángulo de ataque $\alpha = 0,1$ rad. La cuerda del ala $b = 4$ m; su envergadura, $l = 6$ m.

8.16. Comparen los coeficientes de la fuerza de sustentación y de la resistencia de ondas de choque de alas en forma de placas de forma triangular y rectangular con iguales ángulos de ataque α, sección en la planta S y envergadura l, si se cumple la condición $\lambda_{\text{ala}}\sqrt{M_\infty^2 - 1} > 4$, donde $\lambda_{\text{ala}} = l/b$; b es la cuerda del ala rectangular.

8.17. Hallen el ángulo de ataque de un ala en forma de una placa rectangular en movimiento horizontal a la altitud $H = 10$ km y velocidad $V_\infty = 500$ m/s, si el área del ala $S_{\text{ala}} = 15$ m², la envergadura $l = 5$ m, el peso $G = 5 \cdot 10^4$ N. Determinen el empuje consumido para vencer la resistencia al avance de semejante ala.

Solución de los problemas y respuestas a las preguntas

8.1. Ante todo, hay que determinar el carácter del borde de ataque del ala que estudiamos. Hallemos el ángulo de Mach $\mu_\infty = \text{arcsen}\,(1/M_\infty) = 41,81°$ y el ángulo de flecha del borde de ataque de la semiala $\chi = \pi/2 - \text{arctg}\,[(l/2)/b_{\text{ala}}] = 51,33°$.

Como $\mu_\infty > (\pi/2 - \chi)$, la línea de Mach pasa por delante del borde de ataque, el que, por lo tanto, es subsónico (fig. 8.9).

Con el fin de determinar el coeficiente de presión en un punto de la superficie de la semiala tomado el azar (p. ej., en el punto A, fig. 8.9), hay que utilizar la dependencia

$$\bar{p} = [2\lambda/(\pi\alpha'\sqrt{n^2 - 1})]\ \text{arch}\ \{(n^2 - \sigma)/[n\,(1 - \sigma)]\}, \tag{8.1}$$

donde $\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$; $n = \text{tg}\,\chi/\alpha'$; $\sigma = \text{tg}\,\chi\ \text{tg}\,\theta$.

De la fórmula (8.1) se desprende que en todos los puntos en la línea, bajo el ángulo θ de su inclinación hacia el eje x, la presión es la misma. Calculemos los

parámetros: $\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 1{,}118$; $n = \operatorname{tg}\chi/\alpha' = 1{,}118$, $\sigma = \operatorname{tg}\chi \operatorname{tg}\theta = 1{,}250 \operatorname{tg}\theta$;

$$a = (n^2 - \sigma)/[n(1 - \sigma)] = 1{,}118\,(1 - \operatorname{tg}\theta)/(1 - 1{,}250 \operatorname{tg}\theta). \qquad (8.2)$$

Para los puntos sobre la superficie del ala en la cuerda de raíz ($\theta = 0$) el valor de $a = 1{,}118$ y $\bar{p} = 0{,}05475$.

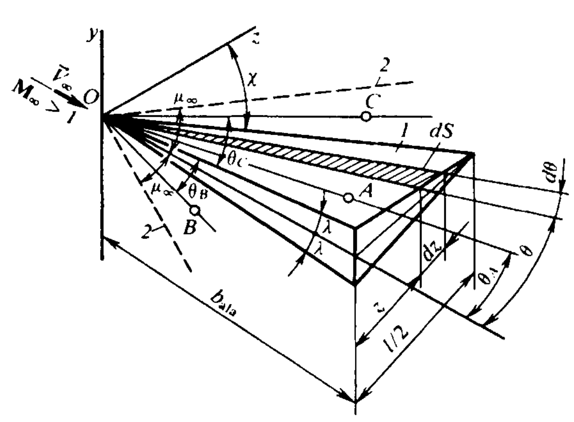


Fig. 8.9. Esquema para el cálculo de la circulación alrededor de una semiala con borde de ataque subsónico:
1, semiala; 2, líneas de Mach

Examinemos el punto A en la superficie del ala para el que tomamos $\operatorname{tg}\theta_A = 0{,}5$ ($\theta_A = 26{,}56°$). De acuerdo con (8.2) calculamos $a = 1{,}491$ y con (8.1), el coeficiente de presión $\bar{p} = 0{,}1086$.

De manera análoga hallamos el coeficiente de presión en otros puntos sobre la superficie del ala ($0 < \theta < \pi/2 - \chi$). Con ello, como sigue de (8.1), en el borde de ataque ($\sigma = 1$) el coeficiente teórico de presión es igual a la infinidad. En la práctica, en el borde de ataque, ligeramente redondeado, surge cierta presión de remanso, correspondiente a la velocidad subsónica del flujo $V_{\infty n} = V_\infty \cos\chi$. Para el valor de $M_{\infty n} = M_\infty \cos\chi = 0{,}9372$ calculamos el coeficiente de presión en el borde de ataque (véase el problema 3.21):

$$\bar{p}_0 = 1 + M_{\infty n}^2/4 + [(2 - k)/24]\, M_{\infty n}^4 = 1{,}239. \qquad (8.3)$$

Consideremos el coeficiente de presión en los puntos situados fuera del ala. Para los puntos que yacen entre el borde lateral, es decir el eje x, y la línea de Mach (p. ej., el punto B en la fig. 8.9), el coeficiente de presión

$$\bar{p} = [2\lambda/(\pi\alpha' \sqrt{n^2 - 1})]\,\{\operatorname{arch}(n^2 - \sigma)/[n(1 + \sigma)]\}. \qquad (8.4)$$

Calculemos la variable

$$a_1 = (n^2 + \sigma)/[n(1 + \sigma)] = 1{,}118\,(1 + \operatorname{tg}\theta)/(1 + 1{,}250 \operatorname{tg}\theta). \qquad (8.5)$$

Para el punto B tomemos el valor de $\operatorname{tg}\theta_B = 0{,}5$ ($\theta_B = 26{,}56°$) y por la fórmula (8.5) hallamos que $a_1 = 1{,}033$, en tanto que por (8.4), el coeficiente de presión $\bar{p} = 0{,}02915$.

En la línea $\theta = 0$, con las fórmulas (8.5) y (8.4), obtenemos $a_1 = a = 1{,}118$ y $\bar{p} = 0{,}05475$.

En los puntos fuera del ala, que yacen entre el borde de ataque del ala y la línea de Mach (p.ej., en el punto C en la fig. 8.9), el coeficiente de presión

$$\bar{p}=[2\lambda/(\pi\alpha'\sqrt{n^2-1})]\,\mathrm{arch}\,\{(n^2-\sigma)/[n(\sigma-1)]\}, \qquad (8.6)$$

donde

$$a_2 = (n^2 - \sigma)/[n(\sigma - 1)] = 1{,}118\,(1 - \mathrm{tg}\,\theta)/(1{,}250\,\mathrm{tg}\,\theta - 1). \qquad (8.7)$$

P. ej., para el punto C tomamos $\theta_C = 40°$ $(\pi/2 - \chi < \theta_C < \mu_\infty)$. Entonces $a_2 = 3{,}680$; $\bar{p} = 0{,}2250$. En la línea de Mach, para la que $\theta = \mu_\infty$, tendremos $\sigma = \mathrm{tg}\,\chi\,\mathrm{tg}\,\mu_\infty = \mathrm{tg}\,\chi/\alpha' = n$.

De la fórmula (8.7) se desprende que $a_2 = 1$. Entonces, de acuerdo con (8.6), $\bar{p} = 0$.

Calculemos la resistencia de ondas de choque de la semiala que examinamos. Primero se determina el valor elemental de esa fuerza que actúa en el área $dS = (1/2)\,b_{\mathrm{ala}}\,dz$ (fig. 8.9), es decir, $dX_{\mathrm{ch}} = (p - p_\infty)\,\lambda dS$.

Teniendo en cuenta que la presión actúa sobre ambos lados del ala (superior e inferior) e integrando por toda la superficie, hallamos la fuerza de la resistencia de ondas de choque:

$$X_{\mathrm{ch}}=2\int_S (p-p_\infty)\,\lambda\,dS, \qquad (8.8)$$

de donde, tomando en consideración que $c_{x\mathrm{ch}} = X_{\mathrm{ch}}/(q_\infty S_{\mathrm{a\,la}})$,

$$c_{x\,\mathrm{ch}}=2\int_0^1 \bar{p}\lambda\,d\bar{S}, \qquad (8.9)$$

en donde $d\bar{S} = d\,(S/S_{\mathrm{a\,la}})$.

Como $z/b_{\mathrm{a\,la}} = \mathrm{tg}\,\theta$, $dS = (1/2)\,b^2_{\mathrm{ala}}d\,(\mathrm{tg}\,\theta) = (1/2)\,b^2_{\mathrm{ala}}\,(d\sigma/\mathrm{tg}\,\chi)$.

Dividiendo S por el área de la semiala $S_{\mathrm{a\,la}} = b_{\mathrm{a\,la}}\,(l/2)/2$ y como $(l/2)\,b_{\mathrm{ala}} = 1/\mathrm{tg}\,\chi$, obtenemos

$$d\bar{S} = d\,(S/S_{\mathrm{a\,la}}) = d\sigma. \qquad (8.10)$$

Teniendo en cuenta (8.10) y (8.1) la fórmula (8.9) toma la forma

$$c_{x\,\mathrm{ch}}=2\int_0^1 [2\lambda^2/(\pi\alpha'\sqrt{n^2-1})]\,\mathrm{arch}\,\{(n^2-\sigma)/[n(1-\sigma)]\}\,d\sigma \qquad (8.11)$$

o bien, después de poner en ella los datos

$$c_{x\,\mathrm{ch}}=0{,}02278\int_0^1 \mathrm{arch}\,\{(1{,}250-\sigma)/[1{,}118\,(1-\sigma)]\}\,d\sigma. \qquad (8.12)$$

Durante el cálculo con (8.12) del coeficiente de la resistencia de ondas de choque se obtiene $c_{x\mathrm{ch}} = 0{,}02506$. Para las dimensiones prefijadas de la semiala la fuerza de la resistencia de ondas de choque

$$X_{\mathrm{ch}} = c_{x\mathrm{ch}}q_\infty S_{\mathrm{a\,la}} = c_{x\mathrm{ch}}\,(kp_\infty \mathrm{M}^2_\infty/2)\,b_{\mathrm{a\,la}}\,(l/2)/2 = 3{,}868\cdot 10^4\ \mathrm{N}.$$

8.2. En la solución del problema 8.1 hallamos los ángulos de Mach $\mu_\infty = 41{,}81°$ y de flecha $\chi = 51{,}33°$ (fig. 8.10). De estos datos sigue que $\mu_\infty > (\pi/2 - \chi)$ y, por lo tanto, los bordes de ataque del ala son subsónicos (las lí-

neas de Mach se sitúan delante de dichos bordes, como vemos en la fig. 8.10). Tomando esto en consideración elegimos las correspondientes dependencias de cálculo. El coeficiente de presión en un punto de la superficie del ala tomado al azar

$$\bar{p} = [4\lambda/(\pi\alpha' \sqrt{n^2-1})] \operatorname{arch} \sqrt{(n^2-\sigma^2)/(1-\sigma^2)}, \tag{8.13}$$

donde $\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 1{,}118$; $n = \operatorname{tg}\chi/\alpha' = 1{,}118$; $\sigma = \operatorname{tg}\chi \operatorname{tg}\theta = 1{,}250 \operatorname{tg}\theta$.
Después de poner estos datos, obtenemos

$$\bar{p} = 0{,}2278 \operatorname{arch} a, \tag{8.14}$$

donde

$$a = \sqrt{(1{,}250 - 1{,}562 \operatorname{tg}^2\theta)/(1 - 1{,}562 \operatorname{tg}^2\theta)}. \tag{8.15}$$

Para los puntos del perfil que yacen en la sección de raíz del ala $\theta = 0$; $a = \sqrt{1{,}250}$ y $\bar{p} = 0{,}1095$. En lo que atañe a los puntos en el ala (en particular, el

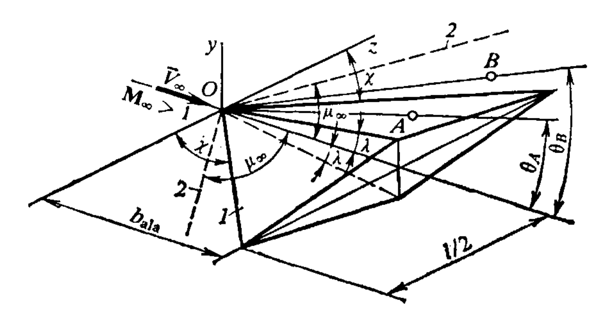


Fig. 8.10. Esquema para el cálculo de la circulación alrededor de un ala triangular con bordes de ataque subsónicos:
1, ala; *2*, líneas de Mach

punto A en la fig. 8.10) para los que $\sigma = 0{,}5$ y, por consiguiente, $\theta = \theta_A = \operatorname{arctg}(\sigma/\operatorname{tg}\chi) = 21{,}81°$, hallamos $a = 1{,}155$; $\bar{p} = 0{,}1251$. Para los puntos situados cerca del borde de ataque ($\operatorname{tg}\theta \to 1/\operatorname{tg}\chi$, de donde $\sigma \to 1$), $\bar{p} \to \infty$ [véase la fórmula (8.13)].

Examinemos la región entre el borde de ataque y la línea de Mach. Aquí el coeficiente de presión

$$\bar{p} = [4\lambda/(\pi\alpha' \sqrt{n^2-1})] \operatorname{arch} \sqrt{(n^2-1)/(\sigma^2-1)}. \tag{8.16}$$

Después de poner aquí las magnitudes conocidas

$$\bar{p} = 0{,}2278 \operatorname{arch} a_1, \tag{8.17}$$

donde

$$a_1 = 0{,}5/\sqrt{1{,}562 \operatorname{tg}^2\theta - 1}. \tag{8.18}$$

En la línea de Mach, donde $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\mu_\infty = \operatorname{tg} 41{,}81°$, tenemos $a_1 = 1$; $\bar{p} = 0$. En la línea arbitraria bajo ángulo θ (con $\pi/2 - \chi < \theta < \mu_\infty$), en particular en el punto B para el que $\theta_B = 41°$ (fig. 8.10), obtenemos $a_1 = 1{,}177$; $\bar{p} = 0{,}1334$. Para la otra semiala y la región entre el borde de ataque y la línea de Mach, el cálculo se realiza de forma análoga.

15—01650

Ahora, calculemos el coeficiente de la resistencia de ondas de choque. Como $S_{ala} = b_{ala}l/2$, en lugar de (8.10) obtenemos la relación

$$d\bar{S} = d\sigma/2. \qquad (8.10')$$

Teniendo en cuenta (8.10′) y que el coeficiente de presión se determina con (8.13), así como que el ala consta de dos semialas unidas conjuntamente, la expresión (8.9) adquiere la forma

$$c_{x\,ch} = \frac{X_{ch}}{q_\infty S_{ala}} = \frac{1}{2}\,2\cdot 2\int_0^1 \bar{p}\lambda\,d\sigma = \frac{8\lambda^2}{\pi\alpha'\sqrt{n^2-1}}\int_0^1 \operatorname{arch}\sqrt{(n^2-\sigma^2)/(1-\sigma^2)}\,d\sigma. \qquad (8.19)$$

Integrando por partes, obtenemos

$$c_{x\,ch} = [8\lambda^2/(\pi\alpha'\sqrt{n^2-1})]\,[\ln n + \sqrt{n^2-1}\ \operatorname{arcsen}(1/n)]. \qquad (8.20)$$

Después de poner los datos, obtenemos

$$c_{xch} = 0{,}03029.$$

Con este coeficiente calculamos la fuerza de la resistencia de ondas de choque:

$$X_{ch} = c_{xch}q_\infty S_{a\,la} = c_{xch}\,(kp_\infty M_\infty^2/2)\,2b_{a\,la}\,(l/2)/2 = 9{,}349\cdot 10^4\ \text{N}.$$

8.3. Para los bordes de ataque supersónicos se cumple la condición $\mu_\infty < (\pi/2 - \chi)$; con ello, las líneas de Mach se sitúan en la superficie del ala triangular detrás de dichos bordes (fig. 8.11, *a*). Para el ala triangular la superficie se divide en dos regiones (*I* y *II*) con distintos caracteres de la circulación (fig. 8.11, *a*).

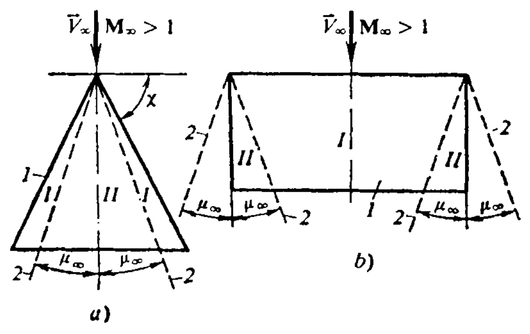


Fig. 8.11. Regiones con distinto carácter del flujo del gas en un ala triangular con bordes de ataque supersónicos (*a*) y en un ala rectangular (*b*):
1, ala; *2*, líneas de Mach

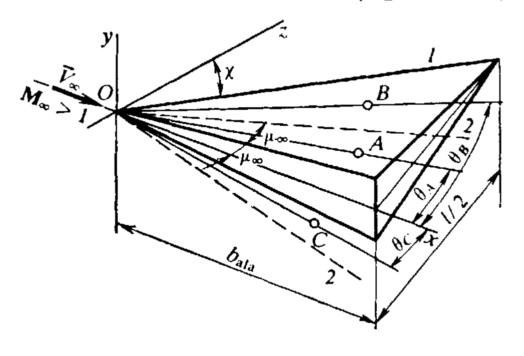


Fig. 8.12. Esquema para el cálculo de la circulación alrededor de una semiala con borde de ataque supersónico:
1, semiala; *2*, líneas de Mach

La circulación alrededor de la parte del ala que yace fuera del cono de Mach (región *I*) coincide con la circulación alrededor de un ala plana de envergadura infinita con deslizamiento (el ángulo de deslizamiento es igual al de flecha χ). En esta región la presión es constante. En la región *II* el flujo es cónico: aquí la presión es constante a lo largo de los rayos que salen del vértice del ala.

Cuando la condición $\lambda_{a\,la}\sqrt{M_\infty^2 - 1} > 2$ se cumple para el ala rectangular, las regiones de influencia de los bordes laterales no se cruzan en la superficie (fig. 8.11, *b*). Con ello, la superficie del ala se divide en dos regiones con distinto ca-

rácter del movimiento perturbado: la región I, donde la presión es constante, la región II, donde surge un flujo cónico y la presión conserva su valor constante en los rayos que salen de los bordes de ataque de las secciones marginales.

8.4. Determinemos el ángulo de inclinación de la línea de Mach: $\mu_\infty = \arcsin(1/M_\infty) = 23{,}58°$. Empleando la solución del problema 8.1 hallamos el ángulo de flecha del ala $\chi = 51{,}33°$. Como se cumple la condición $\mu_\infty < (\pi/2 - \chi)$, los bordes de ataque son supersónicos (las líneas de Mach pasan en la superficie del ala como se muestra en la fig. 8.12).

La correspondiente dependencia para el coeficiente de presión en los puntos sobre la superficie del ala, entre el borde de ataque y la línea de Mach, tiene la forma

$$\bar{p} = 2\lambda/(\alpha' \sqrt{1-n^2}), \tag{8.21}$$

donde $\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 2{,}291$; $n = \operatorname{tg}\chi/\alpha' = 0{,}5456$.

Así, pues, para todos los puntos en esta región (entre ellos el punto B; fig. 8.12) el coeficiente de presión es el mismo e igual a $\bar{p} = 0{,}1042$.

En las regiones entre la línea de Mach y el borde lateral este coeficiente

$$\bar{p} = [2\lambda/(\alpha' \sqrt{1-n^2})]\{1 - (1/\pi)\arccos[(\sigma - n^2)/n(1-\sigma)]\}. \tag{8.22}$$

Introducimos en esta fórmula las magnitudes conocidas:

$$\bar{p} = 0{,}1042\,\{1 - (1/\pi)\arccos[(\sigma - 0{,}2977)/0{,}5456\,(1-\sigma)]\}, \tag{8.23}$$

donde $\sigma = \operatorname{tg}\chi\operatorname{tg}\theta = 1{,}250\operatorname{tg}\theta$.

Para la cuerda de raíz ($\theta = 0$; $\sigma = 0$) $\bar{p} = 0{,}03296$.

Para los puntos en la línea de Mach, donde $\theta = \mu_\infty$ y $\sigma = \operatorname{tg}\chi\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\chi/\alpha' = n$, con (8.22) obtenemos $\bar{p} = 2\lambda/(\alpha'\sqrt{1-n^2}) = 0{,}1042$, es decir, la presión es la misma que en el sector entre el borde de ataque y la línea de Mach.

En lo que se refiere al punto arbitrario A la presión se determina del modo siguiente. Sea $\theta_A = 20°$, entonces $\sigma = \operatorname{tg}\chi\operatorname{tg}\theta = 0{,}4550$ y, de acuerdo con (8.23), el coeficiente de presión $\bar{p} = 0{,}07059$.

Examinemos la región entre el borde lateral y la línea de Mach. Aquí, el coeficiente de presión (p. ej., en el punto C; fig. 8.12)

$$\bar{p} = [2\lambda/(\pi\alpha' \sqrt{1-n^2})]\arccos\{(n^2+\sigma)/n(1+\sigma)]\}. \tag{8.24}$$

Después de poner en (8.24) los datos, obtenemos

$$\bar{p} = (0{,}1042/\pi)\arccos\{(0{,}2977 + \sigma)/[0{,}5456\,(1+\sigma)]\}, \tag{8.25}$$

donde $\sigma = \operatorname{tg}\chi\operatorname{tg}\theta = 1{,}250\operatorname{tg}\theta$.

En la sección de raíz ($\theta = 0$; $\sigma = 0$) el coeficiente de presión $\bar{p} = 0{,}03296$.

En la línea de Mach, donde $\theta = \mu_\infty$ y $\sigma = \operatorname{tg}\chi\operatorname{tg}\mu_\infty = \operatorname{tg}\chi/\alpha' = n$, como sigue de (8.24) $\bar{p} = 0$. Ahora, determinemos el coeficiente de la resistencia de ondas de choque empleando las fórmulas (8.9), (8.10), con la particularidad de que el coeficiente de presión en (8.9) se sustituye por las expresiones (8.21) y (8.22)

para dos partes del ala, respectivamente. Entonces

$$c_{x\,\text{ch}} = \frac{4\lambda^2}{\alpha' \sqrt{1-n^2}} \left[1 - \frac{1}{\pi} \int_0^n \arccos \frac{\sigma - n^2}{n(1-\sigma)}\, d\sigma\right] =$$

$$= 0{,}02084 \left[1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{0{,}5456} \arccos \frac{\sigma - 0{,}2977}{0{,}5456\,(1-\sigma)}\, d\sigma\right]. \qquad (8.26)$$

El valor de la integral en (8.26) es igual a 0,8, en tanto que el coeficiente de la resistencia de ondas de choque $c_{x\,\text{ch}} = 0{,}02084\ (1 - 0{,}8/\pi) = 0{,}01553$. La correspondiente resistencia de ondas de choque

$$X_{\text{ch}} = c_{x\,\text{ch}} q_\infty S_{\text{ala}} = c_{x\,\text{ch}}\, (k p_\infty M_\infty^2/2)\, b_{\text{ala}}\, (l/2)/2 = 6{,}658 \cdot 10^4\ \text{N}.$$

8.5. De la solución del problema 8.4 se desprende que el ángulo $\mu_\infty = 23{,}58°$ y de la solución del problema 8.1, el ángulo $\chi = 51{,}33°$. Como se cumple la condición $\mu_\infty < (\pi/2 - \chi)$, es decir, las líneas de Mach pasan detrás de los bordes de ataque por la superficie del ala, como se muestra en la fig. 8.13, dichos bordes son supersónicos.

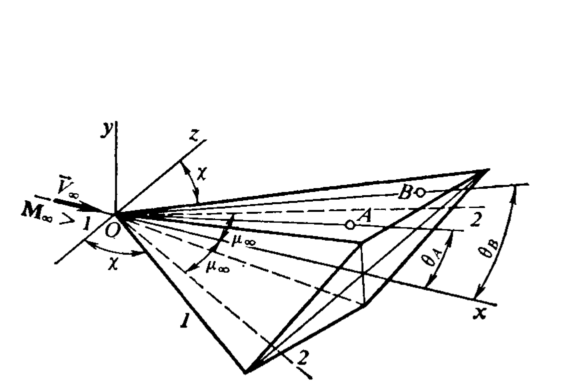


Fig. 8.13. Esquema de la circulación alrededor de un ala triangular con bordes de ataque supersónicos:
1, ala; *2*, líneas de Mach

Fig. 8.14. Flujo supersónico alrededor de un ala triangular con bordes subsónicos:
1, ala; *2*, líneas de Mach

En cualquier punto sobre la superficie del ala en la región entre el borde de ataque y la línea de Mach (en particular, en el punto B; fig. 8.13), el coeficiente de presión es el mismo. Su valor se determina con la fórmula (8.21) y, como sigue de la solución del problema 8.4, es igual a 0,1042.

En la región entre las líneas de Mach el coeficiente de presión en la superficie del ala

$$\bar{p} = [2\lambda/(\alpha' \sqrt{1-n^2})]\,[1 - (2/\pi) \operatorname{arcsen} \sqrt{(n^2 - \sigma^2)/(1-\sigma^2)}], \qquad (8.27)$$

donde $\alpha' = 2{,}291$, $n = 0{,}5456$; $\lambda = 0{,}1$ (véase la solución del problema 8.4). Introduciendo estos valores en (8.27), obtenemos

$$\bar{p} = 0{,}1042\ [1 - (2/\pi) \operatorname{arcsen} \sqrt{(0{,}2977 - \sigma^2)/(1-\sigma^2)}]. \qquad (8.27')$$

Para los puntos que yacen en la sección de raíz ($\theta = 0$; $\sigma = 0$), $\bar{p} = 0{,}06592$.

En la línea de Mach, donde $\theta = \mu_\infty$ y $\sigma = n = 0{,}5456$, de acuerdo con (8.27), el coeficiente de presión $\bar{p} = 2\lambda/(\alpha'\sqrt{1-n^2}) = 0{,}1042$.

Para el punto arbitrario A (fig. 8.13), situado en el interior del ángulo de Mach, el coeficiente de presión se calcula del siguiente modo. Supongamos que $\theta_A = 20°$, entonces $\sigma = \operatorname{tg}\chi \operatorname{tg}\theta_A = 0{,}4550$ y con (8.27') hallamos $\bar{p} = 0{,}08132$.

Empleando las fórmulas (8.9), (8.10'), (8.21), (8.27) y tomando en consideración que el ala consta de dos semialas, determinamos el coeficiente de la resistencia de ondas de choque:

$$c_{x\,\mathrm{ch}} = X_{\mathrm{ch}}/(q_\infty S_{\mathrm{a\,la}}) = 4\lambda^2/\alpha' = 0{,}01746. \tag{8.28}$$

La correspondiente fuerza de la resistencia de ondas de choque

$$X_{\mathrm{ch}} = c_{x\,\mathrm{ch}} q_\infty S_{\mathrm{a\,la}} = c_{x\,\mathrm{ch}}\,(kp_\infty \mathrm{M}_\infty^2/2)\,b_{\mathrm{a\,la}} l/2 = 14{,}97\cdot 10^4\ \mathrm{N}.$$

8.6. Determinemos el ángulo de Mach $\mu_\infty = \operatorname{arcsen}(1/\mathrm{M}_\infty) = 50{,}28°$ y los ángulos de flecha de los bordes de ataque y medio (fig. 8.14):

$$\chi_1 = \pi/2 - \operatorname{arctg}[(l/2)/b_{\mathrm{a\,la}}] = 59°;$$

$$\chi_2 = \pi/2 - \operatorname{arctg}(l/2)/(b_{\mathrm{a\,la}} - b') = 45°.$$

Como $\mu_\infty > (\pi/2 - \chi_1)$ y $\mu_\infty > (\pi/2 - \chi_2)$, los dos bordes son subsónicos y las líneas de Mach trazadas desde los puntos O y O_1 del ala pasan por delante de ellos.

Calculemos la distribución de la presión por el ala. En la región OAO_1 (o bien OA_1O_1) el coeficiente de presión es constante a lo largo de los rayos que salen del vértice del ala O bajo el ángulo θ respecto del eje x y se obtiene con la fórmula

$$\bar{p} = [4\lambda_1/(\pi\alpha'\sqrt{n_1^2-1})]\operatorname{arch}\sqrt{(n_1^2-\sigma_1^2)/(1-\sigma_1^2)}, \tag{8.29}$$

en la que $\lambda_1 = c/(2b') = 0{,}05$; $\alpha' = \sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1} = 0{,}8307$; $n_1 = \operatorname{tg}\chi_1/\alpha' \approx 2$; $\sigma_1 = \operatorname{tg}\chi_1 \operatorname{tg}\theta = 1{,}664 \operatorname{tg}\theta$.

Después de poner estos datos en (8.29), obtenemos

$$\bar{p} = 0{,}04425 \operatorname{arch}\sqrt{(4-2{,}769\operatorname{tg}^2\theta)/(1-2{,}769\operatorname{tg}^2\theta)}. \tag{8.29'}$$

En la región O_1AB (o bien $O_1A_1B_1$) el coeficiente de presión

$$\bar{p} = \frac{4\lambda_1}{\pi\alpha'\sqrt{n_1^2-1}}\operatorname{arch}\sqrt{\frac{n_1^2-\sigma_1^2}{1-\sigma_1^2}} - \frac{4(\lambda_2+\lambda_1)}{\pi\alpha'\sqrt{n_1^2-1}}\operatorname{arch}\sqrt{\frac{n_2^2-1}{\sigma_2^2-1}}, \tag{8.30}$$

donde $\lambda_2 = c/[2(b_{\mathrm{a\,la}} - b')] = 0{,}025$; $n_2 = \operatorname{tg}\chi_2/\alpha' = 1{,}204$; $\sigma_2 = \operatorname{tg}\chi_2 \operatorname{tg}\theta_1 = \operatorname{tg}\theta_1$, con la particularidad de que θ_1 es el ángulo entre el rayo trazado desde el punto O_1 y el eje x (fig. 8.14). Poniendo los datos en (8.30), hallamos

$$\bar{p} = 0{,}04425 \operatorname{arch}\sqrt{\frac{4-2{,}769\operatorname{tg}^2\theta}{1-2{,}769\operatorname{tg}^2\theta}} - 0{,}06637 \operatorname{arch}\sqrt{\frac{0{,}4496}{\operatorname{tg}^2\theta_1 - 1}}. \tag{8.30'}$$

Por fin, en la región O_1BC (o bien O_1B_1C) el coeficiente de presión

$$\bar{p} = \frac{4\lambda_1}{\pi\alpha'\sqrt{n_1^2-1}}\operatorname{arch}\sqrt{\frac{n_1^2-\sigma_1^2}{1-\sigma_1^2}} - \frac{4(\lambda_2+\lambda_1)}{\pi\alpha'\sqrt{n_2^2-1}}\operatorname{arch}\sqrt{\frac{n_2^2-\sigma_2^2}{1-\sigma_2^2}}, \tag{8.31}$$

como en (8.30), aquí se toma el valor absoluto de los ángulos λ_1 y λ_2.

Pongamos en (8.31) los datos:

$$\bar{p} = 0{,}04425 \operatorname{arch}\sqrt{\frac{4-2{,}769\operatorname{tg}^2\theta}{1-2{,}769\operatorname{tg}^2\theta}} - 0{,}1713 \operatorname{arcth}\sqrt{\frac{1{,}4496-\operatorname{tg}^2\theta_1}{1-\operatorname{tg}^2\theta_1}}. \tag{8.31'}$$

Como ejemplo examinemos el cálculo de la distribución del coeficiente de presión por el perfil FL (fig. 8.14) la coordenada z del cual $|z_F| = 1{,}5$. En el punto F (en el borde de ataque) $\theta = \pi/2 - \chi_1$, $\operatorname{tg}\theta = 1/\operatorname{tg}\chi_1$ y, por lo tanto, $\sigma = 1$, mientras que el coeficiente teórico de presión, en correspondencia con (8.29), es igual a la infinidad. En cierto punto K del sector FH, para el que $\theta_K = 27°$ y $x_K = |z_F|/\operatorname{tg}\theta_K = 1{,}5/\operatorname{tg} 27° = 2{,}944$, el coeficiente de presión $\bar{p}_K = 0{,}08396$.

Determinemos la posición del punto H. Como vemos en la fig. 8.14

$$x_H = b' + |z_F|/\operatorname{tg}\mu_\infty = b' + |z_F|\alpha' = 3{,}246; \quad \operatorname{tg}\theta_H = |z_F|/x_H = 0{,}4621 \; (\theta_H = 24{,}8°).$$

Calculemos el coeficiente de presión en este punto. Como en la línea O_1A_1 (o bien O_1A), que es una línea de Mach, $\sigma_2 = \operatorname{tg}\chi_2 \operatorname{tg}\mu_\infty = \operatorname{tg}\chi_2/\alpha' = n_2$, el segundo término del segundo miembro de la expresión (8.30) es igual a cero y, por consiguiente, esta expresión coincide con la fórmula (8.29). De esta forma, para el punto H $\bar{p}_H = 0{,}07612$.

En cierto punto N en el sector HG para el que, p. ej., $\theta_N = 24°$ ($\operatorname{tg}\theta_N = 0{,}4452$) y $x_N = |z_F|/\operatorname{tg}\theta_N = 3{,}369$, $\operatorname{tg}\theta_{1N} = |z_F|/(x_N - b') = 1{,}096$, de acuerdo con (8.30′), el coeficiente de presión $\bar{p}_N = 0{,}01057$.

En el punto G, que yace en el borde medio, $\sigma_2 = \operatorname{tg}\chi_2 \operatorname{tg}\theta_1 = \operatorname{tg}\chi_2/\operatorname{tg}\chi_2 = 1$ y, como sigue de (8.30) o bien de (8.31), el coeficiente teórico de presión es igual a $-\infty$. Determinemos el coeficiente de presión en el punto intermedio M situado en el sector GL. Tomemos $\theta_M = 20°$ ($\operatorname{tg}\theta_M = 0{,}3640$) entonces,

$$x_M = |z_F|/\operatorname{tg}\theta_M = 4{,}121; \quad \operatorname{tg}\theta_{1M} = |z_F|/(x_M - b') = 0{,}7072.$$

En correspondencia con (8.31′) el coeficiente $\bar{p}_M = -0{,}07721$. De modo análogo se obtiene el coeficiente de presión en el punto L para el que $\operatorname{tg}\theta_L = |z_F|/b_{\text{ala}} = 0{,}3$, $\operatorname{tg}\theta_{1L} = |z_F|/(b_{\text{ala}} - b') = 0{,}5$. Poniendo estos valores en (8.31′) calculamos que $\bar{p}_L = -0{,}05811$.

El carácter de la distribución del coeficiente de presión por el perfil FL se muestra en la fig. 8.15, donde $\bar{x}_F = x_F/b_{\text{ala}} = |z_F| \operatorname{tg}\chi_1/b_{\text{ala}} \approx 0{,}5$.

El coeficiente de resistencia de ondas de choque se calcula con la fórmula

$$c_{x\,\text{ch}} = \frac{2\bar{c}^2}{\pi\alpha'}\left\{\frac{G_2'(n_1, r)}{r(1-r)^2} - \frac{F(n_2, r)}{(1-r)^2} + \frac{1}{r(1-r)} \times \right.$$
$$\left. \times \left[\frac{\ln(n_1 r)}{\sqrt{n_1^2 r^2 - 1}} - \frac{\ln n_1}{\sqrt{n_1^2 - 1}} + \operatorname{arcsen}\frac{1}{n_1 r} - \operatorname{arcsen}\frac{1}{n_1}\right]\right\},$$

en la que $r = (b_{\text{ala}} - b')/b_{\text{ala}}$; $\bar{c} = c/b_{\text{ala}}$;

$$G_2'(n_1, r) = \frac{1-r}{1+r}\left\{\frac{\ln n_1}{\sqrt{n_1^2 - 1}} + \frac{r \operatorname{arch} n_1}{\sqrt{n_1^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{n_1^2 r^2 - 1}} \ln\left[1 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{2\sqrt{n_1^2 r^2 - 1}}{n_1(1-r) + \sqrt{n_1^2 - 1} - \sqrt{n_1^2 r^2 - 1}}\right]\right\};$$

$$F(n_2, r) = \frac{1-r}{1+r}\left\{\frac{\ln(n_1 r)}{\sqrt{n_1^2 r^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{n_1^2 - 1}} \ln\left[\frac{n_1^2 r - 1 + \sqrt{(n_1^2 r^2 - 1)(n_1^2 - 1)}}{n_1(1-r)}\right]\right\},$$

con la particularidad de que $F(n_2, r)$ está representada teniendo en cuenta que $n_2/n_1 = \operatorname{tg}\chi_2/\operatorname{tg}\chi_1 = r$.

Calculamos los parámetros: $r = 0{,}6$; $\bar{c} = 0{,}04$; $G_2' (n_1, r) = 0{,}3541$; $F (n_2, r) = 0{,}2342$; $c_{x\text{ch}} = 0{,}004823$.

La correspondiente fuerza de la resistencia de ondas de choque

$$X_{\text{ch}} = c_{x\text{ch}} q_\infty S_{\text{ala}} = c_{x\text{ch}} (kp_\infty \mathbf{M}_\infty^2/2)\, b_{\text{ala}} l/2 = 0{,}8387 \cdot 10^4 \text{ N}.$$

8.7. Determinemos el ángulo de Mach $\mu_\infty = \text{arcsen}\,(1/\mathbf{M}_\infty) = 50{,}28°$ y los ángulos de flecha de los bordes de ataque y medio (fig. 8.16) $\chi_1 = \pi/2 - \text{arctg}\,(l/2)/b_{\text{ala}} = 50{,}35°$; $\chi_2 = \pi/2 - \text{arctg}\,(l/2)\,(b_{\text{ala}} - b') = 26{,}57°$.

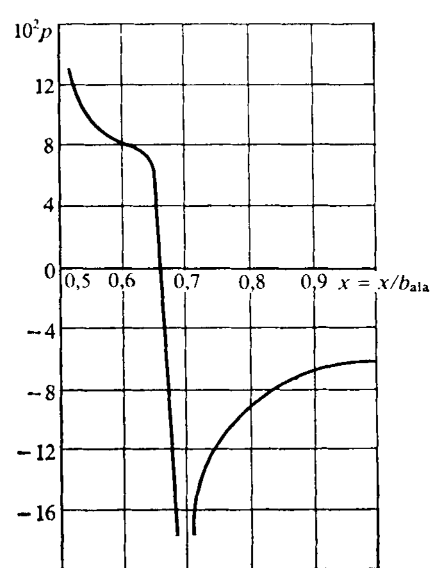


Fig. 8.15. Distribución del coeficiente de presión por el perfil *FL* del ala representada en la fig. 8.14

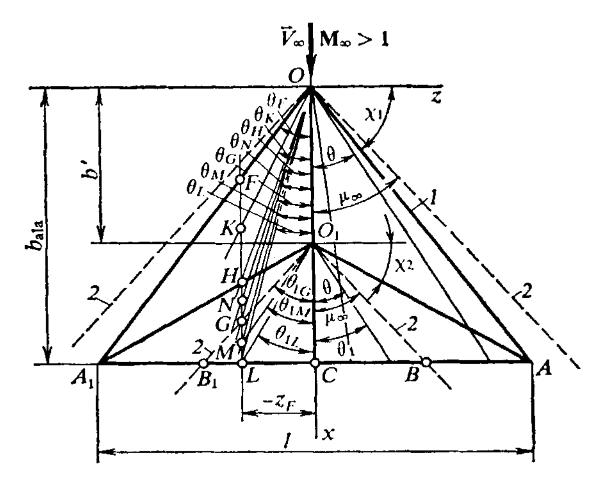


Fig. 8.16. Circulación de un flujo supersónico alrededor de un ala triangular con diferentes bordes: *1*, ala; *2*, líneas de Mach

Para el borde de ataque es real la condición $\mu_\infty > (\pi/2 - \chi_1)$ y para el de salida, $\mu_\infty < (\pi/2 - \chi_2)$. De aquí se desprende que los bordes de ataque son subsónicos (las líneas de Mach trazadas desde el vértice del ala pasan por delante de los bordes), mientras que los medios, supersónicos (las líneas de Mach trazadas desde el punto O_1 se disponen detrás de ellos; fig. 8.16).

Hallemos la distribución del coeficiente de presión por el ala. En las regiones OAO_1 (o bien OA_1O_1) éste es constante a lo largo del rayo trazado desde el vértice del ala O bajo el ángulo θ hacia el eje x y se calcula con la fórmula

$$\bar{p} = [4\lambda_1/(\pi\alpha' \sqrt{n_1^2 - 1})]\, \text{arch} \sqrt{(n_1^2 - \sigma_1^2)/(1 - \sigma_1^2)}, \tag{8.32}$$

en la que $\lambda_1 = c/(2b') = 0{,}1$; $\alpha' = \sqrt{\mathbf{M}_\infty^2 - 1} = 0{,}8307$; $n_1 = \text{tg}\,\chi_1/\alpha' = 1{,}452$; $\sigma_1 = \text{tg}\,\chi_1\, \text{tg}\,\theta = 1{,}207\, \text{tg}\,\theta$.

Pongamos estos datos en (8.32):

$$\bar{p} = 0{,}1456\, \text{arch} \sqrt{(2{,}108 - 1{,}457\, \text{tg}^2\theta)/(1 - 1{,}457\, \text{tg}^2\theta)}\,. \tag{8.32'}$$

En la región O_1AB (o bien $O_1A_1B_1$) el coeficiente de presión

$$\bar{p} = \frac{4\lambda_1}{\pi\alpha' \sqrt{n_1^2 - 1}}\, \text{arch} \sqrt{\frac{n_1^2 - \sigma_1^2}{1 - \sigma_1^2}} - \frac{2(\lambda_1 + \lambda_2)}{\alpha' \sqrt{1 - n_2^2}}\,, \tag{8.33}$$

donde se toman los valores absolutos de λ_1 y λ_2. Teniendo en cuenta que $\lambda_2 = c/[2(b_{a\,la} - b')] = 0{,}15$; $n_2 = \mathrm{tg}\,\chi_2/\alpha' = 0{,}6019$, obtenemos

$$\bar{p} = 0{,}1456\ \mathrm{arch}\ \sqrt{(2{,}108 - 1{,}457\ \mathrm{tg}^2\theta)/(1 - 1{,}457\ \mathrm{tg}^2\theta)} - 0{,}7537. \qquad (8.33')$$

En las regiones O_1BC (o bien O_1B_1C)

$$\bar{p} = \frac{4\lambda_1}{\pi\alpha'\sqrt{n_1^2 - 1}}\ \mathrm{arch}\ \sqrt{\frac{n_1^2 - \sigma_1^2}{1 - \sigma_1^2}} - \left[\frac{2(\lambda_2 + \lambda_1)}{\alpha'\sqrt{1 - n_2^2}}\right]\left[1 - \frac{2}{\pi}\ \mathrm{arcsen}\ \sqrt{\frac{n_2^2 - \sigma_2^2}{1 - \sigma_2^2}}\right], \qquad (8.34)$$

donde $\sigma_2 = \mathrm{tg}\,\chi_2\,\mathrm{tg}\,\theta_1 = 0{,}5\,\mathrm{tg}\,\theta_1$, con la particularidad de que θ_1 es el ángulo entre el rayo trazado del punto O_1 y el eje x (fig. 8.16). Tomando en consideración que $n_2^2 = 0{,}3623$ y $\sigma_2^2 = 0{,}25\,\mathrm{tg}^2\,\theta_1$, (8.34) toma la forma

$$\bar{p} = 0{,}1456\ \mathrm{arch}\ \sqrt{\frac{2{,}108 - 1{,}457\ \mathrm{tg}^2\theta}{1 - 1{,}457\ \mathrm{tg}^2\theta}} - 0{,}7537\left(1 - \frac{2}{\pi}\ \mathrm{arcsen}\ \sqrt{\frac{0{,}3623 - 0{,}25\ \mathrm{tg}^2\theta_1}{1 - 0{,}25\ \mathrm{tg}^2\theta_1}}\right). \qquad (8.34')$$

Calculemos los coeficientes de presión para el perfil FL (fig. 8.16), cuya coordenada $|z_F| = 1{,}5$. En el punto F (borde de ataque) $\theta = \pi/2 - \chi_1$; $\mathrm{tg}\,\theta = 1/\mathrm{tg}\,\chi_1$; $\sigma_1 = 1$ y, por consiguiente, el coeficiente teórico de presión es igual a la infinidad [véase (8.32)]. En cierto punto K, en el sector FH, en el que, p. ej., $\theta_K = 30°$ y $x_K = |z_F|/\mathrm{tg}\,\theta_K = 2{,}598$, en correspondencia con (8.32), el coeficiente de presión $\bar{p}_K = 0{,}1709$.

Determinemos la posición del punto H. Como vemos en la fig. 8.16 $x_H = b' + |z_F|/\mathrm{tg}\,(\pi/2 - \chi_2) = 3{,}75$. Después hallamos $\mathrm{tg}\,\theta_H = |z_F|/x_H = 0{,}4$; $\theta_H = 21{,}8°$ y, con (8.32), $\bar{p}_H = 0{,}1481$.

Además, el punto H pertenece a la región $O_1A_1B_1$ y el coeficiente de presión en él se determina por la fórmula (8.33'), es decir, $\bar{p}'_H = -0{,}6056$. Para cierto punto N en el sector HG tomamos $\theta_N = 20°$. Entonces, $x_N = |z_F|/\mathrm{tg}\,\theta_N = 4{,}121$ y, de acuerdo con (8.33'), el coeficiente de presión $\bar{p}_N = -0{,}6078$.

La posición del punto G se determina de la forma siguiente. Como vemos en la fig. 8.16 $x_G = b' + |z_F|\,\alpha' = 4{,}246$, siendo entonces $\mathrm{tg}\,\theta_G = |z_F|/x_G = 0{,}3532$; $\theta_G = 19{,}45°$.

De acuerdo con (8.33'), en este punto el coeficiente de presión $\bar{p}_G = -0{,}6089$. Un resultado igual obtenemos empleando la fórmula (8.34) si en ella hacemos $\sigma_2 = 0{,}5\ \mathrm{tg}\,\theta_{1G} = 0{,}5/\alpha' = 0{,}6019 = n_2$.

Determinemos el coeficiente de presión en el punto M ($\theta_M = 17{,}5°$). Para ello calculamos $x_M = |z_F|/\mathrm{tg}\,\theta_M = 4{,}757$; $\mathrm{tg}\,\theta_{1M} = |z_F|/(x_M - b') = 0{,}8537$ y con (8.34') hallamos $\bar{p}_M = -0{,}2966$.

En el punto L, para el que $\mathrm{tg}\,\theta_L = |z_F|/b_{a\,la} = 0{,}3$; $\theta_L = 16{,}7°$; $\mathrm{tg}\,\theta_{1L} = |z_F|/(b_{a\,la} - b') = 0{,}75$, tenemos $\bar{p}_L = -0{,}2706$.

El carácter de la distribución del coeficiente de presión por el perfil FL se muestra en la fig. 8.17, donde

$$\bar{x}_F = x_F/b_{a\,la} = |z_F|\ \mathrm{tg}\,\chi_1/b_{a\,la} = 0{,}36.$$

El coeficiente de la resistencia de ondas de choque del ala se calcula con la fórmula

$$c_{x\,\mathrm{ch}}=\frac{2\bar{c}^2}{\pi\alpha'}\left[\frac{G_2(n_1,\ r)}{r(1-r)^2}+\frac{1}{r(1-r)}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\ln n_1}{\sqrt{n_1^2-1}}-\operatorname{arcsen}\frac{1}{n_1}\right)\right],$$

en la que $G_2(n_1,\ r)=\frac{1-r}{1+r}\left[\frac{\ln n_1}{\sqrt{n_1^2-1}}+\frac{r\,\operatorname{arch} n_1}{\sqrt{n_1^2-1}}+\frac{2}{\sqrt{1-n_1^2r^2}}\times\right.$

$\left.\times\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-n_1^2r^2}}{n_1+\sqrt{n_1^2-1}-n_1r}\right)\right].$

Tomando en consideración que $r=(b_{\mathrm{ala}}-b')/b_{\mathrm{ala}}=0{,}4$ y $\bar{c}=c/b_{\mathrm{ala}}=0{,}12$, calculamos $G_2(n_1,\ r)=0{,}7283$; $c_{x\mathrm{ch}}=0{,}07554$.

El valor de la fuerza de resistencia de ondas de choque, correspondiente a este coeficiente $X_{\mathrm{ch}}=c_{x\mathrm{ch}}q_\infty S_{\mathrm{ala}}=c_{x\mathrm{ch}}(kp_\infty \mathrm{M}_\infty^2/2)\,b_{\mathrm{ala}}l/2=17{,}52\cdot10^4$ N.

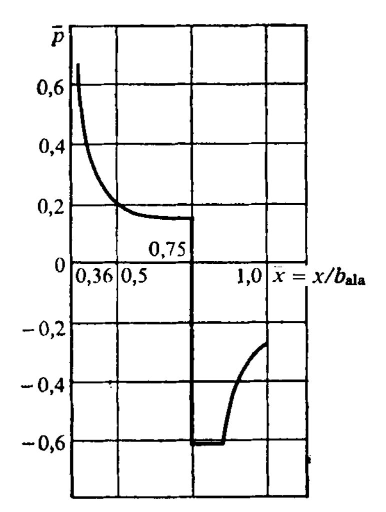


Fig. 8.17. Coeficiente de presión en el perfil FL del ala mostrada en la fig. 8.16

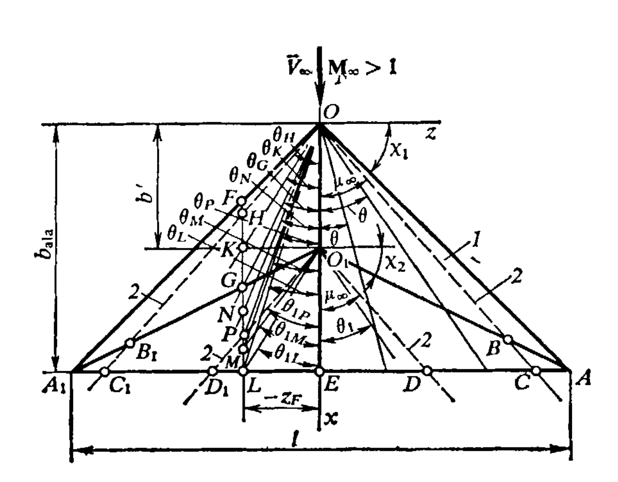


Fig. 8.18. Circulación supersónica alrededor de un ala triangular con bordes supersónicos: 1, ala; 2, líneas de Mach

8.8. Calculemos el ángulo de Mach $\mu_\infty=\operatorname{arcsen}(1/\mathrm{M}_\infty)=30°$ y los ángulos de flecha de los bordes de ataque y de salida (fig. 8.18): $\chi_1=\pi/2-\operatorname{arctg}[(l/2)/b_{\mathrm{ala}}]=45°$; $\chi_2=\pi/2-\operatorname{arctg}[(l/2)/(b_{\mathrm{ala}}-b')=26{,}57°$.

Como $\mu_\infty<(\pi/2-\chi_1)$ y $\mu_\infty<(\pi/2-\chi_2)$, los dos bordes son supersónicos (las líneas de Mach trazadas de los puntos O y O_1 del ala pasan, como se ve en la fig. 8.18, detrás de dichos bordes). Determinemos la distribución de la presión por el ala. En la región OAB (o bien OA_1B_1) el coeficiente de presión

$$\bar{p}=2\lambda_1/(\alpha'\sqrt{1-n_1^2}). \tag{8.35}$$

Considerando que $\lambda_1=c/2(b')=0{,}1$; $\alpha'=\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2-1}=1{,}732$; $n_1=(\operatorname{tg}\chi_1)/\alpha'=0{,}5774$, obtenemos $\bar{p}=0{,}1414$.

En la región ABC (o bien $A_1B_1C_1$) el coeficiente de presión también es constante; su valor se determina con la expresión

$$\bar{p}=2\lambda_1/(\alpha'\sqrt{1-n_1^2})-2/(\lambda_2+\lambda_1)(\alpha'\sqrt{1-n_2^2}), \tag{8.36}$$

en la que $\lambda_2 = c/[2\ (b_{ala} - b')] = 0{,}1$; $n_2 = \text{tg}\ \chi_2/\alpha' = 0{,}2887$. Tomando esto en consideración, $\bar{p} = -0{,}09982$.

En la región OBO_1 (o bien OB_1O_1) el coeficiente de presión

$$\bar{p} = [2\lambda_1/(\alpha' \sqrt{1-n_1^2})][1-(2/\pi)\ \text{arcsen}\ \sqrt{n_1^2-\sigma_1^2)/(1-\sigma_1^2)}]. \quad (8.37)$$

Este coeficiente es constante a lo largo del rayo trazado desde el vértice del ala O bajo un ángulo θ hacia el eje x. En (8.37) $\sigma_1 = \text{tg}\ \chi_1\ \text{tg}\ \theta = \text{tg}\ \theta$.

Después de poner en (8.37) los demás datos, obtenemos

$$\bar{p} = 0{,}1414\ [1-(2/\pi)\ \text{arcsen} \sqrt{(0{,}3334-\text{tg}^2\theta)/(1-\text{tg}^2\theta)}\ ]. \quad (8.37')$$

Examinemos ahora la región O_1BCD (o bien $O_1B_1C_1D_1$). Aquí

$$\bar{p} = \frac{2\lambda_1}{\alpha' \sqrt{1-n_1^2}} \left(1 - \frac{2}{\pi}\ \text{arcsen} \sqrt{\frac{n_1^2-\sigma_1^2}{1-\sigma_1^2}}\right) - \frac{2(\lambda_2+\lambda_1)}{\alpha' \sqrt{1-n_2^2}}, \quad (8.38)$$

o bien, después de poner aquí los datos,

$$\bar{p} = -(0{,}2828/\pi)\ \text{arcsen} \sqrt{(0{,}3334-\text{tg}^2\theta)/(1-\text{tg}^2\theta)} - 0{,}09982. \quad (8.38')$$

En las regiones O_1DE y O_1D_1E el coeficiente de presión

$$\bar{p} = \frac{2\lambda_1}{\alpha' \sqrt{1-n_1^2}} \left(1 - \frac{2}{\pi}\ \text{arcsen} \sqrt{\frac{n_1^2-\sigma_1^2}{1-\sigma_1^2}}\right) - $$
$$- \frac{2(\lambda_2+\lambda_1)}{\alpha' \sqrt{1-n_2^2}} \left(1 - \frac{2}{\pi}\ \text{arcsen} \sqrt{\frac{n_2^2-\sigma_2^2}{1-\sigma_2^2}}\right), \quad (8.39)$$

donde $\sigma_2 = \text{tg}\ \chi_2\ \text{tg}\ \theta_1 = 0{,}5\ \text{tg}\ \theta_1$, con ello θ_1 es el ángulo entre el rayo trazado del punto O_1 y el eje x (fig. 8.18). Tomando en consideración que $n_2^2 = 0{,}08355$ y $\sigma_1^2 = 0{,}25\ \text{tg}^2\ \theta_1$, después de poner los datos en (8.39), obtenemos

$$\bar{p} = \frac{0{,}4824}{\pi}\ \text{arcsen} \sqrt{\frac{0{,}08335-0{,}25\ \text{tg}^2\theta_1}{1-0{,}25\ \text{tg}^2\theta_1}} - $$
$$- \frac{0{,}2828}{\pi}\ \text{arcsen} \sqrt{\frac{0{,}3334-\text{tg}^2\theta}{1-\text{tg}^2\theta}} - 0{,}09982. \quad (8.39')$$

Como ejemplo mostremos cómo se calculan los coeficientes de presión en el perfil FL (fig. 8.18), situado a una distancia $|\bar{z}_F| = 1{,}0$ de la cuerda de raíz y con una coordenada relativa $\bar{x}_F = x_F/b_{ala} = |z_F|\ \text{tg}\ \chi_1/b_{ala} = 0{,}25$.

En el sector FH el coeficiente de presión es constante e igual $\bar{p}_{FH} = 0{,}1414$. Para el punto H el valor de $\sigma_1 = \text{tg}\ \chi_1\ \text{tg}\ \theta_H = \text{tg}\ \chi_1/\alpha' = n_1$; de la fórmula (8.37) también se desprende que $\bar{p}_H = 0{,}1414$.

Determinemos el coeficiente de presión en el punto K para el que el ángulo $\theta_K = 26°$ y la coordenada $x_K = |z_F|/\text{tg}\ \theta_K = 2{,}05$. Entonces $\bar{p}_K = 0{,}1088$.

De forma análoga en el punto G, para el que, de acuerdo con la fig. 8.18, $x_G = \bar{b}' + |z_F|\ \text{tg}\ \chi_2 = 2{,}5$; $\text{tg}\ \theta_G = |z_F|/x_G = 0{,}4$; $\theta_G = 21{,}8°$, el coeficiente $\bar{p}_G = 0{,}09894$.

Como el punto G pertenece a la región $O_1A_1C_1D_1$, de acuerdo con (8.38), el coeficiente de presión en él $\bar{p}'_G = -0{,}1423$.

Hagamos $\theta_N = 18°$, $x_N = |z_F|/\text{tg}\ \theta_N = 3{,}078$. Entonces, en correspondencia con (8.38'), $\bar{p}_N = -0{,}1474$.

En el punto P, para el que $x_P = b' + |z_F|\alpha' = 3{,}732$; $\operatorname{tg}\theta_P = |z_F|/x_P = 0{,}2679$; $\theta_P = 15°$, el coeficiente de presión $\bar{p}_P = -0{,}1502$.

Como el punto P pertenece a la región O_1D_1E, en él el coeficiente de presión puede determinarse asimismo con la fórmula (8.39), por la cual para $\sigma_2 = 0{,}5\operatorname{tg}\theta_{1P} = 0{,}5\operatorname{tg}\mu_\infty = 0{,}2887 = n_2$ obtenemos el mismo valor $\bar{p}_P = -0{,}1502$.

Ahora, calculamos el coeficiente de presión en el punto M ($\theta_M = 14{,}5°$). Para este punto $x_M = |z_F|/\operatorname{tg}\theta_M = 3{,}867$; $\operatorname{tg}\theta_{1M} = |z_F|/(x_M - b') = 0{,}5357$.

Con la fórmula (8.39′) hallamos $\bar{p}_M = -0{,}1334$.

En el punto L, para el que $\operatorname{tg}\theta_L = |z_F|/b_{\text{ala}} = 0{,}25$; $\theta_L = 14{,}04°$; $\operatorname{tg}\theta_{1L} = |z_F|/(b_{\text{ala}} - b') = 0{,}5$, el coeficiente de presión $\bar{p}_L = -0{,}1279$.

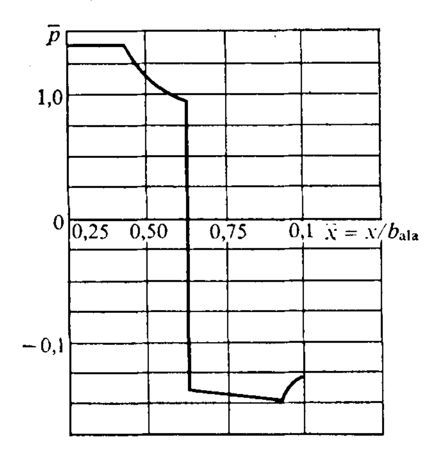


Fig. 8.19. Distribución del coeficiente de presión por el perfil FL del ala mostrada en la fig. 8.18

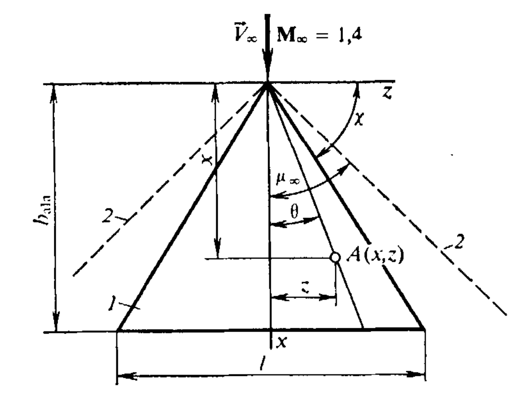


Fig. 8.20. Circulación alrededor de un ala plana triangular con bordes subsónicos: *1*, ala; *2*, líneas de Mach

El carácter de la distribución del coeficiente de presión por el perfil FL se muestra en la fig. 8.19. El coeficiente de la resistencia de ondas de choque

$$c_{x\,\text{ch}} = \frac{2\bar{c}^2}{\pi\alpha'(1-r^2)}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-n_1^2}}\arccos n_1 + \frac{1}{r\sqrt{1-n_1^2r^2}}\left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arcsen}(n_1 r)\right]\right\},$$

donde $\bar{c} = c/b_{\text{ala}} = 0{,}1$; $r = (b_{\text{ala}} - b')/b_{\text{ala}} = 0{,}5$.

De acuerdo con estos datos $c_{x\,\text{ch}} = 0{,}02434$.

La correspondiente fuerza de resistencia de ondas de choque

$$X_{\text{ch}} = c_{x\,\text{ch}} q_\infty S_{\text{ala}} = c_{x\,\text{ch}}(kp_\infty \mathrm{M}_\infty^2/2)\, b_{\text{ala}} l/2 = 10{,}69 \cdot 10^4\ \text{N}.$$

8.9. Establezcamos el carácter de los bordes de ataque del ala que analizamos. Encontremos el ángulo de Mach $\mu_\infty = \operatorname{arcsen}(1/\mathrm{M}_\infty) = 45{,}58°$ y el de flecha del borde de ataque $\chi = \pi/2 - \operatorname{arctg}(l/2)/b_{\text{ala}} = 51{,}33°$.

Como $\mu_\infty > (\pi/2 - \chi)$, la línea de Mach se dispone delante de los bordes de ataque (fig. 8.20), por lo que ellos son subsónicos. En el ala el correspondiente coeficiente de presión

$$\bar{p} = \pm 2\alpha/[E(k)\operatorname{tg}\chi\sqrt{1-\sigma^2}], \tag{8.40}$$

donde $\sigma = \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \chi = (z/x) \operatorname{tg} \chi$; $E(k)$, es una integral elíptica de segundo orden con el parámetro

$$k = \sqrt{1 - 1/n^2}; \tag{8.41}$$

el signo «+» determina el coeficiente de presión en el intradós y el «—», en el trasdós del ala.

Para las condiciones prefijadas $n = \operatorname{tg} \chi/\alpha' = \operatorname{tg} \chi/\sqrt{M_\infty^2 - 1} = 1{,}275$; $k = 0{,}6204$.

La función $E(k)$ se halla para el valor $1/n = 0{,}7843$ en las tablas de las integrales elípticas según $\alpha = \operatorname{arcsen} k = 38{,}3°$ y es igual $E(k) = 1{,}407$. De acuerdo con esto

$$\bar{p} = \pm 0{,}09102/\sqrt{0{,}6403 - \operatorname{tg}^2 \theta}.$$

El campo de presiones en semejante ala es cónico respecto del vértice de ésta, es decir, en el rayo $\theta = \text{const}$ $(z/x = \text{const})$ el coeficiente de presión $\bar{p} = \text{const}$. En la cuerda de raíz $(\operatorname{tg} \theta = 0)$ $\bar{p} = \pm 0{,}1137$. P.ej., para cierto punto A (fig. 8.20), situado en el lado superior del ala, para el que $\theta_A = 30°$, $\bar{p}_A = -0{,}1643$.

De la fórmula (8.40) se desprende que en el borde de ataque, donde $\operatorname{tg} \theta \to 1/\operatorname{tg} \chi$ y $\sigma \to 1$, el coeficiente de presión $\bar{p} \to \infty$.

El coeficiente de la fuerza de sustentación $c_{y_a} = 2\pi\alpha/[E(k) \operatorname{tg} \chi] = 0{,}3575$. El coeficiente de la resistencia inducida $c_{xi} = c_{y_a}\alpha = 2\pi\alpha^2/[E(k) \operatorname{tg} \chi] = 0{,}03575$.

Como sabemos, en las alas con borde de ataque subsónico éste se redondea en cierto grado. Con esto, surge cierta fuerza de succión que reduce la resistencia. El resultado de esto consiste en que el coeficiente total de resistencia disminuye en el valor del coeficiente de la fuerza de succión: $c_{x\text{T}} = [c_{y_a}^2/(4\pi)] \operatorname{tg} \chi\sqrt{1 - 1/n^2} = 0{,}007885$.

Así, pues, el coeficiente de la resistencia de ondas de choque del ala $c_{x\,\text{ch}} = c_{xi} - c_{x\text{T}} = 0{,}02786$.

El centro de presión del ala está situado a una distancia de 2/3 de la cuerda de raíz respecto del vértice, es decir, $x_\text{p} = (2/3)\, b_\text{ala}$. Por lo tanto, el coeficiente del centro de presión $c_\text{p} = x_\text{p}/b_\text{ala} = 2/3$.

En correspondencia con la fórmula $c_\text{p} = -m_{z_a}/c_{y_a}$ el coeficiente del momento $-m_{z_a} = c_{y_a}c_\text{p} = 0{,}2383$.

Determinamos la resistencia de ondas de choque, la fuerza de sustentación y el momento:

$$X_\text{ch} = c_{x\,\text{ch}} q_\infty S_\text{ala} = c_{x\,\text{ch}} (kp_\infty M_\infty^2/2)\, b_\text{ala} l/2 = 7{,}492 \cdot 10^4 \text{ N};$$

$$Y_a = c_{y_a} q_\infty S_\text{ala} = c_{y_a} (kp_\infty M_\infty^2/2)\, b_\text{ala} l/2 = 96{,}14 \cdot 10^4 \text{ N};$$

$$M_{z_a} = m_{z_a} q_\infty S_\text{ala} l = m_{z_a} (kp_\infty M_\infty^2/2)\, (b_\text{ala} l/2)\, b_\text{ala} = -320{,}4 \cdot 10^4 \text{ N·m}.$$

8.10. En la zona I del ala, situada entre el borde de ataque supersónico de un ala triangular en movimiento directo y la generatriz del cono de Mach con vértice en el punto O (fig. 8.21, a), el coeficiente de presión es constante y se determina según la teoría habitual de la circulación linealizada:

$$\bar{p} = \pm 2\alpha/(\alpha' \sqrt{1 - n^2}), \tag{8.42}$$

donde α es el ángulo de ataque, rad; $\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$; $n = (\text{tg}\,\chi)/\alpha'$, el parámetro de flecha.

Para los puntos de la región *II*, situada dentro del cono de Mach, el coeficiente de presión

$$\bar{p} = [\pm 2\alpha/(\alpha' \sqrt{1-n^2})] \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsen \sqrt{\frac{n^2-\sigma^2}{1-\sigma^2}}\right), \tag{8.43}$$

donde $\sigma = \text{tg}\,\chi\ \text{tg}\,\theta$.

De (8.43) se deduce que en esta región el coeficiente de presión es constante a lo largo de los rayos que salen del vértice del ala (θ = const). Al pasar de un rayo a otro el coeficiente de presión varía. De acuerdo con esto, por la envergadura del

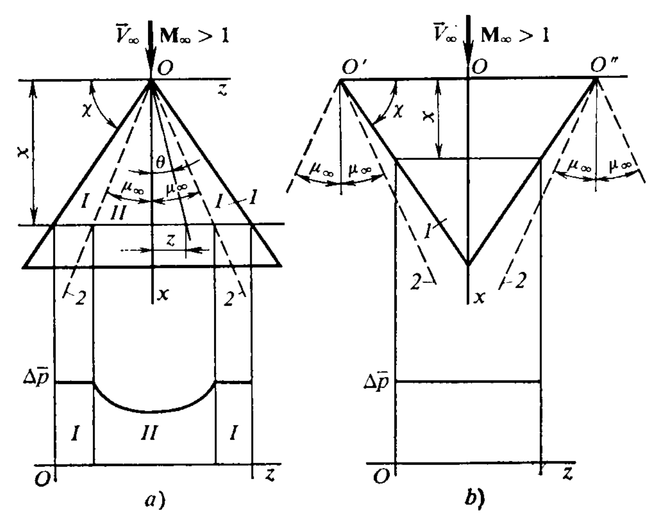


Fig. 8.21. Distribución de la presión excesiva por un ala plana triangular en movimiento directo (*a*) e invertido (*b*):
1, ala; *2*, líneas de Mach

ala triangular la presión se distribuye irregularmente. Como en las fórmulas (8.42) y (8.43) el signo «—» se refiere al lado superior (trasdós) y el «+», al inferior (intradós) del ala, en las regiones *I* y *II* la carga $\Delta\bar{p} = \bar{p}_i - \bar{p}_s$ se determina, respectivamente, con las fórmulas:

$$\Delta\bar{p}_I = 4\alpha/(\alpha' \sqrt{1-n^2}); \tag{8.44}$$

$$\Delta\bar{p}_{II} = \frac{4\alpha}{\alpha' \sqrt{1-n^2}} \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsen \sqrt{\frac{\pi^2-\sigma^2}{1-\sigma^2}}\right). \tag{8.45}$$

Esta distribución de la carga a lo largo de la envergadura del ala en cierta sección x se muestra en la fig. 8.21, *a*.

En caso de movimiento invertido del ala que estudiamos (fig. 8.21, *b*) la presión es constante por toda la superficie e igual a la presión en la superficie de una placa plana de alargamiento infinito, ya que las regiones de influencia (conos de Mach con vértices en los puntos delanteros de las secciones de raíz O' y O'') no cruzan la superficie del ala. En semejante caso el coeficiente de presión

$$\bar{p} = \pm 2\alpha/\alpha', \tag{8.46}$$

donde el signo «—» se refiere al trasdós del ala y el «+», al intradós. En correspondencia

$$\Delta\bar{p} = \bar{p}_i - \bar{p}_s = 4\alpha/\alpha'. \qquad (8.47)$$

Comparando la distribución de la carga $\Delta\bar{p}$ por la envergadura de un ala delgada con los movimientos directo e invertido es posible notar que con el primero en la región *I* el ala está más cargada y en la *II*, menos, que en caso del segundo movimiento (fig. 8.21, *a*, *b*).

Conociendo la presión podemos hallar el coeficiente de la fuerza de sustentación:

$$c_{y_a} = (2/\mathrm{ctg}\,\chi)\int_0^1 \bar{x}\,d\bar{x}\int_0^{t_0} (\bar{p}_i - \bar{p}_s)\,dt, \qquad (8.48)$$

donde $t = \mathrm{tg}\,\theta = z/x$; $t_0 = \mathrm{ctg}\,\chi$.

Poniendo en (8.48) las expresiones (8.44) y (8.45), obtenemos la fórmula

$$c_{y_a} = 4\alpha/\alpha', \qquad (8.49)$$

de acuerdo con la que el coeficiente de la fuerza de sustentación para el ala triangular con borde de ataque supersónico no depende del ángulo de flecha y se determina de la misma forma que para una placa plana sin flecha y, por consiguiente, para semejante ala en movimiento invertido.

El coeficiente de resistencia de ondas de choque $c_{x\,\mathrm{ch}} = c_{y_a}\alpha$ también será el mismo para un ala triangular delgada con bordes supersónicos en los movimientos directo e invertido.

8.11. Determinamos el ángulo de Mach: $\mu_\infty = \mathrm{arcsen}\,(1/M_\infty) = 30°$. Como el ángulo de flecha $\chi = 51{,}33°$ (véase la solución del problema 8.9) es evidente que se cumple la condición $\mu_\infty < (\pi/2 - \chi)$, lo que corresponde a los bordes de ataque supersónicos, cuando las líneas de Mach se disponen en la superficie del ala detrás de dichos bordes (fig. 8.22).

El coeficiente de presión en las regiones entre el borde de ataque y la línea de Mach (que en la fig. 8.22 están sombreadas) es constante y se determina con la fórmula

$$\bar{p} = \pm\, 2\alpha/(\alpha'\sqrt{1-n^2}). \qquad (8.50)$$

Poniendo aquí $\alpha = 0{,}1$ rad, así como $\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 1{,}732$; $n = \mathrm{tg}\,\chi/\alpha' = 0{,}7215$, hallamos $\bar{p} = \pm 0{,}1668$.

En la región entre las líneas de Mach el coeficiente de presión

$$\bar{p} = \frac{\pm\, 2\alpha}{\alpha'\sqrt{1-n^2}}\left(1 - \frac{2}{\pi}\,\mathrm{arcsen}\sqrt{\frac{n^2-\sigma^2}{1-\sigma^2}}\right), \qquad (8.51)$$

donde $\sigma = \mathrm{tg}\,\chi\,\mathrm{tg}\,\theta = 1{,}249\,\mathrm{tg}\,\theta$. Poniendo aquí los datos, obtenemos

$$\bar{p} = \pm\, 0{,}1668\left(1 - \frac{2}{\pi}\,\mathrm{arcsen}\sqrt{\frac{0{,}5205 - 1{,}56\,\mathrm{tg}^2\theta}{1 - 1{,}56\,\mathrm{tg}^2\theta}}\right). \qquad (8.51')$$

P. ej., determinemos el coeficiente de presión en el punto *A* en el trasdós del ala, para el que $\theta = \theta_A = 20°$; $\bar{p}_A = 0{,}09456$.

En la cuerda de raíz, donde $\theta = 0$, $\bar{p} = \pm 0{,}08122$. Para los puntos en la línea de Mach, donde $\theta = \mu_\infty$ y $\sigma = n$, de (8.51) se desprende que el coeficiente de presión se determina con la fórmula (8.50) y es igual a $\bar{p} = \pm 0{,}1668$.

El coeficiente de la fuerza de sustentación es el mismo que para una placa delgada: $c_{y_a} = 4\alpha/\alpha' = 0{,}2309$.

El coeficiente de la resistencia de ondas de choque $c_{x\,\text{ch}} = c_{y_a}\alpha = 4\alpha^2/\alpha' = 0{,}02309$. El centro de presión del ala triangular se encuentra a la distancia de 2/3 de la cuerda de raíz respecto del vértice: por lo tanto, el coeficiente del centro de presión $c_\text{p} = x_\text{p}/b_\text{ala} = 2/3$.

El coeficiente del momento longitudinal con relación al eje Oz que pasa por el vértice, $-m_{z_a} = (2/3)\,c_{y_a} = (8/3)\,(\alpha/\alpha') = 0{,}1539$.

Determinemos la fuerza de sustentación, la resistencia de ondas de choque y el momento:

$$Y_a = c_{y_a} q_\infty S_\text{ala} = c_{y_a}\,(kp_\infty \text{M}_\infty^2/2)\, b_\text{ala} l/2 = 126{,}7\cdot 10^4 \text{ N};$$

$$X_\text{ch} = c_{x\,\text{ch}} q_\infty S_\text{ala} = c_{x\,\text{ch}}\,(kp_\infty \text{M}_\infty^2/2)\, b_\text{ala} l/2 = 12{,}67\cdot 10^4 \text{ N};$$

$$M_{z_a} = m_{z_a} q_\infty S_\text{ala} b_\text{ala} = m_{z_a}\,(kp_\infty \text{M}_\infty^2/2)\,(b_\text{ala} l/2)\, b_\text{ala} = -422{,}3\cdot 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

8.12. Hay que determinar el ángulo de Mach $\mu_\infty = \text{arcsen}\,(1/\text{M}_\infty) = 45{,}58°$, así como los ángulos de flecha de los bordes de ataque y de salida (fig. 8.23) $\chi_1 =$

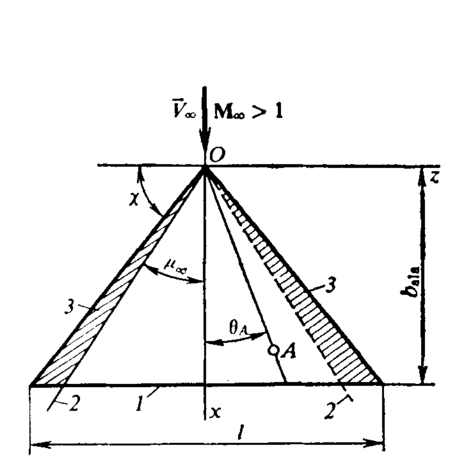


Fig. 8.22. Circulación alrededor de un ala plana triangular con bordes supersónicos:
1, ala; 2, líneas de Mach; 3, región de presión constante

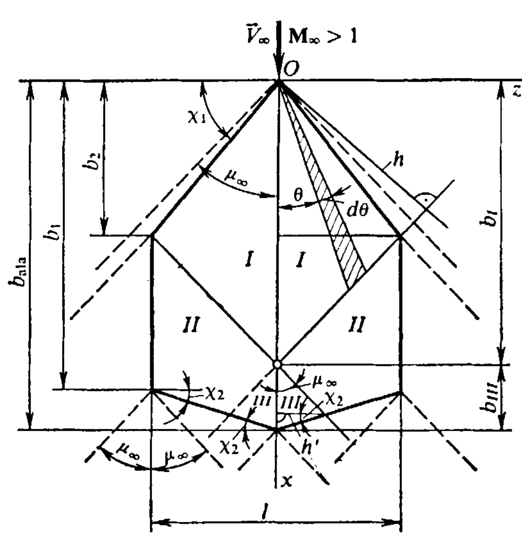


Fig. 8.23. Flujo supersónico alrededor de un ala hexagonal:
— — —, líneas de Mach

$= \pi/2 - \text{arctg}\,[(l/2)/b_1] = 50{,}19°$; $\chi_2 = \pi/2 - \text{arctg}\,[(l/2)/(b_\text{ala} - b_2)] = 21{,}8°$. De acuerdo con estos datos $(\pi/2 - \chi_2) > \mu_\infty > (\pi/2 - \chi_1)$.

Así, pues, los bordes de ataque del ala son subsónicos, los de salida, supersónicos. Semejante tipo de bordes de salida excluye el efecto de la capa vorticial tras el ala sobre su circulación. Pero hay que tomar en consideración la influencia de los bordes laterales sobre el flujo del gas en las regiones del ala limitadas por las

correspondientes líneas de Mach y dichos bordes. Las tres regiones *I*, *II*, *III* en cada una de las cuales el cálculo del coeficiente de presión se realiza con las correspondientes fórmulas se muestran en la fig. 8.23.

El coeficiente de presión en la región *I* se halla con la fórmula (8.40) en la que $\chi = \chi_1$ y $\sigma = \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\chi_1 = (z/x)\operatorname{tg}\chi_1$. Para las condiciones prefijadas $\sigma = 1{,}2 \operatorname{tg}\theta$; $\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 0{,}9798$; $n = \operatorname{tg}\chi_1/\alpha' = 1{,}225$; $k = \sqrt{1 - 1/n^2} = 0{,}5776$.

En las tablas de las integrales elípticas totales, de acuerdo con $\alpha = \operatorname{arcsen} k = 35{,}26°$, hallamos $E(k) = 1{,}74$ y, después de poner los datos en (8.40), obtenemos $\bar{p}_I = \pm 0{,}07982/\sqrt{0{,}6944 - \operatorname{tg}^2\alpha\,\theta}$.

De esta fórmula se desprende que el coeficiente de presión en la región *I* es constante a lo largo de la línea bajo el ángulo θ. En particular, para los puntos en la cuerda de raíz $(\theta = 0)$ $\bar{p}_I = \pm 0{,}09579$, mientras que en el borde de ataque, donde $\operatorname{tg}\theta = 1/\operatorname{tg}\chi_1$ y $\sigma_1 = 1$, el valor de $\bar{p}_I = \infty$. P. ej., a lo largo del rayo con ángulo $\theta = 30°$, $\bar{p}_I = \pm 0{,}1328$.

En la región *II* el coeficiente de presión

$$\bar{p}_{II} = \pm\{2\alpha/[E(k)\operatorname{tg}\chi_1]\}\sqrt{\alpha'\operatorname{tg}\chi_1(1+n)}. \tag{8.52}$$

De esta fórmula se desprende que en todos los puntos de la región *II* este coeficiente es el mismo e igual a $\bar{p}_{II} = \pm 0{,}1554$. En la región *III* la presión excesiva es igual a cero y el coeficiente de presión $\bar{p}_{III} = 0$.

Analicemos el cálculo del coeficiente de la fuerza de sustentación. Para la región *I* el valor de esta fuerza $Y_I = c_{y_a I} q_\infty S_{ala} = 4 \int_{S_I} \Delta p_I \, dS_I$, de donde el coeficiente

$$c_{y_a I} = 4 \int_0^{S_I/S_{ala}} \bar{p}_I \, d\bar{S}_I, \tag{8.53}$$

donde $d\bar{S}_I = d(S_I/S_{ala})$. En la fig. 8.23 vemos que $dS_I = (1/2) h^2 d(\operatorname{tg}\theta)$, donde $h = b_I \operatorname{sen}\mu_\infty = [b_1 + l/(2\operatorname{tg}\mu_\infty)]\cdot\operatorname{sen}\mu_\infty$. Teniendo en cuenta que $\sigma = \operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\chi_1$, hallamos $d(\operatorname{tg}\theta) = d\sigma/\operatorname{tg}\chi_1$ y

$$d\bar{S}_I = d(S_I/S_{ala}) = [h^2/(2\operatorname{tg}\chi_1 S_{ala})]\, d\sigma, \tag{8.54}$$

donde $S_{ala} = lb_1/2 + (b_2 - b_1)\, l + l\,(b_{ala} - b_2)/2$.

Tomando en consideración (8.54) y el valor del coeficiente de presión, de acuerdo con (8.40), obtenemos

$$c_{y_a I} = \{4h^2\alpha/[E(k)\operatorname{tg}^2\chi_1 S_{ala}]\} \int_0^1 d\sigma/\sqrt{1-\sigma^2}.$$

Integrando esta expresión, hallamos

$$c_{y_a I} = \alpha\, h^2\sqrt{\pi}/[E(k)\operatorname{tg}^2\chi_1 S_{ala}]. \tag{8.55}$$

Efectuamos los cálculos: $S_{ala} = 25$; $h = 3{,}922$; $c_{y_a I} = 0{,}4352$.

Para la región *II* el coeficiente de la fuerza de sustentación

$$c_{y_a II} = Y_{a II}/(q_\infty S_{ala}) = 4\bar{p}_{II} S_{II}/S_{ala}. \tag{8.56}$$

Determinemos el área $S_{II} = S_{ala}/2 - S_I - S_{III}$. El área de la región (véase la fig. 8.23)

$$S_I = (1/2)\, b_I\, (l/2) = (1/2)\, [b_1 + l/(2 \operatorname{tg} \mu_\infty)]\, (l/2);$$

el área de la región *III*

$$S_{III} = (1/2)\, b_{III} h' = (1/2)\, b_{III}^2\, [\operatorname{tg} \mu_\infty/(1 + \operatorname{tg} \mu_\infty \operatorname{tg} \chi_2)],$$

donde $b_{III} = b_{ala} - b_I = b_{ala} - [b_1 + l/(2 \operatorname{tg} \mu_\infty)]$.

Realicemos los cálculos: $b_I = 5{,}453$; $S_I = 6{,}816$; $b_{III} = 1{,}547$; $S_{III} = 0{,}8367$; $S_{II} = 4{,}848$; $c_{y_a II} = 0{,}1205$.

Como resultado, para el ala en su total $c_{y_a} = c_{y_a I} + c_{y_a II} = 0{,}164$. La correspondiente fuerza de sustentación

$$Y_a = c_{y_a} q_\infty S_{ala} = c_{y_a}\, (k p_\infty M_\infty^2/2)\, S_{ala} = 55{,}1 \cdot 10^4\ \text{N}.$$

El coeficiente de la resistencia de ondas de choque del ala $c_{x\,ch} = c_{xi} - c_{xT}$, donde $c_{xi} = c_{y_a}\alpha = 0{,}0164$; $c_{xT} = [c_{y_a}^2/(4\pi)] \operatorname{tg} \chi_1 \sqrt{1 - 1/n^2} = 0{,}015$.

De este modo, el coeficiente $c_{x\,ch} = 0{,}03854$ y la fuerza de resistencia de ondas de choque

$$X_{ch} = c_{x\,ch} q_\infty S_{ala} = c_{x\,ch}\, (k p_\infty M_\infty^2/2)\, S_{ala} = 0{,}471 \cdot 10^4\ \text{N}.$$

8.13. En el flujo supersónico la influencia de los extremos del ala sólo se observa en aquella parte de la superficie que se encuentra en la región limitada por

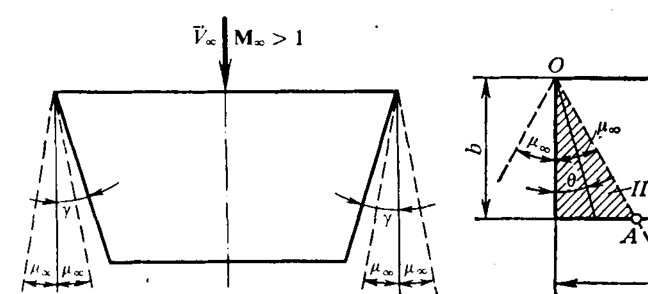


Fig. 8.24. Esquema para el cálculo de un ala plana cuadrangular

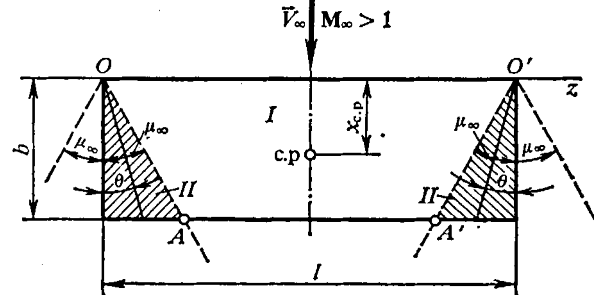


Fig. 8.25. Circulación supersónica alrededor de un ala plana rectangular:
— — —, líneas de Mach; la región de la influencia de los bordes laterales está sombreada

los conos de Mach trazados por los bordes de ataque de las secciones marginales (fig. 8.24).

Para $\gamma \geqslant \mu_\infty = \operatorname{arcsen}(1/M_\infty)$ no hay influencia de los extremos de un ala rectangular delgada sobre la circulación a lo largo de su superficie. Calculamos $\gamma \geqslant \mu_\infty = 30°$.

Para que se cumpla la indicada condición todas las secciones «trabajan» como en un ala de envergadura infinita.

8.14. Por el número $M_\infty = 2$ determinamos el ángulo $\mu_\infty = \operatorname{arcsen}(1/M_\infty) = 30°$. Bajo este ángulo, hacia los bordes laterales del ala, trazamos desde los puntos O y O' (fig. 8.25) las líneas de Mach que dividen la superficie del ala en las regiones *I* y *II* con distintos caracteres del movimiento perturbado.

16—01650

En la región *I*, fuera del cono de Mach, el coeficiente de presión se determina de la misma forma que para una placa plana de envergadura infinita:

$$\bar{p}_{\text{I}} = \pm\, 2\alpha/\sqrt{M_\infty^2 - 1} = \pm\, 0{,}1155. \quad (8.57)$$

Aquí el signo «+» se refiere al intradós del ala y el «—», al trasdós.

En la región *II* el coeficiente de presión conserva su valor constante a lo largo de los rayos que salen de los bordes de ataque O y O' de las secciones marginales (fig. 8.25) y se determina con la fórmula

$$\bar{p}_{\text{II}} = \pm\, [4\alpha/(\pi\alpha')] \operatorname{arcsen}\sqrt{\alpha' \operatorname{tg}\theta}, \quad (8.58)$$

donde $\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 1{,}732$.

En los bordes laterales ($\theta = 0$) el coeficiente de presión es igual a cero, mientras que en las líneas de Mach OA y $O'A'$, donde $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\mu_\infty = 1/\alpha'$, $\bar{p} = \pm 0{,}1155$.

El coeficiente de la fuerza de sustentación del ala (para $\lambda_{\text{ala}} = l/b = 3$)

$$c_{y_a} = (4\alpha/\alpha')\,[1 - 1/(2\,\lambda_{\text{ala}}\alpha')] = 0{,}2087. \quad (8.59)$$

El coeficiente de la resistencia de ondas de choque

$$c_{x\,\text{ch}} = c_{y_a}\alpha = 0{,}02087; \quad (8.60)$$

el coeficiente del momento con relación al borde de ataque

$$-m_{z_a} = (2\alpha/\alpha')\,[1 - 2/(3\lambda_{\text{ala}}\alpha')] = 0{,}1006; \quad (8.61)$$

el coeficiente del centro de presión

$$c_{\text{p}} = x_{\text{p}}/b = -m_{z_a}/c_{y_a} = 0{,}4820. \quad (8.62)$$

Los valores de las correspondientes fuerzas y del momento:

$$Y_a = c_{y_a} q_\infty S_{\text{ala}} = c_{y_a}\,(kp_\infty M_\infty^2/2)\,bl = 68{,}82\cdot 10^4\ \text{N};$$

$$X_{\text{ch}} = c_{x\,\text{ch}} q_\infty S_{\text{ala}} = c_{x\,\text{ch}}\,(kp_\infty M_\infty^2/2)\,bl = 6{,}882\cdot 10^4\ \text{N};$$

$$M_{z_a} = m_{z_a} q_\infty S_{\text{ala}} b = -Y_a x_{\text{p}} = -Y_a c_{\text{p}} b = -66{,}34\cdot 10^4\ \text{N}\cdot\text{m}.$$

8.15. Determinemos el ángulo de Mach $\mu_\infty = \operatorname{arcsen}(1/M_\infty) = 45{,}58°$ y bajo éste trazamos hacia los bordes laterales las líneas de Mach (fig. 8.26), hasta su intersección con el borde de salida. En tal caso, como vemos en la figura, la superficie del ala se divide en tres regiones *I*, *II*, *III* limitadas por las líneas de Mach y los bordes del ala.

Los coeficientes de presión en las regiones *I* y *II* se calculan de acuerdo con las fórmulas (8.57) y (8.58), en las que $M_\infty = 1{,}4$; $\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 0{,}9798$. Entonces

$$\bar{p}_{\text{I}} = \pm 0{,}2041; \quad \bar{p}_{\text{II}} = \pm 0{,}1299 \operatorname{arcsen}\sqrt{0{,}9798 \operatorname{tg}\theta}.$$

Hay que tener en cuenta que con la última fórmula se calcula el coeficiente de presión a lo largo del rayo con ángulo θ sólo dentro de los límites de la región *II* (fig. 8.26).

En la región *III* el coeficiente de presión $\bar{p}_{III} = 2\bar{p}_{II} - \bar{p}_I = \pm[8\alpha/(\pi\alpha')] \times \times \arcsen \sqrt{\alpha' \operatorname{tg} \theta} \mp 2\alpha/\alpha'$ se determina para parte del rayo, trazado bajo el ángulo θ desde el punto O (o bien O') y que yace en dicha región.

Consideremos el cálculo de las características aerodinámicas del ala. Representemos la fuerza de sustentación que actúa sobre el ala como la suma de fuerzas: $Y_a = Y_{aI} + Y_{aII} + Y_{aIII}$, donde Y_{aI}, Y_{aII}, Y_{aIII} son las componentes de

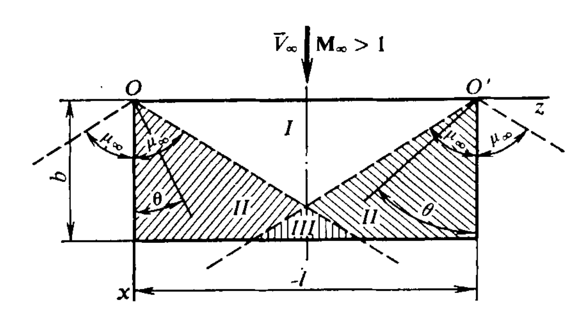


Fig. 8.26. Esquema de la circulación supersónica alrededor de un ala plana rectangular: — — —, líneas de Mach

la fuerza para las regiones *I*, *II* y *III*, respectivamente. Para cada una de ellas tenemos:

$$Y_{aI} = c_{y_a I} q_\infty S_{ala} = 2 \int_{S_I} \Delta p_I \, dS_I;$$

$$Y_{aII} = c_{y_a II} q_\infty S_{ala} = 4 \int_{S'_{II}} \Delta p_{II} \, dS'_{II};$$

$$Y_{aIII} = c_{y_a III} q_\infty S_{ala} = 4 \int_{S'_{III}} \Delta p_{III} \, dS'_{III}.$$

La integración se efectúa por la región *I* y por las semiregiones *II* y *III* (sombreadas en la fig. 8.26), cuyas áreas son S_I, $S'_{II} = S_{II}/2$ y $S'_{III} = S_{III}/2$, respectivamente.

De las relaciones aducidas se desprende que

$$c_{y_a} = 2\bar{p}_I S_I/S_{ala} + 4 \int_{S'_{II}} \bar{p}_{II} \, d\bar{S}'_{II} + 4 \int_{S'_{III}} \bar{p}_{III} \, d\bar{S}'_{III},$$

donde $d\bar{S}'_{II} = d\,(S'_{II}/S_{ala})$ y $d\bar{S}'_{III} = d\,(S'_{III}/S_{ala})$.

Poniendo aquí las expresiones para $\bar{p}_I$, $\bar{p}_{II}$, $\bar{p}_{III}$ e integrando, hallamos el coeficiente de la fuerza de sustentación del ala que se calcula con la fórmula (8.59). Poniendo en ella el valor $\lambda_{ala} = l/b = 1{,}5$, obtenemos $c_{y_a} = 0{,}2693$.

Los coeficientes de la resistencia de ondas de choque, del momento, del centro de presión son iguales a [véase (8.60) — (8.62)] $c_{x\,ch} = 0{,}02693$; $-m_{z_a} = 0{,}1115$; $c_p = 0{,}4141$.

La fuerza de sustentación, la resistencia de ondas de choque y el momento del ala con relación al borde de ataque son, respectivamente, las siguientes:

$$Y_a = c_{y_a} q_\infty S_{ala} = c_{y_a} (kp_\infty M_\infty^2/2)\, bl = 86{,}81\cdot 10^4 \text{ N};$$
$$X_{ch} = c_{xch} q_\infty S_{ala} = c_{xch} (kp_\infty M_\infty^2/2)\, bl = 8{,}681\cdot 10^4 \text{ N};$$
$$M_{z_a} = m_{z_a} q_\infty S_{ala} b = m_{z_a} (kp_\infty M_\infty^2/2)\, blb = -144{,}1\cdot 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

8.16. Cuando para el ala rectangular se cumple la condición $\lambda_{ala}\sqrt{M_\infty^2 - 1} > 4$ las regiones de influencia de los bordes laterales no se cruzan (véase el problema 8.3, fig. 8.11, *b*). En este caso el coeficiente de la fuerza de sustentación $(c_{y_a})_\square$ se determina con la fórmula (8.59) y el coeficiente de la resistencia de ondas de choque $(c_{x\,ch})_\square$, con (8.60) (véase la solución del problema 8.14).

De la condición de igualdad del área en la planta y las envergaduras de las alas rectangular y triangular establecemos que $b' = 2b$, donde b' es la cuerda de raíz del ala triangular.

Determinemos el carácter de los bordes de ataque del ala triangular para $\lambda_{ala}\sqrt{M_\infty^2 - 1} > 4$.

El parámetro de flecha $n = \text{tg}\,\chi/\sqrt{M_\infty^2 - 1} = 2b'/(l\sqrt{M_\infty^2 - 1}) = 4/(\lambda_{ala}\sqrt{M_\infty^2 - 1})$, de acuerdo con el planteamiento del problema, es menor que la unidad, es decir, los bordes de ataque del ala triangular son supersónicos ($0 < n \leqslant 1$). Con bordes de ataque supersónicos (véase la solución del problema 8.11) el coeficiente de la fuerza de sustentación del ala triangular en la planta

$$(c_{y_a})_\triangle = 4\alpha/\alpha', \tag{8.63}$$

y el coeficiente de la resistencia de ondas de choque

$$(c_{x\,ch})_\triangle = (c_{y_a})_\triangle\, \alpha. \tag{8.64}$$

Comparando las fórmulas (8.59) y (8.63), así como (8.60) y (8.64), obtenemos

$$(c_{y_a})_\square/(c_{y_a})_\triangle = (c_{x\,ch})_\square/(c_{x\,ch})_\triangle = 1 - 1/(2\lambda_{ala}\alpha'), \tag{8.65}$$

donde $\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$.

Así, pues, de la relación (8.65) se deduce que los coeficientes de la fuerza de sustentación y de la resistencia de ondas de choque de un ala rectangular, para las condiciones planteadas en el problema, son menores que los respectivos coeficientes del ala triangular $1/[1 - 1/(2\lambda_{ala}\alpha')]$ veces.

8.17. En las tablas de la atmósfera normal, para la altitud $H = 10\,000$ m, hallamos la densidad del aire $\rho_\infty = 0{,}4136$ kg/m³ y la velocidad del sonido $a_\infty = 299{,}5$ m/s. El correspondiente número de Mach $M_\infty = V_\infty/a_\infty = 1{,}669$.

Para el movimiento horizontal la fuerza de sustentación del ala es igual a su peso, es decir, $Y_a = G$. Conociendo el valor de la presión dinámica $q_\infty = \rho_\infty V_\infty^2/2$ y el área del ala S_{ala} calculamos el coeficiente de la fuerza de sustentación:

$$c_{y_a} = Y_a/(q_\infty S_{ala}) = 2G/(\rho_\infty V_\infty^2 S_{ala}) = 0{,}06447.$$

Como el valor de $\lambda_{ala}\sqrt{M_\infty^2 - 1} = 2{,}227 > 2$, el coeficiente de la fuerza de sustentación se calcula con la fórmula (8.59), partiendo de la cual hallamos el correspondiente ángulo de ataque

$$\alpha = c_{y_a}\alpha'\,[1 - 1/(2\lambda_{ala}\alpha')]^{-1}/4 = 0{,}02778 \text{ rad}.$$

El coeficiente de la resistencia de ondas de choque $c_{xch} = c_{y_a}\alpha = 0{,}001791$.

El empuje consumido para vencer la resistencia del ala es, por lo visto, igual a la resistencia de ondas de choque $X_{ch} = c_{xch}\rho_\infty V_\infty^2 S_{ala}/2 = 1367$ N.

Capítulo 9

Características aerodinámicas de vehículos volantes en caso de movimiento inuniforme

Los problemas y preguntas que hemos considerado, relacionados con aerodinámica del perfil y del ala, se refieren al caso cuando su movimiento es uniforme. Para semejante movimiento las fuerzas aerodinámicas y los momentos no dependen del tiempo y se determinan, al fijar los timones y mantener la altura y velocidad de vuelo prefijadas, sólo por la orientación del vehículo volante respecto del vector velocidad. El movimiento más general es el de tipo inuniforme con el que el vehículo volante sufre aceleración o deceleración y realiza oscilaciones de diferente carácter. Para el movimiento invertido esto es equivalente a la circulación inuniforme con un flujo de aire. Con tal circulación las propiedades aerodinámicas del vehículo no sólo dependen de su posición con relación al vector velocidad del flujo incidente, sino también de los parámetros cinemáticos que caracterizan el movimiento, o sea, los coeficientes aerodinámicos son función del tiempo.

Cuando tiene lugar la circulación inuniforme, sobre el vehículo actúan fuerzas y momentos adicionales. En una serie de casos sus valores son muy pequeños en comparación con los que se obtienen con el movimiento estacionario. En particular, durante la circulación axial de un flujo acelerado supersónico la resistencia al avance crece en pequeño grado, lo que en la práctica puede no tomarse en consideración. Muchos importantes problemas relacionados con el movimiento de los vehículos volantes, incluido el inuniforme, se pueden resolver empleando las características aerodinámicas estacionarias. No obstante, algunos de ellos sólo se resuelven hallando los parámetros aerodinámicos teniendo en cuenta la circulación inuniforme.

Uno de los importantes problemas es el de la *estabilidad dinámica* del vehículo volante. Con el régimen prefijado de vuelo el vehículo posee estabilidad dinámica, si las discrepancias de los parámetros cinemáticos, provocadas por cualesquiera fuerzas perturbadoras, en función del tiempo disminuyen, por lo que el movimiento perturbado se debilita y tiende hacia el vuelo inicial programado. Si esta condición no se cumple se observa la inestabilidad dinámica del vehículo volante. La investigación de la estabilidad (o inestabilidad) dinámica se realiza basándose en las ecuaciones del movimiento perturbado, en las que entran las características aerodinámicas dependientes del tiempo (llamadas *características aerodinámicas no estacionarias*).

Como muestran las investigaciones, la solución de los problemas relacionados con la determinación de las características aerodinámicas no estacionarias puede simplificarse si los parámetros cinemáticos, que determinan el movimiento de los cuerpos, y, por consiguiente, las propias características, se considera que varían de acuerdo con la llamada ley armónica que halla su reflejo en los problemas y preguntas enunciados más adelante, dedicados a la investigación de las derivadas aerodinámicas.

La base de los cálculos de las características aerodinámicas no estacionarias de los vehículos volantes y de sus elementos (y, en particular, del ala) son las dependencias generales para los coeficientes aerodinámicos, expresados mediante las derivadas del coeficiente de presión según los parámetros cinemáticos. Al plantear las preguntas y confeccionar los correspondientes problemas, relacionados con la investigación de aerodinámica no estacionaria de las alas, está prevista la determinación tanto de las derivadas sumarias de los coeficientes de la fuerza normal, de los momentos de cabeceo y de balanceo de las alas, como las correspondientes derivadas para secciones (perfiles) individuales.

Una serie de problemas y preguntas está dedicada a la relación fundamental de cálculo de la teoría de la circulación inuniforme que liga entre sí los parámetros

del flujo perturbado (velocidad, presión, densidad) y la función potencial (*integral de Cauchy—Lagrange*) que, por regla, se considera con arreglo al caso del movimiento de un gas (flujo compresible) o bien al flujo de un fluido incompresible. Con el fin de hallar en esta relación la función potencial hay que hacer uso de la *ecuación de ondas* (de Schrödinger).

La investigación de la aerodinámica supersónica no estacionaria de alas planas se puede realizar con métodos que no están directamente ligados con la ecuación de ondas. Entre ellos es posible indicar el método de fuentes, ampliamente presentado en las preguntas y problemas relacionados con la determinación de las derivadas no estacionarias supersónicas de alas delgadas y de sus perfiles (secciones).

Al resolver los problemas de la circulación inuniforme de un flujo incompresible o bien subsónico compresible alrededor de un ala, es conveniente emplear la llamada *teoría de torbellinos* que permite calcular directamente las velocidades perturbadas en la superficie de sustentación y, con ellas, los respectivos coeficientes de presión y sus derivadas. En las preguntas y los problemas aducidos más abajo se considera consecutivamente la circulación inuniforme alrededor de alas delgadas, primero, de un flujo incomplesible y, a continuación, las reglas de recálculo de los parámetros de esta circulación obteniendo para dichos parámetros los correspondientes valores calculados tomando en consideración la compresibilidad.

Junto con el método de fuentes, así como la teoría de torbellinos, que se consideran precisos, en las investigaciones prácticas se aplican con bastante amplitud los métodos aproximados de estimación de las derivadas aerodinámicas de las superficies de sustentación. Entre ellos, los métodos basados en las hipótesis de armonía y uniformidad, así como el método de cuñas tangenciales que proporcionan resultados satisfactorios para una amplia clase de alas alrededor de las cuales circulan flujos subsónicos y supersónicos inuniformes con pequeños números de Strouhal que caracterizan estos flujos.

Problemas y preguntas

9.1. La fuerza aerodinámica R de un vehículo volante depende, en el caso general, de los ángulos de ataque α y deslizamiento β, de la presión p y la densidad ρ del aire a la altura prefijada, las variaciones en el tiempo de los ángulos α y β (las derivadas $\dot{\alpha} = d\alpha/dt$, $\dot{\beta} = d\beta/dt$, las velocidades angulares Ω_x, Ω_y, Ω_z y sus derivadas $\dot{\Omega}_x = d\Omega_x/dt$, $\dot{\Omega}_y = d\Omega_y/dt$, $\dot{\Omega}_z = d\Omega_z/dt$. Empleando la teoría dimensional hallen la expresión para la fuerza R, así como los coeficientes aerodinámicos de esta fuerza en función de los parámetros indicados.

9.2. Un vehículo volante efectúa un vuelo acelerado a cierta altura, bajo un ángulo de ataque variable, sin balanceo y deslizamiento, girando alrededor del eje transversal a una velocidad angular que varía con el tiempo. Empleando la teoría dimensional hallen las expresiones generales para el momento de cabeceo y el correspondiente coeficiente aerodinámico en función de los parámetros que determinan el movimiento del vehículo.

9.3. Escriban la dependencia general para el coeficiente de la fuerza normal (o de sustentación) en forma del desarrollo en la serie de Taylor en función de las derivadas de la estabilidad, es decir, los parámetros adimensionales que determinan el movimiento inuniforme del vehículo volante a velocidad variable, con ángulos de ataque, deslizamiento y giro de los timones variables, así como de las velocidades angulares Ω_x, Ω_y, Ω_z. Conserven en el desarrollo los términos con derivadas de la estabilidad de segundo orden.

1. Escriban por separado las derivadas de la estabilidad estáticas y dinámicas.

2. Del número total de derivadas de la estabilidad destaquen las de rotación, así como las derivadas de aceleración.

3. Si las perturbaciones no estacionarias son suficientemente grandes, la no linealidad se convierte en una particularidad esencial. ¿Qué derivadas de la estabilidad reflejan esta singularidad?

9.4. Como muestran las investigaciones, el grado de influencia de las derivadas de la estabilidad sobre los coeficientes aerodinámicos no es igual y sólo tiene valor práctico una parte de ellas. Consideren las correspondientes dependencias aproximadas entre estos coeficientes y las derivadas para el movimiento longitudinal, balanceo y guiñada. Escriban también estas dependencias para el caso particular de movimiento con los timones fijados.

9.5. Escriban la expresión aproximada para el coeficiente del momento de cabeceo m_z en forma de la serie de Taylor en función de las correspondientes derivadas de la estabilidad a condición de que los parámetros α, ω_z, $\dot{\alpha}$, $\dot{\omega}_z$, que determinan el movimiento inuniforme, varían de acuerdo con una ley armónica.

9.6. ¿En qué consiste el sentido físico de cada una de las derivadas estáticas de la estabilidad de primero y segundo orden que caracterizan el movimiento del vehículo volante con los timones fijados?

9.7. Nombren las derivadas estáticas de la estabilidad e indiquen su sentido físico en el caso de movimiento de un vehículo volante controlado con los timones deflectados. ¿Qué son los términos de interacción?

9.8. Den la definición de los coeficientes de amortiguamiento y caractericen su influencia sobre el movimiento no estacionario de un vehículo volante.

9.9. Consideren el sentido físico de las derivadas de los coeficientes de los momentos espirales de vehículos volantes.

9.10. ¿Cuáles son las condiciones de surgimiento de las fuerzas y momentos giroscópicos, así como de la aparición del efecto de Magnus durante el movimiento del vehículo?

9.11. Se han hallado los siguientes valores de las derivadas de la estabilidad de una ala rectangular con $\lambda_{ala} = 5$; $M_\infty = 0$:

$$c_y^\alpha = 4{,}0;\quad c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = -1{,}0;\quad c_y^{\omega_z} = 3{,}0;\quad c_y^{\dot{\omega}_z} = -1{,}0;$$

$$m_z^\alpha = -0{,}96;\quad m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} = -0{,}1;\quad m_z^{\omega_z} = -1{,}1;\quad m_z^{\dot{\omega}_z} = 0{,}03,$$

donde $\dot{\bar{\alpha}} = (d\alpha/dt)\, b/V_\infty$; $\omega_z = \Omega_z b/V_\infty$; $\dot{\omega}_z = (d\Omega_z/dt)\, b^2/V_\infty^2$; b es la cuerda del ala; V_∞, la velocidad.

Los valores aducidos se han obtenido para el origen de los ejes de coordenadas, situado en el borde de ataque, que al mismo tiempo es el centro de reducción de las fuerzas y centro de rotación (punto con relación al que se determinan los parámetros cinemáticos). Efectúen el recálculo de estas derivadas, tomando en consideración los siguientes casos posibles: 1) los parámetros cinemáticos se determinan con relación al origen inicial, en tanto que el centro de reducción de las fuerzas es un nuevo punto que yace delante a una distancia $\Delta x = b$; 2) los parámetros cinemáticos se calculan para el nuevo origen ($\Delta x = b$), mientras que el centro de reducción coincide con el antiguo; 3) el nuevo origen es, simultáneamente, el nuevo centro de reducción de fuerzas ($\Delta x = b$).

9.12. ¿Qué condiciona la posibilidad de investigación por separado del movimiento longitudinal y lateral de un vehículo volante? Escriban las dependencias

funcionales simplificadas de los coeficientes aerodinámicos para el movimiento inuniforme tanto en el régimen de control, como con los timones fijados.

Tabla 9.1

Movimiento	Parámetros							
	α	β	Ω_x	Ω_y	Ω_z	δ_a	δ_d	δ_{al}
Cabeceo y balanceo	+	−	+	−	+	+	−	+
Cabeceo sin balanceo	+	−	−	−	+	+	−	−
Balanceo sin cabeceo	−	−	+	−	−	−	−	+

9.13. En la tabla 9.1 se muestran convencionalmente distintos casos particulares de movimiento de un vehículo volante y los parámetros que determinan cada uno de dichos movimientos. Escriban las correspondientes dependencias generales para los coeficientes de los momentos, expresados con las derivadas de la estabilidad.

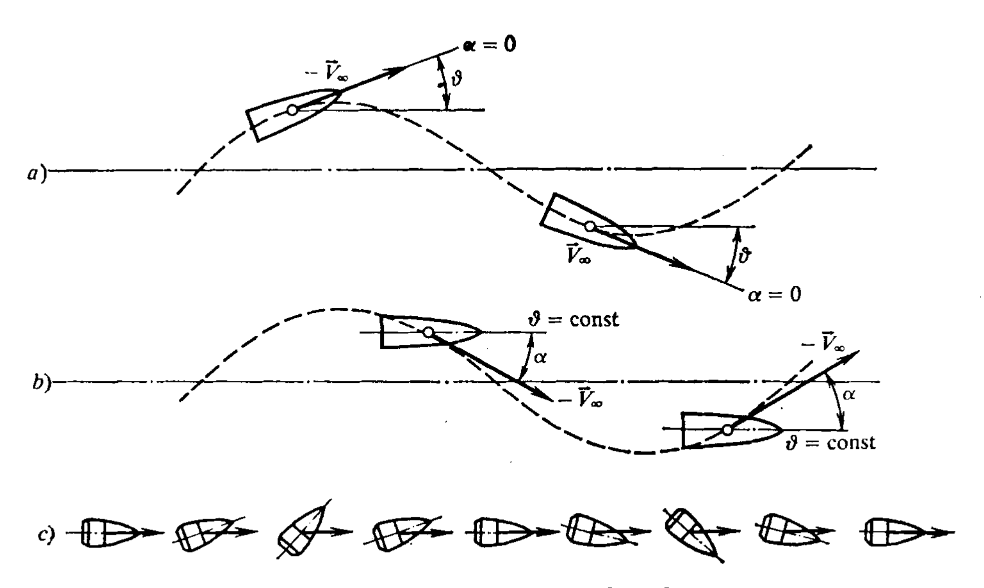


Fig. 9.1. Movimiento del vehículo volante:
a, bajo ángulo de ataque nulo ($\alpha = 0$); *b*, con orientación constante (ϑ = const); *c*, por trayectoria rectilínea

9.14. Examinen los tres siguientes movimientos de cabeceo de un vehículo volante:

1. El movimiento curvilíneo (fig. 9.1, *a*) se produce en el plano longitudinal sin deslizamiento y balanceo con ángulo de ataque nulo ($\alpha = \beta = \Omega_x = \Omega_y = 0$); el vehículo sufre movimiento rotatorio a velocidad angular Ω_z ($\Omega_z = d\vartheta/dt = \dot{\vartheta}$; ϑ es el ángulo entre la dirección de vuelo y el horizonte).

2. El movimiento se caracteriza con que el eje del vehículo conserva la orientación a lo largo de la trayectoria (fig. 9.1, *b*) y se realiza la condición $\Omega_z = \dot{\vartheta} = 0$. Con esto, el ángulo de ataque varía con el tiempo ($\dot{\alpha} \neq 0$).

3. El movimiento transcurre por una trayectoria rectilínea (fig. 9.1, *c*) y el eje longitudinal del aparato cambia su posición ($\dot{\alpha} \neq 0$; $\dot{\vartheta} \neq 0$).

Escriban las dependencias generales para los coeficientes del momento de cabeceo en función de las correspondientes derivadas de la estabilidad. Representen en dichas dependencias los ángulos de ataque, las velocidades angulares y las correspondientes derivadas, tomando en consideración las variaciones de dichos parámetros según la ley armónica $q_i = q_i^* \cos p_i t$.

9.15. Escriban las expresiones generales para los coeficientes de la fuerza normal y el momento de cabeceo en función de las correspondientes derivadas de la estabilidad durante el movimiento de un vehículo volante en el régimen de «looping», así como en el caso de caída libre (fig. 9.2).

9.16. Un vehículo volante está en movimiento de avance sin deslizamiento bajo el ángulo de ataque $\alpha = 0$ (fig. 9.3) realizando, simultáneamente, rotación alrededor del eje longitudinal a velocidad angular $\Omega_x = d\gamma/dt$ (todos los timones están fijados). Escriban las dependencias para los coeficientes aerodinámicos, característicos para semejante movimiento, en función de las correspondientes derivadas de la estabilidad y suponiendo que la velocidad angular Ω_x varía según una ley armónica.

9.17. Determinen las características de la estabilidad dinámica de un cono con «cola» estabilizadora (el esquema y las dimensiones se aducen en la fig. 9.4). El cono está en movimiento a una velocidad $V_\infty = 600$ m/s por una trayectoria ligeramente curvilínea, efectuando oscilaciones con relación al eje transversal. En el momento de tiempo $t = 0$ el ángulo de ataque $\alpha = \alpha_0 = 0$ y la velocidad angular inicial $\dot{\alpha}_0 = d\alpha/dt = 0{,}1$ 1/s. Prefijen los valores arbitrarios de la densidad del aire y cualquier material para el cono.

9.18. Hallen la dependencia general para la presión excesiva en algún punto de un ala plana en movimiento rotativo $\bar{\Omega}$ (Ω_x, Ω_y, Ω_z), alrededor de la cual circula un flujo compresible a velocidad V_∞ y con ángulos variables de ataque α y de deslizamiento β. Como dimensión característica tomen la envergadura del ala l.

9.19. Empleando la expresión obtenida más arriba para el coeficiente de presión, deduzcan la dependencia para la fuerza normal que actúa sobre una área elemental de la superficie de sustentación durante su movimiento no estacionario. Hallen la fórmula para el correspondiente coeficiente aerodinámico, representándolo, asimismo, en forma del desarrollo por los exponentes del parámetro pequeño.

9.20. Haciendo uso de las dependencias obtenidas para las derivadas de la estabilidad del coeficiente local de la fuerza normal (véase el problema 9.19), hallen la fórmula para las derivadas de la estabilidad en función de los coeficientes sumarios de la fuerza normal, de los momentos de cabeceo y balanceo. Examinen los casos particulares de movimiento simétrico ($\Omega_x = 0$) y asimétrico ($\Omega_x \neq 0$; $\Omega_z = 0$).

9.21. Escriban la expresión para la diferencia de los coeficientes de presión en cierto punto de la superficie de un ala en movimiento tipo «looping» (sin balanceo) o que se desplaza por una trayectoria en régimen de caída libre. Obtengan la fórmula para $\Delta\bar{p}$ en el caso de movimiento de avance del ala con ángulo de ataque $\alpha = 0$ y su rotación a velocidad angular $\Omega_x = d\gamma/dt \neq 0$.

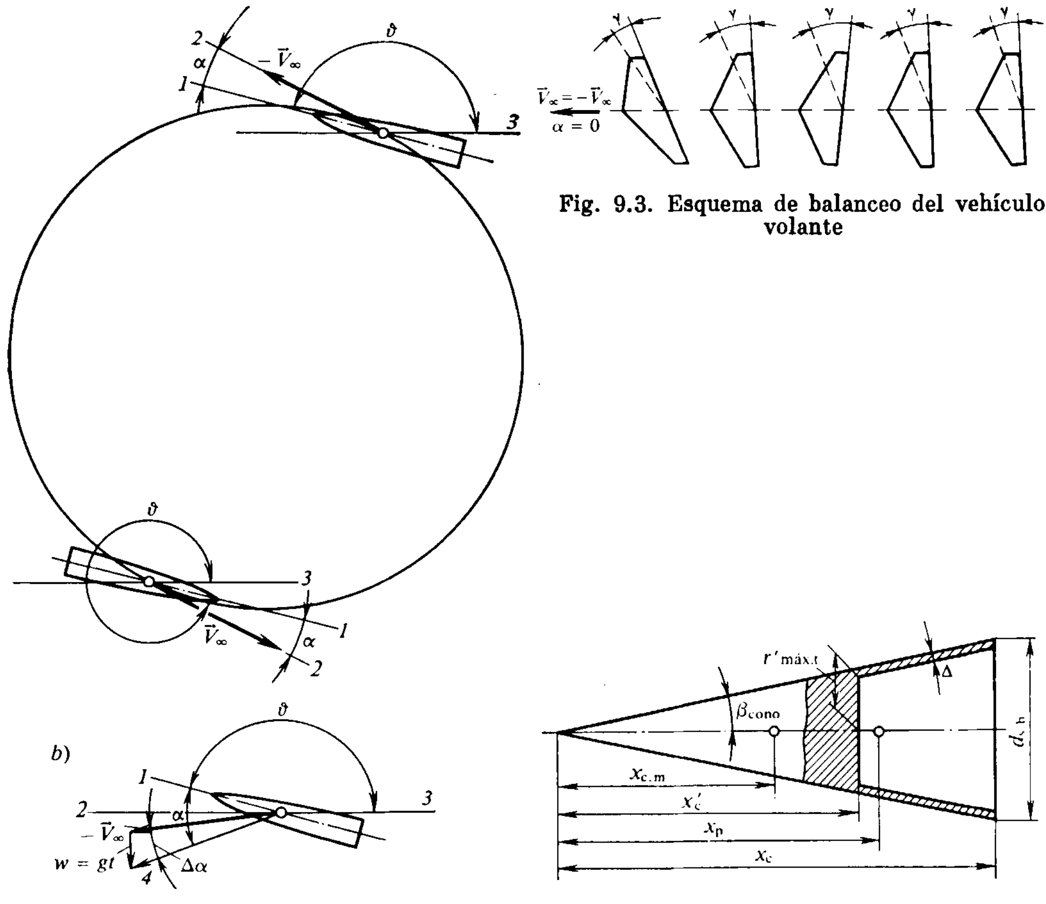


Fig. 9.3. Esquema de balanceo del vehículo volante

Fig. 9.2. Tipos de movimiento del vehículo volante:
a, «looping»; *b*, caída libre

Fig. 9.4. Vehículo volante en forma de cono con «cola» estabilizadora

9.22. Empleando el teorema de variación de la cantidad de movimiento examinen el flujo inuniforme del gas en un hilillo y deduzcan la relación que determina la dependencia entre la presión y la velocidad. Hallen esa relación para un fluido incompresible y en el caso particular de un flujo de líquido débilmente perturbado.

9.23. Analicen el movimiento simétrico de avance a velocidad constante (V_∞ = const) de una superficie de sustentación que simultáneamente oscila en el plano vertical y escriban la dependencia para la diferencia de los coeficientes de presión (en el intradós y en el trasdós del ala) en función de las correspondientes derivadas del potencial de velocidad. Determinen las fórmulas que ligan entre sí las respectivas derivadas para $\Delta\bar{p}$ y φ en el caso de oscilaciones armónicas.

9.24. Deduzcan la ecuación de ondas para el movimiento bidimensional linealizado inuniforme de un gas compresible.

9.25. Escriban las condiciones de frontera en la superficie de un ala, a las que debe satisfacer una función potencial no estacionaria para los siguientes casos

particulares: 1) el ala está en movimiento rectilíneo y, al mismo tiempo, realiza movimiento oscilatorio alrededor del eje transversal; 2) la superficie de sustentación se inclina a cierta velocidad angular; 3) la trayectoria del ala de por sí es un «looping».

9.26. Consideren la relación general para la diferencia de presiones en los lados superior e inferior de la superficie de sustentación, alrededor de la cual circula un flujo inuniforme linealizado, en función de la intensidad lineal de los vórtices ligados $\gamma = -d\Gamma/dx$. Representen las expresiones para los coeficientes de la diferencia de presiones $\Delta\bar{p} = \bar{p}_i - \bar{p}_s$ y la intensidad lineal γ en forma de series por los exponentes de parámetros cinemáticos pequeños y hallen la dependencia entre las correspondientes derivadas de $\Delta\bar{p}$ y γ y los parámetros cinemáticos.

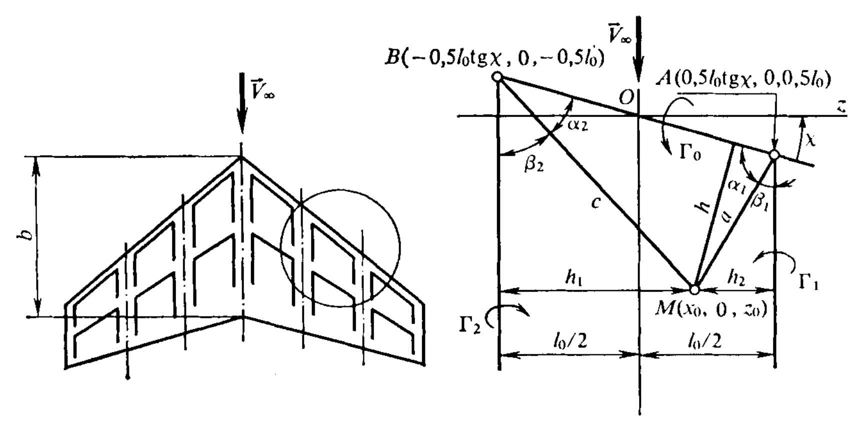


Fig. 9.5. Esquema de un vórtice oblicuo en herradura:
$l_0 = 1$ m; $b = 2$ m; $z_0 = 0{,}25$ m; $x_0 = 0{,}5$ m; $\chi = 30°$

9.27. Hallen la dependencia para la intensidad lineal de una capa vorticial y la diferencia de coeficientes de presión en función de las correspondientes derivadas para el caso particular de movimiento de avance de una superficie de sustentación que realiza oscilaciones verticales (en el sentido del eje Oy). Examinen el caso de oscilaciones armónicas.

9.28. Al investigar la circulación uniforme de un fluido incompresible alrededor de una superficie de sustentación de forma complicada, ella se sustituye por un modelo vorticial que es el conjunto de cierta cantidad de sistemas elementales de torbellinos. Cada uno de estos sistemas es un vórtice oblicuo en forma de herradura, compuesto de un vórtice oblicuo ligado y de dos haces de vórtices libres que salen de él. Determinen la velocidad provocada por semejante sistema de torbellinos en cierto punto que yace en el mismo plano que el sistema que consideramos. Hallen el valor numérico de la velocidad de acuerdo con las dimensiones geométricas del vórtice y las coordenadas del punto, así como considerando la velocidad $V_\infty = 100$ m/s y la circulación $\Gamma_0 = 2$ m²/s prefijadas.

9.29. En el caso del movimiento no estacionario el cálculo de las características aerodinámicas de una superficie sustentadora se basa en la sustitución del plano equivalente de referencia por un sistema de torbellinos, constituido por un conjunto de vórtices discretos oblicuos ligados en herradura con una capa de vórtices libres no estacionarios que sale de aquéllos. Analicen la velocidad inducida por un vórtice discreto en forma de herradura en cierto punto M $(x_0, 0, z_0)$ (fig. 9.5).

Determinen en el momento $t = 5$ s la velocidad inducida por un vórtice discreto en herradura en cierto punto M con coordenadas $x_0 = 0{,}5$ m; $z_0 = 0{,}25$ m para $l_0 = 1$ m; $b = 2$ m; $\chi = 30°$; $V_\infty = 100$ m/s. Tomen la ley de variación de la intensidad del vórtice (vorticidad) ligado en la forma $\Gamma = 0{,}002\ V_\infty bt$ (donde t es el tiempo).

9.30. Analicen las relaciones fundamentales para el cálculo de los parámetros de la circulación estacionaria y no estacionaria alrededor de un ala rectangular en la planta ($\chi = 0$), representada en forma de una superficie ocupada por sistemas discretos de torbellinos. Determinen la velocidad inducida por un vórtice

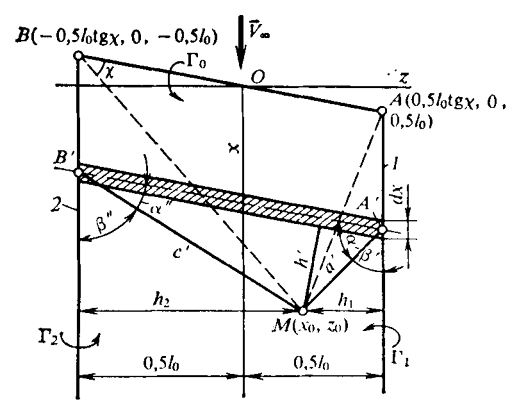


Fig. 9.6. Esquema de un vórtice discreto oblicuo en herradura

Fig. 9.7. Ala pentagonal: $l = 10$ m; $b_0 = 4$ m; $\chi = 20°$; $b_e = b_0 - 0{,}5\ l \times \operatorname{tg} \chi = 2{,}18$

discreto rectangular ($\chi = 0°$; figs. 9.5 y 9.6) para $l_0 = 1$ m; $b = 2$ m; $z_0 = 0{,}25$ m; $x_0 = 0{,}5$ m; $V_\infty = 100$ m/s.

En el caso del vórtice estacionario tomen $\Gamma_0 = 2$ m²/s y para el no estacionario $\Gamma_0 = 0{,}002\ V_\infty bt$ m²/s.

9.31. Hallen las relaciones generales para las velocidades, inducidas por un sistema de torbellinos no estacionario oblicuo en herradura, en el caso cuando la intensidad (circulación) del vórtice ligado varía según una ley armónica.

9.32. Deduzcan las relaciones generales para las velocidades inducidas por un vórtice discreto en herradura con pequeños números de Strouhal, es decir, cuando es pequeña la frecuencia de las oscilaciones de la intensidad del vórtice ligado ($p^* = pb/V_\infty \to 0$). Hallen los valores numéricos de las funciones adimensionales que determinan las velocidades inducidas para $l_0 = 1$ m; $b = 2$ m; $x_0 = 0{,}5$ m; $z_0 = 0{,}25$ m; $\chi = 0°$ (vórtice en forma de herradura cuadrada).

9.33. ¿En qué consisten las singularidades de los esquemas de corrientes sin circulación y con circulación de un fluido alrededor de una superficie de sustentación y en qué condiciones se realiza cada uno de estos esquemas? ¿Cómo es posible representar el modelo vorticial de la superficie de sustentación en caso de corrientes con circulación y sin circulación?

9.34. Uno de los métodos difundidos para calcular las cargas aerodinámicas sobre el ala consiste en su sustitución por una superficie vorticial, situada en el plano de referencia, y la posterior determinación de la intensidad de la circulación, por la cual se calculan la distribución de la presión, las fuerzas, los momentos y las correspondientes derivadas aerodinámicas. ¿Qué condiciones se deben cum-

plir, al determinar la intensidad de la circulación, que correspondan al modelo vorticial adoptado de la superficie de sustentación, sometida a corrientes con circulación y sin circulación?

9.35. El modelo vorticial de una superficie de sustentación plana está representado por el conjunto de múltiples sistemas discretos de torbellinos, cada uno de los cuales es un vórtice (recto u oblicuo) no estacionario en herradura. Semejante vórtice se dispone en la célula elemental de la superficie situada en la intersección de las líneas divisorias, que van a lo largo de la envergadura del ala, con las rectas paralelas a la cuerda (central) de raíz (con las secciones del ala). Analicen los métodos de división de la banda (sección) en células, así como la disposición en ellas de los vórtices discretos no estacionarios y de los puntos de referencia para los que se determinan las condiciones de frontera.

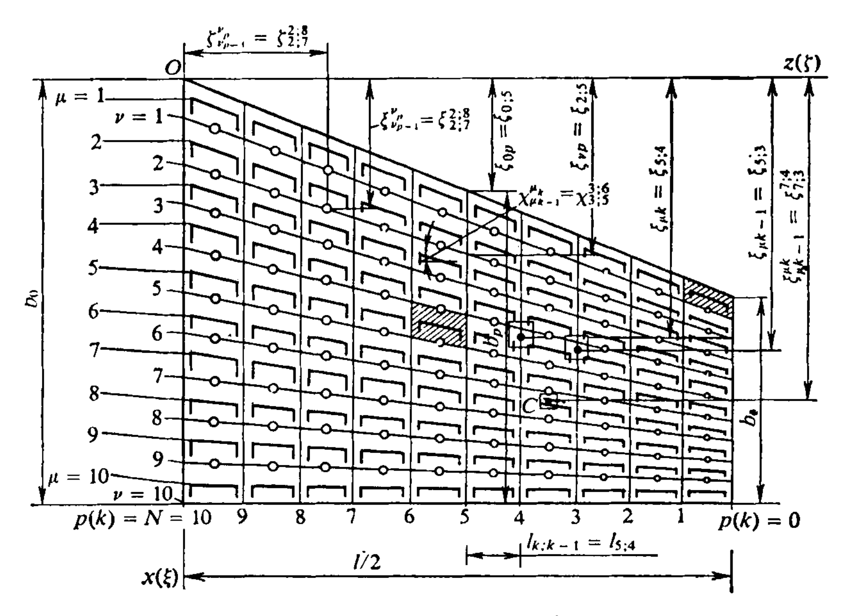


Fig. 9.8. Plano de base del ala:

(000, puntos de referencia; □□□, extremos del vórtice discreto ligado; C, centro del vórtice; ν, número del panel; μ, número del vórtice; $p\,(k)$, número de la banda; χ, ángulo de flecha del vórtice; b_0, cuerda de raíz (central); b_e, cuerda lateral; $b_{p(k)}$, cuerda de la sección

9.36. Hallen las expresiones generales para las coordenadas de los centros de los vórtices discretos elementales ligados, su envergadura, así como las tangentes de los ángulos de flecha en el caso de disposición uniforme y no uniforme por la sección de las células de la superficie de sustentación y de los vórtices ubicados en ellas.

9.37. Para el modelo vorticial de un ala pentagonal de las dimensiones indicadas en la fig. 9.7, determinen los valores numéricos de las coordenadas de los puntos de referencia (en los que deben satisfacerse las condiciones de frontera) y de los extremos de un vórtice discreto oblicuo ligado, así como hallen la envergadura y el ángulo de flecha con esquema no uniforme de ubicación de tales vórtices por la sección. Tomen el número de bandas $p\,(k) = N = 10$ y los segmentos de la cuerda $n = 10$.

9.38. Analicen cualquier célula del plano de referencia del ala (fig. 9.8) y, escriban la expresión general para la circulación de un vórtice discreto ligado situado en dicha célula, representándola en forma de una serie de términos en los que entran las derivadas de la circulación según los parámetros cinemáticos. Hallen las indicadas expresiones para la ley armónica de variación de éstos, así como para los siguientes casos particulares: 1) movimiento tipo «looping»; 2) desplazamiento en el régimen de caída libre; 3) balanceo en movimiento bajo el ángulo de ataque $\alpha = 0$ (véase el problema 9.21).

9.39. Examinen la expresión general para la circulación de un vórtice discreto en cierta célula del plano de referencia (fig. 9.8), cuando el movimiento de la superficie de sustentación es simétrico y asimétrico.

9.40. Deduzcan las dependencias para la intensidad de la capa vorticial y la circulación de los vórtices laterales libres de un vórtice discreto en herradura en la célula número $\mu kk - 1$ (fig. 9.8), expresadas en forma de series mediante las derivadas de la circulación del vórtice ligado. Tomen la ley armónica de variación de los parámetros cinemáticos y consideren el caso con pequeños números de Strouhal. Dichas dependencias han de expresarse para el movimiento de avance simétrico ($\Omega_x = 0$) del ala a velocidad constante ($V_\infty = \text{const}$) que, simultáneamente, oscila en el plano vertical (véase el problema 9.23).

9.41. Escriban la expresión general para la velocidad inducida en el punto de referencia por el vórtice ligado de un sistema discreto en herradura de torbellinos, así como de todos los semejantes vórtices que cubren la superficie de sustentación (fig. 9.8). Representen esa velocidad como función de las derivadas de la circulación según los parámetros cinemáticos y tengan en cuenta las peculiaridades del movimiento simétrico ($\Omega_x = 0$) y asimétrico ($\Omega_x \neq 0$). Examinen el caso de la variación armónica de los parámetros cinemáticos y un ejemplo numérico de cálculo de la función que determina la velocidad inducida por varios vórtices en cualquier punto de referencia (con los datos del problema 9.38).

9.42. En el punto de referencia hallen la dependencia para la velocidad inducida de dos vórtices libres pertenecientes a un vórtice elemental no estacionario discreto en herradura, así como la velocidad total de todos los semejantes vórtices en el plano de referencia (fig. 9.8). Analicen el caso de la variación armónica de los parámetros cinemáticos y la correspondiente dependencia para la circulación como función de sus derivadas según los indicados parámetros. Con los datos del problema 9.41 calculen, para el caso de pequeños números de Strouhal, la función que determina la velocidad inducida en el punto de referencia por varios sistemas de torbellinos.

9.43. Determinen la velocidad inducida en el punto de referencia por la capa vorticial del vórtice ligado de un sistema discreto en herradura de torbellinos, situado en la célula $\mu kk—1$ (fig. 9.8). Examinen la ley armónica de variación de la circulación como función de sus derivadas según los correspondientes parámetros cinemáticos. Calculen los valores numéricos de la función que determina la velocidad inducida en el punto de referencia por el vórtice más cercano, así como por un vórtice situado simétricamente en el otro lado del ala (según los datos del problema 9.38). Al resolver el problema se toman pequeños números de Strouhal.

9.44. Hallen la dependencia para el valor sumario de la velocidad en el punto de referencia del ala, inducida por todo el sistema de vórtices discretos en herradura, y escriban las condiciones de frontera que debe satisfacer esa velocidad en caso de corriente no estacionaria y de la variación armónica de los parámetros cinemáticos.

9.45. Hallen las ecuaciones que, por medio de los parámetros cinemáticos,

permiten determinar las derivadas de la circulación para vórtices discretos oblicuos en herradura, situados en el plano lateral del ala. Analicen la ley armónica de variación de los parámetros cinemáticos.

9.46. Consideren el sistema de las ecuaciones que permiten encontrar la distribución de las derivadas de la circulación por el ala a condición de la variación armónica de los parámetros cinemáticos, que determinan la corriente no estacionaria alrededor de la superficie sustentadora de la forma prefijada con pequeños números de Strouhal. Con los datos del problema 9.38 hallen los valores numéricos de las funciones que determinan las velocidades inducidas en el punto de referencia con coordenadas $\zeta_{\nu p-1}^{\nu p} = 0{,}562$; $\xi_{\nu p-1}^{\nu p} = 0{,}603$ ($\nu = 5$; $p = 6$). Examinen la influencia de los vórtices ubicados en las células $\mu kk - 1 = 5; 6; 6 - 1$ por ambos lados del ala.

9.47. Deduzcan la fórmula para la presión excesiva en cierto punto de la superficie de sustentación delgada del ala en oscilación como función de la intensidad lineal de los vórtices ligados (o bien la intensidad de la capa vorticial adyacente). Por la presión excesiva en el trasdós y en el intradós del ala ($p_s - p_\infty = -10^2$ Pa y $p_i - p_\infty = 10^2$ Pa, respectivamente), medida en un túnel aerodinámico, determinen la circulación del vórtice local ligado y la correspondiente intensidad lineal. La velocidad del aire en la zona de trabajo del túnel $V_\infty = 50$ m/s y su densidad $\rho_\infty = 1{,}226$ kg/m³. Tomen la longitud de la célula Δx (fig. 9.8) igual a cualquier valor de acuerdo con los datos del problema 9.37.

9.48. 1. Examinen las dependencias para el cálculo numérico de los coeficientes aerodinámicos y sus derivadas según los parámetros cinemáticos para el ala en su total y sus secciones por separado durante la circulación inuniforme a su alrededor de un fluido incompresible.

2. Calculen los coeficientes aerodinámicos de las respectivas secciones de un ala plana rectangular (cuerda $b = 2$ m, área $S_{\text{ala}} = 20$ m²), así como sus valores completos según los valores de cálculo de la caída de los coeficientes de presión con $\alpha = 2°$ (tabla 9.2).

Tabla 9.2

$\xi = x/b$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
					$\zeta_1 = 2\,z/l = 0$						
$\Delta\bar{p}$	0,628	0,349	0,209	0,140	0,105	0,087	0,063	0,052	0,042	0,028	0
					$\zeta_1 = 0{,}3$						
$\Delta\bar{p}$	0,524	0,279	0,157	0,105	0,080	0,063	0,049	0,035	0,028	0,017	0
					$\zeta_1 = 0{,}68$						
$\Delta\bar{p}$	0,384	0,219	0,126	0,087	0,070	0,049	0,035	0,028	0,024	0,014	0
					$\zeta_1 = 0{,}82$						
$\Delta\bar{p}$	0,314	0,175	0,098	0,063	0,049	0,035	0,028	0,021	0,018	0,012	0
					$\zeta_1 = 0{,}96$						
$\Delta\bar{p}$	0,279	0,105	0,059	0,042	0,030	0,026	0,016	0,012	0,007	0,005	0

Para el valor $\xi = 0$ (borde de ataque) se dan los valores de extrapolación para $\Delta\bar{p}$.

3. Para un ala de envergadura infinita, en oscilación armónica, en movimiento bajo un ángulo de ataque con $p^* \to 0$ se ha calculado la distribución de las derivadas de la intensidad de circulación $\gamma^\alpha = \partial(\gamma/V_\infty)/\partial\alpha$ y $\gamma^{\omega_z} = \partial(\gamma/V_\infty)/\partial\omega_z$ ($\omega_z = \Omega_z b/V_\infty$; tabla 9.3).

Tabla 9.3

$\xi = x/b$	0	0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875	1,0
γ^α	8	5,25	3,75	2,70	2,05	1,61	1,35	0,75	0
γ^{ω_z}	10	2,91	2,63	2,35	1,88	1,68	1,46	1,05	0

Para el punto del borde de ataque ($\xi = 0$) se ofrecen los resultados de la extrapolación.

Con los datos de la tabla 9.3 hallen la distribución de las derivadas por α y ω_z de los coeficientes de presión excesiva y de la circulación adimensional, así como calculen los correspondientes valores de las derivadas de los coeficientes aerodinámicos de los momentos de las secciones. Calculen la fuerza que actúa y el momento para un sector del ala de anchura $b = 2$ m y envergadura $l = 10$ m con $V_\infty = 50$ m/s; $\rho_\infty = 1{,}226$ kg/m³; $\alpha = 2$; $\Omega_z = 0{,}1$ rad/s.

4. Determinen las correspondientes derivadas para los coeficientes del momento de cabeceo y balanceo con movimientos simétrico y asimétrico de un ala en flecha, conociendo la distribución de las derivadas de la circulación adimensional Γ^{ω_z} y Γ^{ω_x} (en el centro de las células del ala de igual anchura: $\mu = 5$; $N = 5$). Los parámetros geométricos del ala: $\lambda_{\text{ala}} = 2{,}5$; $\chi_{\text{at}} = 60°$; $\eta_{\text{ala}} = 2$; $b_0 = 4$ m (tabla 9.4).

Tabla 9.4

μ \ $kk-1$	5,5−1	4,4−1	3,3−1	2,2−1	1,1−1
	Derivada Γ^{ω_z}				
1	0,31	0,12	1,71	2,32	2,71
2	0,82	0,12	1,25	1,31	1,25
3	0,12	0,12	1,21	1,22	1,01
4	0,13	0,11	1,02	1,01	0,72
5	0,81	0,81	0,71	0,71	0,45
	Derivada Γ^{ω_x}				
1	0,15	0,51	1,01	1,41	1,71
2	0,10	0,25	0,43	0,62	0,58
3	0,81	0,21	0,30	0,42	0,35
4	0,06	0,18	0,22	0,22	0,18
5	0,04	0,12	0,15	0,15	0,08

9.49. Deduzcan las ecuaciones que se emplean para determinar el potencial de velocidades de un flujo inuniforme linealizado subsónico ($1 > M_\infty > 0$) en circulación alrededor de la superficie de sustentación delgada de un ala con pequeños números de Strouhal.

9.50. 1. Analicen las condiciones de frontera que deben satisfacer las funciones $\varphi_1^{q_i}$ y $\dot{\varphi}_1^{q_i}$ que son las soluciones de las ecuaciones que describen la circulación no estacionaria alrededor de la superficie de sustentación con *pequeños números de Strouhal.*

2. Hallen los parámetros que determinan las condiciones de frontera para el ala, cuya forma y dimensiones se muestran en la fig. 9.7. El ala está en movimiento simétrico ($\Omega_x = 0$) con ángulo de ataque constante a velocidad $V_\infty = 170$ m/s cerca de la Tierra. Las coordenadas del punto para el que se calculan las condiciones de frontera $x = 2$ m; $z = 3$ m. La frecuencia angular de las oscilaciones $p_i = p_{\omega_z} = 0{,}6$ rad/s.

9.51. 1. Muestren que la solución del problema de la circulación de un flujo compresible alrededor de un ala delgada puede reducirse a la determinación de los parámetros de la corriente no estacionaria de un fluido incompresible alrededor de la superficie de sustentación de forma modificada en la planta.

2. Calculen la relación entre los parámetros geométricos de las alas en flujos compresible e incompresible para $M_\infty = 0{,}8$ (la forma y las dimensiones del ala inicial se dan en la fig. 9.7). Calculen los parámetros que determinan las condiciones de frontera en el ala modificada en el punto $x = 2$ m; $z = 3$ m para el ala inicial con pequeños números de Strouhal.

9.52. 1. Con el fin de calcular la función potencial y sus derivadas para la circulación no estacionaria de un flujo compresible alrededor de la superficie de sustentación prefijada, ha de resolverse el problema de la circulación inuniforme de un flujo incompresible alrededor del ala modificada con las correspondientes condiciones de frontera. Hallen las dependencias que permiten efectuar la transición de los coeficientes aerodinámicos para la superficie modificada a sus correspondientes valores para el ala prefijada con pequeños números de Strouhal.

2. Determinen los parámetros que ligan entre sí los coeficientes aerodinámicos de las secciones de las alas inicial y modificada, que se mueven en medios fluidos compresible ($M_\infty = 0{,}6$) e incompresible simétricamente ($\Omega_x = 0$), con ángulo de ataque constante y velocidad angular variable Ω_z. Hallen la forma y las dimensiones del ala inicial si sabemos que en el ala modificada el alargamiento $\lambda_{a\,la} = 2{,}5$; el ángulo de flecha $\chi_0 = 60°$; el ahusamiento $\eta_{a\,la} = b_0/b_e = 2$, la cuerda de raíz $b_0 = 4$ m. En los cálculos hagan uso de los datos acerca de la distribución de las derivadas de la circulación adimensional Γ^α y Γ^{ω_z} en la sección $\bar{z} = 2\,z/l = 0{,}5$ del ala modificada (tabla 9.5).

Tabla 9.5

Número de la banda (ν)	1	2	3	4	5
$\Gamma^{\alpha}{}_{inc}$	3,45	1,54	1,15	0,75	0,45
$\Gamma^{\omega_z}{}_{inc}$	1,71	1,25	1,21	1,02	0,71

9.53. 1. Analicen el sistema de ecuaciones para la resolución numérica del problema acerca de la circulación no estacionaria de cierto flujo convencional incompresible alrededor de un ala modificada durante la variación armónica de los parámetros cinemáticos, con números pequeños de Strouhal.

17–01650

2. Confeccionen el sistema de ecuaciones de la circulación alrededor de tal ala de forma rectangular en la planta que está en movimiento asimétrico ($\alpha = \Omega_z = 0$; $\Omega_x = \text{const}$). Tomen la cantidad de bandas y secciones $\mu = N = 5$ y el número $M_\infty = 0{,}6$. En las ecuaciones hallen el coeficiente numérico de la derivada desconocida de la circulación que determina la velocidad inducida, en el punto de referencia $x = 1{,}2$ m; $z = 2$ m, por el vórtice discreto en la célula más próxima, así como por un vórtice simétrico en el lado opuesto del ala. Consideren las dimensiones del ala inicial si la cuerda y la envergadura de la superficie de sustentación modificada son $b_0 = 2$ m; $l = 8$ m, respectivamente.

9.54. 1. En el problema 9.53 fueron obtenidas las ecuaciones para hallar la distribución de las derivadas de la circulación Γ^{q_i} y $\Gamma^{\dot{q}_i}$ durante la corriente inuniforme de un fluido convencional incompresible alrededor de un ala de forma modificada en la planta. En los segundos miembros de ciertos sistemas de ecuaciones entran términos que contienen el número M_∞ en forma explícita. Transformen dichas ecuaciones en la forma que no contenga dicho número y sea más cómoda para su resolución.

2. Confeccionen los correspondientes sistemas de ecuaciones para determinar las derivadas de la circulación conforme las condiciones del problema 9.53.

9.55. 1. Deduzcan las fórmulas para determinar en los correspondientes puntos del ala inicial las derivadas del coeficiente de presión excesiva, empleando los valores de Γ^{q_i} y $\Gamma^{\dot{q}_i}$ obtenidos para el flujo convencional incompresible (véase el problema 9.54).

2. Determinen las derivadas p^{q_i} y $p^{\dot{q}_i}$ en un medio incompresible, así como con $M_\infty = 0{,}6$ según los valores conocidos de las derivadas de la circulación adimensional en un fluido incompresible durante el movimiento simétrico del ala: $\Gamma^\alpha = 1{,}7$; $\Gamma^{\dot{\alpha}} = 0{,}02$; $\Gamma^{\omega_z} = 1{,}25$; $\Gamma^{\dot{\omega}_z} = -0{,}05$ (célula de anchura $\Delta\xi = 0{,}2$; la coordenada adimensional del punto con relación al borde de ataque de la sección $\xi = 0{,}3$).

9.56. 1. Hallen las dependencias para pasar de los coeficientes de las derivadas aerodinámicas de secciones aisladas del ala modificada, en un flujo incompresible convencional, a las derivadas de las correspondientes secciones del ala inicial en un medio compresible. Al deducir estas relaciones han de utilizarse las derivadas de la circulación alrededor del ala modificada (véase el problema 9.54). Consideren el caso de movimiento simétrico ($q_1 = \alpha$; $q_2 = 0$; $q_3 = \omega_z$) y asimétrico ($q_1 = q_3 = 0$; $q_2 = \omega_x$).

2. Determinen para $M_\infty = 0{,}8$ las derivadas de la sección con coordenada que corresponde a la coordenada del ala modificada $\bar{z} = 2\,z/l = 0{,}5$, que está en movimiento de avance (en un medio incompresible) y, al mismo tiempo, oscila en sentido vertical. Para la sección de esta ala se ha prefijado la distribución de las derivadas de la circulación (tabla 9.6).

La sección que consideramos pertenece al ala modificada con alargamiento $\lambda_{a\,la} = 2{,}5$, ángulo de flecha por el borde de ataque $\chi = 60°$, ahusamiento $\eta = 2$ y cuerda de raíz $b_0 = 4$.

9.57. Hallen la fórmula para pasar de las derivadas de los coeficientes aerodinámicos de un ala modificada a sus correspondientes valores para la superficie de sustentación inicial. Consideren los casos de movimiento simétrico y asimétrico.

9.58. 1. El coeficiente aerodinámico del movimiento de balanceo (momento transversal) en el problema 9.57 está referido a la cuerda central (de raíz) b_0. Por

Tabla 9.6

Número de la célula (μ)	1	2	3	4	5
Γ^{α}	2,45	1,54	1,15	0,75	0,45
$\Gamma^{\dot{\bar{\alpha}}}$	—0,54	0,03	0,21	0,25	0,24

regla, este coeficiente se calcula por la envergadura de las alas l y, con ello, se parte de consideraciones físicas de acuerdo con las cuales, durante el balanceo, una notoria influencia sobre las propiedades aerodinámicas ejercen las dimensiones transversales del vehículo volante, ante todo la envergadura de las alas. Hallen las relaciones que permiten realizar el recálculo de las derivadas de los coeficientes de balanceo de una dimensión característica a otra.

2. Para un ala en flecha (alargamiento $\lambda_{\text{ala}} = 2{,}5$, ahusamiento $\eta = \infty$) es conocida la derivada $m_{xl}^{\omega_x} = -0{,}1827$ (con $M_\infty = 0$) reducida a la envergadura l. Determinen el correspondiente valor de la derivada $m_{xA}^{\omega_x}$ calculada para la cuerda aerodinámica media.

9.59. En los problemas anteriores las derivadas de los coeficientes aerodinámicos por el parámetro cinemático $q_2 = \omega_z$ fueron calculadas a condición de que dicho parámetro se refiere a la cuerda de raíz b_0. Pero, al determinar el valor de ω_x, como dimensión característica se toma no la cuerda, sino la mitad de la envergadura del ala 0,5 l. Examinen la dependencia para el recálculo de los parámetros aerodinámicos de un valor de $\omega_x = b_0\Omega_z/V_\infty$ a otro $\omega_{x1} = 0{,}5l\Omega_z/V_\infty$. Recalculen la derivada $m_{xl}^{\dot{\omega}_{xl}} = -0{,}0379$ del ala ($\lambda_{\text{ala}} = 2{,}5$; $\eta = \infty$), calculada por las dimensiones características 0,5 l y l [correspondientemente para el parámetro cinemático $\dot{\omega}_{xl} = \dot{\Omega}_x l^2/(4V_\infty^2)$ y para el coeficiente de balanceo], a la cuerda aerodinámica media.

9.60. Calculen las derivadas de los coeficientes aerodinámicos para un ala alrededor de la cual circulan flujos no estacionarios incompresible ($M_\infty = 0$) y compresible ($M_\infty = 0{,}8$) y las derivadas de la estabilidad del ala prefijada a velocidad transónica ($M_\infty = 0{,}98$), haciendo uso de las tablas de cálculo de los correspondientes valores que determinan dichas derivadas. En esta ala $\lambda_{\text{ala}} = 2{,}5$; $\eta_{\text{ala}} = 2$; $\lambda_{\text{ala}}\,\text{tg}\,\chi_0 = 4$.

9.61. 1. Las propiedades aerodinámicas de un vehículo volante, en movimiento a cierta velocidad de avance y que, simultáneamente, efectúa pequeñas oscilaciones, puede ser determinada como resultado de la circulación fundamental uniforme y adicional inuniforme. Presenten en forma general el potencial sumario de las velocidades, escriban las correspondientes dependencias para los coeficientes aerodinámicos y consideren el esquema de cálculo de los parámetros de la circulación uniforme de un fluido incompresible alrededor de un ala delgada.

2. Compongan el sistema de ecuaciones para la circulación uniforme de un flujo incompresible bajo un ángulo de ataque $\alpha = 0{,}1$ alrededor de un ala delgada rectangular. El contorno superior de la sección del ala está prefijado con la ecuación $y_s = 0{,}125\ x\ (1 - x/b_0)$ y el inferior, con la ecuación $y_i = 0{,}1\ x\ (1 - x/b_0)$ (el eje x coincide con la cuerda de la sección). El alargamiento del ala $\lambda_{\text{ala}} = 4$, la cuerda $b_0 = 2$ m. El número de bandas en el ala y de secciones $\mu = N = 5$.

9.62. 1. En forma general consideren el problema sobre la circulación uniforme de un flujo subsónico alrededor de un ala delgada de grosor finito.

2. La distribución de la derivada del coeficiente de la presión excesiva en la sección de un ala rectangular, en forma de un plano de referencia en un flujo incompresible, viene dada en la tabla 9.7.

Tabla 9.7

$\xi = x/b_0$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
p^{α}	15,01	7,99	4,49	3,01	2,29	1,80	1,40	1,01	0,802	0,487	0

Hallen la correspondiente distribución del coeficiente de presión para un ala de grosor finito en la misma sección, cuyo contorno superior está prefijado con la ecuación $y_s = 0{,}125\ x\ (1 - x/b_0)$ y el inferior, con la ecuación $y_i = 0{,}1\ x\ (1 - x/b_0)$ (la cuerda del ala $b_0 = 2$ m). Calculen los coeficientes de las secciones c'_{y0} y m'_{z0} con $\mathbf{M}_\infty = 0{,}8$. El ángulo de ataque $\alpha = 0{,}1$.

3. Para un ala en un flujo incompresible $[\eta_{\text{ala inc}} = 2;\ \lambda_{\text{ala inc}} = 2{,}5;$ $(\lambda_{\text{ala}}\ \text{tg}\ \chi_0)_{\text{inc}} = 4;\ b_{0\,\text{inc}} = 2$ m$]$ han sido halladas las derivadas $c^{\alpha}_{y\ \text{inc}} = 2{,}449$; $m^{\alpha}_{z\ \text{inc}} = -0{,}7019$. Determinen la forma del ala inicial en un flujo incompresible con $\mathbf{M}_\infty = 0{,}8$ y los correspondientes valores de c^{α}_y; m^{α}_z.

9.63. Determinen la velocidad total del flujo de una fuente tridimensional inuniforme en el momento de tiempo $t = 0{,}1$ s en un punto alejado de la fuente a una distancia $r = 3{,}4$ m. La potencia de la fuente varía de acuerdo con la dependencia $q = bt^2$ m³/s (donde $b = 4$ m³/s³); la velocidad del sonido en el gas $a = 340$ m/s.

9.64. Empleando el método de fuentes, consideren la expresión general para el potencial de velocidad durante la circulación no estacionaria supersónica alrededor de una superficie delgada de sustentación.

9.65. Hallen la dependencia entre la potencia de una fuente inuniforme y el potencial de velocidad.

9.66. De acuerdo con la ecuación (9.463) el potencial de velocidad en cierto punto de una corriente perturbada se determina por la distribución de las fuentes no estacionarias en la superficie de sustentación $q\ (x, z, t_1)$ y $q\ (x, z, t_2)$, donde $t_1 = t - \Delta t_1$ y $t_2 = t - \Delta t_2$. Así, pues, sobre el punto que consideramos actúan fuentes de las que a él llegan en el momento t las perturbaciones de las fuentes repartidas durante el intervalo Δt_1 por el frente delantero de la onda y en el tiempo Δt_2, por el frente posterior. Calculen los valores Δt_1 y Δt_2. Hallen las zonas de influencia de las fuentes sobre el punto (x_1, z_1) que corresponden a los límites de las regiones de integración σ_1 y σ_2 en (9.463).

9.67. Muestren que las derivadas del potencial de velocidad que buscamos por la ordenada y, durante la circulación alrededor de un ala que realiza oscilaciones armónicas, también pueden ser representadas en forma de la correspondiente función armónica.

9.68. Utilizando la función armónica (9.478) para la derivada $\partial\varphi\ (x, y, z, t)/\partial y$, efectúen las correspondientes transformaciones en la fórmula (9.471) para el potencial de velocidad.

9.69. Expresen el potencial de velocidades perturbadas con las derivadas por los correspondientes parámetros cinemáticos q_j (α; ω_x; ω_z) y obtengan para ellas las relaciones generales. Analicen el caso de oscilaciones armónicas del ala.

9.70. Hallen las relaciones para las derivadas de la función potencial por los parámetros cinemáticos en el caso de pequeños números de Strouhal. Transformen dichas relaciones en parámetros geométricos adimensionales y en la forma que se emplea directamente al determinar las cargas aerodinámicas.

9.71. 1. Las ecuaciones (9.495) permiten determinar la función potencial en el ala, si por todo el dominio de influencia de las fuentes son conocidas las deflexiones del flujo $|\partial\varphi^{q_j}/\partial\eta|_{\eta=0}$ y $|\partial\dot{\varphi}^{q_j}/\partial\eta|_{\eta=0}$. Escriban las condiciones de frontera a las que deben satisfacer las funciones potenciales y sus correspondientes derivadas.

2. Analicen las condiciones de frontera para diversos sectores en el ala y fuera de sus límites para $\mathbf{M}_\infty = 1{,}2$ y $2{,}2$. El alargamiento del ala $\lambda_{\text{ala}} = 3{,}0$; el ahusamiento $\eta_{\text{ala}} = 5$; el ángulo de flecha $\chi = 60°$.

9.72. 1. Muestren en qué consisten las dificultades del empleo directo de la ecuación (9.495) para los cálculos numéricos del potencial de velocidad y de sus correspondientes derivadas para los paramétros cinemáticos con la circulación inuniforme supersónica alrededor del ala. Transformen las ecuaciones a una forma más cómoda para tales cálculos.

2. Construyan un sistema característico de coordenadas para el caso de la circulación alrededor de un ala con $\mathbf{M}_\infty = 1{,}2$ y $\mathbf{M}_\infty = 2{,}2$. Determinen la coordenada adimensional $\xi_{0\ \text{OM}}$ (9.515) y confeccionen las ecuaciones con las variables r, s para los bordes de ataque, de salida y laterales. El alargamiento del ala $\lambda_{\text{ala}} = 3$; el ahusamiento $\eta_{\text{ala}} = 5$; el ángulo de flecha del borde de ataque $\chi_0 = 60°$.

9.73. Consideren la solución del problema sobre la circulación inuniforme alrededor de un sector del ala, con bordes de ataque supersónicos, situado entre el borde de salida y las líneas de Mach que salen de su vértice.

9.74. Calculen las derivadas del potencial de velocidad en un sector del ala entre el borde de ataque supersónico y la línea de Mach que sale del vértice. Consideren el movimiento simétrico con ángulo de ataque constante α y de velocidad angular Ω_z.

9.75. Encuentren la derivada $F^\alpha = \varphi^\alpha$ en el problema de la circulación supersónica alrededor de un ala rectangular de envergadura infinita.

9.76. Determinen las derivadas de la función potencial en el caso particular de circulación inuniforme supersónica alrededor de un ala rectangular de envergadura infinita.

9.77. Las fórmula (9.541) para las derivadas de la función potencial son útiles para las condiciones con las que la zona de influencia de las fuentes se encuentra en la superficie del ala. Consideren cuáles deben ser en tal caso los ángulos de inclinación de los bordes de ataque, de salida y laterales de un ala hexagonal con $\mathbf{M}_\infty > 1$.

9.78. Analicen la solución del problema acerca de la determinación de las derivadas del potencial inuniforme de velocidad en el punto del ala sobre el que influyen los bordes laterales.

9.79. Hallen las derivadas del potencial de velocidad en el punto D ($x = 0{,}75$ m; $z = -0{,}45$ m) situado en un ala rectangular entre el borde lateral y la línea de Mach saliente del punto delantero de ese borde. El ala de anchura $b_0 = 1{,}5$ m está en movimiento simétrico con ángulo constante de ataque y veolcidad angular Ω_z siendo $\mathbf{M}_\infty = 1{,}5$.

9.80. Examinen las derivadas de la estabilidad de la funcıon potencial en un

ala hexagonal con bordes de ataque y de salida supersónicos y laterales subsónicos.

9.81. Calculen las derivadas de la función potencial en los puntos característicos de un ala rectangular de envergadura finita alrededor de la cual circula un flujo inuniforme supersónico.

9.82. Analicen el esquema del cálculo numérico de la circulación inuniforme supersónica de un ala delgada de la forma prefijada en la planta.

9.83. De la solución del problema 9.72 sabemos que para determinar las derivadas de la función potencial, en la zona de influencia de las fuentes, hay que hallar en esa zona las deflexiones del flujo $\partial F/\partial\eta$. Consideren el método de cálculo de dichas deflexiones en la región perturbada del ala, limitada por los bordes de ataque, lateral y las líneas de Mach con vértices en los correspondientes puntos del ala, así como en la capa vorticial.

9.84. Calculen las deflexiones en un ala triangular alrededor de la cual circula un flujo inuniforme supersónico (número $M_\infty = 2$). El ángulo de flecha $\chi = 45°$, la cuerda de raíz del ala $b_0 = 5$ m.

9.85. Determinen la derivada de la función potencial con $M_\infty = 1{,}5$ en el punto A ($x = 2{,}8$ m; $z = 0{,}39$ m) en un ala triangular con ángulo de flecha $\chi_0 = 60°$ y cuerda de raíz $b_0 = 3$ m. El ala está en movimiento de avance con ángulo de ataque $\alpha = 0$ y gira a una velocidad angular Ω_z.

9.86. Calculen la derivada de la función potencial en el punto A ($x = 2{,}82$ m; $z = 0{,}6$ m) en el borde de salida. El ala está en movimiento con ángulo constante de ataque, girando a cierta velocidad angular Ω_z = const. El ángulo de flecha de los bordes de ataque y de salida $\chi_0 = 60°$; la envergadura del ala $l = 6$ m; la cuerda $b_0 = 2$ m; el número $M_\infty = 1{,}3$.

9.87. Hallen la función F^{ω_z} en el punto A ($x = 4{,}85$ m; $z = 2$ m) en un ala (véase la fig. 9.39) alrededor de la cual circula un flujo inuniforme supersónico con $M_\infty = 2$. En esta ala $b_0 = 5$ m; $b_e = 1$ m; $b_{comp} = 3$ m; $l = 6$ m; $\chi = 70°$.

9.88. Encuentren las relaciones para el coeficiente de la diferencia de presiones en el intradós y el trasdós del ala, así como la derivada del coeficiente por los parámetros cinemáticos como función del potencial de velocidad y de sus derivadas según dichos parámetros en el caso de oscilaciones armónicas y pequeños números de Strouhal.

9.89. Como vemos en las fórmulas (9.608) y (9.609) las derivadas del coeficiente de diferencia de presiones por los parámetros cinemáticos dependen de las derivadas $\partial F^{q_j}/\partial\xi_M$ y $\partial F^{\dot q_j}/\partial\xi_M$. Consideren el cálculo de estas derivadas teniendo en cuenta la división de la región de influencia de las fuentes en células de pequeñas dimensiones en coordenadas características.

9.90. Por los resultados de la solución del problema 9.87 hallen las derivadas $F^{\omega_z} = \partial F^{\omega_z}/\partial\xi_M$ y $p^{\dot\omega_z} = \partial p/\partial\dot\omega_z$.

9.91. Determinen las derivadas p^{q_j} y $p^{\dot q_j}$ en el punto A ($x = 2{,}86$ m; $z = 0$) de un ala triangular en movimiento de avance sin balanceo, girando al mismo tiempo alrededor del eje transversal a velocidad angular variable. Hagan uso de la solución del problema 9.84 acerca de la determinación de las deflexiones (del flujo) en un ala (véase la fig. 9.35) con bordes de ataque supersónicos para el número $M_\infty = 2$.

9.92. Según los resultados en la solución del problema 9.73, para $M_\infty = 2$ en el punto A ($x = 2{,}86$ m; $z = 0$) de un ala triangular (fig. 9.35) calculen las derivadas p^{α} y $p^{\dot\alpha}$. El ángulo de flecha $\chi = 45°$, la cuerda de raíz $b_0 = 5$ m.

9.93. Para $M_\infty = 2$ hallen las derivadas del coeficiente de caída de la presión por α, $\dot{\alpha}$, ω_x, $\dot{\omega}_x$, ω_z y $\dot{\omega}_z$ para un ala rectangular de envergadura infinita y anchura $b_0 = 4$ m en el punto A ($x = z = 2$ m).

9.94. Calculen las derivadas de los coeficientes de la caída de presión (p^α, p^{ω_z}, $p^{\dot{\alpha}}$) en el punto D ($x = 3$ m; $z = -1,6$ m) situado entre el borde lateral de un ala rectangular y la línea de Mach que sale del comienzo del borde lateral (véase la fig. 9.30). La envergadura del ala $l = 8$ m; la cuerda $b_0 = 4$ m; el número $M_\infty = 2$.

9.95. Determinen las derivadas F^α, $F^{\dot{\alpha}}$, p^α, $p^{\dot{\alpha}}$ para $M_\infty = 1,25$ en los puntos A de un ala hexagonal en diversas zonas de la circulación (véase la fig. 9.31). En esta ala la cuerda de raíz $b_0 = 5$ m; la cuerda de extremo $b_e = 2$ m; la envergadura $l = 6$ m; la tangente del ángulo de flecha del borde de ataque tg $\chi_0 = 0,5$. Las coordenadas del punto A (m): zona I — $x = 1,5$, $z = 2,25$; zona II — $x = 2,5$, $z = 1$; zona III — $x = 1,9$, $z = 2,75$; zona IV — $x = 3$, $z = 1,5$; zona V — $x = 4$, $z = 1,5$; zona VI — $x = 4,5$, $z = 0,75$; zona VII — $x = 4,25$, $z = 0$; zona VIII — $x = 4,75$, $z = 0$.

9.96. Calculen las derivadas p^α y $p^{\dot{\alpha}}$ en los puntos A situados en cuatro zonas características de la circulación supersónica ($M_\infty = 1,25$) alrededor de un ala rectangular de anchura $b_0 = 12$ m y largura $l = 6$ m. Las coordenadas del punto A (m) son: zona I — $x = 2,5$, $z = 1$; zona II — $x = 1$, $z = 3$; zona III — $x = 5,5$, $z = 4$; zona IV — $x = 10$, $z = 4$.

9.97. Hallen las dependencias generales para las derivadas de los coeficientes de la fuerza de sustentación y de los momentos de balanceo y cabeceo, si son conocidas la distribución de la función F^{q_j}, así como las derivadas $\partial F^{q_j}/\partial \xi_M$ y $\partial F^{\dot{q}_j}/\partial \xi_M$.

9.98. Calculen las derivadas de los coeficientes aerodinámicos de un ala rectangular de envergadura infinita y anchura $b_0 = 4$ m para $M_\infty = 2$.

9.99. Empleando las relaciones (9.734)—(9.739) hallen las correspondientes dependencias para las derivadas de los coeficientes aerodinámicos de las secciones del ala reducidas a su anchura.

9.100. Determinen las derivadas aerodinámicas $c_y'^\alpha$; $c_y'^{\dot{\alpha}}$; $m_z'^\alpha$; $m_z'^{\dot{\alpha}}$ para dos secciones de un ala triangular ($z_1 = 0,125\ l$ y $z_2 = 0,375\ l$) alrededor de la cual circula un flujo supersónico para $M_\infty = 2$. La cuerda de raíz del ala $b_0 = 5$ m; el ángulo de flecha $\chi = 45°$.

9.101. Para dos secciones, situadas a las distancias $z_1 = -0,45$ m y $z_2 = -1,5$ m del borde lateral de un ala rectangular, calculen las derivadas F^α, $F^{\dot{\alpha}}$. La anchura del ala $b_0 = 1,5$ m, el número $M_\infty = 1,5$.

9.102. Para un ala triangular alrededor de la cual circula un flujo inuniforme supersónico con $M_\infty = 2$, calculen las derivadas c_y^α y $c_y^{\dot{\alpha}}$. La cuerda de raíz del ala $b_0 = 5$ m, el ángulo de flecha $\chi = 45°$.

9.103. Calculen las derivadas de la estabilidad de un ala triangular con alargamiento $\lambda_{ala} = 2,5$ durante la circulación inuniforme alrededor de ella de un flujo supersónico $M_\infty = 1,28$. Determinen el tipo de los bordes del ala que corresponda al número M_∞ prefijado.

9.104. En el problema 9.103 las derivadas aerodinámicas están calculadas para las condiciones cuando el origen de coordenadas se encuentra en el borde de ata-

que de la cuerda aerodinámica media. Efectúen el recálculo de estas derivadas para el caso en que la posición del centro de gravedad coincide con el borde de ataque de la cuerda de raíz.

9.105. Las derivadas calculadas en el problema 9.104 están reducidas a la cuerda aerodinámica media b_A. Hallen las correspondientes derivadas recalculadas para la cuerda de raíz del ala b_0.

9.106. Haciendo uso del método de las cuñas tangentes determinen las derivadas de la estabilidad para alas de forma rectangular y triangular. El número $M_\infty = 1{,}28$, el alargamiento de las alas $\lambda_{ala} = 2{,}5$. Comparen los valores obtenidos con los resultados precisos para el ala triangular (véanse las soluciones de los problemas 9.103 y 9.104.)

9.107. De la comparación de las derivadas obtenidas en el problema 9.106 se desprende que tanto para un ala triangular, como para una placa rectangular de envergadura finita, el método de las cuñas tangentes proporciona resultados que divergen considerablemente de las soluciones precisas. Consideren las condiciones de circulación con las que este método coincide con las soluciones precisas o da resultados próximos a ellas.

9.108. Empleando los datos de la teoría linealizada, determinen las derivadas de la estabilidad con $M_\infty = 2{,}1$ para un ala delgada con ahusamiento $\eta_{ala} = 5$, alargamiento $\lambda_{ala} = 2{,}3$ y ángulo de flecha del borde de ataque $\chi_0 = 60°$. Las derivadas deben reducirse a la cuerda de raíz del ala por la que se calculan los coeficientes de cabeceo y los parámetros cinemáticos $\dot{\bar{\alpha}}$, ω_z; el origen de coordenadas (centro de reducción) coincide con el vértice del ala. Las derivadas del coeficiente del momento de balanceo deben ser halladas según la envergadura l, en tanto que el parámetro cinemático ω_x, según el valor de la semienvergadura $0{,}5\ l$. Comparen las derivadas obtenidas con sus correspondientes valores calculados con el método de las cuñas tangentes. Determinen cuales serán los bordes de ataque y de salida (supersónicos o subsónicos) para el número de Mach prefijado.

9.109. Calculen las derivadas aerodinámicas de un ala delgada rectangular de envergadura finita alrededor de la cual circula un flujo inuniforme supersónico, siendo pequeños los números de Strouhal. El alargamiento del ala $\lambda_{ala} = 2{,}5$; su anchura $b_0 = 2$ m; el número $M_\infty = 1{,}25$. Determinen las partes componentes de las derivadas correspondientes a un ala de envergadura finita y estimen la influncia del alargamiento sobre estas derivadas.

9.110. Analicen, en caso de pequeños números de Strouhal, la circulación inuniforme alrededor de un ala triangular inversa con bordes de salida supersónicos. Calculen las derivadas de los coeficientes aerodinámicos de dos secciones con la cuerda de raíz y la aerodinámica media, así como las derivadas totales del ala con alargamiento $\lambda_{ala} = 4$ y $M_\infty = 1{,}5$.

9.111. Hallen las derivadas de las características aerodinámicas de un ala triangular directa con ayuda del correspondiente recálculo de dichas derivadas para el ala triangular inversa alrededor de la cual circula un flujo no estacionario supersónico con pequeños números de Strouhal. Calculen las derivadas del ala triangular directa con alargamiento $\lambda_{ala} = 4$ para $M_\infty = 1{,}5$.

9.112. Calculen las derivadas aerodinámicas de un ala en flecha con bordes de ataque y de salida supersónicos para $M_\infty = 1{,}5$ y números de Strouhal infinitamente grandes. En tal ala la cuerda de raíz $b_0 = 5$ m; la cuerda de extremo $b_e = 2$ m; la envergadura $l = 6$ m; la tangente del ángulo de flecha del borde de ataque $\operatorname{tg} \chi_0 = 0{,}5$.

9.113. Determinen las derivadas aerodinámicas de un ala triangular directa con alargamiento $\lambda_{ala} = 4$ para $M_\infty = 1,5$ y números muy grandes de Strouhal.

9.114. Calculen las derivadas aerodinámicas de un ala triangular delgada para $M_\infty = 1,5$ y $M_\infty = 2,2$, empleando las correspondientes dependencias de la teoría linealizada. El ángulo de flecha de los bordes de ataque $\chi = 60°$; la posición de los ejes de coordenadas, respecto de los cuales se determinan los coeficientes aerodinámicos, se muestra en la fig. 9.47 (el origen de coordenadas se encuentra en el centro de gravedad del área del ala). Recalculen las derivadas para el centro de rotación que coincide con el vértice del ala. Sin variar la posición del centro de rotación hallen las derivadas respecto del nuevo centro de momentos, situado en ese mismo vértice.

9.115. Empleando las relaciones de la teoría aerodinámica de los cuerpos delgados, determinen las derivadas de la estabilidad de un ala triangular (véase la fig. 9.37). Los ejes de coordenadas se muestran en la fig. 9.48. El ángulo de flecha de los bordes de ataque del ala $\chi = 60°$. Comparen las derivadas obtenidas con los correspondientes valores hallados con ayuda de la teoría linealizada.

9.116. Con los datos en las soluciones de los problemas 9.114 y 9.115 determinen para un ala triangular la posición de los centros de presión para las fuerzas condicionadas por un pequeño ángulo de ataque, la velocidad angular Ω_z, así como por las derivadas $\dot{\omega}_z = \dot{\Omega}_z l_{ala}^2/(2V_\infty^2)$ y $\dot{\bar{\alpha}} = \dot{\alpha} l_{ala}/(2V_\infty)$.

9.117. Determinen las derivadas de la estabilidad de un ala cruciforme triangular, para lo cual se hace uso de la teoría aerodinámica del cuerpo delgado. El ángulo de flecha de los bordes de ataque del ala $\chi = 60°$.

9.118. Calculen las derivadas mixtas de los coeficientes aerodinámicos de un ala cruciforme (véase al problema 9.117) y analicen su sentido físico. Hallen las coordenadas de los puntos de aplicación de las correspondientes fuerzas aerodinámicas.

Solución de los problemas y respuestas a las preguntas

9.1. Representemos la fuerza aerodinámica en forma de la dependencia funcional $R = f(\alpha, \beta, l, V, p, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \rho, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z, \dot{\Omega}_x, \dot{\Omega}_y, \dot{\Omega}_z)$, donde l es la dimensión característica; V, la velocidad del vehículo volante.

La dependencia aducida puede sustituirse por la expresión

$$R = K l^x V^y p^z \rho^m \alpha^r \beta^e \dot{\alpha}^n \dot{\beta}^q \Omega_x^t \Omega_y^s \Omega_z^u \dot{\Omega}_x^c \dot{\Omega}_y^d \dot{\Omega}_z^g,$$

donde K es cierto coeficiente numérico.

La dimensión del parámetro dependiente R y de las variables independientes es la siguiente:

$[R] = [ML\,T^{-2}]$ [fuerza = masa × aceleración];
$[l] = [L]$ [longitud];
$[V] = (LT^{-1}]$ [velocidad-longitud: tiempo];
$[\rho] = [ML^{-3}]$ [densidad-masa: volumen];
$[\alpha] = [\beta] = [M^0L^0T^0]$ [variables adimensionales];
$[\dot{\alpha}] = [\dot{\beta}] = [T^{-1}]$ [derivada = 1: tiempo];
$[\Omega_x] = [\Omega_y] = [\Omega_z] = [T^{-1}]$ [velocidad = 1: tiempo];
$[\dot{\Omega}_x] = [\dot{\Omega}_y] = [\dot{\Omega}_z] = [T^{-2}]$ [derivada = (1 : tiempo) : tiempo].

Introducimos estas dimensiones en la fórmula para R:

$$[MLT^{-2}] = [L]^x [LT^{-1}]^y [ML^{-1}T^{-2}]^z [ML^{-3}]^m [T^{-1}]^n \times \times [T^{-1}]^q [T^{-1}]^t [T^{-1}]^s [T^{-1}]^u [T^{-2}]^c [T^{-2}]^d [T^{-2}]^g.$$

Confeccionemos las ecuaciones para determinar los exponentes de las potencias:

$$[M] \to 1 = z + m; \quad [L] \to 1 = x + y - z - 3m;$$
$$[T] \to -2 = -y - 2z - n - q - t - s - u - 2c - 2d - 2g.$$

Aquí tenemos 12 incógnitas y sólo 3 ecuaciones, por lo que no podemos obtener una solución general para todas las incógnitas. En tal caso, expresamos tres incógnitas como funciones de las demás:

$$x = 2 + n + q + t + s + u + 2c + 2d + 2g;$$
$$y = 2 - 2z - n - q - t - s - u - 2c - 2d - 2g; \quad m = 1 - z.$$

Empleando estos valores obtenemos la fórmula para R en la que agrupamos los exponentes:

$$R = K\rho V^2 l^2 \alpha^r \beta^e ([(p/\rho)/V^2]^z (\dot{\alpha} l/V)^n (\dot{\beta} l/V)^q \times \times (\Omega_x l/V)^t (\Omega_y l/V)^s (\Omega_z l/V)^u (\dot{\Omega}_x l^2/V^2)^c (\dot{\Omega}_y l^2/V^2)^d (\dot{\Omega}_z l^2/V^2)^g.$$

Como los exponentes r, e, z, n, . . . son incógnitos, introduciendo la función adimensional f e incluyendo en ella la constante K, obtenemos

$$R = (\rho V^2/2) S f (\alpha, \beta, \mathbf{M}_\infty, \bar{\dot{\alpha}}, \bar{\dot{\beta}}, \omega_x, \omega_y, \omega_z, \dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z), \tag{9.1}$$

donde se han introducido los parámetros adimensionales: $\mathbf{M}_\infty = [(kp/\rho)/V^2]^{-1/2}$, el número de Mach del flujo incidente; $\bar{\dot{\alpha}} = \dot{\alpha} l/V$; $\bar{\dot{\beta}} = \dot{\beta} l/V$; $\omega_x = \Omega_x l/V$; $\omega_y = \Omega_y l/V$; $\omega_z = \Omega_z l/V$; $\dot{\omega}_x = \dot{\Omega}_x l^2/V^2$; $\dot{\omega}_y = \dot{\Omega}_y l^2/V^2$; $\dot{\omega}_z = \dot{\Omega}_z l^2/V^2$.

En la fórmula para R se ha introducido el área característica S de dimensión $[L^2]$. La función f determina el coeficiente de la fuerza aerodinámica que, por lo visto, depende no sólo del número $\mathbf{M}_\infty$ de los ángulos de ataque y de deslizamiento, sino también de los parámetros adimensionales $\bar{\dot{\alpha}}$, $\bar{\dot{\beta}}$, ω_x, ω_y, ω_z, $\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_y$, $\dot{\omega}_z$ condicionados por la circulación no estacionaria.

9.2. De acuerdo con el planteamiento del problema el movimiento del vehículo volante en el plano longitudinal (cabeceo) se determina por el ángulo de ataque α, la velocidad del movimiento de avance V, la velocidad angular Ω_z, las derivadas $\dot{\alpha} = d\alpha/dt$, $\dot{V} = dV/dt$, $\dot{\Omega}_z = d\Omega_z/dt$, así como por la presión p y la densidad ρ del aire a la altura prefijada. Teniendo esto en cuenta, el momento de cabeceo

$$M_z = f (\dot{\alpha}, \alpha, l, V, \dot{V}, p, \rho, \Omega_z, \dot{\Omega}_z).$$

Sustituyamos esta función por una dependencia exponencial

$$M_z = F l^x V^y p^z \rho^m \alpha^r \dot{\alpha}^n \dot{V}^t \Omega_z^s \dot{\Omega}_z^u,$$

donde F es cierto coeficiente numérico; l, la dimensión característica.

Consideremos las dimensiones del parámetro dependiente (M_z) y de las variables independentes (l, V, p, . . .):

$$[M_z] = [ML^2T^{-2}] \text{ [fuerza} \times \text{longitud]};$$
$$[l] = [L];\ [V] = [LT^{-1}];\ [\dot{V}] = [LT^{-2}];$$
$$[p] = [ML^{-1}T^{-2}];\ [\rho] = [ML^{-3}];$$
$$[\alpha] = [M^0L^0T^0] \text{ [parámetro adimensional]};$$
$$[\dot{\alpha}] = [\Omega_z] = [T^{-1}];\ [\dot{\Omega}_z] = [T^{-2}].$$

En correspondencia con la dependencia exponencial para M_z

$$[ML^{-2}T^{-2}] = F\,[L]^x\,[LT^{-1}]^y\,[ML^{-1}T^{-2}]^z\,[ML^{-3}]^m \times$$
$$\times\,[T^{-1}]^n\,[LT^{-2}]^t\,[T^{-1}]^s\,[T^{-2}]^u.$$

De aquí hallamos las ecuaciones para calcular los exponentes de las potencias

$$[M] \to 1 = z + m;\quad [L] \to 2 = x - y - z - 3m + t;$$
$$[T] \to -2 = -y - 2z - n - 2t - s - 2u.$$

Expresemos las variables conocidas x, y, m como las funciones $x = 3 + n + t + s + 2u$; $y = 2 - 2z - n - 2t - s - 2u$; $m = 1 - z$.

Tomando en consideración estos valores hallamos la expresión para M_z de la que, como resultado de la agrupación de los exponentes de las potencias, obtenemos

$$M_z = F\rho V^2 l^3\,[(p/\rho)/V^2]^z \alpha^r\,(\dot{\alpha} l/V)^n\,(\dot{V}\,l/V^2)^t\,(\Omega_z\,l/V)^s\,(\dot{\Omega}_z\,l^2/V^2)^u.$$

Introduciendo el área característica $[S] = [l^2] = [L^2]$ e incluyendo la constante F en la función f, tenemos

$$M_z = 0{,}5\rho V^2 S l f\,(\alpha,\ \mathrm{M}_\infty,\ \dot{\bar{\alpha}},\ \dot{\bar{V}},\ \omega_z,\ \dot{\omega}_z), \tag{9.2}$$

donde $\dot{\bar{V}} = \dot{V}\,l/V^2$.

9.3. Al investigar el movimiento de los vehículos volantes, caracterizado por una pequeña variación de los parámetros cinemáticos, los coeficientes aerodinámicos se representan en forma de una serie de Taylor en la que pueden conservarse los términos del segundo orden de pequeñez. Suponiendo que los números M_∞ y Re_∞ están fijados, transformemos, en particular, dicha serie para el coeficiente de la fuerza normal:

$$c_y = c_{y0} + c_y^{\alpha}\Delta\alpha + c_y^{\beta}\Delta\beta + c_y^{\delta_d}\Delta\delta_d + c_y^{\delta_a}\Delta\delta_a + c_y^{\delta_{al}}\Delta\delta_{al} +$$
$$+ c_y^{\omega_x}\Delta\omega_x + c_y^{\omega_y}\Delta\omega_y + c_y^{\omega_z}\Delta\omega_z + c_y^{\dot{\bar{\alpha}}}\Delta\dot{\bar{\alpha}} + c_y^{\dot{\bar{\beta}}}\Delta\dot{\bar{\beta}} +$$
$$+ c_y^{\dot{\bar{\delta}}_d}\Delta\dot{\bar{\delta}}_d + c_y^{\dot{\bar{\delta}}_a}\Delta\dot{\bar{\delta}}_a + c_y^{\dot{\bar{\delta}}_{al}}\Delta\dot{\bar{\delta}}_{al} + c_y^{\dot{\omega}_x}\Delta\dot{\omega}_x + c_y^{\dot{\omega}_y}\Delta\dot{\omega}_y +$$
$$+ c_y^{\dot{\omega}_z}\Delta\dot{\omega}_z + 0{,}5c_y^{\mathrm{M}_\infty\alpha}\Delta\mathrm{M}_\infty\Delta\alpha + 0{,}5c_y^{\alpha\beta}\Delta\alpha\Delta\beta + \ldots +$$
$$+ 0{,}5c_y^{\beta\omega_x}\Delta\beta\Delta\omega_x + \ldots + 0{,}5c_y^{\omega_x\omega_y}\Delta\omega_x\Delta\omega_y + \ldots, \tag{9.3}$$

donde δ_d, δ_a, δ_{al} son los ángulos de giro de los timones de dirección, altura y de los alerones respectivamente; $\bar{\dot{\delta}}_d = (d\delta_d/dt)\ l/V$; $\bar{\dot{\delta}}_a = (d\bar{\delta}_a/dt)\ l/V$; $\dot{\delta}_{al} = (d\delta_{al}/dt)\ l/V$, las derivadas; el resto de las anotaciones se han dado más arriba.

1. En la expresión (9.3) c_y^α, c_y^β, $c_y^{\delta_d}$, $c_y^{\alpha\beta}$,. . . son derivadas estáticas y $c_y^{\bar{\dot{\omega}}_x}$, $c_y^{\bar{\dot{\alpha}}}$, $c_y^{\bar{\dot{\delta}}_d}$, derivadas dinámicas de la estabilidad.

2. Las derivadas parciales del coeficiente c_y por una de las variables ω_x, ω_y, ω_z constituyen el grupo de las derivadas rotativas $c_y^{\omega_x}$, $c_y^{\omega_y}$, $c_y^{\omega_z}$. En este grupo también se incluyen las derivadas análogas $c_y^{\bar{\dot{\alpha}}}$, $c_y^{\bar{\dot{\beta}}}$, $c_y^{\bar{\dot{\delta}}_d}$; $c_y^{\dot{\omega}_x}$, $c_y^{\dot{\omega}_y}$, $c_y^{\dot{\omega}_z}$ que son las derivadas según la aceleración.

3. Si las perturbaciones no estacionarias son grandes la *no linealidad*, caracterizada por las derivadas de la estabilidad de segundo orden $c_y^{\alpha\beta}$, $c_y^{\alpha\omega_x}$, $c_y^{\alpha\omega_z}$, etc., se convierte en la singularidad esencial.

9.4. En una serie de casos, al estudiar los coeficientes aerodinámicos, tiene importancia práctica parte de las derivadas de la estabilidad, entre las cuales las de segundo orden pueden constituir un pequeño número. Durante el cabeceo el coeficiente de la fuerza normal

$$c_y = c_{y0} + c_y^\alpha \alpha + c_y^{\delta_{al}} \delta_{al}, \tag{9.4}$$

donde c_{y0} es el valor de c_y con $\alpha = \delta_{al} = 0$.

Durante la guiñada el coeficiente de la fuerza transversal

$$c_z = c_z^\beta \beta + c_z^{\delta_d} \delta_d. \tag{9.5}$$

Los coeficientes del momento de cabeceo y de guiñada

$$m_z = m_{z0} + m_z^\alpha \alpha + m_z^{\delta_d} \delta_d + m_z^{\omega_z} \omega_z + m_z^{\dot{\omega}_z} \dot{\omega}_z + m_z^{\bar{\dot{\delta}}_a} \bar{\dot{\delta}}_a; \tag{9.6}$$

$$m_y = m_y^\beta \beta + m_y^{\delta_d} \delta_d + m_y^{\omega_x} \omega_x + m_y^{\omega_y} \omega_y + m_y^{\bar{\dot{\beta}}} \bar{\dot{\beta}} + m_y^{\bar{\dot{\delta}}_d} \bar{\dot{\delta}}_d. \tag{9.7}$$

El coeficiente del momento de balanceo

$$m_x = m_x^\beta \beta + m_x^{\delta_d} \delta_d + m_x^{\delta_{al}} \delta_{al} + m_x^{\alpha\beta} \alpha\beta + m_x^{\alpha\delta_d} \alpha\delta_d + m_x^{\beta\delta_a} \beta\delta_a + \\ + m_x^{\omega_x} \omega_x + m_x^{\omega_y} \omega_y + m_x^{\alpha\omega_y} \alpha\omega_y + m_x^{\beta\omega_z} \beta\omega_z. \tag{9.8}$$

9.5. Representemos el coeficiente de momento de cabeceo en la forma

$$m_z = m_{z0} + m_z^\alpha \alpha + m_z^{\bar{\dot{\alpha}}} \bar{\dot{\alpha}} + m_z^{\omega_z} \omega_z + m_z^{\dot{\omega}_z} \dot{\omega}_z. \tag{9.9}$$

Tomemos la ley armónica de variación de los parámetros cinemáticos: $\alpha = \alpha_0 \cos p_\alpha t$; $\Omega_z = \Omega_{z0} \cos p_{\Omega_z} t$.

Pongamos en esas expresiones el tiempo adimencional $\tau = tV/l$:

$$\alpha = \alpha_0 \cos p_\alpha^* \tau; \quad \Omega_z = \Omega_{z0} \cos p_{\Omega_z}^* \tau,$$

donde los correspondientes números de Strouhal $p_\alpha^* = p_\alpha l/V$; $p_{\Omega_z}^* = p_{\Omega_z} l/V$.

Derivemos α y Ω_z por τ:

$$d\alpha/d\tau = \dot{\bar{\alpha}} = -\alpha_0 p_\alpha^* \operatorname{sen} p_\alpha^* \tau;$$
$$d\omega_z/d\tau = \dot{\omega}_z = -\omega_{z0} p_{\Omega_z}^* \operatorname{sen} p_{\Omega_z}^* \tau,$$

donde $\omega_{z0} = \Omega_{z0}\, l/V$.

Tomando en consideración las expresiones para $\dot{\bar{\alpha}}$, α y $\dot{\omega}_z$ el coeficiente del momento de cabeceo

$$m_z = m_{z0} + \alpha_0 (m_z^\alpha \cos p_\alpha^* \tau - m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} p_\alpha^* \operatorname{sen} p_\alpha^* \tau) +$$
$$+ \omega_{z0} (m_z^{\omega_z} \cos p_{\Omega_z}^* \tau - m_z^{\dot{\omega}_z} \omega_{z0} p_{\Omega_z}^* \operatorname{sen} p_{\Omega_z}^* \tau). \qquad (9.10)$$

9.6. Las derivadas estáticas c_y^α, c_z^β caracterizan la propiedad del vehículo volante de variar las fuerzas normal y transversal en función de los ángulos de ataque y deslizamiento. Las derivadas estáticas de segundo orden $c_x^{\alpha^2}$, $c_x^{\beta^2}$ determinan el incremento adicional de la fuerza longitudinal provocado por la desviación del vehículo a los ángulos α y β.

Las derivads estáticas m_z^α, m_y^β, m_x^β caracterizan una propiedad tan importante del vehículo volante como la *rigidez* de sus movimientos longitudinal, lateral y transversal, respectivamente.

9.7. Las derivadas estáticas $c_y^{\delta_d}$, $c_z^{\delta_a}$ caracterizan la propiedad del vehículo volante controlado de variar las fuerzas normal y transversal en función de la deflexión de los timones de altura δ_a y de dirección δ_d. Las derivadas estáticas de segundo orden $c_x^{\delta_a^2}$, $c_x^{\delta_d^2}$ determinan el incremento adicional de la fuerza longitudinal provocado por la acción directriz de los timones de altura y dirección.

Las derivadas $c_x^{\alpha\delta_a}$, $c_x^{\beta\delta_d}$ caracterizan la influencia que ejercen sobre la fuerza longitudinal la interacción de los ángulos de ataque, propiamente dichos, y la deflexión de los timones de altura, así como los ángulos de deslizamiento y giro de los timones de dirección. De acuerdo con esto, en la expresión para el coeficiente de la fuerza longitudinal, representado como una serie de Taylor, $c_x^{\alpha\delta_a}$, $c_x^{\beta\delta_d}$ llevan el nombre de términos de interacción. Las derivadas $m_z^{\delta_a}$, $m_y^{\delta_d}$, $m_x^{\delta_d}$, $m_x^{\delta_{al}}$ caracterizan la eficiencia de los correspondientes controles (mandos) (por el cabeceo, guiñada y balanceo).

9.8. Las derivadas rotativas actúan sobre el movimiento como *parámetros de amortiguamiento* y se denominan, respectivamente, coeficientes de amortiguamiento longitudinal $m_z^{\omega_z}$, $m_z^{\dot{\bar{\alpha}}}$, $m_z^{\dot{\delta}_a}$, de amortiguamiento de la guiñada $m_y^{\omega_y}$, $m_y^{\dot{\bar{\beta}}}$, $m_y^{\dot{\bar{\delta}}_d}$ y de amortiguamiento del cabeceo $m_x^{\omega_x}$.

9.9. Las derivadas $m_y^{\omega_x}$, $m_x^{\omega_y}$ reciben el nombre de *coeficientes de los momentos espirales de guiñada y de balanceo*, respectivamente. El surgimiento de estos momentos está condicionado por el hecho de que el vehículo volante, en desplazamiento de avance, gira, simultáneamente, alrededor de los ejes Ox y Oy conservando, al mismo tiempo, el movimiento por una espiral. La investigación de este movimiento está relacionada con el cálculo de las indicadas derivadas espirales.

9.10. El movimiento de avance de un vehículo volante bajo los ángulos de ataque y deslizamiento puede acompañarse de su rotación alrededor del eje longitudinal. Tal movimiento condiciona el efecto de Magnus que consiste en la aparición de fuerzas y momentos proporcionales a los productos $\alpha\Omega_x$ y $\beta\Omega_x$, con la particularidad de que el sentido de las fuerzas coincide con la normal al plano en el que se miden los ángulos α y β. Las correspondientes segundas derivadas de los coeficientes aerodinámicos $c_y^{\alpha\omega_x}$, $m_z^{\alpha\omega_x}$, $c_z^{\beta\omega_x}$, $m_y^{\beta\omega_x}$ llevan el nombre de *derivadas de estabilidad de Magnus.*

El surgimiento de un grupo más de fuerzas y momentos está ligado con la rotación simultánea del vehículo alrededor de dos ejes y tiene carácter giroscópico. Las fuerzas y los momentos giroscópicos son proporcionales al producto de dos velocidades angulares. P. ej., durante la rotación simultánea alrededor de los ejes Ox y Oy dichas fuerzas y momentos adicionales son proporcionales al producto de las velocidades angulares $\Omega_x\Omega_y$, en tanto que los correspondientes coeficientes aerodinámicos, al producto de los parámetros cinemáticos adimensionales $\omega_x\omega_y$. Por esta razón, las derivadas de los coeficientes $c_y^{\omega_x\omega_y}$, $m_z^{\omega_x\omega}$ y otros según $\omega_x\omega_y$, reciben el nombre de *derivadas giroscópicas de la estabilidad.*

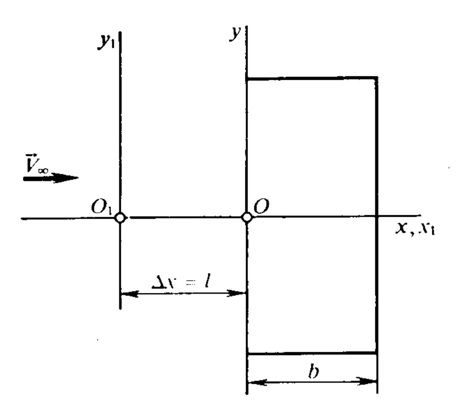


Fig. 9.9. Esquema de un ala rectangular

9.11. En la fig. 9.9 se muestra el punto O en el borde de ataque de un ala rectangular que es el centro de reducción de las fuerzas y centro de rotación (punto con relación al cual se determinan los parámetros cinemáticos).

1. Efectuamos el recálculo de las derivadas aerodinámicas en el nuevo centro de reducción O_1, separado del punto O a la distancia $\Delta x = b$, a condición de que los parámetros cinemáticos se calculan con relación al antiguo origen (punto O):

$$c_{y1}^{\alpha} = c_y^{\alpha} = 4{,}0; \quad c_{y1}^{\dot{\bar{\alpha}}} = c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = -1{,}0; \quad c_{y1}^{\omega_z} = c_y^{\omega_z} = 3{,}0; \quad c_{y1}^{\dot{\omega}_z} = c_y^{\dot{\omega}_z} = -1{,}0;$$

$$m_{z1}^{\alpha} = m_z^{\alpha} - c_y^{\alpha}(\Delta x/b) = -4{,}96; \quad m_{z1}^{\dot{\bar{\alpha}}} = m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} - c_y^{\dot{\bar{\alpha}}}(\Delta x/b) = 0{,}9;$$

$$m_{z1}^{\omega_z} = m_z^{\omega_z} - c_y^{\omega_z}(\Delta x/b) = -4{,}1; \quad m_{z1}^{\dot{\omega}_z} = m_z^{\dot{\omega}_z} - c_y^{\dot{\omega}_z}(\Delta x/b) = 1{,}03.$$

2. Consideremos el caso cuando los parámetros cinemáticos se calculan para el nuevo origen (punto O_1) y el centro de reducción queda en el punto O:

$$c_{y1}^{\alpha} = c_y^{\alpha} = 4{,}0; \quad c_{y1}^{\dot{\bar{\alpha}}} = c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = -1{,}0; \quad c_{y1}^{\omega_z} = c_y^{\omega_z} + c_y^{\alpha}(\Delta x/b) = 7{,}0;$$

$$c_{y1}^{\dot{\omega}_z} = c_y^{\dot{\omega}_z} + c_y^{\dot{\bar{\alpha}}}(\Delta x/b) = -2{,}0; \quad m_{z1}^{\alpha} = m_z^{\alpha} = -0{,}96; \quad m_{z1}^{\dot{\bar{\alpha}}} = m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} = -0{,}1;$$

$$m_{z1}^{\omega_z} = m_z^{\omega_z} + m_z^{\alpha}(\Delta x/b) = -2{,}06; \quad m_{z1}^{\dot{\omega}_z} = m_z^{\dot{\omega}_z} + m_z^{\dot{\bar{\alpha}}}(\Delta x/b(= -0{,}07.$$

3. Hagamos el recálculo de las derivadas aerodinámicas para el caso cuando los parámetros cinemáticos se toman para el nuevo punto O_1 que coincide con el punto

de reducción de las fuerzas:

$$c_{y2}^{\alpha} = c_y^{\alpha} = 4{,}0;\quad c_{y2}^{\dot{\alpha}} = c_y^{\dot{\alpha}} = -1{,}0;\quad c_{y2}^{\omega_z} = c_y^{\omega_z} + c_y^{\alpha}(\Delta x/b) = 7{,}0;$$

$$c_{y2}^{\dot{\omega}_z} = c_y^{\dot{\omega}_z} + c_y^{\dot{\alpha}}(\Delta x/b) = -2{,}0;\quad m_{z2}^{\alpha} = m_z^{\alpha} - c_y^{\alpha}(\Delta x/b) = -4{,}96;$$

$$m_{z2}^{\dot{\alpha}} = m_z^{\dot{\alpha}} - c_y^{\alpha}(\Delta x/b) = 0{,}9;$$

$$m_{z2}^{\omega_z} = m_z^{\omega_z} + (\Delta x/b)(m_z^{\alpha} - c_y^{\omega_z}) - (\Delta x/b)^2 c_y^{\alpha} = -0{,}96;$$

$$m_{z2}^{\dot{\omega}_z} = m_z^{\dot{\omega}_z} + (\Delta x/b)(m_z^{\dot{\alpha}} - c_y^{\dot{\omega}_z}) - (\Delta x/c)^2 c_y^{\dot{\alpha}} = 0{,}13.$$

Si el punto O_1 de recálculo está desviado no hacia adelante sino hacia atrás, en las relaciones aducidas se debe tomar la variable Δx con signo contrario, es decir, $\Delta x = -b$ $(\Delta x/b = -1)$.

9.12. La determinación de las derivadas aerodinámicas está relacionada con la descomposición del movimiento del vehículo en los movimientos longitudinal y lateral. La posibilidad de semejante descomposición está condicionada por la simetría del vehículo volante respecto de su eje longitudinal. A su vez, el movimiento longitudinal se compone del desplazamiento de avance del centro de masas en el plano vertical de vuelo y la rotación alrededor del eje transversal Oz. En caso de semejante movimiento se asegura buena estabilización de balanceo y la variación de los ángulos de deslizamiento y de balanceo; las velocidades angulares ω_x, ω_y pueden considerarse despreciablemente pequeñas (los controles de balanceo y guiñada, prácticamente, no se desvían).

Durante el movimiento lateral en sentido del eje Oz se desplaza el centro de masas y el vehículo sufre rotación con relación a los ejes Ox, Oy (con esto, trabajan los timones que aseguran la guiñada y el balanceo).

Al investigar el movimiento longitudinal en el régimen de control, los coeficientes aerodinámicos se examinan en forma de las funciones

$$\left.\begin{aligned} &c_x = c_x(\mathrm{M}_\infty, \alpha, \delta_a);\quad c_y = c_y(\mathrm{M}_\infty, \alpha, \delta_a);\quad c_z = 0\\ &m_x = 0;\quad m_z = m_z(\mathrm{M}_\infty, \alpha, \delta_a, \dot{\alpha}, \dot{\delta}_a). \end{aligned}\right\} \tag{9.11}$$

Con los timones fijados

$$\left.\begin{aligned} &c_x = c_x(\mathrm{M}_\infty, \alpha);\quad c_y = c_y(\mathrm{M}_\infty, \alpha);\quad c_z = 0;\\ &m_x = 0;\quad m_z = m_z(\mathrm{M}_\infty, \alpha, \dot{\alpha}). \end{aligned}\right\} \tag{9.12}$$

Para estudiar el movimiento lateral en el régimen de control es posible emplear las dependencias

$$\left.\begin{aligned} &c_y = c_y(\mathrm{M}_\infty, \alpha, \delta_a);\quad c_z = c_z(\mathrm{M}_\infty, \beta, \delta_d);\\ &m_x = m_x(\mathrm{M}_\infty, \alpha, \beta, \delta_a, \delta_d, \delta_{al}, \omega_x, \omega_y, \omega_z);\\ &m_y = m_y(\mathrm{M}_\infty, \beta, \delta_d, \omega_x, \omega_y, \dot{\beta}, \dot{\delta}_d). \end{aligned}\right\} \tag{9.13}$$

En el caso de vuelo no controlado (los timones están fijados)

$$\left.\begin{aligned} &c_y = c_y(\mathrm{M}_\infty, \alpha);\quad c_z = c_z(\mathrm{M}_\infty, \beta);\\ &m_x = m_x(\mathrm{M}_\infty, \alpha, \beta, \omega_x, \omega_y, \omega_z);\\ &m_y = m_y(\mathrm{M}_\infty, \beta, \omega_x, \omega_y, \dot{\beta}). \end{aligned}\right\} \tag{9.14}$$

9.13. Los coeficientes aerodinámicos de los momentos que corresponden a los casos particulares de movimiento, representados en la tabla 9.1, se pueden expresar del modo siguiente:

$$m_z = m_z^{\alpha}\alpha + m_z^{\Omega_x}\Omega_x + m_z^{\Omega_z}\Omega_z + m_z^{\delta_a}\delta_a + m_z^{\delta_{al}}\delta_{al} \text{ (cabeceo y balanceo)}; \quad (9.15)$$

$$m_z = m_z^{\alpha}\alpha + m_z^{\Omega_z}\Omega_z + m_z^{\delta_a}\delta_a \text{ (cabeceo sin balanceo)}; \quad (9.16)$$

$$m_x = m_x^{\Omega_x}\Omega_x + m_x^{\delta_{al}}\delta_{al} \text{ (balanceo sin cabeceo)}. \quad (9.17)$$

9.14. En el primer caso de movimiento ($\alpha = \beta = \Omega_x = \Omega_y = 0$; $\Omega_z = d\vartheta/dt = \dot{\vartheta} \neq 0$) el coeficiente del momento

$$m_z = m_z^{\Omega_z}\Omega_z = m_z^{\dot{\vartheta}}\dot{\vartheta}. \quad (9.18)$$

El segundo caso de movimiento se caracteriza por las condiciones $\dot{\vartheta} = \Omega_z = 0$; $\dot{\alpha} = d\alpha/dt \neq 0$, de acuerdo con las cuales

$$m_z = m_z^{\alpha}\alpha + m_z^{\dot{\alpha}}\dot{\alpha}. \quad (9.19)$$

Para el movimiento por una trayectoria rectilínea, con la que $\dot{\alpha} \neq 0$, $\Omega_z = \dot{\vartheta} \neq 0$,

$$m_z^{\alpha} = m_z^{\alpha}\alpha + m_z^{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} + m_z^{\Omega_z}\Omega_z. \quad (9.20)$$

Si los parámetros cinemáticos varían según una ley armónica,

$$\alpha = \alpha_0 \cos p_\alpha t; \quad \dot{\alpha} = -\alpha_0 p_\alpha \operatorname{sen} p_\alpha t; \quad \vartheta = \vartheta_0 \cos p_\vartheta t;$$

$$\dot{\vartheta} = \Omega_z = -\vartheta_0 p_\vartheta \operatorname{sen} p_\vartheta t,$$

donde α_0, ϑ_0 son las amplitudes de las oscilaciones por el ángulo de ataque y el ángulo de inclinación de la trayectoria, respectivamente; p_α, p_ϑ, las frecuencias de las oscilaciones.

De acuerdo con esto

$$m_z = -m_z^{\Omega_z}\vartheta_0 p_\vartheta \operatorname{sen} p_\vartheta t; \quad m_z = m_z^{\alpha}\alpha_0 \cos p_\alpha t - m_z^{\dot{\alpha}}\alpha_0 p_\alpha \operatorname{sen} p_\alpha t;$$

$$m_z = m_z^{\alpha}\alpha_0 \cos p_\alpha t - m_z^{\dot{\alpha}}\alpha_0 p_\alpha \operatorname{sen} p_\alpha t - m_z^{\Omega_z}\vartheta_0 p_\vartheta \operatorname{sen} p_\vartheta t.$$

En el tercer caso de movimiento (vuelo rectilíneo) los ángulos α, ϑ son iguales y coinciden en fase, por lo que $\dot{\alpha} = \dot{\vartheta} = \Omega_z$. Por lo tanto.

$$m_z = \alpha_0 [m_z^{\alpha} \cos p_\alpha t - p_\alpha (m_z^{\dot{\alpha}} + m_z^{\Omega_z}) \operatorname{sen} p_\alpha t]. \quad (9.21)$$

De este modo, para el tercer tipo de movimiento es esencial la suma de las derivadas $m_z^{\dot{\alpha}} + m_z^{\Omega_z}$.

9.15. El movimiento del vehículo volante en el régimen de rizo normal «looping» (véase la fig. 9.2, *a*) se caracteriza porque el ángulo entre el sentido instantáneo *2* del vector velocidad de vuelo $\vec{V}$ y del eje longitudinal ligado al vehículo *1* no varía y, por consiguiente, $\dot{\alpha} = d\alpha/dt = 0$. Pero con ese movimiento se forma el ángulo

variable ϑ entre cierto sentido fijado *3* y el eje *1* (derivada $\dot{\vartheta} = d\vartheta/dt = \Omega_z$). En correspondencia con esto $m_z = m_z(\alpha, \Omega_z)$ o bien en el régimen lineal

$$m_z = m_{z0} + m_z^\alpha \alpha + m_z^{\Omega_z} \Omega_z. \qquad (9.22)$$

En la fig. 9.2, *b* se muestra la caída libre del vehículo volante conjugada con el desplazamiento longitudinal. Con ello, el ángulo ϑ entre el sentido fijado *3* y el eje *1* del cuerpo queda constante, el ángulo de ataque α varía. Así, pues, en el caso dado $\dot{\vartheta} = \Omega_z = 0$ y $\dot{\alpha} \neq 0$, por lo que $m_z = m_z(\alpha, \dot{\alpha})$ o bien para la dependencia lineal

$$m_z = m_z^\alpha \alpha + m_z^{\dot{\alpha}} \dot{\alpha}. \qquad (9.23)$$

De acuerdo con la fig. 9.2 el ángulo de ataque $\alpha = w/V = gt/V$ y $\dot{\alpha} = d\alpha/dt = g/V$.

9.16. El movimiento del vehículo volante, mostrado esquemáticamente en la fig. 9.3, se caracteriza por la velocidad angular $\dot{\gamma} = \alpha\gamma/dt = \Omega_x$. Si este movimiento es no estacionario, $\dot{\Omega}_x \neq 0$. El coeficiente del momento de balanceo es la función $m_x = m_x(\Omega_x, \dot{\Omega}_x)$ o en el caso de dependencia lineal

$$m_x = m_x^{\Omega_x} \Omega_x + m_x^{\dot{\Omega}_x} \dot{\Omega}_x. \qquad (9.24)$$

Tomemos la ley armónica de variación de la velocidad angular:

$$\Omega_x = \Omega_{x0} \cos p_\Omega t; \quad \dot{\Omega}_x = -\Omega_{x0} p_\Omega \operatorname{sen} p_\Omega t,$$

donde Ω_{x0} es la amplitud de las oscilaciones con balanceo; p_Ω, frecuencia de las oscilaciones.

Tomando esto en consideración

$$m_x = \Omega_{x0} (m_x^{\Omega_x} \cos p_\Omega t - p_\Omega m_x^{\dot{\Omega}_x} \operatorname{sen} p_\Omega t). \qquad (9.24')$$

9.17. Los parámetros de estabilidad de vuelo dependen de la disposición mutua de los centros de masas y de presión del vehículo volante de forma cónica. El centro de presión del cono durante la circulación supersónica se encuentra a una distancia de 2/3 de la altura, es decir, $x_p = (2/3)\, x_c$. El centro de masas (c.m.) del cuerpo cónico dado con cola estabilizadora de paredes delgadas puede considerarse que está en el punto que coincide con el centro de masas de un cono enterizo de longitud x_c' (véase la fig. 9.4). La coordenada de este punto $x_{c.m} = (3/4)\, x_c'$. Así, pues, el centro de presión se encuentra tras el centro de masas, es decir, el cono prefijado posee estabilidad estática.

Tomemos las siguientes derivadas aerodinámicas para este vehículo volante: $m_z^\alpha = -0{,}35$; $m_z^{\bar{\dot{\alpha}}} = -0{,}5$; $m_z^{\omega_z} = -0{,}5$. Como $\bar{\dot{\alpha}} = \dot{\alpha} x_c/V_\infty$, $\omega_z = \Omega_z x_c/V_\infty$, entonces

$$m_z^{\dot{\alpha}} = m_z^{\bar{\dot{\alpha}}} (x_c/V_\infty) = -0{,}5\,(x_c/V_\infty) \quad m_z^{\Omega_z} = m_z^{\omega_z} (x_c/V_\infty) = -0{,}5\,(x_c/V_\infty).$$

El coeficiente de las ecuaciones del movimiento perturbado $a_3 = -m_z^\alpha q_\infty S_{\text{máx.t}}\, x_c/J_z$, en tanto que $a_1 + a_2 = -2m_z^\alpha (x_c^2/V_\infty)\, q_\infty\, S_{\text{máx.t}}/J_z$.

El momento principal de inercia del cono de altura x_c' respecto del eje transversal $J_z = (3m/20)\,(r'^2_{\text{máx.t}} + 0{,}25\, x_c'^2)$, donde la masa de la parte enteriza del cono (la densidad del material del cono es ρ_{cono}) $m = \rho_{\text{cono}} W_{\text{cono}} = \rho_{\text{cono}} x_c \pi r'^2_{\text{máx.t}}/3$.

Así, pues, $J_z = (1/20)\, x_c'^5 \pi \beta^2_{cono} \rho_{cono} (\beta^2_{cono} + 0{,}25)$.

Tomando en consideración que $q_\infty = \rho_a V^2_\infty/2$ (ρ_a es la densidad del aire), obtenemos

$$J_1 = q_\infty S_{máx.\,t} x_c / J_z = (\rho_a/\rho_{cono})\, 10 V^2_\infty x_c^3 / [x_c'^5 (\beta^2_{cono} + 0{,}25)].$$

Tomemos la razón de las densidades $\rho_a/\rho_{cono} = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ y obtendremos $J_1 = 102{,}51$. A continuación, hallamos

$$J_2 = (\rho_a/\rho_{cono})\, 20 V_\infty x_c^4 / [x_c'^5 (\beta^2_{cono} + 0{,}25)] = 4{,}1;$$

$$a_3 = -m_z^\alpha J_1 = 35{,}88 \text{ 1/s}^2; \quad a_1 + a_2 = -m_z^{\dot{\alpha}} J_2 = 2{,}05 \text{ 1/s}.$$

Determinamos los parámetros

$$\lambda_1 = 0{,}5\,(a_1 + a_2) = 1{,}025 \text{ 1/s}; \quad \bar{b} = \sqrt{a_3 - \lambda_1^2} = 35{,}87 \text{ 1/s}.$$

Con estos datos hallamos la fórmula para el ángulo de ataque que caracteriza la estabilidad dinámica:

$$\alpha = \dot{\alpha}_0 b^{-1} e^{-\lambda_1 t} \operatorname{sen}(\bar{b}t) = 2{,}788 \cdot 10^{-3} e^{-1{,}025t} \operatorname{sen}(35{,}87t).$$

De acuerdo con esta fórmula en el momento $t = 0$ el ángulo $\alpha = 0$.

Calculamos el período y la frecuencia de las oscilaciones: $T = 2\pi/\bar{b} = 0{,}1751$ s; $\omega = 2\pi/T = \bar{b} = 35{,}87$ 1/s. El decremento logarítmico de amortiguamiento $\varepsilon = \lambda_1 T = 0{,}1795$, el tiempo de disminución de la amplitud a la mitad $t_2 = (1/\lambda_1) \times \ln 2 = 0{,}6762$ s y la longitud de onda de las oscilaciones $\lambda = TV_\infty = 105{,}1$ m.

9.18. La presión excesiva $\Delta p = p - p_\infty$ en el punto x, z tomado al azar (origen de coordenadas en el centro de masas del ala) depende de: la envergadura del ala l, la velocidad V_∞, la presión p_∞ y la densidad ρ_∞ del aire a la altitud prefijada, el ángulo de ataque α, las velocidades angulares Ω_x, Ω_z y de las correspondientes derivadas $\dot{\alpha} = d\alpha/dt$, $\dot{\Omega}_x = d\Omega_x/dt$, $\dot{\Omega}_z = d\Omega_z/dt$. Para un ala plana la velocidad angular Ω_y no influye sobre la distribución de la presión. De acuerdo con esto $\Delta p = f(l, x, z, V_\infty, p_\infty, \rho_\infty, \alpha, \Omega_x, \Omega_z, \dot{\alpha}, \dot{\Omega}_x, \dot{\Omega}_z)$.

En esta relación hay 12 parámetros dimensionales (salvo α) de los que se pueden confeccionar $n - m = 9$ magnitudes adimensionales, donde $n = 12$ es el número de parámetros dimensionales, $m = 3$, las dimensiones independientes $[M, L, T]$. De acuerdo con el teorema π, $\pi_1 = f_1(\pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8, \pi_9, \alpha)$.

Tomando como parámetros independientes reiterados l, V, ρ hallamos las siguientes funciones adimensionales:

$$\pi_1 = f_1(\Delta p, l, V_\infty, \rho_\infty); \quad \pi_2 = f_2(x, l, V_\infty, \rho_\infty); \quad \pi_3 = f_3(z, l, V_\infty, \rho_\infty);$$

$$\pi_4 = f_4(p_\infty, l, V_\infty, \rho_\infty); \quad \pi_5 = f_5(\Omega_x, l, V_\infty, \rho_\infty); \quad \pi_6 = f_6(\Omega_z\, l, V_\infty, \rho_\infty);$$

$$\pi_7 = f_7(\dot{\alpha}, l, V_\infty, \rho_\infty); \quad \pi_8 = f_8(\dot{\Omega}_x, l, V_\infty, \rho_\infty); \quad \pi_9 = f_9(\dot{\Omega}_z, l, V_\infty, \rho_\infty).$$

En estas funciones los parámetros tienen las dimensiones:

$$[p_\infty] = [\Delta p] = [FL^{-2}] = [ML^{-1}T^{-2}], \quad [l] = [x] = [z] = [L];$$

$$[V_\infty] = [LT^{-1}]; \quad [\rho_\infty] = [ML^{-3}]; \quad [\Omega_x] = [\Omega_z] = [\dot{\alpha}] = [T^{-1}];$$

$$[\dot{\Omega}_x] = [\dot{\Omega}_z] = [T^{-2}].$$

A continuación, escribimos

$$\pi_1 = \Delta p^a l^b_\infty V_\infty \rho^c; \quad [M^0 L^0 T^0] = [ML^{-1}T^{-2}]\,[L]^a\,[LT^{-1}]^b\,[ML^{-3}]^c.$$

De aquí obtenemos tres ecuaciones:

$$[M]\rightarrow 0 = 1 + c;\quad [L]\rightarrow 0 = -1 + a + b - 3c;\quad [T]\rightarrow 0 = -2 - b.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos $c = -1$; $b = -2$; $a = 0$. En correspondencia con esto $\pi_1 = \Delta p/(\rho_\infty V_\infty^2)$. Ahora presentemos las expresiones:

$$\pi_2 = xl^a V_\infty^b \rho_\infty^c;\quad [M^0L^0T^0] = [L]\,[L]^a\,[LT^{-1}]^b\,[ML^{-3}]^c.$$

De aquí $[M]\rightarrow 0 = c$; $[L]\rightarrow 0 = 1 + a + b - 3c$; $[T]\rightarrow 0 = -b$. De acuerdo con estos resultados $c = b = 0$; $a = -1$, por ello $\pi_2 = xl^{-1} = x/l$. De forma análoga hallamos $\pi_3 = z/l$.

Ahora aducimos la relación $\pi_4 = p_\infty l^a V_\infty^b \rho_\infty^c$, en correspondencia con la cual $[M^0L^0T^0] = [ML^{-1}T^{-2}]\,[L]^a\,[LT^{-1}]^b\,[ML^{-3}]^c$.

Confeccionando ecuaciones para los exponentes de las dimensiones y resolviéndolas, hallamos $a = 0$; $b = -2$; $c = -1$. De acuerdo con esto $\pi_4 = p_\infty/(\rho_\infty V_\infty^2) = 1/(k\mathbf{M}_\infty^2)$.

Ahora escribamos las expresiones $\pi_5 = \Omega_x l^a V_\infty^b \rho_\infty^c$; $[M^0L^0T^0] = [T^{-1}]\,[L]^a \times [LT^{-1}]^b [ML^{-3}]^c$ de acuerdo con las cuales $[M]\rightarrow 0 = c$; $[L]\rightarrow 0 = a + b - 3c$; $[T] = 0 = -1 - b$.

Así, pues, los exponentes $c = 0$; $b = -1$; $a = 1$; por lo tanto

$$\pi_5 = \Omega_x l V_\infty^{-1} = \Omega_x l/V_\infty.$$

De modo análogo

$$\pi_6 = \Omega_z l/V_\infty;\quad \pi_7 = \dot{\alpha} l/V_\infty.$$

Seguidamente tenemos

$$\pi_8 = \dot{\Omega}_x\, l^a V_\infty^b \rho_\infty^c;\quad [M^0L^0T^0] = [T^{-2}]\,[L]^a\,[LT^{-1}]^b\,[ML^{-3}]^c.$$

Confeccionamos las ecuaciones:

$$[M]\rightarrow 0 = c;\quad [L]\rightarrow 0 = a + b - 3c;\quad [T]\rightarrow 0 = -2 - b.$$

De aquí obtenemos $c = 0$; $b = -2$; $a = 2$ y hallamos

$$\pi_8 = \dot{\Omega}_x l^2/V_\infty^2.$$

Para finalizar determinamos la función

$$\pi_9 = \dot{\Omega}_z l^2/V_\infty^2.$$

En correspondencia con las dependencias obtenidas para $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_9$ hallamos la función

$$\bar{p} = \Delta p/(\rho_\infty V_\infty^2/2) = f\,(\alpha,\ x/l,\ z/l,\ \mathbf{M}_\infty,\ \Omega_x l/V_\infty,$$
$$\Omega_z l/V_\infty,\ \dot{\alpha} l/V_\infty,\ \dot{\Omega}_x l^2/V_\infty^2,\ \dot{\Omega}_z l^2/V_\infty^2).$$

Si introducimos las anotaciones $x/l = \xi$; $z/l = \zeta$; $\Omega_x l/V_\infty = \omega_x$; $\Omega_z l/V_\infty = \omega_z$; $\dot{\alpha} l/V_\infty = \bar{\dot{\alpha}}$; $\dot{\Omega}_x l^2/V_\infty^2 = \dot{\omega}_x$; $\dot{\Omega}_z l^2/V_\infty^2 = \dot{\omega}_z$, entonces

$$\bar{p} = f\,(\alpha,\ \mathbf{M}_\infty,\ \xi,\ \zeta,\ \bar{\dot{\alpha}},\ \omega_x,\ \omega_z,\ \dot{\omega}_x,\ \dot{\omega}_z). \tag{9.25}$$

9.19. 1. En la fig. 9.10 se muestra el esquema de una superficie fina de sustentación alrededor de la cual circula un flujo no estacionario de gas. Sobre el lado inferior la presión excesiva crea una fuerza normal elemental $(p_i - p_\infty)\, dxdz$ y en el superior, la fuerza $(p_s - p_\infty)\, dxdz$, por lo que la fuerza sumaria

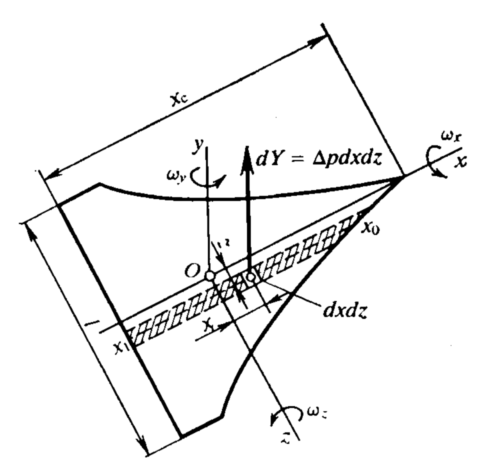


Fig. 9.10. Esquema para determinar la fuerza normal elemental y su coeficiente

$$dY = (p_i - p_s)\, dxdz = \Delta\bar{p}\ (\rho_\infty V_\infty^2/2) dxdz$$

y su coeficiente

$$dc_y = dY/[(\rho_\infty V_\infty/2) S_{\text{ala}}] = \Delta\bar{p}\ dxdz/S_{\text{ala}}.$$

Introduciendo las magnitudes adimensionales $\xi = x/x_c$, $\zeta = z/x_c$, hallamos

$$dc_y = (x_c^2/S_{\text{ala}})\ \Delta\bar{p} d\xi d\zeta. \qquad (9.26)$$

La diferencia de los coeficientes de presión es la función

$$\Delta\bar{p} = p(\alpha, \mathbf{M}_\infty, \xi, \zeta, \dot{\bar{\alpha}}, \omega_x, \omega_z, \dot{\omega}_x, \dot{\omega}_z),$$

donde $\dot{\bar{\alpha}} = d\alpha/d\tau$; $\dot{\omega}_x = d\omega_x/d\tau$; $\dot{\omega}_z = d\omega_z/d\tau$; $\tau = V_\infty t/x_c$; $\alpha = \alpha(\tau)$; $\omega_x = \omega_x(\tau)$; $\omega_z = \omega_z(\tau)$.

Representemos la expresión para $\Delta\bar{p}$ en forma del desarrollo

$$\Delta\bar{p} = p^\alpha\alpha + p^{\omega_x}\omega_x + p^{\omega_z}\omega_z + p^{\dot{\bar{\alpha}}}\dot{\bar{\alpha}} + p^{\dot{\omega}_x}\dot{\omega}_x + p^{\dot{\omega}_z}\dot{\omega}_z = \sum_{i=1}^{3} (p^{q_i} q_i + p^{\dot{q}_i}\dot{q}_i).$$

Así, pues,

$$c_y' = (p^\alpha\alpha + p^{\omega_x}\omega_x + p^{\omega_z}\omega_z + p^{\dot{\bar{\alpha}}}\dot{\bar{\alpha}} + p^{\dot{\omega}_x}\dot{\omega}_x + p^{\dot{\omega}_z}\dot{\omega}_z)(x_c^2/S_{\text{ala}})\, d\xi\, d\zeta,$$

donde

$$p^\alpha = f_1(\mathbf{M}_\infty, \xi, \zeta),\ \ p^{\omega_x} = f_2(\mathbf{M}_\infty, \xi, \zeta),\ \text{etc.}$$

Según c_y' hallamos las derivadas locales de la estabilidad:

$$\left.\begin{aligned} \partial c_y'/\partial q_i &= c_y'^{q_i} = p^{q_i} x_c^2\, d\xi\, d\zeta/S_{\text{ala}};\\ \partial c_y'/\partial \dot{q}_i &= c_y'^{\dot{q}_i} = p^{\dot{q}_i} x_c^2\, d\xi\, d\zeta/S_{\text{ala}}, \end{aligned}\right\} \qquad (9.27)$$

donde para $i = 1, 2, 3$ tenemos

$$q_1 = \alpha(\tau);\quad q_2 = \omega_x(\tau);\quad q_3 = \omega_z(\tau);\quad \dot{q}_1 = \dot{\bar{\alpha}};\quad \dot{q}_2 = \dot{\omega}_x;\quad \dot{q}_3 = \dot{\omega}_z.$$

9.20. Las derivadas del coeficiente de la fuerza normal para la sección (fig. 9.10)

$$(\partial c_y/\partial q_i)_{\text{sec}} = (x_c^2/S_{\text{ala}})\, d\zeta \int_{\xi_0}^{\xi_1} p^{q_i}\, d\xi,$$

donde $\xi_1 = x_1/x_c$, $\xi_0 = x_0/x_c$ son las coordenadas adimensionales de los bordes de salida y de ataque de la sección.

Para el ala la derivada sumaria

$$(\partial c_y/\partial q_i)_{\text{ala}} = c_y^{q_i} = (2x_c^2/S_{\text{ala}}) \int_0^{l/(2x_c)} \int_{\xi_0}^{\xi_1} p^{q_i}\, d\xi\, d\zeta. \tag{9.28}$$

Es análoga la fórmula para la derivada $c_y^{\dot{q}_i}$ (con la sustitución de p^{q_i} por $p^{\dot{q}_i}$). El momento elemental de cabeceo (fig. 9.10) $dM_z = \Delta p x dx dz$, mientras que el correspondiente coeficiente local

$$m_z' = dM_z/[S_{\text{ala}}\,(\rho_\infty V_\infty^2/2)\,x_c] = \Delta\bar{p}\xi d\xi d\zeta x_c^2/S_{\text{ala}}. \tag{9.29}$$

Tomando en consideración esta expresión la derivada local de la estabilidad $m_z'^{q_i} = p^{q_i}\xi d\xi d\zeta x_c^2/S_{\text{ala}}$ y para toda el ala]

$$m_z^{q_i} = (2x_c^2/S_{\text{ala}}) \int_0^{l/(2x_c)} \int_{\xi_0}^{\xi_1} p^{q_i}\xi\, d\xi\, d\zeta. \tag{9.29'}$$

Sustituyendo aquí q_i por $\dot{q}_i$ obtenemos la derivada $m_z^{\dot{q}_i}$. De la fig. 9.10 se desprende que el momento elemental de balanceo $dM_x = -\Delta p\, z dx\, dz$ y el correspondiente coeficiente local, referido a la envergadura del ala,

$$m_x' = dM_x/[S_{\text{ala}}\,(\rho_\infty V_\infty^2/2)\,l] = -\Delta\bar{p}\zeta d\xi d\zeta x_c^3/(l\, S_{\text{ala}}). \tag{9.30}$$

De acuerdo con esta fórmula las derivadas local y total

$$m_x'^{q_i} = -p^{q_i}\zeta\, d\xi\, d\zeta x_c^3/(lS_{\text{ala}}), \tag{9.31}$$

$$m_x^{q_i} = -(2x_c^3/lS_{\text{ala}}) \int_0^{l/(2x_c)} \int_{\xi_0}^{\xi_1} p^{q_i}\zeta\, d\xi\, d\zeta. \tag{9.32}$$

Tomando en lugar de p^{q_i} la variable $p^{\dot{q}_i}$ obtenemos la derivada $m_x^{\dot{q}_i}$. En el caso simétrico el ala está en movimiento de avance, en tanto que no hay rotación alrededor del eje Ox ($\Omega_x = 0$). Teniendo en cuenta que $q_1 = \alpha$, $q_2 = \omega_x = 0$, $q_3 = \omega_z$, tenemos

$$m_x^{q_i} = m_x^{\dot{q}_i} = 0; \quad c_y^{\omega_x} = c_y^{\dot{\omega}_x} = m_z^{\omega_x} = m_z^{\dot{\omega}_x} = 0.$$

Para el movimiento asimétrico ($q_1 = \alpha = 0$; $q_2 = \omega_z$; $q_3 = \omega_z = 0$)

$$c_y^{\alpha} = c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = c_y^{\omega_x} = c_y^{\dot{\omega}_x} = c_y^{\omega_z} = c_y^{\dot{\omega}_z} = m_z^{\alpha} = m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} = m_z^{\omega_x} = m_z^{\dot{\omega}_x} = m_z^{\omega_z} = m_z^{\dot{\omega}_z} = 0.$$

9.21. El esquema del «looping» se muestra en la fig. 9.2, *a*. Como con ello $\alpha =$ $=$ const, $\Omega_z =$ const, en cierto lugar del ala la diferencia de los coeficientes de presión $\Delta\bar{p} = p^{\alpha}\alpha + p^{\omega_z}\omega_z$.

Al régimen de caída libre (véase la fig. 9.2, *b*) corresponden los parámetros $\alpha \neq 0$; $\dot{\alpha} = d\,(\alpha + \Delta\alpha)/dt = g/V_\infty$; $\Omega_x = \Omega_z = \dot{\Omega}_x = \dot{\Omega}_z = 0$.

Así, pues,

$$\Delta\bar{p} = p^{\alpha}\alpha + p^{\dot{\bar{\alpha}}}\dot{\bar{\alpha}} = p^{\alpha}\alpha + p^{\dot{\bar{\alpha}}}lg/V_\infty^2.$$

En el caso de movimiento de avance con $\alpha = 0$ y rotación alrededor del eje longitudinal, $\Omega_x \neq 0$ y $\dot{\Omega}_x \neq 0$, por lo que

$$\Delta \bar{p} = p^{\omega_x} \omega_x + p^{\dot{\omega}_x} \dot{\omega}_x.$$

Si la rotación transcurre a velocidad constante, $\Omega_x = \text{const}$ y $\dot{\Omega}_x = 0$; por lo tanto

$$\Delta \bar{p} = p^{\omega_x} \omega_x.$$

9.22. En la fig. 9.11 se ofrece el esquema del movimiento de un gas en el hilillo. El caudal másico del gas por la sección AB es igual a $\rho S V$, en tanto que la variación de la cantidad de movimiento entre las secciones AB y CD constituye $\rho S V\,[(V + \Delta V) - V] = \rho S V dV$.

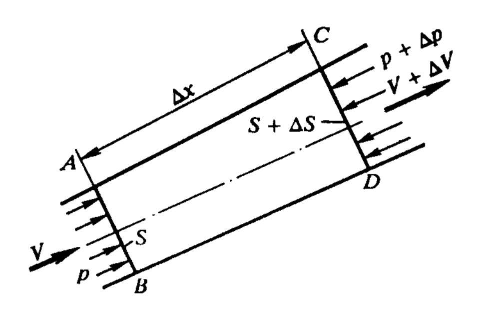


Fig. 9.11. Movimiento del gas en el hilillo

La fuerza debida a la presión sobre la cara izquierda es pS y sobre la derecha

$$(p + \Delta p)\,(S + \Delta S) = pS + \Delta pS + p\Delta S.$$

La fuerza que actúa sobre la superficie lateral puede hallarse en la forma $f\Delta S$, donde $f = p + k\Delta p$; k es cierto coeficiente numérico.

La fuerza resultante en el sentido del movimiento

$$pS - pS - \Delta pS - p\Delta S + (p + k\Delta p)\,\Delta S = -\Delta pS.$$

De acuerdo con el segundo principio de Newton esta fuerza es igual a la variación de la cantidad de movimiento, o sea, $\rho S V \Delta V = -\Delta p S$. Con movimiento inuniforme $\Delta V = (\partial V/\partial t)/\Delta t + (\partial V/\partial S)\,\Delta S$; por consiguiente, tomando en consideración que $\Delta p = (\partial p/\partial x)\,\Delta x$, obtenemos

$$\partial V/\partial t + V\partial V/\partial x = -(1/\rho)\,\partial p/\partial x. \tag{9.33}$$

Después de la integración

$$V^2/2 + \int dp/\rho + \int_{x_1}^{x_2} (\partial V/\partial t)\,dx = F(t), \tag{9.34}$$

donde $F(t)$ es cierta función del tiempo.

Introduzcamos el potencial de velocidad $\Phi = \int_{x_1}^{x_2} V\,dx$ de modo que $\int_{x_1}^{x_2} (\partial V/\partial t)\,dx = \partial\Phi/dt$. En correspondencia con esto

$$V^2/2 + \int dp/\rho + \partial\Phi/\partial t = F(t). \tag{9.35}$$

Para un fluido incompresible ($\rho = \text{const}$)

$$V^2/2 + p/\rho + \partial\Phi/\partial t = F(t). \tag{9.36}$$

En el caso de un flujo no perturbado $\Phi = 0$ y

$$F(t) = V_\infty^2/2 + p_\infty/\rho. \tag{9.37}$$

Por consiguiente,

$$V^2/2 + p/\rho + \partial\Phi/\partial t = V_\infty^2/2 + p_\infty/\rho. \tag{9.38}$$

Esta relación es la *ecuación de Cauchy — Lagrange* para el flujo no estacionario de un fluido incompresible. Cuando el flujo es débilmente perturbado (linealizado) $V = V_\infty + \Delta V$, por lo que $V^2 - V_\infty^2 = 2V_\infty \Delta V$.

La presión excesiva correpondiente

$$p - p_\infty = -\rho_\infty (V_\infty \Delta V + \partial\Phi/\partial t), \tag{9.39}$$

y el coeficiente de esta presión

$$\bar{p} = 2/(p - p_\infty)/(\rho V_\infty^2) = -(2/V_\infty^2)(V_\infty \Delta V + \partial\Phi/\partial t). \tag{9.40}$$

En un flujo débilmente perturbado $\Phi = \Phi_\infty + \varphi$ (Φ_∞ es el potencial no perturbado; φ, una magnitud adicional debida a la perturbación). Entonces, cambiando el sentido de lectura de la coordenada x por el inverso obtenemos

$$\bar{p} = (2/V_\infty^2)(V_\infty\, \partial\varphi/\partial x - \partial\varphi/\partial t). \tag{9.41}$$

9.23. El esquema del movimiento de avance del ala se muestra en la fig. 9.12. El carácter de este movimiento se determina por el ángulo variable de ataque

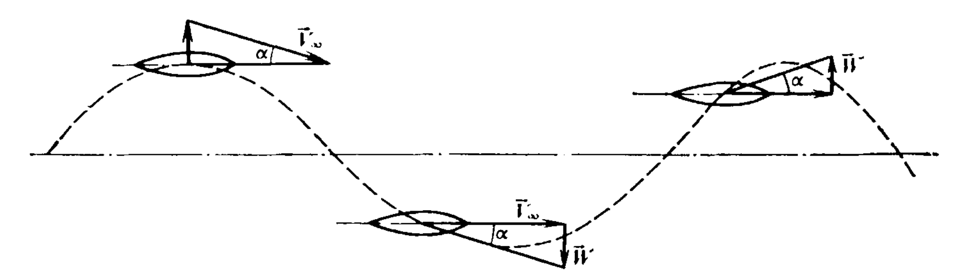


Fig. 9.12. Esquema del movimiento de avance de un ala con oscilaciones transversales

$\alpha = w/V_\infty$, dependiente de la velocidad de las oscilaciones transversales. De acuerdo con esto sólo los parámetros $q_1 = \alpha$ y $\dot{q}_1 = \dot{\bar{\alpha}} = \dot{\alpha} l/V_\infty$ no son iguales a cero. Así pues,

$$\bar{\varphi}(\alpha, \dot{\bar{\alpha}}) = \bar{\varphi}^{\alpha}\alpha + \bar{\varphi}^{\dot{\bar{\alpha}}}\dot{\bar{\alpha}}, \tag{9.42}$$

donde $\bar{\varphi} = \varphi/(V_\infty x_c)$ es un potencial adimensional que determina el coeficiente de presión

$$\bar{p} = 2\,(\partial\bar{\varphi}/\partial\xi - \partial\bar{\varphi}/\partial\tau) \tag{9.43}$$

en el que $\xi = x/x_c$, $\tau = V_\infty t/x_c$.

De (9.43) podemos pasar a la diferencia de los coeficientes de presión

$$\Delta\bar{p} = \bar{p}_i - \bar{p}_s = 2\,(\partial\bar{\varphi}_i/\partial\xi - \partial\bar{\varphi}_i/\partial\tau) - 2\,(\partial\bar{\varphi}_s/\partial\xi - \partial\bar{\varphi}_s/\partial\tau).$$

Debido a la simetría los potenciales en el trasdós y en el intradós $\overline{\varphi}_s = -\overline{\varphi}_i$. De modo que tomando $\overline{\varphi}_i = -\overline{\varphi}$ y $\overline{\varphi}_s = \overline{\varphi}$, hallamos

$$\Delta\overline{p} = -4\,(\partial\overline{\varphi}/\partial\xi - \partial\overline{\varphi}/\partial\tau). \qquad (9.44)$$

Introduciendo aquí (9.42), obtenemos

$$\Delta\overline{p} = -4\,[(\alpha\,\partial\overline{\varphi}^{\alpha}/\partial\xi + \dot{\alpha}\,\partial\overline{\varphi}^{\dot{\alpha}}/\partial\xi) - (\overline{\varphi}^{\alpha} + \overline{\varphi}^{\dot{\alpha}}\ddot{\alpha})], \qquad (9.45)$$

donde $\ddot{\alpha} = d\dot{\alpha}/d\tau = d^2\alpha/d\tau^2$.

En el caso de oscilaciones armónicas tomamos $\alpha = \alpha_0 \cos p_\alpha^* \tau$ (donde $p_\alpha^* = p_\alpha x_c/V_\infty$ es el número de Strouhal; p_α, la frecuencia de las oscilaciones). En correspondencia con esto $\ddot{\alpha} = d^2\alpha/d\tau^2 = -p_\alpha^{*2}\alpha$.

Introduciendo la variable $\ddot{\alpha}$ en la fórmula (9.45), obtenemos

$$p^{\alpha}\alpha + p^{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} = -4\,[(\alpha\,\partial\overline{\varphi}^{\alpha}/\partial\xi + \dot{\alpha}\,\partial\overline{\varphi}^{\dot{\alpha}}/\partial\xi) - (\overline{\varphi}^{\alpha}\dot{\alpha} - \overline{\varphi}^{\dot{\alpha}}p_\alpha^{*2}\alpha)]. \qquad (9.46)$$

De aquí hallamos

$$p^{\alpha} = -4\,(\partial\overline{\varphi}^{\alpha}/\partial\xi + \overline{\varphi}^{\dot{\alpha}}p_\alpha^{*2}); \qquad (9.47)$$

$$p^{\dot{\alpha}} = -4\,(\partial\overline{\varphi}^{\dot{\alpha}}/\partial\xi - \overline{\varphi}^{\alpha}). \qquad (9.48)$$

9.24. Empleemos la ecuación de continuidad

$$\partial\rho/\partial t + V_x\partial\rho/\partial x + V_y\partial\rho/\partial y + \rho\,(\partial V_x/\partial x + \partial V_y/\partial y) = 0.$$

Aquí las derivadas para la densidad

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial t}; \quad \frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{\partial\rho}{\partial y} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial y},$$

mientras que las derivadas para la presión [véase (9.41)]

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho_\infty\left(V_\infty\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right); \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_\infty\left(V_\infty\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}\right);$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho_\infty\left(V_\infty\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial t}\right).$$

Como en la fórmula (9.41), al calcular $\partial p/\partial x$ se ha tomado el signo negativo. Seguidamente, linealizamos la ecuación para la velocidad del sonido representando la diferencia de cuadrados $a^2 - a_\infty^2$ en la forma $a^2 - a_\infty^2 = kp/\rho - k_\infty p_\infty/\rho_\infty$. De acuerdo con la ecuación de la adiabática $p/\rho^k = p_\infty/\rho_\infty^k$, tenemos $p/\rho = (p_\infty/\rho_\infty) \times (p/p_\infty)^{(k-1)/k}$. Poniendo aquí el valor de $p = p_\infty + p'$ (donde p' es un pequeño valor de la presión de perturbación) y desarrollando en la serie de Taylor, tomando en consideración (9.41), obtenemos

$$a^2 = a_\infty^2 - (k-1)\,(V_\infty\partial\varphi/\partial x + \partial\varphi/\partial t).$$

En la ecuación de continuidad introducimos $V_x = V_\infty + \partial\varphi/\partial x$, $V_y = \partial\varphi/\partial y$ y realizamos otras sustituciones.

Eliminando las magnitudes de los órdenes superiores de pequeñez, obtenemos

$$(1/\rho)\,\partial p/\partial t + (V_\infty/\rho)\,\partial p/\partial x + a_\infty^2\,(\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2) = 0.$$

Introducimos aquí los valores de $\partial p/\partial t$, $\partial p/\partial x$ y, tomando $\rho_\infty/\rho \approx 1$, hallamos

$$(1-M_\infty^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{2M_\infty}{a_\infty}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}-\frac{1}{a_\infty^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 t}=0. \quad (9.49)$$

Tomando aquí $x = b_0\xi$; $y = b\eta$; $t = (b_0/V_\infty)\tau$; $\varphi = V_\infty b_0\bar{\varphi}$, obtenemos la ecuación en forma adimensional:

$$(1-M_\infty^2)\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial \eta^2}+2M_\infty^2\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial \xi\,\partial \tau}-M_\infty^2\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial \tau^2}=0. \quad (9.50)$$

9.25. Según la condición de la circulación de una corriente adherida la componente normal de la velocidad en el ala es nula. Así, pues, la condición de frontera para la función potencial consiste en que la velocidad del flujo perturbado en la superficie debe extinguir la correspondiente componente no perturbada.

1. En este caso de movimiento son no nulos $\dot{\alpha}$, α y $\dot{\vartheta} = \Omega_z$, con ello $\dot{\alpha} = \Omega_z$. De acuerdo con esto la velocidad perturbada en cierto punto es igual a $\partial\varphi/\partial y + \Omega_z x$. Como la componente no perturbada es αV_∞, la condición de frontera

$$\partial\varphi/\partial y + \Omega_{zx} + \alpha V_\infty = 0. \quad (9.51)$$

2. Ya que con balanceo $\Omega_x \neq 0$ y $\alpha = 0$, la componente $\alpha V_\infty = 0$. Por lo tanto, la condición de frontera

$$\partial\varphi/\partial y + \Omega_x z = 0. \quad (9.52)$$

3. Al efectuar el «looping» α y Ω_z son no nulos y constantes. La componente perturbada de la velocidad es igual a $\partial\varphi/\partial y + \Omega_z x$, mientras que la no perturada, αV_∞. Así, que

$$\partial\varphi/\partial y + \Omega_z x + \alpha V_\infty = 0. \quad (9.53)$$

9.26. La presión excesiva en los lados inferior y superior de la superficie de sustentación

$$\Delta p = p_i - p_s = \rho_\infty \gamma V_\infty, \quad (9.54)$$

donde $\gamma = -\partial\Gamma/\partial x = -(1/V_\infty)\,d\Gamma/dt$ es la intensidad lineal de los torbellinos (vórtices) ligados.

La fórmula (9.54) se desprende del teorema de Zhukovski y se refiere al caso de la corriente inuniforme de circulación. Esta fórmula es análoga a otra de las de Zhukovski para la fuerza de sustentación $Y = \rho_\infty V_\infty \Gamma$ que refleja el correspondiente teorema que atañe al caso de la corriente uniforme.

La intensidad lineal

$$\gamma = V_\infty \sum_{i=1}^{3}(\gamma^{q_i}q_i + \gamma^{\dot{q}_i}\dot{q}_i), \quad (9.55)$$

donde $\gamma^{q_i} = \gamma^\alpha$; γ^{ω_x}, γ^{ω_z}; $\gamma^{\dot{q}_i} = \gamma^{\dot{\bar{\alpha}}}$, $\gamma^{\dot{\omega}_x}$, $\gamma^{\dot{\omega}_z}$; $q_i = \alpha$, ω_x, ω_z; $\dot{q}_i = \dot{\bar{\alpha}}$, $\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_z$.

La diferencia de los coeficientes de presión

$$\Delta\bar{p} = \bar{p}_i - \bar{p}_s = 2\gamma/V_\infty. \quad (9.56)$$

Esta diferencia también puede presentarse en forma de una serie

$$\Delta\bar{p} = \sum_{i=1}^{3}(p^{q_i}q_i + p^{\dot{q}_i}\dot{q}_i), \quad (9.57)$$

donde

$$p^{q_i} = p^{\alpha},\ p^{\omega_x},\ p^{\omega_z};\quad p^{\dot{q}_i} = p^{\dot{\alpha}},\ p^{\dot{\omega}_x},\ p^{\dot{\omega}_z}. \tag{9.58}$$

Combinando (9.55) — (9.58), obtenemos

$$p^{\alpha}\alpha + p^{\omega_x}\omega_x + p^{\omega_z}\omega_z + p^{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} + p^{\dot{\omega}_x}\dot{\omega}_x + p^{\dot{\omega}_z}\dot{\omega}_z =$$
$$= 2\left(\gamma^{\alpha}\alpha + \gamma^{\omega_x}\omega_x + \gamma^{\omega_z}\omega_z + \gamma^{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} + \gamma^{\dot{\omega}_x}\dot{\omega}_x + \gamma^{\dot{\omega}_z}\dot{\omega}_z\right),$$

de donde

$$p^{\alpha} = 2\gamma^{\alpha};\quad p^{\omega_x} = 2\gamma^{\omega_x};\quad p^{\omega_z} = 2\gamma^{\omega_z};\quad p^{\dot{\alpha}} = 2\gamma^{\dot{\alpha}};$$
$$p^{\dot{\omega}_x} = 2\gamma^{\dot{\omega}_x};\quad p^{\dot{\omega}_z} = 2\gamma^{\dot{\omega}_z}. \tag{9.59}$$

9.27. En caso de oscilaciones verticales de una superficie de sustentación en movimiento de avance (fig. 9.12) sólo el ángulo de ataque $\alpha = w/V_{\infty}$ no es nulo (donde w es la velocidad de las oscilaciones transversales). De acuerdo con esto $\gamma = V_{\infty}(\gamma^{\alpha}\alpha + \gamma^{\dot{\alpha}}\dot{\alpha})$, $\Delta p = (\bar{p}^{\alpha}\alpha + p^{\dot{\alpha}}\dot{\alpha})$. Tomando en consideración que $\Delta\bar{p} = 2\gamma/V_{\infty}$, hallamos que $p^{\alpha}\alpha + p^{\dot{\alpha}}\alpha = 2(\gamma^{\alpha}\alpha + \gamma^{\dot{\alpha}}\dot{\alpha})$, de donde $p^{\alpha} = 2\gamma^{\alpha}$, $p^{\dot{\alpha}} = 2\gamma^{\dot{\alpha}}$.

Cuando las oscilaciones transcurren de acuerdo con una ley armónica $\alpha = \alpha_0 \cos p_{\alpha}^{*}\tau$, $\dot{\alpha} = d\alpha/d\tau = -\alpha_0 p_{\alpha}^{*} \operatorname{sen} p_{\alpha}^{*}\tau$. Por ello,

$$\gamma = V_{\infty}\alpha_0\left(\gamma^{\alpha}\cos p_{\alpha}^{*}\tau - \gamma^{\dot{\alpha}}p_{\alpha}^{*}\operatorname{sen} p_{\alpha}^{*}\tau\right), \tag{9.60}$$

$$\Delta\bar{p} = 2\alpha_0\left(\gamma^{\alpha}\cos p_{\alpha}^{*}\tau - \gamma^{\dot{\alpha}}p_{\alpha}^{*}\operatorname{sen} p_{\alpha}^{*}\tau\right). \tag{9.61}$$

9.28. En la fig. 9.5 se muestra un vórtice elemental uniforme en forma de herradura. El consta del vórtice ligado con circulación constante (intensidad) Γ_0, cuyo eje forma cierto ángulo χ con la normal de la velocidad $\vec{V}_{\infty}$ (χ es el ángulo local de flecha), y de dos haces de torbellinos, que salen de los dos extremos de este vórtice, cuyos ejes son paralelos a $\vec{V}_{\infty}$. Cuando la circulación es uniforme $\Gamma_0 = \Gamma_1 = \Gamma_2$. Introduzcamos la intensidad adimensional $\Gamma = \Gamma_0/(V_{\infty}b)$, donde b es cierta dimensión característica (p. ej., la cuerda de raíz).

De acuerdo con la ley de Biot — Savart la velocidad en el punto M $(x_0, 0, z_0)$ debida al vórtice ligado $W' = -\Gamma_0(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)/(4\pi a \operatorname{sen}\alpha_1)$. Introduciendo aquí $\Gamma_0 = \Gamma/(V_{\infty} b)$, $\bar{a} = a/b$, $\bar{W}' = W'/V_{\infty}$, obtenemos

$$\bar{W}' = -\Gamma(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)\Big/\left(4\pi\bar{a}\sqrt{1-\cos^2\alpha_1}\right). \tag{9.62}$$

Aquí

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha_1 &= (0{,}5\bar{l}_0/\cos\chi - \xi_0\operatorname{sen}\chi - \zeta_0\cos\chi)\times\\
&\times[(\xi_0 - 0{,}5\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi)^2 + (0{,}5\bar{l}_0 - \zeta_0)^2]^{-1/2},\\
\cos\alpha_2 &= (0{,}5\bar{l}_0/\cos\chi + \xi_0\operatorname{sen}\chi + \zeta_0\cos\chi)\times\\
&\times[(\xi_0 + 0{,}5\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi)^2 + (0{,}5\bar{l}_0 + \zeta)^2]^{-1/2},
\end{aligned}\right\} \tag{9.63}$$

donde $\bar{l}_0 = l_0/b$; $\xi_0 = x/b$; $\zeta_0 = z_0/b$.

Directamente del $\triangle ABM$ (véase la fig. 9.5) hallamos

$$\bar{a} = a/b = [(\zeta_0 - 0{,}5\,\bar{l}_0 \operatorname{tg}\chi)^2 + (0{,}5\,\bar{l}_0 - \zeta_0)^2]^{1/2}. \quad (9.64)$$

La velocidad debida a los haces de torbellinos seminfinitos libres derecho e izquierdo

$$W'' = -\Gamma_0 (\cos 0 + \cos\beta_1)(4\pi h_1)^{-1} - \Gamma_0 (\cos 0 + \cos\beta_2)(4\pi h_2)^{-1}.$$

Como $h_1 = 0{,}5\, l_0 - z_0$, $h_2 = 0{,}5\, l_0 + z_0$, en forma adimensional

$$\overline{W''} = W''/V_\infty = -[\Gamma/(4\pi)][(1 + \cos\beta_1)(0{,}5\,\bar{l}_0 - \zeta_0)^{-1} +$$
$$+ (1 + \cos\alpha_2)(0{,}5\,\bar{l}_0 + \zeta_0)^{-1}]. \quad (9.65)$$

Directamente de la fig. 9.5 hallamos:

$$\cos\beta_1 = (\xi_0 - 0{,}5\,\bar{l}_0 \operatorname{tg}\chi)/\bar{a},\quad \cos\beta_2 = (\xi_0 + 0{,}5\,\bar{l}_0 \operatorname{tg}\chi)]/\bar{c}, \quad (9.66)$$

donde $\bar{a}$ se da con la fórmula (9.64) y $\bar{c}$ se determina del $\triangle ABM$:

$$\bar{c} = c/b = [(\xi_0 + 0{,}5\,\bar{l}_0 \operatorname{tg}\chi)^2 + (0{,}5\,\bar{l}_0 + \zeta_0)^2]^{1/2}. \quad (9.67)$$

La velocidad sumaria adimensional debida a los vórtices ligado y libres $\overline{W} = \overline{W'} + \overline{W''}$. Entonces

$$w' = \overline{W'}(4\pi/\Gamma);\quad w'' = \overline{W''}(4\pi/\Gamma);\quad w = \overline{W}(4\pi/\Gamma). \quad (9.68)$$

Así, pues,

$$w(\xi_0, \zeta_0, \chi) = w'(\xi_0, \zeta_0, \chi) + w''(\xi_0, \zeta_0, \chi), \quad (9.69)$$

donde

$$w'(\xi_0, \zeta_0, \chi) = -(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)[\bar{a}\sqrt{1 - \cos^2\alpha_1}]^{-1}, \quad (9.70)$$

$$w''(\xi_0, \zeta_0, \chi) = -(1 + \cos\beta_1)(0{,}5\,\bar{l}_0 - \zeta_0)^{-1} -$$
$$-(1 + \cos\beta_2)(0{,}5\,\bar{l}_0 + \zeta_0)^{-1}. \quad (9.71)$$

Realizamos los cálculos numéricos:

$$\bar{l}_0 = l_0/b = 1{,}2;\quad \xi_0 = x/b = 0{,}25;\quad \zeta_0 = z/b = 0{,}125;$$
$$\bar{a} = 0{,}1636;\ \bar{c} = 0{,}5442;\ \cos\alpha_1 = 0{,}3388;\ \cos\alpha_2 = 0{,}9590;$$
$$\cos\beta_1 = 0{,}6455;\ \cos\beta_2 = 0{,}7247.$$

En correspondencia con (9.70), (9.71) y (9.69)

$$w'(\xi_0, \zeta_0, \chi) = -8{,}434;\ w''(\xi_0, \zeta_0, \chi) = -17{,}76;$$
$$w(\xi_0, \zeta_0, \chi) = -26{,}194.$$

A continuación determinamos:

$$\Gamma/(4\pi) = [\Gamma_0/(V_\infty b)]/(4\pi) = 0{,}7962\cdot 10^{-3};$$

$$\overline{W} = W/V_\infty = W'/V_\infty + W''/V = -0{,}02086;\quad W = W' + W'' = 2{,}086\ \text{m/s}.$$

9.29. Sobre el punto M $(x_1, 0, z_0)$ actúan el vórtice ligado AB de intensidad $\Gamma_0(t_0)$, los vórtices libres de intensidad $\Gamma_1(x_1, t_0)$ y $\Gamma_2(x_2, t_0)$, así como una banda vorticial constituida de vórtices libres que salen del haz de torbellinos ligado [la intensidad de la banda se determina por la intensidad de la capa vorticial $d\Gamma = \gamma(x, t_0)\,dx$, donde $\gamma(x, t_0)$ es la intensidad lineal de la capa en el momento t_0].

1. De acuerdo con (9.70) la velocidad adimensional inducida

$$w'(\xi_0, \zeta_0, \chi) = -(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)\left(4\pi\bar{a}\sqrt{1-\cos^3\alpha_1}\right), \tag{9.72}$$

donde $\bar{a} = a/b$ se da con la fórmula (9.64), mientras que $\cos\alpha_1$ y $\cos\alpha_2$ se determinan mediante la fórmula (9.63).

Según (9.68) la velocidad inducida

$$W' = [(\Gamma_0(t_0)/(4\pi b)]\, w'(\xi_0, \chi, \zeta_0) =$$
$$= -[\Gamma_0(t_0)/(4\pi b)](\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)\left(4\pi\bar{a}\sqrt{1-\cos^2\alpha_1}\right)^{-1}. \tag{9.73}$$

2. Las velocidades dV_1'' y dV_2'' inducidas por los elementos de los vórtices libres *1* y *2* se determinan con las fórmulas de Biot — Savart:

$$dV_1'' = -[\Gamma_1(x, t_0)/(4\pi a'^2)] \operatorname{sen}\beta'\, dx;$$
$$dV_2'' = -[\Gamma_2(x, t_0)/(4\pi c'^2)] \operatorname{sen}\beta''\, dx.$$

Como $\operatorname{sen}\beta' = (0{,}5\, l_0 - z_0)/a'$, $\operatorname{sen}\beta'' = (0{,}5\, l_0 + z_0)/c'$, entonces $dV_1'' = -\Gamma_1(x, t_0)(0{,}5\, l_0 - z_0)\, dx/(4\pi\, a'^3)$, $dV_2'' = -\Gamma_2(x, t_0)(0{,}5\, l_0 + z_0) dx/(4\pi c'^3)$.

La magnitud a' es la distancia entre los puntos $M(x_0, z_0)$ y $A'(x, 0{,}5\, l_0)$, igual a $a' = [(x_0 - x)^2 + (0{,}5\, l_0 - z_0)^2]^{1/2}$. El valor de c' se determina como la distancia entre los puntos $M(x_0, z_0)$ y $B'(x, -0{,}5\, l_0)$, igual a $c' = [(x_0 - x)^2 + (0{,}5\, l_0 + z_0)^2]^{1/2}$.

Integrando por x desde $0{,}5\, l_0 \operatorname{tg}\chi$ y $-0{,}5\, l_0 \operatorname{tg}\chi$ hasta ∞ y pasando a los parámetros geométricos adimensionales $\xi_0 = x_0/b$, $\zeta_0 = z_0/b$, $\bar{l}_0 = l_0/b$ (donde b es cierta dimensión lineal característica), obtenemos

$$\left.\begin{aligned} V_1'' &= -\frac{1}{4\pi b}\int\limits_{0,5\bar{l}_0 \operatorname{tg}\chi}^{\infty} \frac{\Gamma_1(x, t_0)(0{,}5\bar{l}_0 - \zeta_0)\, d\xi}{[(\xi_0 - \xi)^2 + (0{,}5\bar{l}_0 - \zeta_0)^2]^{3/2}}, \\ V_2'' &= -\frac{1}{4\pi b}\int\limits_{-0,5\bar{l}_0 \operatorname{tg}\chi}^{\infty} \frac{\Gamma_2(x, t_0)(0{,}5\bar{l}_0 + \zeta_0)\, d\xi}{[(\xi_0 - \xi)^2 + (0{,}5\bar{l}_0 + \zeta_0)^2]^{3/2}}. \end{aligned}\right\} \tag{9.74}$$

La velocidad sumaria inducida por los vórtices libres es igual a $V_1'' + V_2''$.

La intensidad de los haces de torbellinos libres *1* y *2* $[\Gamma_1(x, t_0), \Gamma_2(x, t_0)]$ en los correspondientes puntos, en cierto momento de tiempo t_0, se determina por la intensidad del vórtice ligado en ese mismo momento de tiempo, es decir, en el instante del derramamiento de semejantes haces. Como el vórtice libre sale de los extremos del haz de torbellinos ligado a la velocidad del flujo incidente, es evidente que al punto A', situado en el vórtice derecho, en el momento t_0 le corresponde el momento de derrame $t_0 - (x - 0{,}5\, l_0 \operatorname{tg}\chi)/V_\infty$, en tanto que para el punto B' en el vórtice izquierdo, el momento $t_0 - (x + 0{,}5\, l_0 \operatorname{tg}\chi)/V_\infty$. Por ello, las funciones

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_1(x, t_0) &= \Gamma_0[t_0 - (x - 0{,}5 l_0 \operatorname{tg}\chi)/V_\infty], \\ \Gamma_2(x, t_0) &= \Gamma_0[t_0 - (x + 0{,}5 l_0 \operatorname{tg}\chi)/V_\infty]. \end{aligned}\right\} \tag{9.75}$$

3. Analicemos la velocidad inducida por la banda de vórtices libres que salen del haz ligado. De acuerdo con la fig. 9.6 en el punto $M(x_0, z_0)$ el valor elemental de la velocidad inducida $dV' = -[d\Gamma/(4\pi h')](\cos\alpha' + \cos\alpha'')$. Tomando aquí

$d\Gamma = \gamma(x, t_0)\,dx$, $h' = (x_0 - x)\cos\chi - z_0 \operatorname{sen}\chi$, pasando a las coordenadas adimensionales $\xi = x/b$, $\zeta = z/b$ e integrando por ξ desde 0 hasta ∞, obtenemos

$$V' = -\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{\gamma(x, t_0)(\cos\alpha' + \cos\alpha'')\,d\xi}{(\xi_0 - \xi)\cos\chi - \zeta_0 \operatorname{sen}\chi}. \qquad (9.76)$$

Los cosenos de los ángulos α' y α'' son hallados con ayuda de la fig. 9.6 por analogía con (9.63):

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha' &= \frac{0{,}5\bar{l}_0/\cos\chi - (\xi_0 - \xi)\operatorname{sen}\chi - \zeta_0\cos\chi}{[(\xi_0 - \xi - 0{,}5\bar{l}_0 \operatorname{tg}\chi)^2 + (0{,}5\bar{l}_0 - \zeta_0)^2]^{1/2}},\\ \cos\alpha'' &= \frac{0{,}5\bar{l}_0/\cos\chi + (\xi_0 - \xi)\operatorname{sen}\chi + \zeta_0\cos\chi}{[(\xi_0 - \xi + 0{,}5\bar{l}_0 \operatorname{tg}\chi)^2 + (0{,}5\bar{l}_0 + \zeta_0)^2]^{1/2}}.\end{aligned}\right\} \qquad (9.77)$$

En el caso de movimiento no estacionario del ala la intensidad del vórtice ligado varía en el tiempo, es decir, $\Gamma_0 = \Gamma_0(t_0)$. En correspondencia con la condición de la constancia de circulación por un contorno cerrado **(teorema de Thomson)** dicha variación de la intensidad se acompaña del derrame de vórtices libres, que se mueven a la velocidad V_∞ y que en el plano del ala forman una banda vorticial. En el momento de tiempo t_0 la intensidad de la capa vorticial, paralela al vórtice ligado y alejada de él a la distancia x, es igual a $\gamma(x, t_0)\,dx$ y se determina con el valor $-d\Gamma(t_1)$, es decir, con la intensidad del vórtice ligado en el momento de derrame $t_1 = t_0 - x/V_\infty$. De acuerdo con esto

$$\gamma(x, t_0) = -d\Gamma_0(t_1)/dx = -(1/V_\infty)\,d\Gamma_0(t_1)/dt_1, \qquad (9.78)$$

donde

$$t_1 = t_0 - x/V_\infty. \qquad (9.79)$$

La velocidad sumaria inducida por un vórtice no estacionario ligado, haces de torbellinos libres y la banda vorticial

$$V = W' + V_1'' + V_2'' + V'. \qquad (9.80)$$

Realicemos los cálculos numéricos para las condiciones prefijadas de circulación y los parámetros geométricos adimensionales: $\bar{l}_0 = l_0/b = 0{,}5$: $\xi_0 = x_0/b = 0{,}25$; $\zeta_0 = z_0/b = 0{,}125$.

1. De (9.63) hallamos $\cos\alpha_1 = 0{,}3386$; $\cos\alpha_2 = 0{,}9591$.

De acuerdo con la fig. 9.5 $a\sqrt{1 - \cos^2\alpha_1} = h/b = \xi_0\cos\chi - \zeta_0\operatorname{sen}\chi = 0{,}154$. Teniendo en cuenta (9.73) y $\Gamma_0 = 0{,}002\,V_\infty bt$, obtenemos $W' = 0{,}1341\,t$ m/s.

2. En correspondencia con (9.75)

$\Gamma_1(x, t) = 0{,}002\,V_\infty b\,[t - b(\xi - 0{,}5\,\bar{l}_0 \operatorname{tg}\chi)/V_\infty] = -0{,}2\,b\,[t - 0{,}02\,(\xi - 0{,}1444)]$;

$$\Gamma_2(x, t) = 0{,}2\,b\,[t - 0{,}02\,(\xi + 0{,}1444)].$$

Introduzcamos estos y otros datos en (9.74). Integrando obtenemos

$$V_1'' = -0{,}2096\,(t - 0{,}03273);\quad V_2'' = -0{,}07322\,(t - 0{,}06613).$$

3. De acuerdo con (9.78) $\gamma(x, t) = (-1/V_\infty)\,d\Gamma_0(t_1)/dt_1 = -0{,}004$.

A continuación, con (9.77) hallamos

$$\cos\alpha' = (0{,}0552 + 0{,}5\,\xi)/[(0{,}1056 - \xi)^2 + 0{,}01562]^{1/2};$$

$$\cos\alpha'' = (0{,}5219 - 0{,}5\,\xi)/[(0{,}3944 - \xi)^2 + 0{,}1406]^{1/2}$$

y calculamos $(\xi_0 - \xi)\cos\chi - \zeta_0 \operatorname{sen}\chi = 0{,}154 - 0{,}866\,\xi$. Todos estos resultados se introducen en (9.76). La integración numérica proporciona el valor $V' = -0{,}1459$.

Así, pues, la velocidad inducida sumaria $V = W' + V_1'' + V_2'' + V' = -0{,}1546\,t + 0{,}1601$ m/s. En particular, en el momento de tiempo $t = 5$ s la velocidad inducida $V = -0{,}6129$ m/s.

9.30. 1. En correspondencia con (9.62) la velocidad inducida por el vórtice ligado

$$W' = -[\Gamma_0/(4\pi b)](\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)/\xi_0, \tag{9.81}$$

donde

$$\cos\alpha_1 = \frac{0{,}5\bar{l}_0 - \zeta_0}{[\xi_0^2 + (0{,}5\bar{l}_0 - \zeta_0)^2]^{1/2}}; \quad \cos\alpha_2 = \frac{0{,}5\bar{l}_0 + \zeta_0}{[\xi_0^2 + (0{,}5\bar{l}_0 + \zeta_0)^2]^{1/2}}. \tag{9.82}$$

La velocidad inducida por los vórtices libres izquierdo y derecho

$$W'' = -\frac{\Gamma_0}{4\pi b}\left(\frac{1+\cos\beta_1}{0{,}5\bar{l}_0 - \zeta_0} + \frac{1+\cos\beta_2}{0{,}5\bar{l}_0 + \zeta_0}\right), \tag{9.83}$$

donde $\cos\beta_1 = \xi_0/\bar{a}$; $\cos\beta_2 = \xi_0/\bar{c}$;

$$\bar{a} = a/b = [\xi_0^2 + (0{,}5\bar{l}_0 - \zeta_0)^2]^{1/2}, \quad \bar{c} = c/b = [\xi_0^2 + (0{,}5\bar{l}_0 + \zeta_0)^2]^{1/2}. \tag{9.84}$$

Para los valores $\xi_0 = x_0/b = 0{,}25$; $\zeta_0 = z_0/b = 0{,}125$; $\bar{l}_0 = l_0/b = 1/2$, hallamos

$$\cos\alpha_1 = 0{,}4472; \quad \cos\alpha_2 = 0{,}8321; \quad W' = -0{,}4074 \text{ m/m}.$$

Seguidamente calculamos:

$$\cos\beta_1 = 0{,}8944; \quad \cos\beta_2 = 0{,}5547; \quad W'' = -1{,}536 \text{ m/s};$$
$$W = W' + W'' = -1{,}943 \text{ m/s}.$$

2. De acuerdo con (9.73) la velocidad inducida por el vórtice ligado

$$W' = -[\Gamma_0(t_0)/(4\pi b)](\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)/\xi_0. \tag{9.85}$$

Las velocidades debidas a los vórtices no estacionarios *1* y *2* se calculan con (9.74) a condición de que $\chi = 0$;

$$\left.\begin{aligned} V_1'' &= -\frac{1}{4\pi b}\int_0^\infty \frac{\Gamma_1(x, t_0)(0{,}5\bar{l}_0 - \zeta_0)\,d\xi}{[(\xi_0-\xi)^2 + (0{,}5\bar{l}_0 - \zeta_0)^2]^{3/2}}; \\ V_2'' &= -\frac{1}{4\pi b}\int_0^\infty \frac{\Gamma_2(x, t_0)(0{,}5\bar{l}_0 + \zeta_0)\,d\xi}{[(\xi_0-\xi)^2 + (0{,}5\bar{l}_0 + \zeta_0)^2]^{3/2}}, \end{aligned}\right\} \tag{9.86}$$

donde $\Gamma_1(x, t_0) = \Gamma_0(t_0 - x/V_\infty)$; $\Gamma_2(x, t_0) = \Gamma_0(t - x/V_\infty)$.

La banda vorticial induce una velocidad determinada con la fórmula (9.76), la que con $\chi = 0$ toma la forma

$$V' = -1/(4\pi)\int_0^\infty \gamma(\xi, t_0)(\cos\alpha' + \cos\alpha'')\,d\xi/(\xi_0 - \xi). \tag{9.87}$$

Aquí

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha' &= (0{,}5\bar{l}_0-\zeta_0)\,[(\xi_0-\xi)^2+(0{,}5\bar{l}_0-\zeta_0)^2]^{1/2};\\ \cos\alpha'' &= (0{,}5\bar{l}_0+\zeta_0)\,[(\xi_0-\xi)^2+(0{,}5\bar{l}_0+\zeta_0)^2]^{1/2}; \end{aligned}\right\} \quad (9.88)$$

$$\gamma(x,\ t_0) = -(1/V_\infty)d\Gamma_0(t_0)/dt_1;\ t_1 = t_0 - x/V_\infty. \quad (9.89)$$

Introducimos los valores numéricos en (9.85) y hallamos

$$W' = -\ 0{,}08148\ t\ \text{m/s}.$$

Tomando en consideración que $\Gamma_1\ (x,\ t_0) = \Gamma_2\ (x,\ t_0) = 0{,}002\ b\ (V_\infty t - b\xi)$ e integrando (9.86), obtenemos

$$V_1'' = -\ 0{,}2418\ \ (t - 0{,}00559)\ \text{m/s};\ \ V_2'' = -\ 0{,}066\ \ (t - 0{,}009011)\ \text{m/s}.$$

Más adelante calculamos

$$\cos\alpha' = (0{,}5\cdot 0{,}5-0{,}125)/[(0{,}25-\xi)^2+(0{,}5\cdot 0{,}5-0{,}125)^2]^{1/2};$$
$$\cos\alpha'' = (0{,}5\cdot 0{,}5-0{,}125)/[(0{,}25-\xi)^2+(0{,}5\cdot 0{,}5+0{,}125)^2]^{1/2};$$
$$\gamma\ (x,\ t_0) = -\ (1/V_\infty)\ d\Gamma_0\ (t_1)/dt_1 = -\ 0{,}002\ b.$$

Poniendo en (9.87) los correspondientes valores e integrando, obtenemos $V' = -\ 0{,}3012$ m/s.

La velocidad inducida sumaria

$$V = W' + V_1' + V_2'' + V' = -\ 0{,}3079\ (t + 7{,}282)\ \text{m/s}.$$

9.31. Consideremos la variación armónica de la circulación de un vórtice ligado según la ley de los senos, de acuerdo con la cual

$$\Gamma_0\ (t) = V_\infty b\Gamma\ \text{sen}\ pt, \quad (9.90)$$

donde Γ es una constante adimensional que caracteriza la amplitud de las oscilaciones; p, la frecuencia circular; b, cierta dimensión lineal.

La intensidad de los haces libres de torbellinos *1* y *2* (véase la fig. 9.6) ha de representarse en correspondencia con (9.75). Introduciendo $\xi = x/b$, $\bar{l}_0 = l_0/b$, $\tau_0 = t_0V_\infty/b$ y el número de Strouhal $p^* = p\ b/V_\infty$, obtenemos

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_1\,(x,\ t_0) &= V_\infty b\Gamma\,\{\text{sen}\,p^*\tau_0\cos[p^*(\xi-0{,}5\bar{l}_0\,\text{tg}\,\chi)]-\\ &\quad-\cos p^*\tau_0\,\text{sen}\,[p^*(\xi-0{,}5\bar{l}_0\,\text{tg}\,\chi)]\};\\ \Gamma_2\,(x,\ t_0) &= V_\infty b\Gamma\,[\{\text{sen}\,p^*\tau_0\cos[p^*(\xi+0{,}5\bar{l}_0\,\text{tg}\,\chi)]-\\ &\quad-\cos p^*\tau_0\,\text{sen}\,[p^*(\xi+0{,}5\bar{l}_0\,\text{tg}\,\chi)]\}. \end{aligned}\right\} \quad (9.91)$$

La intensidad lineal adimensional de la banda vorticial

$$\gamma\ (x,\ t_0) = -\ V_\infty\Gamma p^*\ (\cos p^*\tau_0\cos p^*\xi + \text{sen}\ p^*\tau_0\ \text{sen}\ p^*\xi). \quad (9.92)$$

Introduciendo (9.90) en (9.73) obtenemos la velocidad inducida debida al vórtice ligado

$$W' = -\ [V_\infty\Gamma/(4\pi)][\ \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)/(\xi_0\cos\chi - \zeta_0\ \text{sen}\ \chi)]\ \text{sen}\ p^*\tau =$$
$$= [V_\infty\Gamma/(4\pi)]\ w'\ (\xi_0,\ \zeta_0,\ \chi)\ \text{sen}\ p^*\ \tau. \quad (9.93)$$

Con el fin de determinar las velocidades inducidas por los vórtices libres introduzcamos las dependencias (9.91) para Γ_1 y Γ_2 en (9.74)

$$\left.\begin{aligned} V_1'' = \frac{V_\infty \Gamma}{4\pi} \operatorname{sen} p^*\tau_0 & \underbrace{\int_{0,5\bar{l}_0 \operatorname{tg}\chi}^{\infty} \frac{-\cos[p^*(\xi - 0,5\bar{l}_0 \operatorname{tg}\chi)](0,5\bar{l}_0 - \zeta_0)\,d\xi}{[(\xi_0-\xi)^2 + (0,5\bar{l}_0 - \zeta_0)^2]^{3/2}}}_{v_{11}'(\xi_0,\,\zeta_0,\,\chi,\,p^*)} + \\ + \cos p^*\tau_0 & \underbrace{\int_{-0,5\bar{l}_0 \operatorname{tg}\chi}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}[p^*(\xi - 0,5\bar{l}_0 \operatorname{tg}\chi)](0,5\bar{l}_0 - \zeta_0)\,d\xi}{[(\xi_0-\xi)^2 + (0,5\bar{l}_0 - \zeta_0)^2]^{3/2}}}_{v_{12}'(\xi_0,\,\zeta_0,\,\chi,\,p^*)} ; \end{aligned}\right\} \quad (9.94)$$

$$\left.\begin{aligned} V_2'' = \frac{V_\infty \Gamma}{4\pi} \operatorname{sen} p^*\tau_0 & \underbrace{\int_{-0,5\bar{l}_0 \operatorname{tg}\chi}^{\infty} \frac{-\cos[p^*(\xi + 0,5\bar{l}_0 \operatorname{tg}\chi)](0,5\bar{l}_0 + \zeta_0)\,d\xi}{[(\xi_0-\xi)^2 + (0,5\bar{l}_0 + \zeta_0)^2]^{3/2}}}_{v_{21}'(\xi_0,\,\zeta_0,\,\chi,\,p^*)} + \\ + \cos p^*\tau_0 & \underbrace{\int_{-0,5\bar{l}_0 \operatorname{tg}\chi}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}[p^*(\xi + 0,5\bar{l}_0 \operatorname{tg}\chi)](0,5\bar{l}_0 + \zeta_0)\,d\xi}{[(\xi_0-\xi)^2 + (0,5\bar{l}_0 + \zeta_0)^2]^{3/2}}}_{v_{22}'(\xi_0,\,\zeta_0,\,\chi,\,p_0^*)} . \end{aligned}\right\} \quad (9.95)$$

La influencia de la banda vorticial, cuando la variación de la circulación es senoidal, se determina sustituyendo en (9.76) $\gamma(x, t_0)$ de (9.92):

$$\left.\begin{aligned} V'' = \frac{V_\infty \Gamma p^*}{4\pi} \cos p^*\tau_0 & \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{-\cos p^*\xi\,(\cos\alpha' + \cos\alpha'')\,d\xi}{(\xi_0-\xi)\cos\chi - \zeta_0 \operatorname{sen}\chi}}_{v_2'(\xi_0,\,\zeta_0,\,\chi,\,p^*)} + \\ + \operatorname{sen} p^*\tau_0 & \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{-\operatorname{sen} p^*(\cos\alpha' + \cos\alpha'')\,d\xi}{(\xi_0-\xi)\cos\chi - \zeta_0 \operatorname{sen}\chi}}_{v_1'(\xi_0,\,\zeta_0,\,\chi,\,p^*)} . \end{aligned}\right\} \quad (9.96)$$

La velocidad inducida total

$$V = W' + V_1'' + V_2'' + V' = [V_\infty\Gamma/(4\pi)]v\,(\xi_0,\ \zeta_0,\ \chi,\ p^*,\ \tau_0), \quad (9.97)$$

donde

$$\left.\begin{aligned} & v = v^{(1)}(\xi_0, \zeta_0, \chi, p^*) \operatorname{sen} p^*\tau_0 + v^{(2)}(\xi_0, \zeta_0, \chi, p^*) \cos p^*\tau_0; \\ & v^{(1)} = w'(\xi_0, \zeta_0, \chi) + v_{11}'(\xi_0, \zeta_0, \chi, p^*) + v_{21}'(\xi_0, \zeta_0, \chi, p^*) + \\ & \qquad + p^* v_1'(\xi_0, \zeta_0, \chi, p^*); \\ & v^{(2)} = v_{12}'(\xi_0, \zeta_0, \chi, p^*) + v_{22}'(\xi_0, \zeta_0, \chi, p^*) + p^* v_2'(\xi_0, \zeta_0, \chi, p^*). \end{aligned}\right\} \quad (9.98)$$

9.32. Adoptemos la ley senoidal de variación de la circulación (9.90). Introduciendo el número de Strouhal $p^* = pb/V_\infty$ y $\tau = tV_\infty/b$, obtenemos para la circulación

$$\Gamma_0(t) = V_\infty b\Gamma \operatorname{sen} p^*\tau, \quad (9.99)$$

donde b es cierta dimensión lineal, Γ, un parámetro adimensional que determina la amplitud de las oscilaciones.

Los valores de las velocidades inducidas por los vórtices ligado y libres, así como por la banda vorticial para la variación armónica $\Gamma_0(t)$ se proporcionan con las relaciones (9.93)—(9.96).

De la relación (9.98) para $v^{(1)}$ se desprende que con pequeños números $p^* \to 0$

$$v^{(1)}|_{p^*\to 0} = w'(\xi_0, \zeta_0, \chi) + v'_{11}(\xi_0, \zeta_0, \chi, p^*)|_{p^*\to 0} + v'_{21}(\xi_0, \zeta_0, \chi, p^*)|_{p^*\to 0}. \quad (9.100)$$

Como con $p^* \to 0$ el valor de $\cos[p^*(\xi - 0{,}5\,\bar{l}_0\,\mathrm{tg}\,\chi] \to 1$, de acuerdo con (9.94) y (9.95)

$$v'_{11}|_{p^*\to 0} = -(0{,}5\bar{l}_0 - \zeta_0)\int_0^{\infty}[(\xi_0 - \bar{\xi} - 0{,}5\bar{l}_0\,\mathrm{tg}\,\chi)^2 + (0{,}5\bar{l}_0 - \zeta_0)^2]^{-3/2}\,d\bar{\xi}, \quad (9.101)$$

donde $\bar{\xi} = \xi - 0{,}5\bar{l}_0\,\mathrm{tg}\,\chi$.

Más adelante hallamos

$$v'_{21}|_{p^*\to 0} = -(0{,}5\bar{l}_0 + \zeta_0)\int_0^{\infty}[(\xi_0 - \bar{\xi} + 0{,}5\bar{l}_0\,\mathrm{tg}\,\chi)^2 + (0{,}5\bar{l}_0 + \zeta_0)^2]^{-3/2}\,d\bar{\xi}, \quad (9.102)$$

donde $\bar{\xi} = \xi + 0{,}5\bar{l}_0\,\mathrm{tg}\,\chi$.

Las integrales (9.101), (9.102) son resolubles y pueden calcularse. La función adimensional (9.100), que determina la velocidad inducida cuando $p^* \to 0$, no depende del número de Strouhal.

Analicemos la función $v^{(2)}$ (9.98). Las componentes v'_{12}, v'_{22}, v'_2 de esta función con $p^* \to 0$, en correspondencia con (9.94)— (9.96), tienen la siguiente forma:

$$v'_{12} = p^*\int_{-0{,}5\bar{l}_0\,\mathrm{tg}\,\chi}^{\infty}(\xi - 0{,}5\bar{l}_0\,\mathrm{tg}\,\chi)(0{,}5\bar{l}_0 - \zeta_0)[(\xi_0 - \xi)^2 + (0{,}5\bar{l}_0 - \zeta_0)^2]^{-3/2}\,d\xi; \quad (9.103)$$

$$v'_{22} = p^*\int_{-0{,}5\bar{l}_0\,\mathrm{tg}\,\chi}^{\infty}(\xi + 0{,}5\bar{l}_0\,\mathrm{tg}\,\chi)(0{,}5\bar{l}_0 + \zeta_0)[(\xi_0 - \xi)^2 + (0{,}5\bar{l}_0 + \zeta_0)^2]^{-3/2}\,d\xi; \quad (9.104)$$

$$v'_2 = -\int_0^{\infty}(\cos\alpha' + \cos\alpha'')[(\xi_0 - \xi)\cos\chi - \zeta_0\,\mathrm{sen}\,\chi]^{-1}\,d\xi. \quad (9.105)$$

En el cálculo de la circulación no estacionaria se emplea directamente la derivada

$$\partial v^{(2)}/\partial p^*|_{p^*\to 0} = \partial v'_{12}/\partial p^*|_{p^*\to 0} + \partial v'_{22}/\partial p^*|_{p^*\to 0} + v'_2, \quad (9.106)$$

donde

$$\left.\frac{\partial v'_{12}}{\partial p^*}\right|_{p^*\to 0} = (0{,}5\bar{l}_0 - \zeta_0)\int_{-0{,}5\bar{l}_0\,\mathrm{tg}\,\chi}^{\infty}(\xi - 0{,}5\bar{l}_0\,\mathrm{tg}\,\chi)[(\xi_0 - \xi)^2 + (0{,}5\bar{l}_0 - \zeta_0)^2]^{-3/2}\,d\xi; \quad (9.107)$$

$$\left.\frac{\partial v'_{22}}{\partial p^*}\right|_{p^*\to 0} = (0{,}5\bar{l}_0 + \zeta_0)\int_{-0{,}5\bar{l}_0\,\mathrm{tg}\,\chi}^{\infty}(\xi + 0{,}5\bar{l}_0\,\mathrm{tg}\,\chi)[(\xi_0 - \xi)^2 + (0{,}5\bar{l}_0 + \zeta_0)^2]^{-3/2}\,d\xi. \quad (9.108)$$

Para los valores prefijados de $\bar{l}_0 = l_0/b = 1/2$; $\xi_0 = x_0/b = 0{,}25$; $\zeta_0 = z_0/b = 0{,}125$; $\chi = 0$ de (9.82) hallamos $\cos\alpha_1 = 0{,}4472$; $\cos\alpha_2 = 0{,}8321$ y con (9.93) calculamos $W' = -(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)/\xi_0 = -5{,}117$.

Para $\chi = 0$, después de la integración, obtenemos de (9.101), (9.102)

$$v'_{11}\,|_{p^*\to 0} = -(0{,}5\bar{l}_0-\zeta_0)^{-1}\{1+\xi_0[\xi_0^2+(0{,}5\bar{l}_0-\zeta_0)^2]\}^{-1/2} = -15{,}16;$$

$$v'_{21}\,|_{p^*\to 0} = -(0{,}5\bar{l}_0+\zeta_0)^{-1}\{1+\xi_0[\xi_0^2+(0{,}5\bar{l}_0+\zeta_0)^2]\}^{-1/2} = -4{,}146.$$

Después de la suma, obtenemos:

$$v' = w' + v'_{11}\,|_{p^*\to 0} + v'_{21}\,|_{p^*\to 0} = -24{,}43.$$

A continuación, introduciendo el valor de $a = 0{,}5\ \bar{l}_0 \mp \zeta_0$, como resultado de la integración, tendremos

$$\left.\frac{\partial v'_{12}}{\partial p^*}\right|_{p^*\to 0} = \left.\frac{\partial v'_{22}}{\partial p^*}\right|_{p^*\to 0} = -a\left[-\xi_0\left(\frac{1}{a^2}+\frac{\xi_0}{a^2\sqrt{\xi_0^2+a^2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{\xi_0^2+a^2}}\right].$$

Para $a = 0{,}5\bar{l}_0 - \zeta_0 = 0{,}125$; $\xi_0 = 0{,}25$ hallamos $\partial v'_{12}/\partial p^*\,|_{p^*\to 0} = 4{,}236$, en tanto que para $a = 0{,}5\bar{l}_0 + \zeta_0 = 0{,}375$; $\xi_0 = 0{,}25$ tenemos $\partial v'_{22}/\partial p^*\,|_{p^*\to 0} = 1{,}869$.

Seguidamente, teniendo en cuenta (9.88), hallamos el valor de v'_2 (9.105):

$$v'_2 = \ln\left(a_- + \sqrt{\xi_0^2 + a_-^2}\right)/\xi_0 + \ln\left(a_+ + \sqrt{\xi_0^2 + a_+^2}\right)/\xi_0,$$

donde $a_- = 0{,}5\ \bar{l}_0 - \zeta_0$; $a_+ = 0{,}5\ \bar{l}_0 + \zeta_0$.

Introducimos los valores de $\xi_0 = 0{,}25$; $a_- = 0{,}5\ \bar{l}_0 - \zeta_0 = 0{,}125$; $a_+ = 0{,}5\ \bar{l}_0 + \zeta_0 = 0{,}375$ y obtenemos $v'_2 = 1{,}676$. Sumando hallamos la derivada:

$$\partial v^{(2)}/\partial p^*\,|_{p^*\to 0} = \partial v'_{12}/\partial p^*\,|_{p^*\to 0} + \partial v'_{22}/\partial p^*\,|_{p^*\to 0} + v'_2 = 7{,}781.$$

Después de determinar con (9.98) el valor de v e introduciéndolo en (9.97), obtenemos:

$V = [V_\infty\Gamma/(4\pi)]\,v = [V_\infty\Gamma/(4\pi)]\,[-24{,}33 \operatorname{sen} p^*\tau_0 + 7{,}781\ p^*\cos p^*\tau_0]$.

9.33. 1. Consideremos los esquemas de corriente subsónica alrededor de la sección de la superficie de sustentación representados en la fig. 9.13, *a*, *b*. Seme-

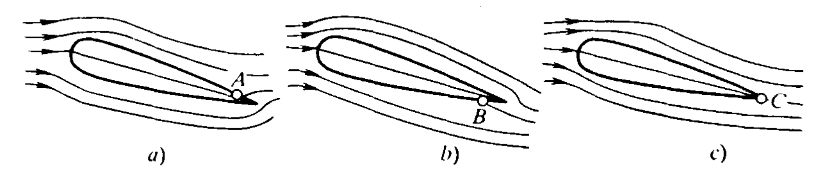


Fig. 9.13. Corriente subsónica alrededor del perfil del ala:
a y *b*, sin circulación; *c*, con circulación; *A* y *B*, puntos críticos; *C*, punto de derrame en el borde de salida

jante carácter de la corriente, cuando el punto crítico está desplazado respecto del borde de salida, se observa en raros casos y sólo en el momento inicial, a causa de la brusca variación de los parámetros del movimiento. En tal momento no surge aún la circulación, los vórtices libres no se separan de los ligados, el vórtice inicial no se derrama del borde de salida. Así, pues, a este momento corresponde el flujo sin circulación, con el que la circulación por el contorno cerrado, que abarca toda sección del ala, es nula. Es evidente que en el caso descrito no aparecen vórtices libres ni tras el ala ni en su superficie.

El esquema de corriente sin circulación también se emplea para estudiar el flujo alrededor de la superficie de sustentación al no haber velocidad de avance, así como durante el movimiento de sólidos muy alargados en un fluido incompresible o bien a pequeñas velocidades de vuelo, cuando la estela vorticial no surge tras el borde de salida. De acuerdo con esto, la capa vorticial, que simula la superficie de sustentación, puede representarse en forma de un sistema vorticial constituido por la combinación de haces cerrados de torbellinos de intensidad constante a lo largo del haz (fig. 9.14, *a*).

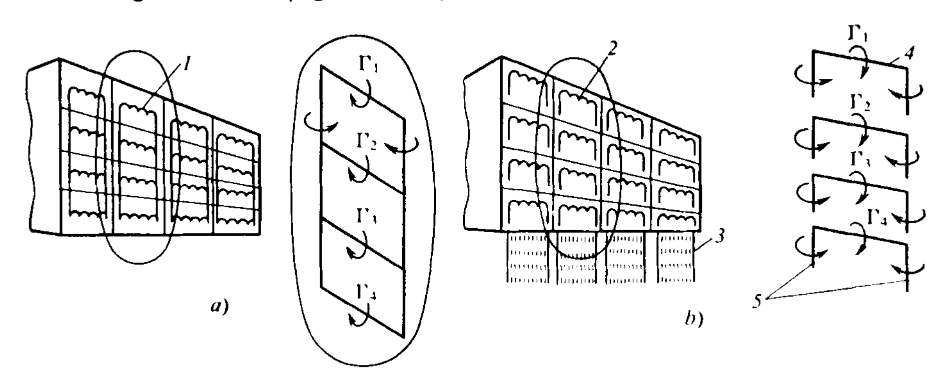


Fig. 9.14. Modelo vorticial del ala:
a y *b*, corrientes sin circulación y con circulación; *1*, vórtice cerrado; *2*, vórtice en herradura (no cerrado); *3*, banda de vórtices libres; *4* y *5*, vórtices ligado y libre

2. En correspondencia con la hipótesis de Chapliguin — Zhukovski, siendo suave la corriente alrededor del ala, por regla, el flujo no dobla el borde de salida, sino que se derrama de él (fig. 9.13, *c*). Con esto, en los bordes de salida agudos de la superficie de sustentación las velocidades son finitas. De semejantes bordes el derramamiento del flujo se acompaña del surgimiento de un vórtice inicial (original) y, como resultado, la formación de vórtices libres no estacionarios que se separan de los ligados. La variación de la intensidad de los vórtices ligados provoca el derramamiento de ellos de una banda de vórtices libres paralelos al vórtice ligado. Dicha banda se dispone en la propia superficie de separación y tras sus límites, derramándose del borde de salida. De este modo, en tal caso la circulación, alrededor de un contorno arbitrario que abarca la sección del ala, no es igual a cero.

De acuerdo con lo expuesto, la superficie vorticial que simula el ala consta de un sistema de vórtices en herradura, cada uno de los cuales es un vórtice elemental rectilíneo ligado con un par de haces libres de torbellinos, así como de la banda vorticial que sale tras el ala (fig. 9.14, *b*).

9.34. En los casos de corrientes con circulación y sin circulación, al determinar la intensidad de la capa vorticial, han de cumplirse las condiciones de frontera en el punto que se considera (de referencia), donde la componente normal de la velocidad es nula. De acuerdo con esto, la velocidad $W + \Omega_x(t)\,z + \Omega_z(t)\,x$ del flujo perturbado (donde W es la velocidad inducida por la capa vorticial en el punto de referencia) debe extinguir la correspondiente componente normal αV_∞, es decir,

$$W + \Omega_x(t)\,z + \Omega_z(t)\,x + \alpha(t)\,V_\infty = 0. \qquad (9.109)$$

Al investigar la circulación deben observarse condiciones adicionales en la superficie vorticial.

Para la corriente subsónica con circulación se emplea la hipótesis acerca del derramamiento del flujo de los bordes de salida agudos y de la velocidad finita en ellos. Con esto, la caída de presión en los bordes $\Delta p = 0$, ya que en la banda vorticial no se crea diferencia de presión. De acuerdo con esto en los bordes de salida la intensidad de la capa vorticial ligada

$$\Gamma(x, y, z, t)_{x=x_1} = 0. \tag{9.110}$$

En caso de la corriente sin circulación no hay estela vorticial tras el ala y la condición (9.110) no es necesaria. En este caso debe cumplirse el requerimiento sobre la igualdad a cero de la circulación por cualquier contorno cerrado que abarca una sección arbitraria del ala:

$$\int_{x_0}^{x_1} \Gamma(x, y, z, t)\, dx = 0. \tag{9.111}$$

Lo común para las corrientes con circulación y sin ella es la condición en el infinito, donde las velocidades perturbadas son nulas.

9.35. Examinemos una banda en el ala, que yace entre secciones vecinas con los números p y $p-1$. La coordenada del borde de ataque en la sección p recibe

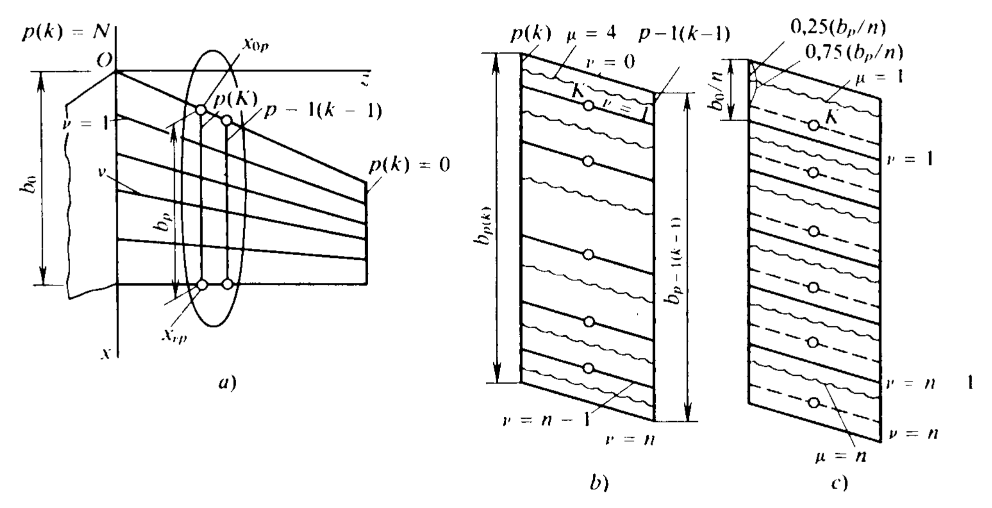


Fig. 9.15. Esquema para elegir las células en el ala, así como los vórtices discretos y los puntos de referencia K

la anotación x_{0p} y de el de salida x_{*p} (fig. 9.15, *a*, *b*, *c*). La cuerda de la sección $b_p = x_{*p} - x_{0p}$. De acuerdo con el *esquema no uniforme* dividimos la sección en n partes desiguales (células) por los puntos con coordenadas

$$\left.\begin{aligned} x_{\nu p} &= x_{0p} + 0{,}5b_p(1 - \cos \nu\pi/n) \\ x_{\nu p-1} &= x_{0p-1} + 0{,}5b_{p-1}(1 - \cos \nu\pi/n), \end{aligned}\right\} \tag{9.112}$$

donde $\nu = 0; 1; \ldots; n$.

En la celula (sección p) de una anchura $x_{\nu-1p} - x_{\nu p}$ se sitúa un vórtice discreto (suelto) en herradura. Determinamos la posición de estos vórtices del modo siguien-

te. Aplicando el mismo esquema de no uniformidad dividimos la cuerda en las secciones z_k y z_{k-1} con los puntos

$$\left.\begin{aligned} x_{\mu k} &= x_{0k} + 0{,}5b_k\,[1 - \cos(2\mu - 1)\,\pi/(2n)], \\ x_{\mu k-1} &= x_{0k-1} + 0{,}5b_{k-1}\,[1 - \cos(2\mu - 1)\,\pi/(2n)], \end{aligned}\right\} \qquad (9.113)$$

donde x_{0k}, x_{0k-1} son las coordenadas de los puntos del borde de ataque en las secciones con los números k y $k - 1$ (k es el número de la sección para el vórtice que coincide con el número p de la sección para la célula); μ, el número de orden del vórtice ligado que toma los valores $\mu = 1$ cerca del borde de ataque y $\mu = n$ en el de salida.

Tomemos que los puntos de referencia se disponen entre las secciones vecinas en el centro de las líneas trazadas por los puntos con iguales valores de ν (salvo los bordes de ataque y de salida), es decir, a igual distancia entre los vórtices libres que se derraman de un vórtice elemental discreto ligado. De acuerdo con esto, las coordenadas de los puntos de referencia

$$x^{\nu p}_{\nu p-1} = 0{,}5\,(x_{\nu p} + x_{\nu p-1}) = 0{,}5\,(x_{0p} + x_{0p-1}) + 0{,}25\,(b_p + b_{p-1})\,(1 - \cos \nu p/n); \qquad (9.114)$$

$$z^{\nu p}_{\nu p-1} = 0{,}5\,(z_p + z_{p-1}), \qquad (9.114')$$

donde $\nu = 1;\ 2;\ \ldots;\ n - 1$.

Más sencillo, aunque de menor precisión, es el *esquema uniforme*, según el cual las células tienen igual anchura y los vórtices y puntos de referencia yacen entre sí a igual distancia. Así, pues, con este esquema las cuerdas b_p y b_{p-1} se dividen en n segmentos iguales mediante puntos con coordenadas

$$x_{\nu p} = x_{0p} + (\nu/n)\,b_p; \quad x\nu_{p\nu-1} = x_{0p-1} + (\nu/n)\,b_{p-1}, \qquad (9.115)$$

donde $\nu = 1;\ 2;\ \ldots;\ n$.

En los cálculos prácticos el segmento n-ésimo se divide, por regla, en cuatro partes más y los puntos que yacen en 1/4 de la longitud del segmento (por arriba) se toman como los extremos de los vórtices discretos ligados. De acuerdo con esto, las coordenadas de los extremos

$$x_{\mu k} = x_{0k} + (\mu - 3/4)\,b_k/n;$$

$$x_{\mu k-1} = x_{0k-1} + (\mu - 3/4)\,b_{k-1}/n \ (\mu = 1;\ 2;\ \ldots;\ n). \qquad (9.116)$$

Los puntos de referencia se disponen en las líneas ν por el centro entre los vórtices libres (secciones p y $p - 1$) a una distancia de 3/4 de la longitud del segmento. He aquí las coordenadas de esos puntos:

$$\left.\begin{aligned} \xi^{\nu p}_{p-1} &= 0{,}5\,(\xi_{0p} + \xi_{0p-1}) + [(\nu - 1/4)/(2n)]\,(\bar{b}_p + \bar{b}_{p-1}); \\ \zeta^{\nu p}_{\nu p-1} &= 0{,}5\,(\zeta_{\nu p} - \zeta_{\nu p-1}) \quad (\nu = 1;\ 2;\ \ldots;\ n). \end{aligned}\right\} \qquad (9.117)$$

9.36. De acuerdo con la fig. 9.15 y tomando en consideración (9.113) para el *esquema no uniforme*, las coordenadas del centro de los vórtices ligados

$$x^{\mu k}_{\mu k-1} = 0{,}5\,(x_{0k} + x_{0k-1}) + 0{,}25\,(b_k + b_{k-1})\,[1 - \cos \pi\,(2\mu - 1)/(2n)]; \qquad (9.118)$$

$$z^{\mu k}_{\mu k-1} = 0{,}5\,(z_{\mu k} + z_{\mu k-1}) \quad (\mu = 1;\ 2;\ \ldots;\ n). \qquad (9.118')$$

La envergadura del vórtice

$$l_{kk-1} = z_{\mu k-1} - z_{\mu}k, \qquad (9.119)$$

y la tangente del ángulo de su flecha

$$\operatorname{tg} \chi_{\mu k-1}^{\mu k} = (x_{\mu k} - x_{\mu k-1})/(z_{\mu k-1} - z_{\mu k}), \tag{9.120}$$

donde $x_{\mu k}$, $x_{\mu k-1}$ son magnitudes que se determinan de (9.113).

Para el *esquema uniforme*, tomando en consideración (9.116), las coordenadas del centro del vórtice

$$\left.\begin{aligned} \xi_{\mu k-1}^{\mu k} &= 0{,}5\,(\xi_{0k} + \xi_{0k-1}) + [(\mu - 3/4)/(2n)]\,(\bar{b}_k + \bar{b}_{k-1}); \\ \zeta_{\mu k-1}^{\mu k} &= 0{,}5\,(\zeta_{\mu k} + \zeta_{\mu k-1}). \end{aligned}\right\} \tag{9.121}$$

La envergadura del vórtice

$$l_{kk-1} = z_{\mu k-1} - z_{\mu k} \tag{9.122}$$

y la tangente del ángulo de flecha

$$\operatorname{tg} \chi_{\mu k-1}^{\mu k} = (x_{\mu k-1} - x_{\mu k})/(z_{\mu k-1} - z_{\mu k}) \quad (\mu = 1;\ 2;\ \ldots;\ n+1), \tag{9.123}$$

donde $x_{\mu k-1}$, $x_{\mu k}$ son magnitudes que se determinan de (9.116).

Para $n + 1$ tenemos el último vórtice situado detrás del ala; en los cálculos su intensidad se toma igual a cero.

9.37. En la fig. 9.8 se muestra la marcación del plano de referencia del ala a condición de que el número de bandas $p\ (k) = N = 10$ y de paneles (segmentos de la cuerda) $n = 10$. Calculemos las coordenadas de los puntos que yacen en la intersección del borde de ataque con las líneas longitudinales $p\ (k)$ (a condición de que la semienvergadura $l/2$ se divide en N bandas).

En forma adimensional $\xi_{0p} = x_{0p}/b_0 = 0{,}5\ \bar{l}\ (1 - p/N)\ \operatorname{tg} \chi$. Introduciendo aquí $\bar{l} = l/b_0 = 2{,}5$; $N = 10$; $\operatorname{tg} \chi = 0{,}364$, hallamos

$$\xi_{0p} = 0{,}455\ (1 - p/10). \tag{9.124}$$

Otra coordenada adimensional

$$\zeta_{0p} = \zeta_p = z_{0p}/b_0 = 1{,}25\ (1 - p/10). \tag{9.125}$$

La cuerda del ala en la sección p (con coordenada $\zeta_p = \zeta_{0k}$) en forma adimensional (para $\xi_{*p} = b_0/b_0 = 1$)

$$\bar{b}_p = b_p/b_0 = \xi_{*p} - \xi_{0p} = 1 - 0{,}455\ (1 - p/10). \tag{9.126}$$

De (9.124) — (9.126) y teniendo en cuenta (9.117), hallamos las coordenadas de los puntos de referencia situados en las líneas ν (que pasan por las bases de las células) en el centro entre las secciones p y $p - 1$:

$$\xi_{\nu p-1}^{\nu p} = 0{,}455\,[1 - (2p - 1)/20] + 0{,}5\,\{1 - 0{,}455\,[1 - (2p - 1)/20]\} \times \\ \times (1 - \cos \nu\pi/10) \quad (\nu = 1;\ 2;\ \ldots;\ n = 10).$$

Como ejemplo examinemos la primera serie de células (el primer panel) para la que $\nu = 1$. Para los dos valores extremos de $p = N = 10$ y $p - 1 = 9$ la coordenada del punto de referencia $\xi_{1;9}^{1;10} = 0{,}0516$.

Para las secciones extremas $p = 1$ y $p - 1 = 0$ tenemos $\xi_{1;0}^{1;1} = 0{,}446$. Para los puntos de referencia en el borde de salida $\nu = n = 10$. Adoptando $p = 10$ y $p - 1 = 9$, obtenemos $\xi_{10;9}^{10;10} = 1{,}0$. También encontraremos este mismo valor para $p = 1$ y $p - 1 = 0$, es decir, $\xi_{10;0}^{10;1} = \xi_{10;9}^{10;10} = 1{,}0$.

Para el caso $p = 10$; $p - 1 = 9$ y $p = 1$; $p - 1 = 0$, determinemos las coordenadas transversales dimensionales de los puntos de referencia: $\zeta_{1;9}^{1;10} = \xi_{10;9}^{10;10} = 0{,}062$; $\zeta_{1;0}^{1;1} = \xi_{10;0}^{10;1} = 1{,}188$.

De (9.113) determinamos las coordenadas adimensionales de los extremos de los vórtices discretos:

$$\left.\begin{aligned} \xi_{\mu k} &= x_{\mu k}/b_0 = \xi_{0k} + 0{,}5\bar{b}_k\,[1 - \cos(2\mu - 1)\,\pi/(2n)]; \\ \xi_{\mu k-1} &= x_{\mu k-1}/b_0 = \xi_{0k-1} + 0{,}5\bar{b}_k\,[1 - \cos(2\mu - 1)\,\pi/(2n)], \end{aligned}\right\} \quad (9.127)$$

donde μ son los números de las líneas a lo largo de la envergadura del ala en las cuales se encuentran los vórtices; $k\ (p)$, el número de la banda (sección).

Cerca del borde de ataque ($\mu = 1$) para $k\ (p) = 10$; $k\ (p) - 1 = 9$ (la banda que hace contacto con la cuerda central), así como $k\ (p) = 1$; $k\ (p) - 1 = 0$ (la banda junto al borde lateral), hallamos $\xi_{1;\,10} = 0{,}006$; $\xi_{1;\,9} = 0{,}051$; $\xi_{1;\,1} = 0{,}413$; $\xi_{1;\,0} = 0{,}458$.

Calculemos las coordenadas de los extremos de los vórtices que se hallan en el panel junto al borde de salida ($\mu = n = 10$). Para $p = 10$ y $p - 1 = 9$ (junto a la cuerda de línea central), así como $p = 1$ y $p - 1 = 0$ (junto a la cuerda lateral) tenemos: $\xi_{10;\,10} = 0{,}994$; $\xi_{10;\,9} = 0{,}9945$; $\xi_{10;\,1} = 0{,}9965$; $\xi_{10;\,0} = 0{,}997$.

Las coordenadas de los centros de los vórtices oblicuos ligados se determinan con ayuda de (9.127):

$$\begin{aligned} \xi_{\mu k-1}^{\mu k} &= 0{,}5\,(\xi_{\mu k} + \xi_{\mu k-1}) = 0{,}5\,(\xi_{0k} + \xi_{0k-1}) + \\ &+ 0{,}25\,(\bar{b}_k + \bar{b}_{k-1})\,[1 - \cos(2\mu - 1)\,\pi/(2n)]. \end{aligned} \quad (9.128)$$

Cerca del borde de ataque ($\mu = 1$) para el vórtice en la primera célula desde arriba ($k = 10$; $k - 1 = 9$) tenemos $\xi_{1;9}^{1;10} = 0{,}5\,(\xi_{1;\,10} + \xi_{1;\,9}) = 0{,}0285$.

Junto al borde lateral ($k = 1$; $k - 1 = 0$) para la célula superior $\xi_{1;\,0}^{1;\,1} = 0{,}5\ (\xi_{1;\,1} + \xi_{1;\,0}) = 0{,}4355$.

Junto al borde de salida ($\mu = 10$; $k = 10$; $k - 1 = 9$ y $k = 1$; $k - 1 = 0$) para las células en el panel $\xi_{10;\,9}^{10;\,10} = 0{,}5\ (\xi_{10;\,10} + \xi_{10;\,9}) = 0{,}9942$ (el vórtice se encuentra cerca de la cuerda de raíz); $\xi_{10;\,0}^{10;\,1} = 0{,}5\ (\xi_{10;\,1} + \xi_{10;\,0}) = 0{,}9968$ (el vórtice se encuentra cerca de la cuerda lateral).

La envergadura de los vórtices discretos

$$\begin{aligned} \bar{l}_{kk-1} &= l_{kk-1}/b_0 = \zeta_{\mu k-1} - \zeta_{\mu k} = \\ &= 1{,}25\,[1 - (k - 1)/10] - 1{,}25\,(1 - k/10) = 0{,}125. \end{aligned}$$

y la tangente del ángulo de flecha

$$\operatorname{tg}\chi_{\mu k-1}^{\mu k} = (\xi_{\mu k-1} - \xi_{\mu k})/(\zeta_{\mu k-1} - \zeta_{\mu k}) = 8\,(\xi_{\mu k-1} - \xi_{\mu k}), \quad (9.129)$$

donde las variables $\xi_{\mu k-1}$, $\xi_{\mu k}$ se calculan mediante (9.127). Con $\mu = 1$, $k = 10$; $k - 1 = 9$; $k = 1$; $k - 1 = 0$ para los vórtices en el panel superior $\operatorname{tg}\chi_{1;\,9}^{1;\,10} = 0{,}36$; $\operatorname{tg}\chi_{1;\,0}^{1;\,1} = 0{,}36$; en el panel inferior ($\mu = 10$; $k = 10$; $k - 1 = 9$; $k = 1$; $k - 1 = 0$) $\operatorname{tg}\chi_{10;\,9}^{10;\,10} = 0{,}004$; $\operatorname{tg}\chi_{10;\,0}^{10;\,1} = 0{,}004$.

9.38. Analicemos un vórtice en la célula que se halla en el panel número μ entre las secciones k y $k - 1$ (es decir, el índice del vórtice ligado será $\mu kk - 1$).

Determinemos la circulación adimensional del *vórtice discreto* $\Gamma_{\mu k k-1} = \Gamma'_{\mu k k-1}/(b_0 V_\infty)$ como la función $\Gamma_{\mu k k-1} = f(\alpha, \dot{\alpha}, \omega_x, \dot{\omega}_x, \omega_z, \dot{\omega}_z)$. Para pequeños valores de los parámetros

$$\Gamma_{\mu k k-1} = \Gamma^{\alpha}_{\mu k k-1}\alpha + \Gamma^{\dot{\alpha}}_{\mu k k-1}\dot{\alpha} + \Gamma^{\omega_x}_{\mu k k-1}\omega_x + \Gamma^{\dot{\omega}_x}_{\mu k k-1}\dot{\omega}_x + \Gamma^{\omega_z}_{\mu k k-1}\omega_z + \Gamma^{\dot{\omega}_z}_{\mu k k-1}\dot{\omega}_z, \qquad (9.130)$$

donde las derivadas $\Gamma^{\alpha}_{\mu k k-1} = d\Gamma_{\mu k k-1}/d\alpha$, $\Gamma^{\dot{\alpha}}_{\mu k k-1} = d\Gamma_{\mu k k-1}/d\dot{\alpha}$ y otras son magnitudes que no dependen del tiempo.

Con la ley armónica de variación de los parámetros cinemáticos

$$\alpha = \alpha_0 \cos p^*_\alpha \tau; \quad \dot{\alpha} = -\alpha_0 p^*_\alpha \operatorname{sen} p^*_\alpha \tau;$$

$$\omega_x = \omega_{x0} \cos p^*_{\omega_x}\tau; \quad \dot{\omega}_x = -\omega_{x0} p^*_{\omega_x} \operatorname{sen} p^*_{\omega_x}\tau;$$

$$\omega_z = \omega_{z0} \cos p^*_{\omega_z}\tau; \quad \dot{\omega}_z = -\omega_{z0} p^*_{\omega_z} \operatorname{sen} p^*_{\omega_z}\tau,$$

donde α_0, ω_{x0}, ω_{z0} son valores de amplitud que no dependen del tiempo; $p^*_\alpha = p_\alpha b_0/V_\infty$; $p^*_{\omega_x} = p_{\omega_x} b_0/V_\infty$; $p^*_{\omega_z} = p_{\omega_z} b_0/V_\infty$, los números de Strouhal (p_α, p_{ω_x}, p_{ω_z} son las frecuencias circulares); $\tau = t V_\infty/b$, el tiempo adimensional.

Para pequeños números de Strouhal

$$\cos p^*_\alpha \tau = \cos p^*_{\omega_x}\tau = \cos p^*_{\omega_z}\tau \approx 1;$$

$$\operatorname{sen} p^*_\alpha \tau \approx p^*_\alpha \tau; \quad \operatorname{sen} p^*_{\omega_x}\tau \approx p^*_{\omega_x}\tau; \quad \operatorname{sen} p^*_{\omega_z}\tau \approx p^*_{\omega_z}\tau.$$

En correspondencia con esto

$$\Gamma_{\mu k k-1} = \sum_{i=1}^{3} (\Gamma^{q_i}_{\mu k k-1} - \Gamma^{\dot{q}_i}_{\mu k k-1} p^{*2}_i \tau)\, q^*_i, \qquad (9.131)$$

donde

$$\left.\begin{aligned} q_i &= \alpha, \ \omega_x, \ \omega_z; & \dot{q}_i &= \dot{\alpha}, \ \dot{\omega}_x, \ \dot{\omega}_z; \\ q^*_i &= \alpha_0, \ \omega_{x0}, \ \omega_{z0}; & p^*_i &= p^*_\alpha, \ p^*_{\omega_x}, \ p^*_{\omega_z}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.132)$$

1. Para el movimiento tipo "looping" $\alpha = \text{const}$; $\Omega_z = \text{const}$; $\dot{\alpha} = \dot{\omega}_z = \omega_x = \dot{\omega}_x = 0$. Por esta razón, $\Gamma_{\mu k k-1} = \Gamma^{\alpha}_{\mu k k-1}\alpha + \Gamma^{\omega_z}_{\mu k k-1}\omega_z$.

2. En el caso de la caída libre

$$\alpha \neq 0; \quad \dot{\alpha} = d\alpha/dt = g/V_\infty; \quad \Omega_x = \Omega_z = \dot{\Omega}_x = \dot{\Omega}_z = 0.$$

En correspondencia con esto

$$\Gamma_{\mu k k-1} = \Gamma^{\alpha}_{\mu k k-1}\alpha + \Gamma^{\dot{\alpha}}_{\mu k k-1}\dot{\alpha} = \Gamma^{\alpha}_{\mu k k-1}\alpha + \Gamma^{\dot{\alpha}}_{\mu k k-1}(g b_0/V^2_\infty),$$

donde $\dot{\alpha} = (d\alpha/dt)\, b_0/V_\infty$.

3. Durante el movimiento de avance bajo el ángulo de ataque $\alpha = 0$ con rotación alrededor del eje longitudinal $\Omega_x \neq 0$, $\dot{\Omega}_x \neq 0$, en tanto que $\Omega_z = \dot{\Omega}_z = 0$. Así, pues,

$$\Gamma_{\mu k k-1} = \Gamma^{\omega_x}_{\mu k k-1}\omega_x + \Gamma^{\dot{\omega}_x}_{\mu k k-1}\dot{\omega}_x. \qquad (9.133)$$

9.39. El movimiento simétrico se caracteriza por la falta de balanceo, por lo que los parámetros del flujo perturbado se distribuyen de *modo simétrico* por los lados izquierdo y derecho del ala. De acuerdo con esto las derivadas $\Gamma^{\omega_x}_{\mu k k-1} = \Gamma^{\dot{\omega}_x}_{\mu k k-1} = 0$ y en la célula que consideramos del plano de referencia

$$\Gamma_{\mu k k-1} = \Gamma^{\alpha}_{\mu k k-1}\alpha + \Gamma^{\dot{\alpha}}_{\mu k k-1}\dot{\alpha} + \Gamma^{\omega_z}_{\mu k k-1}\omega_z + \Gamma^{\dot{\omega}_z}_{\mu k k-1}\dot{\omega}_z.$$

El movimiento asimétrico sólo está condicionado por haber velocidad angular de balanceo ω_x. De acuerdo con esto:

$$\Gamma_{\mu k k-1} = \Gamma^{\omega_x}_{\mu k k-1}\omega_x + \Gamma^{\dot{\omega}_x}_{\mu k k-1}\dot{\omega}_x. \qquad (9.134)$$

9.40. Para la circulación adimensional $\Gamma_{\mu k k-1} = \Gamma'_{\mu k k-1}/(b_0 V_\infty)$ de un vórtice ligado en la célula número $\mu k k - 1$ (véase la fig. 9.8) tenemos la expresión (9.130) o bien en la forma general:

$$\Gamma_{\mu k k-1} = \sum_{i=1}^{3} [\Gamma^{q_i}_{\mu k k-1} q_i(\tau) + \Gamma^{\dot{q}_i}_{\mu k k-1}\dot{q}_i(\tau)], \qquad (9.135)$$

donde $q_i = \alpha$; ω_x, ω_z; $\dot{q}_i = \dot{\alpha}$; $\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_z$.

De acuerdo con (9.75) las intensidades de los vórtices libres pueden representarse en forma de funciones de los parámetros adimensionales $\tau = tV_\infty/b_0$; $\xi = x/b_0$; $\bar{l} = l/b_0$;

$$\Gamma_1 = \Gamma_{\mu k k-1}[\tau - (\xi^{\mu k}_{\mu k-1} - 0{,}5\bar{l}_{k k-1}\operatorname{tg}\chi^{\mu k}_{\mu k-1})];$$
$$\Gamma_2 = \Gamma_{\mu k-1}[\tau - (\xi^{\mu k}_{\mu k-1} + 0{,}5\bar{l}\operatorname{tg}\chi^{\mu k}_{\mu k-1})]. \qquad (9.136)$$

En estas dependencias $\bar{l}_{k k-1}$ es la envergadura del vórtice discreto en la célula; $\chi^{\mu k}_{\mu k-1}$, el ángulo de su flecha.

Adoptemos que las dependencias cinemáticas varían según una ley armónica

$$q_i = q_i^* \cos p_i^* \tau, \qquad (9.137)$$

donde q_i^* son los valores de amplitud de los parámetros que no dependen del tiempo; $p_i^* = p_i b_0/V_\infty$, el número de Strouhal (p_i es la frecuencia circular; $i = \alpha$, ω_x, ω_z).

La correpondiente derivada

$$\dot{q}_i = dq_i/d\tau = -q_i^* p_i^* \operatorname{sen} p_i^*\tau. \qquad (9.138)$$

Tomando en consideración (9.137) y (9.138):

$$\Gamma_{\mu k k-1} = \sum_{i=1}^{3} [q_i^*(\Gamma^{q_i}_{\mu k k-1}\cos p_i^*\tau - \Gamma^{\dot{q}_i}_{\mu k k-1} p_i^* \operatorname{sen} p_i^*\tau)]. \qquad (9.139)$$

Teniendo en cuenta (9.136), obtenemos el siguiente valor para la circulación de los vórtices libres: :

$$\Gamma_1(\xi^{\mu k}_{\mu k k-1}, \tau) = \sum_{i=1}^{3} q_i^* \{\Gamma^{q_i}_{\mu k k-1} \cos\{p_i^* [\tau - (\xi^{\mu k}_{\mu k-1} - 0{,}5\bar{l}_{k k-1} \operatorname{tg} \chi^{\mu k}_{\mu k-1})]\} -$$

$$- \Gamma^{\dot{q}_i}_{\mu k k-1} p_i^* \operatorname{sen}\{p_i^* [\tau - (\xi^{\mu k}_{\mu k-1} - 0{,}5\bar{l}_{k k-1} \operatorname{tg} \chi^{\mu k}_{\mu k-1})]\}\}; \tag{9.140}$$

$$\Gamma_2(\xi^{\mu k}_{\mu k-1}, \tau) = \sum_{i=1}^{3} q_i^* \, [\Gamma^{q_i}_{\mu k k-1} \cos\{p_i^* [\tau - (\xi^{\mu k}_{\mu k k-1} + 0{,}5\bar{l}_{k k-1} \operatorname{tg} \chi^{\mu k}_{\mu k-1})]\} -$$

$$- \Gamma^{\dot{q}_i}_{\mu k k-1} p_i^* \operatorname{sen}\{p_i^* [\tau - (\xi^{\mu k}_{\mu k-1} + 0{,}5\bar{l}_{k k-1} \operatorname{tg} \chi^{\mu k}_{\mu k-1})]\}]. \tag{9.141}$$

En correspondencia con (9.78)

$$\gamma(\xi^{\mu k}_{\mu k-1}, \tau) = -d\Gamma_{\mu k k-1}(\tau_1)/d\tau_1, \tag{9.142}$$

donde $\gamma = \gamma'/V_\infty$ es la intensidad adimensional de la banda vorticial; $\tau_1 = \tau - \xi^{\mu k}_{\mu k-1} = t_1 V_\infty / b_0$. Tomando en consideración (9.139)

$$\gamma(\xi^{\mu k}_{\mu k-1}, \tau) = \sum_{i=1}^{3} q_i^* p_i^* \, \{\Gamma^{q_i}_{\mu k k-1} \operatorname{sen}[p_i^* (\tau - \xi^{\mu k}_{\mu k-1})] +$$

$$+ \Gamma^{\dot{q}_i}_{\mu k k-1} p_i^* \, \cos[p_i^* (\tau - \xi^{\mu k}_{\mu k-1})]\}. \tag{9.143}$$

Para pequeños números de Strouhal

$$\Gamma_1 = \sum_{i=1}^{3} q_i^* \{\Gamma^{q_i}_{\mu k k-1} - \Gamma^{\dot{q}_i}_{\mu k k-1} p_i^{*2} [\tau - (\xi^{\mu k}_{\mu k-1} - 0{,}5\bar{l}_{k k-1} \operatorname{tg} \chi^{\mu k}_{\mu k-1})]\}; \tag{9.144}$$

$$\Gamma_2 = \sum_{i=1}^{3} q_i^* \{\Gamma^{q_i}_{\mu k k-1} - \Gamma^{\dot{q}_i}_{\mu k k-1} p_i^{*2} [\tau - (\xi^{\mu k}_{\mu k-1} + 0{,}5\bar{l}_{k k-1} \operatorname{tg} \chi^{\mu k}_{\mu k k-1})]\}; \tag{9.145}$$

$$\gamma = \sum_{i=1}^{3} q_i^* p_i^{*2} [\Gamma^{q_i}_{\mu k k-1} (\tau - \xi^{\mu k}_{\mu k k-1}) + \Gamma^{\dot{q}_i}_{\mu k k-1}]. \tag{9.146}$$

Para el movimiento de avance del ala (sin balanceo) y su oscilación (véase la fig. 9.12) $q_1 = \alpha$; $\dot{q}_1 = \dot{\bar{\alpha}} = \dot{\alpha}\, b_0/V_\infty$; $\omega_x = \dot{\omega}_x = \omega_z = \dot{\omega}_z = 0$. Por lo tanto, con pequeños números de Strouhal y en correspondencia con (9.131) la circulación del vórtice ligado

$$\Gamma_{\mu k k-1} = \alpha_0 (\Gamma^{\alpha}_{\mu k k-1} - \Gamma^{\dot{\bar{\alpha}}}_{\mu k k-1} p_\alpha^{*2} \tau), \tag{9.147}$$

donde $\alpha_0 = q_1^*$ es la amplitud de las oscilaciones; p_α^*, el número de Strouhal.

Según (9.144) y (9.145), la intensidad de los vórtices libres

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_1 &= \alpha_0 \{\Gamma^{\alpha}_{\mu k k-1} - \Gamma^{\dot{\bar{\alpha}}}_{\mu k k-1} p_\alpha^{*2} [\tau - (\xi^{\mu k}_{\mu k-1} - 0{,}5\bar{l}_{k k-1} \operatorname{tg} \chi^{\mu k}_{\mu k-1})]\}; \\ \Gamma_2 &= \alpha_0 \{\Gamma^{\alpha}_{\mu k k-1} - \Gamma^{\dot{\bar{\alpha}}}_{\mu k k-1} p_\alpha^{*2} [\tau - (\xi^{\mu k}_{\mu k-1} + 0{,}5\bar{l}_{k k-1} \operatorname{tg} \chi^{\mu k}_{\mu k-1})]\}. \end{aligned}\right\} \tag{9.148}$$

Basándonos en (9.146) la intensidad de la banda vorticial ligada:

$$\gamma = \alpha_0 p_\alpha^{*2} [\Gamma^{\alpha}_{\mu k k-1} (\tau - \xi^{\mu k}_{\mu k-1}) + \Gamma^{\dot{\bar{\alpha}}}_{\mu k k-1}]. \tag{9.149}$$

9.41. En el punto de referencia $\xi_{\nu p p-1}^{\nu p}$, $\zeta_{\nu p p-1}^{\nu p}$ la velocidad, inducida por cierto vórtice ligado oblicuo en herradura, situado en la célula número $\mu k k-1$ (véase la fig. 9.8), se determina con la expresión (9.73) de acuerdo con la cual

$$W'_{\nu p p-1} = -[V_\infty \Gamma_{\mu k k-1}/(4\pi)]\, w_{\nu p p-1}^{\mu k k-1}, \tag{9.150}$$

donde $w_{\nu p p-1}^{\mu k k-1}$ es una función adimensional de la velocidad determinada en correspondencia con el efecto que ejerce sobre el punto de referencia el vórtice discreto situado en la célula $\mu k k-1$. Esta función $w = w'$ se calcula por (9.72).

La circulación adimensional

$$\Gamma_{\mu k k-1} = \sum_{i=1}^{3} (\Gamma_{\mu k k-1}^{q_i} q_i + \Gamma_{\mu k k-1}^{\dot{q}_i} \dot{q}_i), \tag{9.151}$$

donde $\Gamma_{\mu k k-1}^{q_i}$, $\Gamma_{\mu k k-1}^{\dot{q}_i}$ son *funciones pares* por ζ en el caso del movimiento simétrico ($q_1 = \alpha$; ω_z; $\omega_x = 0$) e impares con el movimiento asimétrico ($q_i = \omega_x$).

En correspondencia con esto

$$W'_{\nu p p-1} = -[V_\infty/(4\pi)]\, w_{\nu p p-1}^{\mu k k-1} \sum_{i=1}^{3} (\Gamma_{\mu k k-1}^{q_i} q_i + \Gamma_{\mu k k-1}^{\dot{q}_i} \dot{q}_i). \tag{9.152}$$

La velocidad, inducida por todo el sistema vorticial en el punto de control (referencia), se halla sumando los valores de (9.152) producidos por el influjo de todos los vórtices discretos:

$$W'_{\nu p p-1} = -[V_\infty/(4\pi) \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} w_{\nu p p-1}^{\mu k k-1} \sum_{i=1}^{3} (\Gamma_{\mu k k-1}^{q_i} q_i + \Gamma_{\mu k k-1}^{\dot{q}_i} \dot{q}_i). \tag{9.153}$$

Designemos con $w_{\nu p p-1}^{\mu k k-1}$ la velocidad inducida en el punto de referencia por un vórtice discreto en el *lado derecho* con coordenadas del punto medio de este vórtice $\xi_{\mu k k-1}$, $\zeta_{\mu k k-1}$. Introduzcamos también la velocidad inducida $\sigma w_{\nu p p-1}$ en ese mismo punto de referencia por el vórtice discreto opuesto en el *lado izquierdo* (las coordenadas del punto medio del vórtice $\xi_{\mu k k-1}$, $-\zeta_{\mu k k-1}$). De acuerdo con esto, (9.153) se representa en la forma

$$W'_{\nu p p-1} = -\frac{V_\infty}{4\pi} \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} (w_{\nu p p-1}^{\mu k k-1} \pm \sigma w_{\nu p p-1}^{\mu k k-1}) \sum_{i=1}^{3} (\Gamma_{\mu k k-1}^{q_i} q_i + \Gamma_{\mu k k-1}^{\dot{q}_i} \dot{q}_i), \tag{9.154}$$

donde el signo «+» se toma para los movimientos simétricos ($q_i = \alpha$; ω_z) y el «—» para los asimétricos ($q_i = \omega_x$). Así, pues,

$$W'_{\nu p p-1} = -\frac{V_\infty}{4\pi} \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} (w_{\nu p p-1}^{\mu k k-1} + \sigma w_{\nu p p-1}^{\mu k k-1}) (\Gamma_{\mu k k-1}^{\alpha} \alpha + \Gamma_{\mu k k-1}^{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + \Gamma_{\mu k k-1}^{\omega_z} \omega_z + \Gamma_{\mu k k-1}^{\dot{\omega}_z} \dot{\omega}_z) \tag{9.155}$$

(movimiento simétrico);

$$W'_{\nu p p-1} = -\frac{V_\infty}{4\pi} \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} (w_{\nu p p-1}^{\mu k k-1} - \sigma w_{\nu p p-1}^{\mu k k-1}) (\Gamma_{\mu k k-1}^{\omega_x} \omega_x + \Gamma_{\mu k k-1}^{\dot{\omega}_x} \dot{\omega}_x) \tag{9.156}$$

(movimiento asimétrico).

En el caso de la variación armónica de los parámetros cinemáticos la circulación del vórtice en la célula

$$\Gamma_{\mu k k-1}=\sum_{i=1}^{3} q_i^* (\Gamma^{q_i}_{\mu k k-1}\cos p_i^*\tau-\dot{\Gamma}^{q_i}_{\mu k k-1} p_i^* \operatorname{sen} p_i^*\tau). \qquad (9.157)$$

De modo que

$$W'_{\nu p p-1}=-\frac{V_\infty}{4\pi}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{n}(w^{\mu k k-1}_{\nu p p-1}\pm\sigma w^{\mu k k-1}_{\nu p p-1})\times$$
$$\times\sum_{i=1}^{3}(\Gamma^{q_i}_{\mu k k-1}\cos p_i^*\tau-\dot{\Gamma}^{q_i}_{\mu k k-1} p_i^* \operatorname{sen} p_i^*\tau). \qquad (9.158)$$

Empleando el método de la división uniforme del plano en células (véase la fig. 9.8) consideremos un ejemplo numérico de cálculo del valor de $w^{\mu k k-1}_{\nu p p-1}\pm$ $\pm\sigma w^{\mu k k-1}_{\nu p p-1}$ para el punto de referencia con coordenadas (en la fig. 9.8 este punto está marcado con una cruz):

$$\zeta^{\nu p}_{\nu p-1}=\zeta^{5,\,6}_{5,\,6-1}=[0{,}5l/b_0N)](N-p)+0{,}5\,[0{,}5l/(b_0N)]=0{,}562;$$
$$\xi^{\nu p}_{\nu p-1}=\xi^{5,\,6}_{5,\,6-1}=0{,}5\,(\xi_{0p}+\xi_{0p-1})+[\nu/(2n)]\,(\bar b_p+\bar b_{p-1})=0{,}603.$$

Las coordenadas del punto medio del vórtice ligado

$$\zeta^{\mu k}_{\mu k-1}=\zeta^{5,\,6}_{5,\,6-1}=0{,}5\,(\zeta_{5,6}+\zeta_{5,\,6-1})=0{,}5\,\{(0{,}5l/bN)\,(N-k)+$$
$$+[0{,}5l/(b_0N)]\,[N-(k-1)]\}=0{,}562;$$
$$\xi^{\mu k}_{\mu k-1}=\xi^{5,\,6}_{5,\,6-1}=0{,}5\,(\xi_{0,\,6}+\xi_{0,\,6-1})+[(\mu-3/4)/(2n)]\,(\bar b_6+\bar b_{6-1})=0{,}543.$$

La tangente del ángulo de flecha del vórtice

$$\operatorname{tg}\chi^{\mu k}_{\mu k-1}=\operatorname{tg}\chi^{5,\,6}_{5,\,6-1}=\{\zeta_{0,\,6-1}-\xi_{0,\,6}+[(\mu-3/4)/(2n)]\times$$
$$\times(\bar b_{6-1}-\bar b_6)\}/(\zeta_{5,\,6-1}-\zeta_{5,\,6})=0{,}287;$$
$$(\cos\chi^{\mu k}_{\mu k-1}=0{,}962;\quad \operatorname{sen}\chi^{\mu k}_{\mu k-1}=0{,}273).$$

La envergadura relativa de vórtice

$$\bar l_{kk-1}=\bar l_{6,\,6-1}=\zeta_{\mu k-1}-\zeta_{\mu k}=\zeta_{5,\,6-1}-\zeta_{5,\,6}=0{,}125.$$

Haciendo uso de (9.62), calculamos

$$w^{\mu k k-1}_{\nu p p-1}=-(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2)/(\bar a\sqrt{1-\cos^2\alpha_1}). \qquad (9.159)$$

De (9.63) hallamos $\cos\alpha_1=0{,}636$; $\cos\alpha_2=0{,}815$. De acuerdo con (9.64) $\bar a=$ $=0{,}0754$. De este modo, $w^{\mu k k-1}_{\nu p p-1}=-24{,}931$.

Analicemos el valor de $\sigma w^{\mu k k-1}_{\nu p p-1}$ para un vórtice simétrico discreto en el lado opuesto del ala con coordenadas del punto medio

$$\sigma\zeta^{\mu k}_{\mu k-1}=\sigma\zeta^{5,\,6}_{5,\,6-1}=-0{,}562;\quad \sigma\xi^{\mu k}_{\mu k-1}=\sigma\xi^{5,\,6}_{5,\,6-1}=0{,}543.$$

Para este vórtice $\operatorname{tg}\chi^{\mu k}_{\mu k-1}=-0{,}287$; $\cos\chi^{\mu k}_{\mu k-1}=0{,}962$; $\operatorname{sen}\chi^{\mu k}_{\mu k-1}=-0{,}283$. En las fórmulas (9.63) y (9.64) $\xi_0=0{,}06$; $\zeta_0=1{,}124$.
Así, pues, $\cos\alpha_1=-0{,}939$; $\cos\alpha_2=0{,}951$.

A continuación, de (9.64) hallamos $\bar{a}=1{,}116$ y calculamos $\sigma w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}=$ $=(-0{,}0345)$; $w_{5;\,6;\,6-1}^{5;\,6;\,6-1}\pm\sigma w_{5;\,6;\,6-1}^{5;\,6;\,6-1}=-24{,}931\pm(-0{,}0345)$.

Calculemos la función w para el vórtice discreto extremo superior con el índice $\mu kk-1;=1;\,1;\,1-1$ (en la fig. 9.8 la correspondiente célula está sombreada). Las coordenadas del punto medio del sector ligado de este vórtice (punto *II* en la fig. 9.8):

$$\zeta_{\mu k-1}^{\mu k}=\zeta_{1;\,1-1}^{1;\,1}=[0{,}25l/(b_0N)]\,[2\,(N-k)+1]=1{,}188;\qquad \xi_{\mu k-1}^{\mu k}=0{,}446.$$

Las coordenadas del punto de referencia con relación al vórtice discreto [véase (9.63) y la fig. 9.8]

$$\zeta_0=\zeta_{p\nu-1}^{\nu p}-\zeta_{\mu k-1}^{\mu k}=\zeta_{5,\,6-1}^{5,\,6}-\zeta_{1,\,1-1}^{1,\,1}=-0{,}626;$$

$$\xi_0=\xi_{\nu p-1}^{\nu p}-\xi_{\mu k-1}^{\mu k}=\xi_{5;\,6-1}^{5;\,6}-\xi_{1;\,1-1}^{1;\,1}=0{,}157.$$

La inclinación del vórtice

$$\operatorname{tg}\chi_{\mu k-1}^{\mu k}=\operatorname{tg}\chi_{1;\,1-1}^{1;\,1}=0{,}36;\quad \cos\chi_{\mu k-1}^{\mu k}=0{,}943;\quad \operatorname{sen}\chi_{\mu k-1}^{\mu k}=0{,}333.$$

Con ayuda de (9.63) y (9.64) hallamos $\cos\alpha_1=0{,}861$; $\cos\alpha_2=-0{,}798$; $\bar{a}=0{,}701$.

En correspondencia con estos datos $w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}=-0{,}118$.

Calculemos la función $\sigma w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}$ para el vórtice simétrico en el lado opuesto con coordenadas del punto medio $\sigma\zeta_{\mu k-1}^{\mu k}=-1{,}188$; $\sigma\xi_{\mu k-1}^{\mu k}=0{,}446$. Para este vórtice $\operatorname{tg}\chi_{\mu k-1}^{\mu k}=-0{,}36$; $\cos\chi_{\mu k-1}^{\mu k}=0{,}943$; $\operatorname{sen}\chi_{\mu k-1}^{\mu k}=-0{,}333$.

Las coordenadas del punto de referencia con relación al vórtice que consideramos $\xi_0=0{,}157$; $\zeta_0=1{,}75$. Empleando (9.63), (9.64), calculamos $\cos\alpha_1=$ $=-0{,}904$; $\cos\alpha_2=0{,}913$; $\bar{a}=1{,}698$. Así, pues, $\sigma w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}=-0{,}079$;

$$w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}\pm\sigma w_{\nu pp-1}^{\mu kk}=-0{,}118\pm0{,}079. \tag{9.160}$$

9.42. Las velocidades inducidas por los vórtices libres izquierdo y derecho se determinan con (9.74). Su suma nos proporciona la velocidad total en el punto de referencia

$$V''_{\nu pp-1}=(V''_1+V''_2)_{\nu pp-1}. \tag{9.161}$$

Las velocidades V''_1 y V''_2 se calculan con (9.74) para los correspondientes valores de Γ_1 y Γ_2. Hagamos uso de las dependencias armónicas para dichos valores de (9.140), (9.141) y, omitiendo los índices, obtenemos

$$\begin{aligned}\Gamma_{1(2)}=V_\infty b\sum_{i=1}^{3}q_i^*\,[\Gamma^{q_i}\{&\underbrace{\cos p_i^*\tau\cos[p_i^*(\xi\mp0{,}5l_0\operatorname{tg}\chi)]}_{f'_{1(2)}}+\\&+\underbrace{\operatorname{sen}p_i^*\tau\operatorname{sen}[p_i^*(\xi\mp0{,}5\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi)]}_{f''_{1(2)}}\}-\\&-\dot{\Gamma}^{q_i}p_i^*\{\underbrace{\operatorname{sen}p_i^*\tau\cos[p_i^*(\xi\mp0{,}5\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi)]}_{f'_{1(2)}}-\\&-\underbrace{\cos p_i^*\tau\operatorname{sen}[p_i^*(\xi\mp0{,}5\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi)]}_{f''_{1(2)}}\}],\end{aligned} \tag{9.162}$$

donde los signos «+» se refieren al vórtice izquierdo Γ_1 y el «—», al vórtice derecho Γ_2.

Introduzcamos en (9.74) la anotación

$$I_{1(2)} = (0{,}5\bar{l}_0 \mp \zeta_0)/[(\xi_0 - \xi)^2 + (0{,}5\bar{l}_0 \mp \xi_0)^2]^{3/2}, \qquad (9.163)$$

donde al valor I_1 corresponde al signo «—» y a I_2, el «+».

Pongamos (9.162) y (9.163) en (9.74) y agrupemos los términos con los factores $\cos p_i^* \tau$ y $\text{sen}\, p_i^* \tau$:

$$V''_{1(2)} = -\frac{V_\infty}{4\pi} \sum_{i=1}^{3} q_i^* \Big[\Big(\Gamma^{q_i} \underbrace{\int_{\xi_{1(2)}}^{\infty} f'_{1(2)} I_{1(2)}\, d\xi}_{v_{1(2)}^{(1)}} + \dot{\Gamma}^{q_i} p_i^* \underbrace{\int_{\xi_{1(2)}}^{\infty} f''_{1(2)} I_{1(2)}\, d\xi}_{v_{1(2)}^{(2)}} \Big) \cos p_i^* \tau + \Gamma^{q_i} \underbrace{\int_{\xi_{1(2)}}^{\infty} f''_{1(2)} I_{1(2)}\, d\xi}_{v_{1(2)}^{2}} - \dot{\Gamma}^{q_i} p_i^* \underbrace{\int_{\xi_{1(2)}}^{\infty} f'_{1(2)} I_{1(2)}\, d\xi}_{v_{1(2)}^{(1)}} \Big) \text{sen}\, p_i^* \tau \Big]. \qquad (9.164)$$

La velocidad debida a ambos vórtices libres en el punto de referencia

$$V'' = V''_1 + V''_2 = -\frac{V_\infty}{4\pi} \sum_{i=1}^{3} q_i^* [(\Gamma^{q_i} v_1^{(1)} + \dot{\Gamma}^{q_i} p_i^* v_1^{(2)}) \cos p_i^* \tau + (\Gamma^{q_i} v_1^{(2)} - \dot{\Gamma}^{q_i} p_i^* v_1^{(1)}) \text{sen}\, p_i^* \tau], \qquad (9.165)$$

donde las funciones adimensionales de la velocidad

$$v_1^{(1)} = v_1^{(1)} + v_2^{(1)}, \quad v_1^{(2)} = v_1^{(2)} + v_2^{(2)}. \qquad (9.166)$$

Designemos con $\sigma v^{(1)}$ y $\sigma v^{(2)}$ las velocidades adicionales en el punto de referencia que consideramos inducidas por el vórtice opuesto oblicuo en herradura en el lado izquierdo del ala con coordenadas del punto medio $\xi_{\mu k-1}^{\mu k}$; $-\zeta_{\mu k-1}^{\mu k}$.

Los valores de $\sigma v^{(1)}$ y $\sigma v^{(2)}$ se calculan mediante (9.164) y se adicionan, cuando el movimiento es simétrico ($q_i = \alpha$; ω_z), a las correspondientes velocidades del vórtice en el lado derecho y, en el caso de movimiento asimétrico ($q_i = \omega_x$), se sustraen de dichas velocidades. De esta forma la velocidad en el punto de referencia debida a un par de vórtices discretos

$$V'' = V_{\nu pp-1}^{('')\mu kk-1} = -\frac{V_\infty}{4\pi} \sum_{i=1}^{3} q_i^* \{[\Gamma^{q_i} (v_{(1)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1} \pm \sigma v_{(1)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1}) + \dot{\Gamma}_{\mu kk-1}^{q_i} p_i^* (v_{(1)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1} \pm \sigma v_{(1)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1})] \cos p_i^* \tau + [\Gamma_{\mu kk-1}^{q_i} p_i^* (v_{(1)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1} \pm \sigma v_{(1)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1}) - \dot{\Gamma}_{\mu kk-1}^{q_i} p_i^* (v_{(1)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1} \pm \sigma v_{(1)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1})] \text{sen}\, p_i^* \tau\}. \qquad (9.167)$$

La velocidad inducida por todo el sistema vorticial

$$V''_{\nu pp-1}=\sum_{k=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{n}V_{\nu pp-1}^{(11)\mu kk-1}. \qquad (9.168)$$

Analicemos las funciones

$$v_{(1)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1}\pm\sigma v_{(1)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1};\quad v_{(1)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1}\pm\sigma v_{(1)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1} \qquad (9.169)$$

en caso de pequeños números de Strouhal ($p_i^*\to 0$). Para tales números en (9.162) podemos tomar

$$\left.\begin{aligned}&f_1'=f_2'\approx 1;\ f_1''\approx p_i^*(\xi-0{,}5\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi);\\&f_2''\approx p_i^*(\xi+0{,}5\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi).\end{aligned}\right\} \qquad (9.170)$$

Tomando esto en consideración y en correspondencia con (9.163) (9.164) y (9.166)

$$v_1^{(1)}=v_1^{(1)}+v_2^{(1)}=(0{,}5\bar{l}_0-\zeta_0)\int\limits_{0,5\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi}^{\infty}d\xi/[(\xi_0-\xi)^2+(0{,}5\bar{l}_0-\zeta_0)^2]^{3/2}+$$

$$+(0{,}5\bar{l}_0+\zeta_0)\int\limits_{0,5\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi}^{\infty}d\xi/[(\xi_0-\xi^2)+(0{,}5\bar{l}_0+\zeta_0)^2]^{3/2}; \qquad (9.171)$$

$$v_1^{(2)}=v_1^{(2)}+v_2^{(2)}=p_i^*(0{,}5\bar{l}_0-\zeta_0)\int\limits_{0,5\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi}^{\infty}\frac{(\xi-0{,}5\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi)\,d\xi}{[(\xi_0-\xi)^2+(0{,}5\bar{l}_0-\zeta_0)^2]^{3/2}}+$$

$$+p_i^*(0{,}5\bar{l}_0+\zeta_0)\int\limits_{-0,5\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi}^{\infty}\frac{(\xi+0{,}5\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi)\,d\xi}{[(\xi_0-\xi)^2+(0{,}5\bar{l}_0+\zeta_0)^2]^{3/2}}. \qquad (9.172)$$

Las integrales en (9.171) y (9.172):

$$I_{1-}=[1/(0{,}5\bar{l}_0-\zeta_0)^2]\{1+(\xi_0-0{,}5\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi)/[(\xi_0-0{,}5\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi)^2+$$
$$+(0{,}5\bar{l}_0-\zeta_0)^2]^{1/2}\}; \qquad (9.173)$$

$$I_{1+}=[1/(0{,}5\bar{l}_0+\zeta_0)^2]\{1+(\xi_0+0{,}5\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi)]/[(\xi_0+0{,}5\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi)^2+$$
$$+(0{,}5\bar{l}_0+\zeta_0)^2]^{1/2}\}. \qquad (9.174)$$

$$I_{2-}=[(\xi_0-0{,}5\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi)^2+(0{,}5\bar{l}_0-\zeta_0)^2]^{-1/2}+[(\xi_0-0{,}5\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi)/(0{,}5\bar{l}_0-\zeta_0)^2]\times$$
$$\times\{1+(\xi_0-0{,}5\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi)/[(\xi_0-0{,}5\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi)^2+(0{,}5\bar{l}_0-\zeta_0)^2]^{1/2}\}; \qquad (9.175)$$

$$I_{2+}=[(\xi_0+0{,}5\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi)^2+(0{,}5\bar{l}_0+\zeta_0)^2]^{-1/2}+$$
$$+[[\xi_0+0{,}5\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi)/(0{,}5\bar{l}_0+\zeta_0)^2]\{1+(\xi_0+0{,}5\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi)/[(\xi_0+0{,}5\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi)^2+$$
$$+(0{,}5\bar{l}_0+\zeta_0)^2]^{1/2}\}. \qquad (9.176)$$

Aducimos un cálculo numérico ligado con la determinación de las funciones $v_1^{(1)}$, $v_1^{(2)}$ para el punto de referencia con coordenadas (véase el problema 9.41)

$$\zeta_{\nu p-1}^{\nu p}=\zeta_{5;\,6-1}^{5;\,6}=0{,}562;\quad \xi_{\nu p-1}^{\nu p}=\xi_{5;\,6-1}^{5;\,6}=0{,}603.$$

Consideremos el vórtice de la célula $\mu kk-1=5{,}6,6-1$. Las coordenadas de su centro $\zeta_{\mu k-1}^{\mu k}=\zeta_{5;\,6-1}^{5;\,6}=0{,}562$; $\xi_{\mu k-1}^{\mu k}=\xi_{5;\,6-1}^{5;\,6}=0{,}543$; la tangente del ángulo de inclinación $\operatorname{tg}\bar{\chi}=\operatorname{tg}\bar{\chi}_{\mu k-1}^{\mu k}=0{,}273$, en tanto que la envergadura relativa del vórtice $l_{kk-1}=\bar{l}_0=0{,}125$. Teniendo esto en cuenta, $\zeta_0=\zeta_{\nu p-1}^{\nu p}-\zeta_{\mu k-1}^{\mu k}=0$; $\xi_0=\xi_{\nu p-1}^{\nu p}-\xi_{\mu k-1}^{\mu k}=0{,}06$; $I_{1-}=398{,}46$; $I_{1+}=455{,}24$; $v_1^{(1)}=53{,}49$; $I_{2-}=30{,}4$; $I_{2+}=45{,}13$; $v_1^{(2)}=4{,}721$.

Consideremos la célula simétrica en el lado izquierdo del ala: $\operatorname{tg}\chi_{\mu kk-1}^{\mu k}=-0{,}273$; $\xi_0=0{,}06$; $\zeta_0=1{,}124$; $I_{1-}=0{,}947$; $I_{1+}=0{,}735$; $\sigma v_1^{(1)}=-0{,}062$; $I_{2-}=1{,}10$; $I_{2+}=0{,}874$; $v_1^{(2)}=0{,}134\,p_1^*$.

Efectuemos los correspondientes cálculos para el vórtice situado en la célula sombreada en el lado derecho del ala (véase la fig. 9.8). Las coordenadas del punto de referencia respecto de ese vórtice (véase la fig. 9.8) $\zeta_0=-0{,}626$; $\xi_0=0{,}164$ y la tangente del ángulo de flecha $\operatorname{tg}\chi_{\mu k-1}^{\mu k}=0{,}36$.

Seguidamente hallamos $I_{1-}=2{,}53$; $I_{1+}=4{,}019$; $v_1^{(1)}=-0{,}5228$; $I_{2-}=1{,}767$; $I_{2+}=2{,}087$; $v_1^{(2)}=-0{,}3243\,p_1^*$.

Para el vórtice simétrico en el lado izquierdo del ala $\operatorname{tg}\chi_{\mu k-1}^{\mu k}=-0{,}36$; $\sigma\xi_0=0{,}164$; $\sigma\zeta_0=1{,}75$; $I_{1-}=0{,}3883$; $I_{1+}=0{,}3277$; $v_1^{(1)}=-0{,}6312$; $I_{2-}=0{,}6587$; $I_{2+}=0{,}5939$; $v_1^{(2)}=-0{,}2531p_1^*$.

9.43. La velocidad en el punto de referencia $\xi_{\nu p-1}^{\nu p}$, $\zeta_{\nu p-1}^{\nu p}$ provocada por el vórtice adyacente (ligado) en la célula $\mu kk-1$ puede determinarse con la fórmula (9.76) en la que la intensidad de la banda formada por este vórtice se calcula con (9.78) en la forma

$$\gamma(x,\ t)=V_\infty\gamma(\xi,\ \tau)=-V_\infty\,d\Gamma(\tau-\xi)/d(\tau-\xi). \tag{9.177}$$

Para la circulación tenemos la dependencia (9.139) de acuerdo con la cual

$$\gamma(x,\ t)=V_\infty\sum_{i=1}^{3}q_i^*p_i^*\,[\Gamma^{q_i}(\operatorname{sen}p_i^*\tau\cos p_i^*\xi-\cos p_i^*\tau\operatorname{sen}p_i^*\xi)+$$
$$+\dot{\Gamma}^{q_i}p_i^*(\cos p_i^*\tau\cos p_i^*\xi+\operatorname{sen}p_i^*\tau\operatorname{sen}p_i^*\xi)]. \tag{9.178}$$

Introduzcamos esta expresión en (9.76) y agrupemos los términos con $\cos p_i^*\tau$ y $\operatorname{sen}p_i^*\tau$:

$$V'=-\frac{V_\infty}{4\pi}\sum_{i=1}^{3}q_i^*p_i^*\Big[\Big(\Gamma^{q_i}\underbrace{\int_0^\infty I\cos p_i^*\xi\,d\xi}_{v_{(a)}^{(1)}}+$$
$$+\dot{\Gamma}^{q_i}p_i^*\underbrace{\int_0^\infty I\operatorname{sen}p_i^*\xi\,d\xi}_{v_{(a)}^{(1)}}\Big)\operatorname{sen}p_i^*\tau-\Big(\Gamma^{q_i}\underbrace{\int_0^\infty I\operatorname{sen}p_i^*\xi\,d\xi}_{v_{(a)}^{(1)}}-$$
$$-\dot{\Gamma}^{q_i}p_i^*\underbrace{\int_0^\infty I\cos p_i^*\xi\,d\xi}_{v_{a}^{(2)}}\Big)\cos p_i^*\tau\Big], \tag{9.179}$$

donde, en correspondencia con (9.76)

$$I=(\cos\alpha'+\cos\alpha'')\,[(\xi_0-\xi)\cos\chi-\zeta_0\operatorname{sen}\chi]^{-1}. \tag{9.180}$$

Introduciendo las anotaciones $\sigma v_{(a)}^{(1)}$ y $\sigma v_{(a)}^{(2)}$ para las funciones adimensionales de las velocidades inducidas por el vórtice adyacente simétrico en el lado izquierdo, con coordenadas del punto medio $\xi_{\mu k-1}^{\mu k}$, $-\zeta_{\mu k-1}^{\mu k}$, obtenemos la velocidad inducida en el punto de referencia por la banda vorticial:

$$V' = V_{\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1} = -\frac{V_\infty}{4\pi}\sum_{i=1}^{3} q_i^* p_i^* \{[\Gamma_{\mu kk-1}^{q_i} (v_{(a)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1} \pm$$

$$\pm \sigma v_{(a)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1}) + \dot{\Gamma}_{\mu kk-1}^{q_i} p_i^* (v_{(a)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1} \pm \sigma v_{(a)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1})] \times$$

$$\times \operatorname{sen} p_i^*\tau - [\dot{\Gamma}_{\mu kk-1}^{q_i} (v_{(a)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1} \pm \sigma v_{(a)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1}) -$$

$$- \dot{\Gamma}_{\mu kk-1}^{q_i} p_i^* (v_{(a)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1} \pm \sigma v_{(a)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1})] \cos p_i^*\tau\}, \qquad (9.181)$$

donde el signo «+» se refiere al movimiento simétrico y el «—», al asimétrico.

La velocidad inducida por la banda de todos los vórtices discretos

$$V'_{\nu pp-1} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{n} V_{\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1}. \qquad (9.182)$$

Consideremos los valores numéricos de las funciones:

$$v_{(a)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1} \pm \sigma v_{(a)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1} \quad \text{y} \quad v_{(a)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1} \pm \sigma v_{(a)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1}. \qquad (9.183)$$

Tomamos las dimensiones y la forma del ala las mismas que en el problema 9.37 De acuerdo con (9.179), para pequeños números de Strouhal

$$v_{(a)}^{(1)} = p_i^* \int_0^\infty \frac{\xi(\cos\alpha' + \cos\alpha'')\,d\xi}{(\xi_0-\xi)\cos\chi - \zeta_0 \operatorname{sen}\chi}, \quad v_a^{(2)} = \int_0^\infty \frac{(\cos\alpha' + \cos\alpha'')\,d\xi}{(\xi_0-\xi)\cos\chi - \zeta_0\operatorname{sen}\chi}. \qquad (9.184)$$

Según los datos del problema 9.46 tiene significado práctico la integral $v_{(a)}^{(2)}$, mientras que la magnitud $v_{(a)}^{(1)}$ se puede despreciar. Para $v_{(a)}^{(2)}$ obtenemos la expresión

$$v_{(a)}^{(2)} = \underbrace{\operatorname{tg}\chi \ln \frac{-(\xi_0 - 0{,}5\bar{l}_0 \operatorname{tg}\chi) + [(\xi_0 - 0{,}5\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi)^2 + (0{,}5\bar{l}_0 - \zeta_0)^2]^{1/2}}{-(\xi_0 + 0{,}5\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi) + [(\xi_0 + 0{,}5\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi)^2 + (0{,}5\bar{l}_0 + \zeta_0)^2]^{1/2}}}_{v_1} + \frac{v_2 + v_3}{\cos\chi}, \qquad (9.185)$$

donde

$$v_2 + v_3 = [\operatorname{sign}(0{,}5\,\bar{l}_0 - \zeta_0)/\cos\chi] \ln\{[1 - \operatorname{sen}\chi \operatorname{sign}(0{,}5\,\bar{l}_0 -$$
$$- \zeta_0)]\,|\xi_0 + \zeta_0\operatorname{tg}\chi|\,[\,|0{,}5\,\bar{l}_0 - \zeta_0|\cos\chi + (\xi_0 + 0{,}5\,\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi)\operatorname{sen}\chi \times$$
$$\times \operatorname{sign}(0{,}5\,\bar{l}_0 - \zeta_0) + [(\xi_0 + 0{,}5\,\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi)^2 + (0{,}5\,\bar{l}_0 - \zeta_0)^2]^{1/2}]^{-1}\} +$$
$$+ [\operatorname{sign}(0{,}5\,\bar{l}_0 + \zeta_0)/\cos\chi] \ln\{[1 + \operatorname{sen}\chi\operatorname{sign}(0{,}5\,\bar{l}_0 +$$
$$+ \zeta_0)]\,|\xi_0 + \zeta_0\operatorname{tg}\chi|\,[\,|0{,}5\,\bar{l}_0 + \zeta_0|\cos\chi - (\xi_0 - 0{,}5\,\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi)\operatorname{sen}\chi \times$$
$$\times \operatorname{sign}(0{,}5\,\bar{l}_0 + \zeta_0) + [(\xi_0 - 0{,}5\,\bar{l}_0\operatorname{tg}\chi)^2 + (0{,}5\,\bar{l}_0 + \zeta_0)^2]^{1/2}]^{-1}\}, \qquad (9.186)$$

donde el signo sign $y = -1;\ 0;\ +1$ correspondientemente para $y < 0$; $y = 0$; $y > 0$.

Calculemos la función que determina la velocidad inducida por la banda vorticial para el punto de referencia con coordenadas (véase el problema 9.37): $\zeta^{\nu p}_{\nu p-1} = \zeta^{5;6}_{5;6-1} = 0{,}562$; $\xi^{\nu p}_{\nu p-1} = \xi^{5;6}_{5;6-1} = 0{,}603$. Para el vórtice en la célula $\mu kk - 1 = 5;\ 6;\ 6 - 1$ (en la que yace el punto de referencia) las coordenadas del punto medio $\zeta^{\mu k}_{\mu k-1} = 0{,}562$; $\xi^{\mu k}_{\mu k-1} = 0{,}543$. La envergadura relativa del vórtice, que entra en (9.185), $\bar{l}_{kk-1} = \bar{l}_0 = 0{,}125$; $\operatorname{tg}\chi = \operatorname{tg}\chi^{\mu k}_{\mu k-1} = 0{,}273$ y $\zeta_0 = 0$; $\xi_0 = 0{,}06$. En correspondencia con estos datos $v_1 = 0{,}415$.

Con la fórmula (9.186), en la que sen $\chi = 0{,}263$ y cos $\chi = 0{,}962$, calculamos $v_2 + v_3 = -1{,}344$ y, de acuerdo con (9.185), obtenemos $v^{(2)}_{(a)} = -1{,}516$.

Analicemos el vórtice simétrico en el lado izquierdo del ala para el que $\sigma \operatorname{tg}\chi = -0{,}273$; $\sigma \cos\chi = 0{,}962$; σ sen $\chi = -0{,}263$; $\sigma\xi_0 = 0{,}06$; $\sigma\zeta_0 = 1{,}124$. Calculamos: $v_1 = -0{,}148$; $v_2 + v_3 = 0{,}1656$; $\sigma v^{(2)}_{(a)} = -0{,}2125$.

Como resultado

$$v^{(2)\mu kk-1}_{(a)\nu pp-1} \pm \sigma v^{(2)\mu kk-1}_{(a)\nu pp-1} = -1{,}456 \pm (-0{,}2125). \qquad (9.187)$$

9.44. La velocidad inducida en el punto de referencia por todo el sistema de vórtices discretos en herradura se determina sumando las componentes de los vórtices adyacentes (ligados) y libres, así como de la banda vorticial del vórtice ligado. Así, pues, la velocidad sumaria inducida se halla mediante la adición de los valores de (9.150), (9.168) y (9.182):

$$V_{\nu pp-1} = W'_{\nu pp-1} + V''_{\nu pp-1} + V'_{\nu pp-1}. \qquad (9.188)$$

Esta velocidad debería ser tal que satisficiera la *condición de la circulación adherida* alrededor de la superficie, en correspondencia con la cual la componente perturbada de la velocidad en el punto de referencia

$$V_{\nu pp-1} + \Omega_x z^{\nu p}_{\nu p-1} + \Omega_z x^{\nu p}_{\nu p-1} \qquad (9.189)$$

extingue la respectiva componente normal de la velocidad no perturbada αV_∞, es decir, la igualdad (9.109) es válida. De este modo, la *condición de frontera* (en forma edimensional)

$$V_{\nu pp-1}/V_\infty = -\omega_x \zeta^{\nu p}_{\nu p-1} - \omega_z \xi^{\nu p}_{\nu p-1} - \alpha. \qquad (9.190)$$

Determinamos la velocidad total inducida tomando en consideración (9.158), (9.168), (9.181) (omitiendo el signo de la suma $\sum_{i=1}^{3}$):

$$V_{\nu pp-1} = -\frac{V_\infty}{4\pi} \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} q_i^* [\{[(w^{\mu kk-1}_{\nu pp-1} \pm \sigma w^{\mu kk-1}_{\nu pp-1}) + (v^{(1)\mu kk-1}_{(l)\nu pp-1} \pm \sigma v^{(1)\mu kk-1}_{(l)\nu pp-1}) -$$

$$- p_i^* (v^{(1)\mu kk-1}_{(a)\nu pp-1} \pm \sigma v^{(1)\mu kk-1}_{(a)\nu pp-1})] \Gamma^{q_i}_{\mu kk-1} + p_i^* [(v^{(2)\mu kk-1}_{(l)\nu pp-1} \pm \sigma v^{(2)\mu kk-1}_{(l)\nu pp-1}) +$$

$$+ p_i^* (v^{(2)\mu kk-1}_{(a)\nu pp-1} \pm \sigma v^{(2)\mu kk-1}_{(a)\nu pp-1})] \dot{\Gamma}^{q_i}_{\mu kk-1}\} \cos p_i^*\tau + \{[(v^{(2)\mu kk-1}_{(l)\nu pp-1} \pm \sigma v^{(2)\mu kk-1}_{(l)\nu pp-1}) +$$

$$+ p_i^* (v_{(a)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1} \pm \sigma v_{(a)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1})] \Gamma_{\mu kk-1}^{q_i} - p_i^* [(w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} \pm \sigma w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}) +$$

$$+ (v_{(1)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1} \pm \sigma v_{(1)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1}) - p_i^* (v_{(a)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1} \pm \sigma v_{(a)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1})] \Gamma_{\mu kk-1}^{q_i}\} \operatorname{sen} p_i^*\tau]. \quad (9.191)$$

9.45. Para hallar las ecuaciones que permiten determinar las derivadas de la circulación en el plano de referencia, hagamos uso de la relación (9.191) para la velocidad sumaria inducida en el punto de referencia y para la condición de circulación adherida (9.190). Representemos la condición (9.191) para la variación armónica de los parámetros cinemáticos en la forma

$$V_{\nu pp-1}/V_\infty = -q_1 - q_2\zeta_{\nu p-1}^{\nu p} - q_3\xi_{\nu p-1}^{\nu p} = -q_1^* \cos p_1^*\tau -$$

$$- q_2^*\zeta_{\nu p-1}^{\nu p} \cos p_2^*\tau - q_3^*\xi_{\nu p-1}^{\nu p} \cos p_3^*\tau, \quad (9.192)$$

donde q_i tiene los valores: $q_1 = \alpha$; $q_2 = \omega_x$; $q_3 = \omega_z$; las amplitudes de las oscilaciones q_i^* y las frecuencias angulares (números de Strouhal) p_i^*:

$$q_1^* = q_\alpha^*; \quad q_2^* = q_{\omega_x}^*; \quad q_3^* = q_{\omega_z}^*; \quad p_1^* = p_\alpha^*; \quad p_2^* = p_{\omega_x}^*; \quad p_3^* = p_{\omega_z}^*. \quad (9.193)$$

El valor de (9.192) se iguala a la razón $V_{\nu pp-1}/V_\infty$ obtenido de (9.191):

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} q_1^* [(v^{(1)}\Gamma_{\mu kk-1}^{q_1} + p_1^* v^{(2)}\dot{\Gamma}_{\mu kk-1}^{q_1}) \cos p_1^*\tau +$$

$$+ (v^{(2)}\Gamma_{\mu kk-1}^{q_1} + p_1^* v^{(1)}\dot{\Gamma}_{\mu kk-1}^{q_1} \operatorname{sen} p_1^*\tau] +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} q_2^* [(v^{(1)}\Gamma_{\mu kk-1}^{q_2} + p_2^* v^{(2)}\dot{\Gamma}_{\mu kk-1}^{q_2}) \cos p_2^*\tau +$$

$$+ (v^2\Gamma_{\mu kk-1}^{q_2} + p_2^* v^{(1)}\dot{\Gamma}_{\mu kk-1}^{q_2}) \operatorname{sen} p_2^*\tau] +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} q_3^* [(v^{(1)}\Gamma_{\mu kk-1}^{q_3} + p_3^* v^{(2)}\dot{\Gamma}_{\mu kk-1}^{q_3}) \cos p_3^*\tau +$$

$$+ (v^{(2)}\Gamma_{\mu kk-1}^{q_3} + p_3^* v^{(1)}\dot{\Gamma}_{\mu kk-1}^{q_3}) \operatorname{sen} p_3^*\tau] =$$

$$= q_1^* \cos p_1^*\tau + q_2\zeta_{\nu p-1}^{\nu p} \cos p_2^*\tau + q_3^*\xi_{\nu p-1}^{\nu p} \cos p_3^*\tau, \quad (9.194)$$

donde, de acuerdo con (9.191),

$$v^{(1)} = v_{\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1} \pm \sigma v_{\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1}; \quad v^{(2)} = v_{\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1} \pm \sigma v_{\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1}. \quad (9.195)$$

Al analizar (9.194) obtenemos los tres siguientes sistemas de ecuaciones para determinar las derivadas $\Gamma^{q_i}_{\mu k k-1}$ y $\Gamma^{\dot{q}_i}_{\mu k k-1}$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{n}\left(v^{(1)\mu k k-1}_{\nu p p-1}+\sigma v^{(1)\mu k k-1}_{\nu p p-1}\right)\Gamma^{\alpha}_{\mu k k-1}+\\ &\qquad+\frac{p^*_{\alpha}}{4\pi}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{n}\left(v^{(2)\mu k k-1}_{\nu p p-1}+\sigma v^{(2)\mu k k-1}_{\nu p p-1}\right)\Gamma^{\dot{\alpha}}_{\mu k k-1}=-1;\\ &\sum_{k=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{n}\left(v^{(2)\mu k k-1}_{\nu p p-1}+\sigma v^{(2)\mu k k-1}_{\nu p p-1}\right)\Gamma^{\alpha}_{\mu k k-1}+\\ &\qquad+p^*_{\alpha}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{n}\left(v^{(1)\mu k k-1}_{\nu p p-1}+\sigma v^{(1)\mu k k-1}_{\nu p p-1}\right)\Gamma^{\dot{\alpha}}_{\mu k k-1}=0, \end{aligned}\right\}\quad(9.196)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{n}\left(v^{(1)\mu k k-1}_{\nu p p-1}-\sigma v^{(1)\mu k k-1}_{\nu p p-1}\right)\Gamma^{\omega_x}_{\mu k k-1}+\\ &\qquad+\frac{p^*_{\omega_x}}{4\pi}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{n}\left(v^{(2)\mu k k-1}_{\nu p p-1}-\sigma v^{(2)\mu k k-1}_{\nu p p-1}\right)\Gamma^{\dot{\omega}_x}_{\mu k k-1}=-\zeta^{\nu p}_{\nu p-1};\\ &\frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{n}\left(v^{(2)\mu k k-1}_{\nu p p-1}+\sigma v^{(2)\mu k k-1}_{\nu p p-1}\right)\Gamma^{\omega_x}_{\mu k k-1}+\\ &\qquad+\frac{p^*_{\omega_x}}{4\pi}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{n}\left(v^{(1)\mu k k-1}_{\nu p p-1}+\sigma v^{(1)\mu k k-1}_{\nu p p-1}\right)\Gamma^{\dot{\omega}_x}_{\mu k k-1}=0; \end{aligned}\right\}\quad(9.197)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{n}\left(v^{(1)\mu k k-1}_{\nu p p-1}+\sigma v^{(1)\mu k k-1}_{\nu p p-1}\right)\Gamma^{\omega_z}_{\mu k k-1}+\\ &\qquad+\frac{p^*_{\omega_z}}{4\pi}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{n}\left(v^{(2)\mu k k-1}_{\nu p p-1}+\sigma v^{(2)\mu k k-1}_{\nu p p-1}\right)\Gamma^{\dot{\omega}_z}_{\mu k k-1}=-\xi^{\nu p}_{\nu p p-1};\\ &\sum_{k=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{n}\left(v^{(2)\mu k k-1}_{\nu p p-1}+\sigma v^{(2)\mu k k-1}_{\nu p p-1}\right)\Gamma^{\omega_z}_{\mu k k-1}+\\ &\qquad p^*_{\omega_z}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{n}\left(v^{(1)\mu k k-1}_{\nu p p-1}+\sigma v^{(1)\mu k k-1}_{\nu p p-1}\right)\Gamma^{\dot{\omega}_z}_{\mu k k-1}=0. \end{aligned}\right\}\quad(9.198)$$

El número de células en el que está dividido el semiplano del ala es igual a nN; asimismo en cada una de las derivadas desconocidas, $\Gamma^{q_i}_{\mu k k-1}$ o bien $\Gamma^{\dot{q}_i}_{\mu k k-1}$, hay esa misma cantidad de vórtices discretos. Así, pues, el total de dichas incógnitas

es $2nN$ y, por lo tanto, es preciso que el sistema contenga el mismo número de ecuaciones. Pero al analizar los sistemas (9.196)—(9.198) podemos ver que cada uno de estos sistemas consta de 2 $(n - 1)$ N ecuaciones que se confeccionan para los correspondientes puntos de referencia, cuya cantidad es $(n - 1)$ N (estos puntos se disponen en las líneas ν, que van a lo largo de la envergadura, salvo los bordes de ataque y de salida; de este modo el valor de ν varía desde 1 hasta $n - 1$).

Las $2N$ ecuaciones que faltan se hallan haciendo uso de la *condición de Chapliguin — Zhukovski* de acuerdo con la que la intensidad del vórtice en el borde de salida (o en la correspondiente célula cerca de dicho borde, véase la fig. 9.8) ha de ser igual a cero:

$$\Gamma^{q_i}_{\mu k k-1}\Big|_{\mu(\mu_*)=n} = 0; \quad \dot{\Gamma}^{q_i}_{\mu k k-1}\Big|_{\mu(\mu_*)=n} = 0. \qquad (9.199)$$

En el problema (9.37) se ha tomado el número de paneles y de bandas igual a 10 ($n = 10$ y $p = N = 10$). Partiendo de esto, en el primer miembro de una de las ecuaciones de cada uno de los tres sistemas serán 2 $(n - 1)$ N = 180 términos que contienen las derivadas incógnitas Γ^{q_i} y $\dot{\Gamma}^{q_i}$. Las ecuaciones del primer tipo (en el segundo miembro) de cada uno de los sistemas serán tantas como puntos de referencia, es decir $(n - 1)$ $N = (10 - 1)\ 10 = 90$. También será igual la cantidad de ecuaciones en las que el segundo miembro es nulo.

Al confeccionar las ecuaciones en forma desarrollada se considera en forma sucesiva un punto de referencia tras otro y para cada uno de ellos se anotan los términos de la influencia de todos los vórtices de los lados derecho e izquierdo

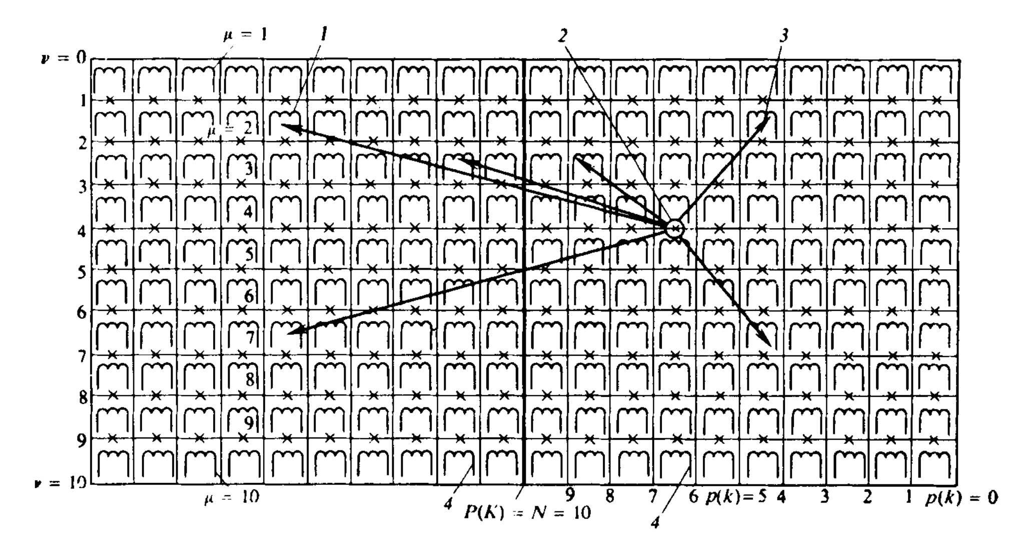


Fig. 9.16. Esquema para el cálculo de las derivadas de la circulación en el ala:
1 y *3*, vórtices en los lados izquierdo y derecho ($\mu = 2$; $k = 5$); *2*, punto de referencia ($\nu = 4$; *4*, vórtices en el borde de salida con circulación nula

del ala (fig. 9.16). Con esto, se puede empezar por el punto de referencia en la célula extrema derecha por arriba ($\nu = \mu = 1$; $pp - 1 = kk - 1 = 1$; 0) y examinar la influencia de todos los vórtices de derecha a izquierda empezando por el

último en el panel superior. Así, pues, las ecuaciones (9.196) toman la siguiente forma:

$$\frac{1}{4\pi}\underbrace{\left(v_{1;\,1;\,0}^{(1)\,1;\,1;\,0}+\sigma v_{1;\,1;\,0}^{(1)\,1;\,1;\,0}\right)\Gamma_{1;\,1;\,0}^{\alpha}}_{\mu=1;\ k=1;\ \nu=1;\ p=1}+\underbrace{p_{\alpha}^{*}\left(v_{1;\,1;\,0}^{(2)\,1;\,1;\,0}+\sigma v_{1;\,1;\,0}^{(2)\,1;\,1;\,0}\right)\Gamma_{1;\,1;\,0}^{\dot{\bar{\alpha}}}}_{\mu=1;\ k=1;\ \nu=1;\ p=1}+$$

$$+\underbrace{\left(v_{1;\,1;\,0}^{(1)\,1;\,2;\,1}+\sigma v_{1;\,1;\,0}^{(1)\,1;\,2;\,1}\right)\Gamma_{1;\,2;\,1}^{\alpha}}_{\mu=1;\ k=2;\ \nu=1;\ p=1}+\underbrace{p_{\alpha}^{*}\left(v_{1;\,1;\,0}^{(2)\,1;\,2;\,1}+\sigma v_{1;\,1;\,0}^{(2)\,1;\,2;\,1}\right)\Gamma_{1;\,2;\,1}^{\dot{\bar{\alpha}}}}_{\mu=1;\ k=2;\ \nu=1;\ p=1}+\ldots$$

. . . .

$$\ldots+\underbrace{\left(v_{1;\,1;\,0}^{(1)\,10;\,10;\,9}+\sigma v_{1;\,1;\,0}^{(1)\,10;\,10;\,9}\right)\Gamma_{10;\,10;\,9}^{\alpha}}_{\mu=n=10;\ k=N=10;\ \nu=1;\ p=1}+$$

$$+\underbrace{p_{\alpha}^{*}\left(v_{1;\,1;\,0}^{(2)\,10;\,10;\,9}+\sigma v_{1;\,1;\,0}^{(2)\,10;\,10;\,9}\right)\Gamma_{10;\,10;\,9}^{\dot{\bar{\alpha}}}}_{\mu=n=10;\ k=N=10;\ \nu=1;\ p=1}=-1; \qquad (9.200)$$

. . . .

$$\underbrace{\left(v_{9;\,10;\,9}^{(2)\,1;\,1;\,0}+\sigma v_{9;\,10;\,9}^{(2)\,1;\,1;\,0}\right)\Gamma_{1;\,1;\,0}^{\alpha}}_{\mu=1;\ k=1;\ \nu=n-1=9;\ p=10}+\underbrace{p_{\alpha}^{*}\left(v_{9;\,10;\,9}^{(1)\,1;\,1;\,0}+\sigma v_{9;\,10;\,9}^{(1)\,1;\,1;\,0}\right)\Gamma_{1;\,1;\,0}^{\dot{\bar{\alpha}}}}_{\mu=1;\ k=1;\ \nu=n-1=9;\ p=10}+$$

$$+\underbrace{\left(v_{9;\,10;\,9}^{(2)\,1;\,2;\,1}+\sigma v_{9;\,10;\,9}^{(2)\,1;\,2;\,1}\right)\Gamma_{1;\,2;\,1}^{\alpha}}_{\mu=1;\ k=2;\ \nu=n-1=9;\ p=10}+\underbrace{p_{\alpha}^{*}\left(v_{9;\,10;\,9}^{(1)\,1;\,2;\,1}+\sigma v_{9;\,10;\,9}^{(1)\,1;\,2;\,1}\right)\Gamma_{1;\,2;\,1}^{\dot{\bar{\alpha}}}}_{\mu=1;\ k=2;\ \nu=n-1=9;\ p=10}+\ldots$$

. . . .

$$\ldots+\underbrace{\left(v_{9;\,10;\,9}^{(2)\,10;\,10;\,9}+\sigma v_{9;\,10;\,9}^{(2)\,10;\,10;\,9}\right)\Gamma_{10;\,10;\,9}^{\alpha}}_{\mu=n=10;\ k=N=10;\ \nu=n-1=9;\ p=10}+$$

$$+\underbrace{p_{\alpha}^{*}\left(v_{9;\,10;\,9}^{(1)\,10;\,10;\,9}+\sigma v_{9;\,10;\,9}^{(1)\,10;\,10;\,9}\right)\Gamma_{10;\,10;\,9}^{\dot{\bar{\alpha}}}}_{\mu=n=10;\ k=N=10;\ \nu=n-1=9;\ p=10}=0. \qquad (9.201)$$

La última ecuación se refiere al punto de referencia situado en la segunda célula por abajo, junto a la cuerda central ($\nu = n - 1 = 9$; $p = 10$).

El sistema aducido de ecuaciones no es cerrado, ya que el número de incógnitas Γ^{α} y $\Gamma^{\dot{\bar{\alpha}}}$ es mayor que el de puntos de referencia $[2\,(n-1)\,N]$. Las $2\,N = 2\cdot 10 = 20$ ecuaciones que faltan son las condiciones de igualdad a cero de Γ^{α} y $\Gamma^{\dot{\bar{\alpha}}}$ para todos los vórtices que se hallan junto al borde de salida:

$$\Gamma_{10;\,1;\,0}^{\alpha}=\Gamma_{10;\,2;\,1}^{\alpha}=\Gamma_{10;\,3;\,2}^{\alpha}=\ldots\,\Gamma_{10;\,10;\,9}^{\alpha}=0; \qquad (9.202)$$

$$\Gamma_{10;\,1;\,0}^{\dot{\bar{\alpha}}}=\Gamma_{10;\,2;\,1}^{\dot{\bar{\alpha}}}=\Gamma_{10;\,3;\,2}^{\dot{\bar{\alpha}}}=\ldots\,\Gamma_{10;\,10;\,9}^{\dot{\bar{\alpha}}}=0.$$

$$\mu=10;\ k=1\quad \mu=10;\ k=2;\quad \mu=10;\ k=3\ \ldots\quad \mu=10;\ k=10 \qquad (9.203)$$

Eliminando de los sistemas (9.200) y (9.201) los términos con valores nulos de Γ^{α} y $\Gamma^{\dot{\bar{\alpha}}}$ junto al borde de salida obtenemos un número de derivadas incógnitas igual a la cantidad de ecuaciones en el sistema, es decir, $2\,(n-1)\,N = 180$.

De forma análoga se confeccionan los sistemas de ecuaciones (9.197) y (9.198) para determinar las derivadas Γ^{ω_x}, $\Gamma^{\dot{\omega}_x}$, Γ^{ω_z}, $\Gamma^{\dot{\omega}_z}$. Con ello, consecutivamente se prefijan las coordenadas de los puntos de referencia:

$$\zeta^{\nu p}_{\nu p-1} = \zeta^{1;\,1}_{1;\,0};\quad \zeta^{1;\,2}_{1;\,1},\quad \ldots,\quad \zeta^{9;\,9}_{9;\,8}\quad \zeta^{9;\,10}_{9;\,9};$$

$$\xi^{\nu p}_{\nu p-1} = \xi^{1;\,1}_{1;\,0};\quad \xi^{1;\,2}_{1;\,1},\quad \ldots,\quad \xi^{9;\,9}_{9;\,8}\quad \xi^{9;\,10}_{9;\,9}.$$

$$\nu = n-1 = 9;\ p = 9 \qquad\qquad \nu = n-1 = 9;\ p = 10$$

La resolución de todos estos sistemas de ecuaciones se efectúa en ordenadores. La distribución de las derivadas de circulación por el ala, hallada como resultado de semejante solución, permite determinar sus características no estacionarias aerodinámicas.

9.46. Con pequeños números de Strouhal es posible simplificar las dependencias para las velocidades inducidas. Esto permite hallar en forma menos complicada las ecuaciones para las derivadas de circulación de los vórtices.

Al analizar las primeras ecuaciones de los sistemas (9.196)—(9.198) nos cercioramos que con $p_i^* \to 0$ es posible despreciar el segundo sumando en su primer miembro. Los dos sumandos en las segundas ecuaciones son equivalentes. Por consiguiente, en su forma generalizada el mencionado sistema de ecuaciones se puede presentar así

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{n}\left(v^{(1)\mu kk-1}_{\nu pp-1} \pm \sigma v^{(1)\mu kk-1}_{\nu pp-1}\right)\Gamma^{q_i}_{\mu kk-1} = v^{q_i}_{\nu pp-1}; \tag{9.204}$$

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{n}\left(v^{(2)\mu kk-1}_{\nu pp-1} \pm \sigma v^{(2)\mu kk-1}_{\nu pp-1}\right)\Gamma^{q_i}_{\mu kk-1} +$$

$$+ p_i^*\sum_{k=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{n}\left(v^{(1)\mu kk-1}_{\nu pp-1} \pm \sigma v^{(1)\mu kk-1}_{\nu pp=1}\right)\Gamma^{\dot{q}_i}_{\mu kk-1} = 0, \tag{9.205}$$

donde para $q_i = \alpha$, ω_z se toma el signo «+» y para $q_i = \omega_x$, el «—». Los valores de v^{q_i} para q_1, q_2, q_3 son iguales a $v^{q_i} = -1;\ -\zeta;\ -\xi$, respectivamente.

En las ecuaciones (9.204) y (9.205) se han introducido las anotaciones siguientes:

$$v^{(1)} = w^{(1)\mu kk-1}_{\nu pp-1} + v^{(1)\mu kk-1}_{(l)\nu pp-1} - p_i^* v^{(1)\mu kk-1}_{(a)\nu pp-1}; \tag{9.206}$$

$$v^{(2)} = v^{(2)\mu kk-1}_{(l)\nu pp-1} + p_i^* v^{(2)\mu kk-1}_{(a)\nu pp-1}. \tag{9.207}$$

Omitiendo los índices, de acuerdo con (9.179) y para $p_i^* \to 0$, obtenemos

$$v^{(1)}_{(a)} = p_i^*\int_0^\infty I\xi\,d\xi;\quad v^{(2)}_{(a)} = \int_0^\infty I\,d\xi, \tag{9.208}$$

y, de acuerdo con (9.164),

$$v^{(1)}_{(l)} = \int_{\xi_1}^\infty I_1\,d\xi + \int_{\xi_2}^\infty I_2\,d\xi; \tag{9.209}$$

$$v^{(2)}_{(l)} = p_i^*\int_{\xi_1}^\infty (\xi + 0{,}5\bar{l}_0\,\mathrm{tg}\,\chi)\,I_1\,d\xi + p_i^*\int_{\xi_2}^\infty (\xi - 0{,}5\bar{l}_0\,\mathrm{tg}\,\xi)\,I_2\,d\xi. \tag{9.210}$$

La función w en (9.206) se calcula con (9.72).

En correspondencia con el orden de infinitud de las variables en la relación (9.206) se puede despreciar el término $p_i^* v_a^{(1)}$. Así, pues,

$$v^{(1)} = w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} + v_{(1)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1}. \tag{9.211}$$

Tomando en consideración (9.210), presentamos la dependencia (9.207) en la forma

$$v^{(2)} = p_i^* [\bar{v}_{(1)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1} + v_{(a)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1}], \tag{9.212}$$

donde

$$\bar{v}_{(1)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1} = v_{(1)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1}/p^* =$$

$$= \int_{\xi_1}^{\infty} (\xi + 0{,}5\bar{l}_0 \operatorname{tg} \chi) I_1 \, d\xi + \int_{\xi_2}^{\infty} (\xi - 0{,}5\bar{l}_0 \operatorname{tg} \chi) I_2 \, d\xi. \tag{9.213}$$

Poniendo (9.211) y (9.212) en (9.205) obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} [(w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} \pm \sigma w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}) + (v_{(1)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1} \pm$$

$$\pm \sigma v_{(1)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1})] \Gamma_{\mu kk-1}^{q_i} = v_{\nu pp-1}^{q_i}; \tag{9.214}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} [(\bar{v}_{(1)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1} \pm \sigma \bar{v}_{(1)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1}) + (v_{(a)\nu pp-1}^{(2)\mu\mu k-1} \pm \sigma v_{(a)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1})] \Gamma_{\mu kk-1}^{q_i} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} [(w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} \pm \sigma w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}) - (v_{(1)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1} \pm \sigma v_{(1)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1})] \dot{\Gamma}_{\mu kk-1}^{q_i} = 0. \tag{9.215}$$

A este sistema hay que añadir la condición de Chapliguin — Zhukovski en el borde de salida:

$$\Gamma_{\mu kk-1}^{q_i} \Big|_{\mu(\mu_*)=n} = 0; \quad \dot{\Gamma}_{\mu kk-1}^{q_i} \Big|_{\mu(\mu_*)=n} = 0. \tag{9.216}$$

En estas ecuaciones $k\ (p) = 1, 2, \ldots, N$; $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$; $\mu = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$. Tomando sucesivamente en (9.214) los valores $v_{\nu pp-1}^{q_i} = 0$; $-\zeta$ y $-\xi$ (para $q_i = \alpha, \omega_x, \omega_z$) y analizando los puntos de referencia, obtenemos tres sistemas de ecuaciones para determinar las derivadas $\Gamma_{\mu kk-1}^{\alpha}$, $\Gamma_{\mu kk-1}^{\omega_x}$, $\Gamma_{\mu kk-1}^{\omega_z}$.

De este modo, dichas derivadas se hallan independientemente de las derivadas $\dot{\Gamma}_{\mu kk-1}^{q_i}$ que se determinan al resolver los otros tres sistemas de ecuaciones (9.215) después de poner en ellos los valores de $\Gamma_{\mu kk-1}^{q_i}$.

Encontremos las funciones que determinan las velocidades inducidas:

$$(w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} \pm \sigma w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}) + (v_{(1)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1} \pm \sigma v_{(1)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1}) = B_1; \tag{9.217}$$

$$(\bar{v}_{(1)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1} \pm \sigma v_{(1)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1}) + (v_{(a)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1} \pm \sigma v_{(a)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1}) = B_2. \tag{9.218}$$

Las coordenadas del punto de referencia $\zeta_{\nu p-1}^{\nu p} = 0{,}562$; $\xi_{\nu p-1}^{\nu p} = 0{,}063$ y del punto medio del vórtice ligado (adyacente) $\zeta_{\mu k-1}^{\mu k} = 0{,}562$; $\xi_{\mu k-1}^{\mu k} = 0{,}543$; la

envergadura e inclinación del vórtice $l_{kk-1} = l_0 = 0{,}125$; $\operatorname{tg} \chi_{\mu k-1}^{\mu k} = \operatorname{tg} \chi = 0{,}287$ ($\operatorname{sen} \chi = 0{,}275$; $\cos \chi = 0{,}962$). Para el vórtice izquierdo (simétrico) $\sigma\zeta_{\mu k-1}^{\mu k} = -0{,}562$; $\sigma\xi_{\mu k-1}^{\mu k} = 0{,}543$; $\operatorname{tg} \chi = -0{,}287$ ($\operatorname{sen} \chi = -0{,}275$; $\cos \chi = 0{,}962$).

Empleando (9.62) calculamos la función que determina la velocidad inducida en el punto de referencia por el vórtice ligado. Después de poner $\zeta_0 = 0$; $\xi_0 = 0{,}06$; $\operatorname{tg} \chi = 0{,}287$ para el vórtice derecho y $\zeta_0 = 1{,}124$; $\xi_0 = 0{,}06$; $\operatorname{tg} \chi = -0{,}287$ para el izquierdo, obtenemos (véase el problema 9.41) $w_{5;6;6-1}^{5;6;6-1} \pm \sigma w_{5;6;6-1}^{5;6;6-1} = -24{,}931 \pm (-0{,}0345)$.

El cálculo de la segunda componente en (9.217), que determina la función de la velocidad inducida por un par de haces vorticiales libres, se efectúa en correspondencia con las fórmulas (9.176), (9.209). Los resultados del cálculo fueron obtenidos en el problema 9.42: $v_{(1)5;6;6-1}^{(1)5;6;6-1} \pm \sigma v_{(1)5;6;6-1}^{(1)5;6;6-1} = 53{,}49 \pm (-0{,}062)$.

A continuación, en (9.215) examinamos la función $\bar{v}_{(1)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1} \pm \sigma \bar{v}_{(1)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1}$. Realizamos el cálculo con ayuda de las fórmulas (9.177) y (9.213). De acuerdo con la solución del problema 9.42 tenemos $\bar{v}_{(1)5;\,6;\,6-1}^{(1)5;\,6;\,6-1} \pm \sigma v_{(1)5;\,6;\,6-1}^{(2)5;\,6;\,6-1} = 4{,}721 \pm (-0{,}134)$.

El cálculo de la segunda componente en (9.215) $v_{(a)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1} \pm \sigma v_{(a)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1}$ se realiza empleando (9.187), (9.208). Según los resultados del problema 9.43 obtenemos $v_{(a)5;\,6;\,6-1}^{(2)5;\,6;\,6-1} \pm \sigma v_{(a)5;\,6;\,6-1}^{(2)5;\,6;\,6-1} = -1{,}456 \pm (-0{,}2125)$.

9.47. En correspondencia con (9.39) la presión excesiva en el intradós y el trasdós del ala $p_i - p_s = -\rho_\infty [V_\infty \partial (\varphi_1 - \varphi_s)/\partial x + \partial (\varphi_1 - \varphi_s)/\partial t]$, en tanto que la circulación de la velocidad $\Gamma = \oint (\partial\varphi/\partial x)\, dx = \varphi_i - \varphi_s$. De acuerdo con esto $p_1 - p_s = -\rho_\infty (V_\infty \partial\Gamma/\partial x + \partial\Gamma/\partial t)$.

Consideremos la derivada

$$d\Gamma/dt = \partial\Gamma/\partial t + (\partial\Gamma/\partial x) dx/dt = \partial\Gamma/\partial t + V_\infty \partial\Gamma/\partial x,$$

que determina la intensidad lineal de los vórtices ligados

$$\gamma = d\Gamma/dx = -(\partial\Gamma/\partial t + V_\infty \partial\Gamma/\partial x)/dx/dt = -(\partial\Gamma/\partial t + V_\infty \partial\Gamma/\partial x)/V_\infty. \quad (9.219)$$

Así, pues, la presión excesiva $p_1 - p_s = -\rho_\infty \gamma V_\infty$ y el correspondiente coeficiente

$$\Delta\bar{p} = [(p_1 - p_s) - (p_s - p_\infty)]/(0{,}5\, \rho_\infty V_\infty^2) = \bar{p}_1 - \bar{p}_s = 2\gamma/V_\infty. \quad (9.220)$$

Consideremos el plano de referencia del ala en cuyas células se sitúan los vórtices en herradura. Determinemos la presión en el punto que yace en dicha célula, con coordenadas $\xi_{\mu k-1}^{\mu k}$, $\zeta_{\mu k-1}^{\mu k}$. La intensidad del vórtice ligado (intensidad lineal) se calcula partiendo de la circulación $\Gamma_{\mu kk-1}$ reducida al intervalo entre los puntos de control en la sección $\zeta_{\mu k-1}^{\mu k}$:

$$\Delta\xi_{\mu kk-1} = \xi_{\nu p-1}^{\nu p} - \xi_{\nu-1p-1}^{\nu-1p}.$$

Así, pues, la intensidad lineal adimensional

$$\gamma/V_\infty = \gamma_{\mu kk-1} = \Gamma_{\mu kk-1}/\Delta\xi_{\mu kk-1}. \quad (9.221)$$

Según (9.220), el coeficiente de presión excesiva

$$\Delta\bar{p}_{\mu kk-1} = 2\gamma_{\mu kk-1} = 2\Gamma_{\mu kk-1}/\Delta\xi_{\mu kk-1}. \quad (9.222)$$

De acuerdo con los datos del problema hallamos la presión dinámica en el túnel aerodinámico $q_\infty = 0{,}5\ \rho_\infty V_\infty^2 = 1{,}532 \cdot 10^3$ Pa. Seguidamente calculamos $\bar{p}_1 = (p_1 - p_\infty)/q_\infty = 0{,}0653$; $\bar{p}_s = (p_s - p_\infty)/q_\infty = -0{,}0653$.

La intensidad lineal $\gamma = 0{,}5\ V_\infty \Delta\bar{p} = 3{,}275$ m/s; su valor relativo $\gamma_{\mu kk-1} = \gamma/V_\infty = 0{,}0653$ y la circulación adimensional $\Gamma_{\mu kk-1} = \Delta\xi_{\mu kk-1}\gamma_{\mu kk-1}$.

Adoptemos que la célula está situada junto a la cuerda de raíz y su longitud relativa $\Delta\xi_{\mu kk-1} = 0{,}1$ (valor adimensional de $\Delta x_{\mu kk-1} = 0{,}1\ b_0 = 0{,}4$ m; véanse los datos del problema 9.37). En correspondencia con esto $\Gamma_{\mu kk-1} = 0{,}00653$ y la circulación $\Gamma = \Gamma_{\mu kk-1} b_0 V_\infty = 1{,}306$ m²/s.

9.48. 1. En la expresión (9.26) para dc_y introducimos la sustitución $x_c = b_0$ y tomamos $S_{\text{ala}} = bd\zeta$ (b es la cuerda corriente). En tal caso, obtenemos para la sección

$$c'_y = (b_0/b) \int_{\xi_0}^{\xi_1} \Delta p\, d\xi = 2Y'/(\rho_\infty V_\infty^2 bdz), \tag{9.223}$$

donde $\xi = x/b_0$; $\xi_0 = x_0/b_0$; $\xi_1 = x_1/b_0$ (coordenadas adimensionales del punto que examinamos, y de los bordes de ataque y salida de la sección, respectivamente).

De (9.223) obtenemos la fuerza normal de la sección $Y' = c'_y bdz\,(\rho_\infty V_\infty^2/2)$. La fuerza normal completa $Y = 2\int_0^{l/2} c'_y bdz\,(\rho_\infty V_\infty^2/2)$ y el correspondiente coeficiente

$$c_y = Y_0/[(\rho_\infty V_\infty^2/2)\, S_{\text{ala}}] = (2b_0^2/S_{\text{ala}}) \int_0^{0,5\bar{l}} c'_y \bar{b}(\zeta)\, d\zeta, \tag{9.224}$$

donde $\bar{l} = l/b_0$; $\bar{b} = b/b_0$; $\zeta = z/b_0$ (valores relativos de la envergadura del ala, la cuerda corriente y la coordenada transversal, respectivamente).

En la fórmula (9.29) para el momento elemental del coeficiente de cabeceo tomemos en el denominador $x_c = b$ y en el numerador del segundo miembro, $x_c = b_0$. Tomando asimismo en consideración que $S_{\text{ala}} = b(z)\, dz$, hallamos

$$d\,M_z/[b^2(z)\, dz\, (\rho_\infty V_\infty/2)] = (b_0^2/b^2)\, \Delta\bar{p}\xi d\xi,$$

de donde el coeficiente

$$m'_z = M'_z/[(\rho_\infty V_\infty^2/2)\, b^2(z)\, dz] = (b_0^2/b^2) \int_{\xi_0}^{\xi_1} \Delta\bar{p}\xi\, d\xi, \tag{9.225}$$

mientras que el correspondiente momento de cabeceo $M'_z = m'_z b^2(z)\, dz\ (\rho_\infty V_\infty^2/2)$.

El valor total del momento de cabeceo $M_z = 2\int_0^{l/2} m'_z b^2(z)\, dz(\rho_\infty V_\infty^2/2)$ y el coeficiente de este momento

$$m_z = M_z/[(\rho_\infty V_\infty^2/2)\, b_0 S_{\text{ala}}] = (2b_0^3/S_{\text{ala}}) \int_0^{0,5\bar{l}} m'_z \bar{b}^2(\zeta)\, d\zeta. \tag{9.226}$$

Analicemos el coeficiente del momento de balanceo. Realicemos en (9.30) la sustitución $x_c = b_0$; $l = b(z)$; $S_{ala} = b(z)\,dz$. En tal caso

$$d\,M_x/[b(z)\,dz\,(\rho_\infty V_\infty^2/2)\,b(z)] = -\,[b_0^2/b^2(z)]\,\Delta\bar{p}\zeta d\xi.$$

De aquí, teniendo en cuenta (9.223), el coeficiente

$$m'_x = M'_x/[(\rho_\infty V_\infty^2/2)\,b^2(z)\,dz] = -\,[b_0/b(z)]\,\zeta c'_y, \tag{9.227}$$

y el momento de balanceo de la sección

$$M'_x = -\,[b_0 b(z)]\,\zeta c'_y dz(\rho_\infty V_\infty^2/2).$$

El momento total de balanceo del ala

$$M_x = -2\int_0^{l/2}[b_0 b(z)]\,\zeta c'_y\,dz\,(\rho_\infty V_\infty^2/2) \tag{9.228}$$

y el coeficiente de este momento

$$m_x = M_x/[(\rho_\infty V_\infty^2/2)\,b_0 S_{ala}] = -\,(2b_0^2/S_{ala})\int_0^{0,5\bar{l}}\bar{b}(\zeta)\,\zeta c'_y\,d\zeta, \tag{9.229}$$

donde c'_y es un coeficiente que se calcula con (9.223).

Representemos el coeficiente de la fuerza normal de la sección en forma de las series:

$$c'_y = \sum_{i=1}^{3}(c_y'^{q_i} q_i + c_y'^{\dot{q}_i}\dot{q}_i); \tag{9.230}$$

$$c'_y = (b_0/b)\int_{\xi_0}^{\xi_1}\sum_{i=1}^{3}(p^{q_i} q_i + p^{\dot{q}_i}\dot{q}_i)\,d\xi. \tag{9.231}$$

Tomando en consideración (9.59), obtenemos

$$c'_y = (2b_0/b)\int_{\xi_0}^{\xi_1}\sum_{i=1}^{3}(\gamma^{q_i} q_i + \gamma^{\dot{q}_i}\dot{q}_i)\,d\xi. \tag{9.232}$$

De la comparación de (9.230) y (9.232)

$$c_y'^{q_i} = (2b_0/b)\int_{\xi_0}^{\xi_1}\gamma^{q_i}\,d\xi; \tag{9.233}$$

$$c_y'^{\dot{q}_i} = (2b_0/b)\int_{\xi_0}^{\xi_1}\gamma^{\dot{q}_i}\,d\xi. \tag{9.234}$$

Para la célula, teniendo en cuenta (9.222), obtenemos

$$\left.\begin{aligned}\gamma^{q_i}_{\mu k k-1} &= (p^{q_i}/2)\,\Gamma_{\mu k k-1}/\Delta\xi_{\mu k k-1};\\ \gamma^{\dot{q}_i} &= (p^{\dot{q}_i}/2)\,\dot{\Gamma}^{q_i}/\Delta\xi_{\mu k k-1}.\end{aligned}\right\} \tag{9.235}$$

Introduzcamos (9.235) en (9.233), (9.234) y pasemos de las integrales a las sumas:

$$c_{ykk-1}^{\prime q_i} = (2b_0/b_{kk-1}) \sum_{\mu=1}^{n} \Gamma_{\mu kk-1}^{q_i}; \tag{9.236}$$

$$c_{ykk-1}^{\prime \dot{q}_i} = (2b_0/b_{kk-1}) \sum_{\mu=1}^{n} \Gamma_{\mu kk-1}^{\dot{q}_i}. \tag{9.237}$$

De modo análogo a (9.233), (9.234), (9.236) y (9.237) hallamos las derivadas del coeficiente del momento de cabeceo para la sección:

$$m_z^{\prime q_i} = (2b_0^2/b^2) \int_{\xi_0}^{\xi_1} \gamma^{q_i} \xi \, d\xi; \tag{9.238}$$

$$m_z^{\prime \dot{q}_i} = (2b_0^2/b^2) \int_{\xi_0}^{\xi_1} \gamma^{\dot{q}_i} \xi \, d\xi; \tag{9.239}$$

$$m_{zkk-1}^{\prime q_i} = (2b_0^2/b_{kk-1}^2) \sum_{\mu=1}^{n} \Gamma_{\mu kk-1}^{q_i} \xi_{\mu kk-1}^{\mu k}; \tag{9.240}$$

$$m_{zkk-1}^{\prime \dot{q}_i} = (2b_0^2/b_{kk-1}^2) \sum_{\mu=1}^{n} \Gamma_{\mu kk-1}^{\dot{q}_i} \xi_{\mu kk-1}^{\mu k}. \tag{9.241}$$

De (9.228), (9.235) y (9.237) obtenemos las derivadas del coeficiente del momento de balanceo de la sección:

$$m_x^{\prime q_i} = -(b_0/b)\, \zeta c_y^{\prime q_i}; \tag{9.242}$$

$$m_x^{\prime \dot{q}_i} = -(b_0/b)\, \zeta c_y^{\prime \dot{q}_i}; \tag{9.243}$$

$$m_{xkk-1}^{\prime q_i} = -(2b_0^2/b_{kk-1}^2)\, \zeta_{\mu k-1}^{\mu k} \sum_{\mu=1}^{n} \Gamma_{\mu kk-1}^{q_i}; \tag{9.244}$$

$$m_{xkk-1}^{\prime \dot{q}_i} = -(2b_0^2/b_{kk-1}^2)\, \zeta_{\mu k-1}^{\mu k} \sum_{\mu=1}^{n} \Gamma_{\mu kk-1}^{\dot{q}_i}. \tag{9.245}$$

Representemos los coeficientes sumarios c_y, m_z y m_x del ala en forma de series:

$$c_y = \sum_{i=1}^{3} (c_y^{q_i} q_i + c_y^{\dot{q}_i} \dot{q}_i); \tag{9.246}$$

$$m_z = \sum_{i=1}^{3} (m_z^{q_i} q_i + m_z^{\dot{q}_i} \dot{q}_i); \tag{9.247}$$

$$m_x = \sum_{i=1}^{3} (m_x^{q_i} q_i + m_x^{\dot{q}_i} \dot{q}_i). \tag{9.248}$$

Empleando las fórmulas (9.224), (9.226) y (9.229), en las que los coeficientes de las secciones c_y', m_z', m_x' están representados en forma de las series (9.230) y rela-

ciones análogas, hallamos las derivadas totales:

$$\left.\begin{aligned} c_y^{q_i} &= (2b_0^2/S_{\text{ala}}) \int_0^{0,5\bar{l}} c_y'^{q_i} \bar{b}(\zeta)\, d\zeta; \\ \dot{c}_y^{q_i} &= (2b_0^2/S_{\text{ala}}) \int_0^{0,5\bar{l}} \dot{c}_y'^{q_i} \bar{b}(\zeta)\, d\zeta; \end{aligned}\right\} \qquad (9.249)$$

$$\left.\begin{aligned} m_z^{q_i} &= (2b_0^2/S_{\text{ala}}) \int_0^{0,5\bar{l}} m_z'^{q_i} \bar{b}^2(\zeta)\, d\zeta; \\ \dot{m}_z^{q_i} &= (2b_0^2/S_{\text{ala}}) \int_0^{0,5\bar{l}} \dot{m}_z'^{q_i} \bar{b}^2(\zeta)\, d\zeta; \end{aligned}\right\} \qquad (9.250)$$

$$\left.\begin{aligned} m_x^{q_i} &= -(2b_0^2/S_{\text{ala}}) \int_0^{0,5\bar{l}} \bar{b}(\zeta)\, \zeta c_y'^{q_i}\, d\zeta; \\ \dot{m}_x^{q_i} &= -(2b_0^2/S_{\text{ala}}) \int_0^{0,5\bar{l}} \bar{b}(\zeta)\, \zeta \dot{c}_y'^{q_i}\, d\zeta. \end{aligned}\right\} \qquad (9.251)$$

Para los movimientos simétricos $\omega_x = 0$, por lo tanto $m_x^{q_i} = \dot{m}_x^{q_i} = 0$.

Otras derivadas se hallan como resultado de la sustitución de (9.236), (9.237) en (9.249) y (9.238), (9.239) en (9.250). Pasando en (9.249) y (9.250) de las integrales a las sumas, obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} c_y^{q_i} &= (4b_0^2/S_{\text{ala}}) \sum_{k=1}^{N} \bar{l}_{kk-1} \sum_{\mu=1}^{n} \Gamma_{\mu kk-1}^{q_i}; \\ \dot{c}_y^{q_i} &= (4b_0^2/S_{\text{ala}}) \sum_{k=1}^{N} \bar{l}_{kk-1} \sum_{\mu=1}^{n} \dot{\Gamma}_{\mu kk-1}^{q_i}; \end{aligned}\right\} \qquad (9.252)$$

$$\left.\begin{aligned} m_z^{q_i} &= (4b_0^2/S_{\text{ala}}) \sum_{k=1}^{N} \bar{l}_{kk-1} \sum_{\mu=1}^{n} \Gamma_{\mu kk-1}^{q_i} \xi_{\mu k-1}^{\mu k}; \\ \dot{m}_z^{q_i} &= (4b_0^2/S_{\text{ala}}) \sum_{k=1}^{N} \bar{l}_{kk-1} \sum_{\mu=1}^{n} \dot{\Gamma}_{\mu kk-1}^{q_i} \xi_{\mu k-1}^{\mu k}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.253)$$

Para los movimientos asimétricos ($q_i = \omega_x$) los coeficientes $c_y^{q_i} = \dot{c}_y^{q_i} = m_z^{q_i} = \dot{m}_z^{q_i} = 0$. Después de poner (9.244), (9.245) en (9.251), obtenemos

$$\left.\begin{aligned} m_x^{q_i} &= (4b_0^2/S_{\text{ala}}) \sum_{k=1}^{N} \bar{l}_{kk-1} \sum_{\mu=1}^{n} \Gamma_{\mu kk-1}^{q_i} \zeta_{\mu k-1}^{\mu k}; \\ \dot{m}_x^{q_i} &= (4b_0^2/S_{\text{ala}}) \sum_{k=1}^{N} \bar{l}_{kk-1} \sum_{\mu=1}^{n} \dot{\Gamma}_{\mu\mu k-1}^{q_i} \zeta_{\mu k-1}^{\mu k}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.254)$$

En las relaciones aducidas se indican las coordenadas del punto medio de los vórtices discretos:

$$\xi_{\mu k-1}^{\mu k}=0{,}5\,(\xi_{\mu k}+\xi_{\mu k-1});\quad \zeta_{\mu k-1}^{\mu k}=0{,}5\,(\zeta_{\mu k}+\zeta_{\mu k-1}) \qquad (9.255)$$

y la envergadura del vórtice

$$\bar{l}_{kk-1}=l_{kk-1}/b_0=\zeta_{\mu k-1}-\zeta_{\mu k}. \qquad (9.256)$$

El área del ala

$$S_{\text{ala}}=2\sum_{k=1}^{N}(z_{k-1}-z_k)\,b_{kk-1}=2b_0^2\sum_{k=1}(\zeta_{k-1}-\zeta_k)\,\bar{b}_{kk-1}, \qquad (9.257)$$

donde $\bar{b}_{kk-1}=b_{kk-1}/b_0$.

2. Examinemos el ejemplo de cálculo de los coeficientes aerodinámicos de acuerdo con la distribución prefijada del coeficiente de caída de presión junto al ala rectangular. Tomando en consideración (9.223) y los datos de la tabla 9.2 hallamos por integración numérica para la sección $\zeta_1=2\,z/l=0$ (cuerda de raíz)

$$c_y'=\int_0^1\Delta\bar{p}\,d\xi\approx 0{,}1389. \qquad (9.258)$$

Para el resto de las secciones $\zeta_1=0{,}3$; $0{,}68$; $0{,}82$; $0{,}96$ obtenemos $c_y'=0{,}1075$; $0{,}0844$; $0{,}0656$; $0{,}0442$, respectivamente.

Elijamos la función de aproximación $c_y'(\zeta)$ en forma de la curva $y=ax^2+$ $+\,bx+c$. Para determinar los coeficientes a, b, c de la ecuación, que abarca tres puntos $x=\zeta_1=0$; $0{,}3$; $0{,}68$, confeccionamos el sistema:

$$0{,}1389=c;\ 0{,}1075=a\cdot 0{,}3^2+b\cdot 0{,}3+c;\quad 0{,}0844=a\cdot 0{,}68^2+b\cdot 0{,}68+c.$$

Después de resolver este sistema hallamos $a=0{,}0646$; $b=-0{,}124$; $c=0{,}1389$

$$(c_y')_I=0{,}0646\ \zeta_1^2-0{,}124\ \zeta_1+0{,}1389. \qquad (9.259)$$

Para el segundo grupo de puntos tenemos:

$$0{,}0844-a\cdot 0{,}68^2+b\cdot 0{,}68+c;\quad 0{,}0656=a\cdot 0{,}82^2+b\cdot 0{,}82+c;$$
$$0{,}0442=a\cdot 0{,}96^2+b\cdot 0{,}96+c.$$

Solucionando este sistema: $a=-0{,}0667$; $b=-0{,}0343$; $c=0{,}1385$:

$$(c_y')_{II}=-0{,}0667\ \zeta_1^2-0{,}0343\ \zeta_1+0{,}1385. \qquad (9.260)$$

Con (9.224) obtenemos para el ala rectangular

$$c_y=\frac{2b_0^2}{S_{\text{ala}}}\int_0^{0,5\bar{l}}c_y'\bar{b}\,(\zeta_1)\,d\zeta_1=\int_0^1 c_y'\,d\zeta_1.$$

Realizamos la integración:

$$c_y=\int_0^{0,68}(c_y')_I\,d\zeta_1+\int_{0,68}^{1}(c_y')_{II}\,d\zeta_1=0{,}0923.$$

Para calcular m_z' de la sección componemos la tabla de los valores de $\Delta\bar{p}\xi$ empleando los datos prefijados (tabla 9.8).

Tabla 9.8

$\xi = x/b$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
					$\zeta_1 = 2\ z/l = 0$						
$\Delta\bar{p}\xi$	0	0,0349	0,0418	0,0420	0,0420	0,0435	0,0378	0,0364	0,0336	0,0252	0
					$\zeta_1 = 0,3;\ 0,68;\ 0,82;\ \ldots$ $\zeta_1 = 0,96$						
$\Delta\bar{p}\xi$	0	0,0105	0,0118	0,0126	0,0120	0,0130	0,0096	0,0084	0,0056	0,0045	0

Tabla 9.9

$\xi = x/b$	0	0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875	1,0
p^{α}	16	10,5	7,5	5,40	4,10	3,22	2,70	1,50	0
p^{ω_z}	20	5,82	3,26	4,70	3,76	3,36	2,92	2,10	0

En correspondencia con (9.225) para $\zeta_1 = 0$ el coeficiente

$$m_z' = \int_0^1 \Delta\bar{p}\xi\, d\xi = 0{,}03372.$$

De forma análoga obtenemos

$$m_z' = 0{,}02459 \ (\zeta_1 = 0{,}3); \quad m_z' = 0{,}01981 \ (\zeta_1 = 0{,}68);$$
$$m_z' = 0{,}01498 \ (\zeta_1 = 0{,}82); \quad m_z' = 0{,}0088 \ (\zeta_1 = 0{,}96).$$

Hallamos la función de aproximación m_z' para $\zeta_1 = 0$; 0,3; 0,68:

$$0{,}03372 = c; \ 0{,}02459 = a\cdot 0{,}3^2 + b\cdot 0{,}3 + c;$$
$$0{,}01981 = a\cdot 0{,}68^2 + b\cdot 0{,}68 + c.$$

Resolvemos las ecuaciones: $a = 0{,}0264$; $b = -0{,}0384$; $c = 0{,}03372$. Para los valores de $\zeta_1 = 0{,}68$; 0,82; 0,96, tenemos

$$0{,}01918 = a\cdot 0{,}68^2 + b\cdot 0{,}68 + c; \quad 0{,}01498 = a\cdot 0{,}82^2 + b\cdot 0{,}82 + c;$$
$$0{,}0088 = a\cdot 0{,}96^2 + b\cdot 0{,}96 + c.$$

De la solución de estas ecuaciones $a = -0{,}0344$; $b = 0{,}0171$; $c = 0{,}0241$. De acuerdo con estos datos

$$(m_z')_I = 0{,}0264\ \zeta_1^2 - 0{,}0384\ \zeta_1 + 0{,}0337 \ (0 \leqslant \zeta_1 \leqslant 0{,}68);$$
$$(m_z')_{II} = -0{,}0344\ \zeta_1^2 + 0{,}0171\ \zeta_1 + 0{,}0241 \ (0{,}68 \leqslant \zeta_1 \leqslant 0{,}96).$$

En correspondencia con (9.226)

$$m_z = \int_0^1 m_z'\, d\zeta = \int_0^{0,68} (m_z')_I\, d\zeta_1 + \int_{0,68}^1 (m_z')_{II}\, d\zeta_1 = 0{,}0212.$$

Conociendo el valor de $c_y = 0{,}0923$ calculamos el coeficiente del centro de presión: $c_p = m_z/c_y = 0{,}02297$. Partiendo de (9.228) el coeficiente del momento de balanceo de la sección, calculado para la semienvergadura 0,5 l, $m_x' = -c_y' \times (0{,}5\ l/b)\ \zeta_1 = -2{,}5\ \zeta_1 c_y'$, en tanto que el coeficiente total del momento de balanceo de la sección (para la semiala) $m_x = -2{,}5 \int_0^1 \zeta_1 c_y' d\zeta_1$.

En lugar de c_y' introducimos aquí los valores de (9.259), (9.260) e integramos:

$$m_x = -2{,}5\left[\int_0^{0,68} (c_y')_I \zeta_1\, d\zeta_1 + \int_{0,68}^1 (c_y')_{II} \zeta_1\, d\zeta_1\right] = -0{,}1265.$$

3. De acuerdo con la fórmula $p^{q_i} = 2\ \gamma^{q_i}$

$$p^\alpha = \Delta p^\alpha = [(\bar{p}_1 - \bar{p}_s)/q_\infty]^\alpha = 2\gamma^\alpha; \quad p^{\omega_z} = 2\gamma^{\omega_z}.$$

Teniendo en cuenta los valores prefijados de γ^α y γ^{ω_z}, formamos la tabla 9.9. Entre la circulación y su *intensidad* existen las dependencias

$$\Gamma_m^\alpha = \Delta\xi\, (\gamma_{m-1/2}^\alpha + \gamma_{m+1/2}^\alpha)/2; \quad \Gamma_m^{\omega_z} = \gamma^{\omega_z} \Delta\xi\, (\gamma_{m-1/2}^{\omega_z} + \gamma_{m+1/2}^{m_z})/2.$$

En correspondencia con estas fórmulas, así como con los valores prefijados de $\gamma^{\alpha}(\xi)$, $\gamma^{\omega_z}(\xi)$, hallamos (tabla 9.10):

Tabla 9.10

$\xi = x/b$	0	0,125	0,25	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875	1,0
$\Delta\xi$		0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125
Γ_m^{α}		0,8281	0,562	0,4031	0,2969	0,2288	0,185	0,1312	0,0469
$\Gamma_m^{\omega_z}$		0,8056	0,3462	0,3112	0,2644	0,2225	0,1962	0,1569	0,0656

Partiendo de (9.234) para la sección de un ala de envergadura infinita

$$c_y'^{\alpha} = 2\int_0^1 \gamma^{\alpha}\, d\xi = 5{,}36; \quad c_y'^{\omega_z} = 2\int_0^1 \gamma^{\omega_z}\, d\xi = 4{,}747.$$

Para comparar efectuemos los cálculos con (9.236) y (9.237):

$$c_y'^{\alpha} = 2\sum_{\mu=1}^{9} \Gamma^{\alpha} = 5{,}365; \quad c_y'^{\omega_z} = 2\sum_{\mu=1}^{9} \Gamma^{\omega_z} = 4{,}74.$$

Sobre la base de (9.238) y (9.239), tenemos

$$m_z'^{\alpha} = 2\int_0^1 \gamma^{\alpha}\xi\, d\xi = 1{,}576; \quad m_z'^{\omega_z} = 2\int_0^1 \gamma^{\omega_z}\xi\, d\xi = 1{,}477.$$

En correspondencia con (9.242) y (9.243) para un ala infinitamente larga $m_x'^{\alpha} = -\zeta c_y'^{\alpha} = -(z/b)\, c_y'^{\alpha}$; $m_x'^{\omega_z} = -\zeta c_y'^{\omega_z}$. Introduciendo aquí los datos obtenemos $m_x'^{\alpha} = 5{,}36\zeta$; $m_x'^{\omega_z} = -4{,}74\zeta$.

Para el sector prefijado del ala con área $S_{\text{ala}} = lb = 20\ \text{m}^2$, hallamos:

$$Y^{\alpha} = c_y'^{\alpha} q_{\infty} S_{\text{ala}} = 164\,284\ \text{N}; \quad Y_{\alpha} = Y^{\alpha}(2/57{,}3) = 5734{,}2\ \text{N};$$

$$Y^{\omega_z} = c_y'^{\omega_z} q_{\infty} S_{\text{ala}} = 145\,281\ \text{N}; \quad Y_{\omega_z} = 145\,281\omega_z = 581\ \text{N};$$

$$M_z^{\alpha} = m_z'^{\alpha} q_{\infty} S_{\text{ala}} b = 96\,608{,}8\ \text{N}\cdot\text{m}; \quad M_{z(\alpha)} = 3372\ \text{N}\cdot\text{m};$$

$$M_z^{\omega_z} = m_z'^{\omega_z} q_{\infty} S_{\text{ala}} b = 90540{,}1\ \text{N}\cdot\text{m}; \quad M_{z(\omega_z)} = 362{,}16\ \text{N}\cdot\text{m};$$

$$m_x^{\alpha} = \frac{1}{0{,}5l}\int_0^{0{,}5l} m_x'^{\alpha}\, dz = \frac{-1}{0{,}5l}\, c_y'^{\alpha}\, \frac{1}{b}\int_0^{0{,}5l} z\,dz = -6{,}7;$$

$$M_x^{\alpha} = -m_x^{\alpha} q_{\infty} S_{\text{ala}} b = -410710\ \text{N}\cdot\text{m}; \quad M_{x(\alpha)} = -14335{,}4\ \text{N}\cdot\text{m};$$

$$m_x^{\omega_z} = -0{,}5lc_y'^{\omega_z}/(2b) = -5{,}925;$$

$$M_x^{\omega_z} = m_x^{\omega_z} q_{\infty} S_{\text{ala}} b = -72640{,}5\ \text{N}\cdot\text{m}; \quad M_{x(\omega_x)} = -290{,}56\ \text{N}\cdot\text{m}.$$

4. Calculemos ciertas características geométricas del ala en flecha: cuerda de extremo $b_e = b_0/\eta = 2$ m; área en la planta $S_{ala} = 0,5\ (b_0 + b_e)\ l = 22,5$ m²; envergadura $l = (\lambda S_{ala})^{1/2} = 7,5$ m; cuerda corriente $b'/b_0 = 1 - \zeta_1\ (1 - 1/\eta) = 1 - 1,067\ \zeta\ [\zeta_1 = z/(0,5\ l);\ \zeta = z/b_0]$; puntos del borde de ataque $x_{at} = z\text{tg}\ \chi_{at}$, $\xi_{at} = \zeta\ \text{tg}\ 60 = \zeta \cdot 1,732$; puntos medios de las células

$$x = x_{at} + (2\mu - 1)\ b'/10;$$

$$\xi = \xi_{at} + (2\mu - 1)\ (b'/b_0)/10 = 1,732\ \zeta + 0,1\ (2\mu - 1)\ (1 - 1,067\ \zeta);$$

$$z = 0,5\ l/10 + (0,5\ l/5)\ (5 - k);\quad \zeta = 0,09387\ [1 + 2\ (5 - k)];$$

$$(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 5).$$

Componemos la tabla de los valores de ξ y ζ (tabla 9.11).

Tabla 9.11

$kk-1$		5, 5−1	4, 4−1	3, 3−1	2, 2−1	1, 1−0
ξ	$\mu = 1$	0,2525	0,5567	0,8623	1,168	1,472
	...	...	...	...	...	...
	$\mu = 5$	0,9725	1,117	1,262	1,408	1,552
ζ		0,0938	0,281	0,469	0,657	0,844

La longitud relativa de la célula $\bar{l}_{kk-1} = 0,5l/(5b_0) = 0,1875$.

Calculemos los valores de $\Gamma^{\omega_z}_{\mu kk-1}\xi^{\mu k}_{\mu k-1}$ y las sumas $\sum\limits_{\mu=1}^{5}$ que entran en (9.253) (tabla 9.12).

Tabla 9.12

μ \ $kk-1$	5, 5−1	4, 4−1	3, 3−1	2, 2−1	1, 1−1
1	0,0782	0,0668	0,474	2,710	3,989
...	...	...	...	...	...
5	0,8712	0,9048	0,8960	0,9997	0,6984
$\sum\limits_{\mu=1}^{5}$	1,480	1,263	6,043	8,249	9,182

De acuerdo con (9.253) $m_z^{\omega_z} = 13,98$.

A continuación, calculamos el producto $\Gamma^{\omega_x}_{\mu kk-1}\xi^{\mu k}_{\mu kk-1}$ y las sumas $\sum_{\mu=1}^{5}$ que entran en (9.254) (tabla 9.13).

Tabla 9.13

μ \ $kk-1$	5,5−1	4,4−1	3,3−1	2,2−1	1,1−1
1	0,0141	0,1433	0,4737	0,9264	1,443
...	...	...	...	...	...
5	0,0038	0,0338	0,0704	0,0986	0,0675
$\sum_{\mu=1}^{5}$	0,1089	0.3569	0,9897	1,846	2,447

En correspondencia con (9.254) $m_x^{\omega_x} = 3{,}066$.

9.49. La ecuación para el potencial de velocidad de la circulación inuniforme subsónica de un fluido incompresible alrededor del ala tiene la forma (9.50). Prefijando esta función del modo correspondiente es posible realizar la transformación de la ecuación (9.50) a una forma más sencilla parecida a la ecuación para la circulación uniforme. Prefijamos el potencial adimensional con el trinomio

$$\bar{\varphi} = \sum_{i=1}^{3} (\bar{\varphi}^{q_i} q_i + \bar{\varphi}^{\dot{q}_i} \dot{q}_i), \tag{9.261}$$

donde $\bar{\varphi}^{q_i} = \partial\bar{\varphi}/\partial q_i$, $\bar{\varphi}^{\dot{q}_i} = \partial\bar{\varphi}/\partial\dot{q}_i$.

A su vez, representemos las derivadas en (9.261) en la forma

$$\left.\begin{aligned} \bar{\varphi}^{q_i} &= \varphi_1^{q_i}\cos\omega_i\xi + p_i^* k^{-2}\varphi_1^{\dot{q}_i}\,\text{sen}\,\omega_i\xi;\\ \bar{\varphi}^{\dot{q}_i} &= k^{-2}\varphi_1^{\dot{q}_i}\cos\omega_i\xi - p_i^{*-1}\bar{\varphi}_1^{q_i}\,\text{sen}\,\omega_i\xi, \end{aligned}\right\} \tag{9.262}$$

donde las derivadas $\varphi_1^{q_i} = \partial\varphi_1/\partial q_i$, $\partial\varphi_1^{\dot{q}_i} = \partial\varphi_1/\partial\dot{q}_i$ para cierta nueva función φ_1; $p_i^* = p_i b_0/V_\infty$, el número de Strouhal; $k = \sqrt{1 - M_\infty^2}$; $\omega_i = M_\infty^{-2} k^{-2} p_i^*$.

Calculemos las derivadas en (9.262) (omitimos el signo de la suma):

$$\frac{\partial^2\bar{\varphi}^{q_i}}{\partial\xi^2} = \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial\varphi_1^{q_i}}{\partial\xi}\cos\omega_i\xi - \varphi_1^{q_i}\omega_i\,\text{sen}\,\omega_i\xi + p_i^* k^{-2}\left(\frac{\partial\varphi_1^{\dot{q}_i}}{\partial\xi}\,\text{sen}\,\omega_i\xi + \varphi_1^{\dot{q}_i}\omega_i\cos\omega_i\xi\right)\right];$$

$$\frac{\partial^2\bar{\varphi}^{\dot{q}_i}}{\partial\xi^2} = \frac{\partial}{\partial\xi}\left[k^{-2}\left(\frac{\partial\varphi_1^{\dot{q}_i}}{\partial\xi}\cos\omega_i\xi - \varphi_1^{\dot{q}_i}\omega_i\,\text{sen}\,\omega_i\xi\right) - p_i^{*-1}\left(\frac{\partial\varphi_1^{q_i}}{\partial\xi}\,\text{sen}\,\omega_i\xi + \varphi_1^{q_i}\omega_i\cos\omega_i\xi\right)\right].$$

De aquí, haciendo $q_i = q_i^* \cos p_i^* \tau$ y $\dot{q}_i = -q_i^* p_i^* \operatorname{sen} p_i^* \tau$, hallamos la derivada $\partial^2 \bar{\varphi}/\partial \xi^2 = q_i \partial^2 \varphi^{q_i}/\partial \xi^2 + \dot{q}_i \partial^2 \varphi^{\dot{q}_i}/\partial \xi^2$.

A continuación, teniendo en cuenta que $\dot{q}_i = -q_i^* p_i^* \operatorname{sen} p_i^* \tau$, $\ddot{q}_i = -q_i^* p_i^{*2} \cos p_i^* \tau$; $\dddot{q}_i = q_i^* p_i^{*3} \operatorname{sen} p_i^* \tau$, determinamos la derivada mixta:

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \xi \, \partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}^{q_i}}{\partial \xi} q_i + \frac{\partial \bar{\varphi}^{\dot{q}_i}}{\partial \xi} \dot{q}_i \right) = \frac{\partial \bar{\varphi}^{q_i}}{\partial \xi} \dot{q}_i + \frac{\partial \varphi^{\dot{q}_i}}{\partial \xi} \ddot{q}_i,$$

así como la derivada

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \tau^2} = -\left(\varphi_1^{q_i} \cos \omega_i \xi + p_i^* k^{-2} \varphi_1^{\dot{q}_i} \operatorname{sen} \omega_i \xi\right) q_i^* p_i^{*2} \cos p_i^* \tau +$$

$$+ (k^{-2} \varphi_1^{\dot{q}_i} \cos \omega_i \xi - p_i^{*-1} \varphi_1^{q_i} \operatorname{sen} \omega_i \xi) \, q_i^* p_i^{*3} \operatorname{sen} p_i^* \tau. \tag{9.263}$$

Teniendo en cuenta (9.261) y (9.262) calculamos las derivadas $\partial^2 \bar{\varphi}/\partial \eta^2$ y $\partial^2 \bar{\varphi}/\partial \zeta^2$ en (9.50).

Introduzcamos las derivadas halladas en (9.50) y agrupemos los términos de los factores

$$\cos (p_i^* \tau - \omega_i \xi) \text{ y } \operatorname{sen} (p_i^* \tau - \omega_i \xi):$$

$$\cos (p_i^* \tau - \omega_i \xi) \left[k^{-2} \frac{\partial^2 \varphi_1^{q_i}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1^{q_i}}{\partial \eta^2} + (p_i^* M_\infty^2 \omega_i + p_i^{*2} M_\infty^2) \, \varphi_1^{q_i} \right] +$$

$$+ \operatorname{sen} (p_i^* \tau - \omega_i \xi) \left[p_i^* \frac{\partial^2 \varphi_1^{\dot{q}_i}}{\partial \xi^2} + p_i^* k^{-2} \frac{\partial^2 \varphi_1^{\dot{q}_i}}{\partial \eta^2} + \right.$$

$$\left. + (p_i^{*2} k^{-2} M_\infty^2 \omega_i + p_i^{*3} k^{-2} M_\infty^2) \, \varphi_1^{\dot{q}_i} \right] = 0. \tag{9.264}$$

Ya que la igualdad obtenida debe satisfacerse con todos los valores del tiempo τ, cada una de las expresiones entre corchetes se anula. Así, pues, obtenemos los siguientes sistemas de ecuaciones que para cada i (α; ω_x; ω_z) deben resolverse por separado:

$$k^2 \partial^2 \varphi_1^{q_i}/\partial \xi^2 + \partial^2 \varphi_1^{q_i}/\partial \eta^2 + p_i^{*2} M_\infty^2 k^{-2} \varphi_1^{q_i} = 0; \tag{9.265}$$

$$k^2 \partial^2 \varphi_1^{\dot{q}_i}/\partial \xi^2 + \partial^2 \varphi_1^{\dot{q}_i}/\partial \eta^2 + p_i^{*2} M_\infty^2 k^{-2} \varphi_1^{\dot{q}_i} = 0. \tag{9.266}$$

Para pequeños números de Strouhal, obtenemos

$$k^2 \partial^2 \varphi_1^{q_i}/\eta \xi^2 + \partial^2 \varphi_1^{q_i}/\partial \eta^2 = 0. \tag{9.267}$$

$$k^2 \partial^2 \varphi_1^{\dot{q}_i}/\partial \xi^2 + \partial^2 \varphi_1^{\dot{q}_i}/\partial \eta^2 = 0. \tag{9.268}$$

9.50. Las funciones $\varphi_1^{q_i}$, $\varphi_1^{\dot{q}_i}$ determinan el potencial de velocidad de la circu ción inuniforme:

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}^{q_i} q_i + \bar{\varphi}^{\dot{q}_i} \dot{q}_i, \tag{9.269}$$

donde

$$\bar{\varphi}^{q_i} = \varphi_1^{q_i} \cos \omega_i \xi + p_i^* k^{-2} \dot{\varphi}_1^{q_i} \operatorname{sen} \omega_i \xi; \quad (9.270)$$

$$\bar{\dot{\varphi}}^{q_i} = k^{-2} \dot{\varphi}_1^{q_i} \cos \omega_i \xi - p_i^{*^{-1}} \varphi_1^{q_i} \operatorname{sen} \omega_i \xi. \quad (9.271)$$

I. *La condición de frontera* en la superficie sometida a la circulación, a la que debe satisfacer la función φ, tiene el aspecto

$$\partial\varphi/\partial y = v_y = -V_\infty \alpha - \Omega_x z - \Omega_z x. \quad (9.272)$$

En correspondencia con esta condición la componente normal de la velocidad perturbada en el ala debe extinguirse mediante esa misma componente de la velocidad del flujo que circula. En forma adimensional la condición (9.272)

$$\partial\bar{\varphi}/\partial\eta = -\alpha - \omega_x \zeta - \omega_z \xi, \quad (9.273)$$

donde

$$\left.\begin{array}{l} \bar{\varphi} = \varphi\,(b_0 V_\infty); \quad \xi = x/b_0; \quad \eta = y/b_0; \quad \zeta = z/b_0; \\ \omega_x = \Omega_x b_0/V_\infty; \quad \omega_z = \Omega_z b_0/V_\infty. \end{array}\right\} \quad (9.274)$$

Teniendo en cuenta (9.269)—(9.272) calculemos la derivada $\partial\bar{\varphi}/\partial\eta$ e introduzcámosla en la ecuación (9.273), adoptando $q_i = q_i^* \cos p_i \tau$. Como resultado, la expresión (9.273) se descompone en dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} (\partial\varphi_1^{q_i}/\partial\eta) \cos \omega_i \xi + p_i^* k^{-2} (\partial\dot{\varphi}_1^{q_i}/\partial\eta) \operatorname{sen} \omega_i \xi = v_i \\ (v_1 = -1; \quad v_2 = -\zeta; \quad v_3 = -\xi); \end{array}\right\} \quad (9.275)$$

$$(\partial\dot{\varphi}_1^{q_i}/\partial\eta)\, k^{-2} \cos \omega_i \xi - p_i^{*^{-1}} (\partial\varphi_1^{q_i}/\partial\eta) \operatorname{sen} \omega_i \xi = 0. \quad (9.276)$$

Para pequeños números de Strouhal ($\cos \omega_i \xi \approx 1$; $\operatorname{sen} \omega_i \xi \approx \omega_i \xi = \mathrm{M}_\infty^2\, p_i^*/k^2$) las condiciones de frontera toman la forma

$$\partial\varphi_1^{q_i}/\partial\eta = v_i; \quad (9.277)$$

$$\partial\dot{\varphi}_1^{q_i}/\partial\eta = (\partial\varphi_1^{q_i}/\partial\eta)\, \mathrm{M}_\infty^2 \xi = \mathrm{M}_\infty^2 v_i \xi. \quad (9.278)$$

II. *Las condiciones en el infinito* son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1^{q_i} = \partial\varphi_1^{q_i}/\partial\xi = \partial\varphi_1^{q_i}/\partial\eta = \partial\varphi_1^{q_i}/\partial\zeta = 0; \\ \dot{\varphi}_1^{q_i} = \partial\dot{\varphi}_1^{q_i}/\partial\xi = \partial\dot{\varphi}_1^{q_i}/\partial\eta = \partial\dot{\varphi}_1^{q_i}/\partial\zeta = 0. \end{array}\right\} \quad (9.279)$$

III. *La función potencial* φ, así como sus derivadas φ^{q_i}, $\dot{\varphi}^{q_i}$ (y los correspondientes valores de $\bar{\varphi}^{q_i}$, $\bar{\dot{\varphi}}^{q_i}$) deben satisfacer las condiciones en la banda vorticial tras el ala. Estas condiciones se determinan por la falta en ella de la caída de presión. Así, pues, de acuerdo con (9.44), en la banda vorticial tenemos la condición

$$\partial\bar{\varphi}/\partial\xi - \partial\bar{\varphi}/\partial\tau = 0. \quad (9.280)$$

Ponemos φ en esta condición:

$$(\partial\bar{\varphi}^{q_i}/\partial\xi)\, q_i + (\partial\bar{\varphi}^{q_i}/\partial\xi)\, \dot{q}_i - \bar{\varphi}^{q_i}\dot{q}_i - \bar{\varphi}^{q_i}\dddot{q}_i = 0.$$

Llevamos a cabo la posterior transformación teniendo en cuenta (9.270) y (9.271). Tomando $q_i = q_i^* \cos p_i^*\tau$ e igualando a cero, a continuación, los términos de $\cos p_i^*\tau$ y $\operatorname{sen} p_i^*\tau$ y suponiendo que $\cos \omega_i\xi \approx 1$ y $\operatorname{sen} \omega_i\xi \approx \omega_i\xi = p_i^*\mathbf{M}_\infty^2/k^2$, para pequeños números de Strouhal hallamos

$$\partial\varphi_1^{q_i}/\partial\xi = 0; \tag{9.281}$$

$$\partial\dot{\varphi}_1^{q_i}/\partial\xi - \varphi_1^{q_i} = 0. \tag{9.282}$$

2. *Las coordenadas adimensionales* del punto asignado ($x = 2$ m; $z = 3$ m) son las siguientes: $\xi = x/b_0 = 0{,}5$; $\zeta = z/b_0 = 0{,}75$. Para la atmósfera normal la velocidad del sonido $a_\infty = 340$ m/s; por lo tanto, el número $\mathbf{M}_\infty = V_\infty/p_\infty = 0{,}5$. También calculamos el número de Strouhal: $p_{\omega_z}^* = p_{\omega_z}^* b_0/V_\infty = 0{,}014$. Con un número de Strouhal tan pequeño puede no tomarse en consideración su influjo sobre las condiciones de frontera que tomarán la siguiente forma:

$$\partial\varphi_1^{\alpha}/\partial\eta = -1; \quad \partial\varphi_1^{\omega_z}/\partial\eta = -0{,}5; \quad \partial\dot{\varphi}_1^{\omega_z}/\partial\eta = -0{,}0625 \text{ (en la superficie)};$$

$$\varphi_1^{\alpha(\omega_z)} = \frac{\partial\varphi_1^{\alpha(\omega_z)}}{\partial\xi} = \frac{\partial\varphi_1^{\alpha(\omega_z)}}{\partial\eta} = \frac{\partial\varphi_1^{\alpha(\omega_z)}}{\partial\zeta} = \varphi_1^{\dot{\omega}_z} = \frac{\partial\varphi_1^{\dot{\omega}_z}}{\partial\xi} = \frac{\partial\varphi_1^{\dot{\omega}_z}}{\partial\eta} = \frac{\partial\varphi_1^{\dot{\omega}_z}}{\partial\zeta} = 0 \tag{9.283}$$

(en el infinito);

$$\partial\varphi_1^{\alpha(\omega_z)}/\partial\xi = 0; \quad \partial\dot{\varphi}_1^{\omega_z}/\partial\xi - \varphi_1^{\omega_z} = 0 \tag{9.283'}$$

(en la banda vorticial).

9.51. 1. Tomemos que las coordenadas de los puntos de un flujo incompresible convencional están ligadas con las coordenadas del espacio de un gas compresible mediante las relaciones

$$x_{\text{inc}} = x/k; \quad y_{\text{inc}} = y; \quad z_{\text{inc}} = z \tag{9.284}$$

o bien en forma adimensional

$$\xi_{\text{inc}} = x_{\text{inc}}/b_{0\,\text{inc}} = \xi; \quad \eta_{\text{inc}} = y_{\text{inc}}/b_{0\,\text{inc}} = \eta k;$$
$$\zeta_{\text{inc}} = z_{\text{inc}}/b_{0\,\text{inc}} = \zeta k, \tag{9.285}$$

donde $k = \sqrt{1 - \mathbf{M}_\infty^2}$; $b_{0\,\text{inc}} = b/k$.

Variemos en la planta la forma del ala prefijada haciendo uso de las dependencias (9.284) entre las coordenadas. En correspondencia con esto para el borde de ataque, así como para una sección tomada al azar

$$x_{0\,\text{inc}} = x_0/k; \quad z_{0\,\text{inc}} = z_0; \quad b_{\text{inc}} = b/k. \tag{9.286}$$

Los respectivos valores adimensionales

$$\xi_{0\,\text{inc}} = x_{0\,\text{inc}}/b_{0\,\text{inc}} = \xi_0; \quad \zeta_{0\,\text{inc}} = z_{0\,\text{inc}}/b_{0\,\text{inc}} = \zeta_0 k;$$
$$\bar{b}_{\text{inc}} = b_{\text{inc}}/b_{0\,\text{inc}} = \bar{b}. \tag{9.287}$$

Por regla, para las alas con bordes de ataque rectos se prefija el alargamiento $\lambda_{ala} = l_0/b_m$, el adelgazamiento $\eta_{ala} = b_0/b_e$ y el ángulo de flecha χ_0. Los correspondientes parámetros del ala transformada:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{ala\ inc} &= l_{0\ inc}/b_{m\cdot inc} = \lambda_{ala}k;\\ \eta_{ala\ inc} &= b_{0\ inc}/b_{e\cdot inc} = \eta_{ala};\\ \operatorname{tg}\chi_{0\ inc} &= x_{0\ inc}/z_{0\ inc} = \operatorname{tg}\chi_0/k,\end{aligned}\right\} \tag{9.288}$$

en tanto que el producto de los alargamientos y las tangentes de los ángulos de flecha

$$\lambda_{ala\ inc}\operatorname{tg}\chi_{0\ inc} = \lambda_{ala}\operatorname{tg}\chi_0. \tag{9.289}$$

Pasemos en (9.267) y (9.268) a las nuevas variables (9.285):

$$\partial^2\varphi_1^{q_i}/\partial\xi_{inc}^2 + \partial^2\varphi_1^{q_i}/\partial\eta_{inc}^2 + \partial^2\varphi_1^{q_i}/\partial\zeta_{inc}^2 = 0; \tag{9.290}$$

$$\partial^2\varphi_1^{\dot{q}_i}/\partial\xi_{inc}^2 + \partial^2\varphi_1^{\dot{q}_i}/\partial\eta_{inc}^2 + \partial^2\varphi_1^{\dot{q}_i}/\partial\zeta_{inc}^2 = 0. \tag{9.291}$$

Analicemos las condiciones de frontera para las funciones $\varphi_1^{q_i}$ y $\varphi_1^{\dot{q}_i}$. De acuerdo con (9.277), (9.278) y (9.284) en la superficie sometida a la circulación tenemos

$$\partial\varphi_1^{q_i}/\partial\eta_{inc} = v_{i\ inc}/k; \quad \partial\varphi_1^{\dot{q}_i}/\partial\eta_{inc} = M_\infty^2 v_{1\ inc}\xi/k, \tag{9.292}$$

donde en correspondencia con (9.275)

$$v_{1\ inc} = -1; \quad v_{2\ inc} = -\zeta_{inc}/k; \quad v_{3\ inc} = -\xi_{inc}. \tag{9.293}$$

Las condiciones en el infinito, de acuerdo con (9.279)

$$\varphi_1^{q_i} = \frac{\partial\varphi_1^{q_i}}{\partial\xi_{inc}} = \frac{\partial\varphi_1^{q_i}}{\partial\eta_{inc}} = \frac{\partial\varphi_1^{q_i}}{\partial\zeta_{inc}} = \varphi_1^{\dot{q}_i} = \frac{\partial\varphi_1^{\dot{q}_i}}{\partial\xi_{inc}} = \frac{\partial\varphi_1^{\dot{q}_i}}{\partial\eta_{inc}} = \frac{\partial\varphi_1^{\dot{q}_i}}{\partial\zeta_{inc}} = 0. \tag{9.294}$$

Conforme a (9.281) y (9.282), para la banda vorticial, tenemos

$$\partial\varphi_1^{q_i}/\partial\xi_{inc} = 0; \quad \partial\varphi_1^{\dot{q}_i}/\partial\xi_{inc} - \varphi_1^{q_i} = 0. \tag{9.295}$$

Ahora analicemos el ala transformada y representemos el potencial de velocidad en la forma

$$\overline{\Phi}_{inc} = k\sum_{i=1}^{3}\left(\Phi_{inc}^{q_i\ inc}q_{i\ inc} + \Phi_{inc}^{\dot{q}_i\ inc}\dot{q}_{i\ inc}\right), \tag{9.296}$$

donde $\overline{\Phi}_{inc} = \Phi_{inc}/(b_{0\ inc}V_{\infty\ inc})$ es una función adimensional del potencial; $\Phi_{inc}^{q_i\ inc}$, $\Phi_{inc}^{\dot{q}_i\ inc}$, las correspondientes derivadas de esta función.

Sustituyamos en la ecuación para el potencial de velocidad de un flujo incompresible

$$\partial^2\overline{\Phi}_{inc}/\partial\xi_{inc}^2 + \partial^2\overline{\Phi}_{inc}/\partial\eta_{inc}^2 + \partial^2\overline{\Phi}_{inc}/\partial\zeta_{inc}^2 = 0 \tag{9.297}$$

la función $\overline{\Phi}_{\text{inc}}$ por su valor en (9.296). Como resultado de dicha operación la relación obtenida se descompone en dos ecuaciones:

$$\partial^2\Phi^{q_i\,\text{inc}}_{\text{inc}}/\partial\xi^2_{\text{inc}} + \partial^2\Phi^{q_i\,\text{inc}}_{\text{inc}}/\partial\eta^2_{\text{inc}} + \partial^2\Phi^{q_i\,\text{inc}}_{\text{inc}}/\partial\zeta^2_{\text{inc}} = 0, \qquad (9.298)$$

$$\partial^2\dot{\Phi}^{q_i\,\text{inc}}_{\text{inc}}/\partial\xi^2_{\text{inc}} + \partial^2\dot{\Phi}^{q_i\,\text{inc}}_{\text{inc}}/\partial\eta^2_{\text{inc}} + \partial^2\dot{\Phi}^{q_i\,\text{inc}}_{\text{inc}}/\partial\zeta^2_{\text{inc}} = 0. \qquad (9.299)$$

Para las funciones $\Phi^{q_i\,\text{inc}}_{\text{inc}}$, $\dot{\Phi}^{q_i\,\text{inc}}_{\text{inc}}$ y sus derivadas las condiciones de frontera, correspondientes al flujo en el infinito, son las mismas que (9.294).

En la banda vorticial, conforme a la ecuación (9.280), en la que sustituimos $\overline{\varphi}$ por $\overline{\Phi}_{\text{inc}}$ y tomamos $q_{i\ \text{inc}} = q_i^* \cos p_i^* \tau$, tenemos la condición

$$\left(\frac{\partial\Phi^{q_i\,\text{inc}}_{\text{inc}}}{d\xi_{\text{inc}}} + p_i^{*2}\dot{\Phi}^{q_i\,\text{inc}}_{\text{inc}}\right) q_i^* \cos p_i^*\tau - \left(\frac{\partial\dot{\Phi}^{q_i\,\text{inc}}_{\text{inc}}}{\partial\xi_{\text{inc}}} - \Phi^{q_i\,\text{inc}}_{\text{inc}}\right) q_i^* p_i^* \operatorname{sen} p_i^*\tau = 0. \qquad (9.300)$$

Igualando a cero los factores de $\cos p_i^*\tau$ y $\operatorname{sen} p_i^*\tau$ y considerando que los números de Strouhal son pequeños, obtenemos las condiciones en la banda vorticial:

$$\partial\Phi^{q_i\,\text{inc}}_{\text{inc}}/\partial\xi_{\text{inc}} = 0; \qquad (9.301)$$

$$\partial\dot{\Phi}^{q_i\,\text{inc}}_{\text{inc}}/\partial\xi_{\text{inc}} - \Phi^{q_i\,\text{inc}}_{\text{inc}} = 0. \qquad (9.302)$$

Con arreglo a las condiciones de frontera en el ala transformada la componente vertical de la velocidad $v' = \partial\Phi_{\text{inc}}/\partial\eta_{\text{inc}}$ debe extinguirse por esa misma componente del flujo no perturbado, es decir,

$$v'' = V_{\infty\,\text{inc}} = \alpha_{\text{inc}} + \Omega_{x\ \text{inc}} z_{\text{inc}} + \Omega_{z\ \text{inc}} x_{\text{inc}} - \overline{V}_{\text{inc}}, \qquad (9.303)$$

donde $\overline{V}_{\text{inc}}$ es cierto valor adicional de la componente vertical de la velocidad que hace que el flujo convencional incompresible se distinga del flujo real compresible.

El valor de $\overline{V}_{\text{inc}}$ se elige de tal forma que las respectivas condiciones de frontera en la pared para las funciones $\overline{\varphi}_1^{q_i}$, $\dot{\overline{\varphi}}_1^{q_i}$ (gas compresible) y $\overline{\Phi}^{q_i\,\text{inc}}_{\text{inc}}$, $\dot{\overline{\Phi}}^{q_i\,\text{inc}}_{\text{inc}}$ (medio incompresible) sean iguales. Tomando esto en consideración adoptemos

$$\overline{V}_{\text{inc}} = V_{\text{inc}}/V_{\infty\ \text{inc}} = \mathrm{M}^2_\infty \sum_{i=1}^{3} \xi_{\text{inc}} v_{i\ \text{inc}} \dot{q}_{i\ \text{inc}}. \qquad (9.304)$$

Así, pues, conforme a la condición de adherencia de la circulación, tomando en consideración (9.296) (omitiendo los signos de suma), tendremos

$$k\left[(\partial\overline{\Phi}^{q_i\,\text{inc}}_{\text{inc}}/\partial\eta_{\text{inc}})\, q_{i\ \text{inc}} + (\partial\dot{\overline{\Phi}}^{q_i\,\text{inc}}_{\text{inc}}/\partial\eta_{\text{inc}})\, \dot{q}_{i\ \text{inc}}\right] =$$

$$= -q_{i(1)\text{inc}} - q_{i(2)\text{inc}}\zeta_{\text{inc}} - q_{i(3)\text{inc}}\zeta_{\text{inc}} + \mathrm{M}^2_\infty \xi_{\text{inc}} v_{i\ \text{inc}} \dot{q}_{i\ \text{inc}}, \qquad (9.305)$$

donde

$$q_{i(1)\text{inc}} = \alpha_{\text{inc}}; \quad q_{i(2)\text{inc}} = \omega_{x\ \text{inc}}; \quad q_{i(3)\text{inc}} = \omega_{z\ \text{inc}}. \qquad (9.306)$$

Igualando los términos con iguales valores de $q_{i\ \text{inc}}$ o bien de $\dot{q}_{i\ \text{inc}}$ en los miembros primero y segundo de (9.306), obtenemos las condiciones de frontera:

$$\partial\overline{\Phi}_{\text{inc}}^{q_i\ \text{inc}}/\partial\eta_{\text{inc}} = v_{i\ \text{inc}}/k; \tag{9.307}$$

$$\partial\overline{\Phi}_{\text{inc}}^{\dot{q}_i\ \text{inc}}/\partial\eta_{\text{inc}} = M_\infty^2\xi_{\text{inc}}v_{i\ \text{inc}}/k; \tag{9.308}$$

$$v_{1\ \text{inc}} = -1; \quad v_{2\ \text{inc}} = -\zeta_{\text{inc}}/k; \quad v_{3\ \text{inc}} = -\xi_{\text{inc}}. \tag{9.309}$$

Comparando (9.290)—(9.295) con las correspondientes relaciones (9.298)—(9.302), (9.307), (9.308) vemos que las derivadas $\varphi_1^{q_i}$, $\varphi_1^{\dot{q}_i}$, que caracterizan la circulación no estacionaria de un flujo compresible alrededor de un ala delgada y las respectivas derivadas $\overline{\Phi}_{\text{inc}}^{q_i\ \text{inc}}$, $\overline{\Phi}_{\text{inc}}^{\dot{q}_i\ \text{inc}}$, de las que depende el potencial de velocidad para una superficie de sustentación transformada en un medio incompresible, satisfacen a iguales ecuaciones diferenciales y condiciones de frontera. Por esta razón, los valores de estas derivadas son iguales en los puntos, cuyas coordenadas fueron determinadas con las dependencias (9.285):

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1^{q_i} &= \Phi_{\text{inc}}^{q_i\ \text{inc}}(\xi_{\text{inc}}, \eta_{\text{inc}}, \zeta_{\text{inc}}); \\ \varphi_1^{\dot{q}_i\ \text{inc}} &= \Phi_{\text{inc}}^{\dot{q}_i\ \text{inc}}(\xi_{\text{inc}}, \eta_{\text{inc}}, \zeta_{\text{inc}}). \end{aligned}\right\} \tag{9.310}$$

Así, pues, el problema de la circulación inuniforme de un gas compresible alrededor de un ala plana con ley armónica de variación de los parámetros cinemáticos, siendo pequeños los números de Strouhal, se ha reducido al problema del flujo inuniforme de un fluido incompresible alrededor de una superficie de sustentación transformada con condiciones de frontera modificadas en la pared.

2. Las dimensiones del ala transformada (con arreglo a los datos para la superficie de sustentación inicial en la fig. 9.7):

$$l_{\text{inc}} = l = 10 \text{ m}; \quad b_{0\ \text{inc}} = b_0/k = 6{,}667; \quad b_{e\ \text{.inc}} = b_e/k = 3{,}633 \text{ m};$$

$$\operatorname{tg}\chi_{\text{inc}} = (b_{0\ \text{inc}} - b_{e.\text{inc}})/(0{,}5\ l_{\text{inc}}) = \operatorname{tg}\chi/k = 0{,}607;$$

$$S_{\text{ala}} = 2\,[(b_0 + b_e)/2]\,0{,}5l = 15{,}45 \text{ m}^2; \quad S_{\text{ala inc}} = S_{\text{ala}}/k = 25{,}75 \text{ m}^2;$$

$$\eta_{\text{ala}} = b_0/b_e = 1{,}835; \quad \eta_{\text{ala inc}} = \eta_{\text{ala}} = 1{,}835;$$

$$\lambda_{\text{ala}} = l/\,[0{,}5\,(b_0 + b_e)] = 3{,}236;$$

$$\lambda_{\text{ala inc}} = l_{\text{inc}}/[0{,}5\,(b_{0\ \text{inc}} + b_{e.\ \text{inc}})] = k\lambda_{\text{ala}} = 1{,}942;$$

$$\lambda_{\text{ala inc}}\operatorname{tg}\chi_{\text{inc}} = \lambda_{\text{ala}}\operatorname{tg}\chi = 1{,}178.$$

Las coordenadas adimensionales del punto asignado del ala inicial: $\xi = x/b_0 = 0{,}5$; $\zeta = z/b_0 = 0{,}75$. Para el ala transformada $\xi_{\text{inc}} = \xi = 0{,}5$; $\zeta_{\text{inc}} = \zeta k = 0{,}45$. Para el caso de la circulación de un flujo alrededor de semejante ala las condiciones de frontera (9.305) tienen la forma:

$$\partial\overline{\Phi}_{\text{inc}}/\partial\eta_{\text{inc}} = -\alpha_{\text{inc}} - 0{,}45\omega_{x\ \text{inc}} - 0{,}5\omega_{z\ \text{inc}} - 0{,}32\dot{\alpha}_{\text{inc}} - 0{,}24\dot{\omega}_{x\ \text{inc}} - 0{,}16\dot{\omega}_{z\ \text{inc}};$$

$$\partial\overline{\Phi}_{\text{inc}}^{\alpha_{\text{inc}}}/\partial\eta_{\text{inc}} = -1; \quad \partial\overline{\Phi}_{\text{inc}}^{\omega_x\ \text{inc}}/\partial\eta_{\text{inc}} = -0{,}45; \quad \partial\overline{\Phi}_{\text{inc}}^{\omega_z\ \text{inc}}/\partial\eta_{\text{inc}} = -0{,}5;$$

$$\partial\overline{\Phi}_{\text{inc}}^{\dot{\alpha}_{\text{inc}}}/\partial\eta_{\text{inc}} = -0{,}32; \quad \partial\overline{\Phi}_{\text{inc}}^{\dot{\omega}_x\ \text{inc}}/\partial\eta_{\text{inc}} = -0{,}24; \quad \partial\overline{\Phi}_{\text{inc}}^{\dot{\omega}_z\ \text{inc}}/\partial\eta_{\text{inc}} = -0.16.$$

9.52. 1. Hallemos la dependencia entre el coeficiente de presión excesiva $\Delta\overline{p}$ en un flujo compresible y el respectivo valor de $\Delta\overline{p}_{inc}$ en un medio incompresible. Estos coeficientes son variables adicionales para los correspondientes valores de $\Delta\overline{p}_0$, $\Delta\overline{p}_{0\ inc}$, condicionados por la circulación uniforme alrededor del ala teniendo en cuenta la influencia que ejerce su espesor. Así, pues, los coeficientes sumarios (totales)

$$\Delta\overline{p}_t = \Delta\overline{p}_0 + \Delta\overline{p}; \quad \Delta\overline{p}_{t\cdot inc} = \Delta\overline{p}_{0\ inc} + \Delta\overline{p}_{inc}. \tag{9.311}$$

Representemos estos coeficientes para los medios compresible e incompresible en forma de series

$$\Delta\overline{p} = \sum_{i=1}^{3} (p^{q_i} q_i + p^{\dot{q}_i} \dot{q}_i); \tag{9.312}$$

$$\Delta\overline{p}_{inc} = \sum_{i=1}^{3} (p^{q_i\ inc} q_{i\ inc} + p^{\dot{q}_i\ inc} \dot{q}_{i\ inc}). \tag{9.313}$$

Sustituyamos el primer miembro de (9.44) por la variable (9.312), en tanto que en el segundo miembro en lugar de $\overline{\varphi}$ pondremos el valor de (9.269), tomando en consideración (9.270), (9.271). Tomando en la expresión obtenida para $p^{q_i} q_i + p^{\dot{q}_i} \dot{q}_i$

$$q_i = q_i^* \cos p_i^* \tau; \quad \dot{q}_i = -q_i^* p_i^* \operatorname{sen} p_i^* \tau; \quad \ddot{q}_i = -q_i^* p_i^{*2} \cos p_i^* \tau$$

e igualando entre sí los términos en los miembros primero y segundo que contienen, correspondientemente, $\cos p_i^* \tau$ y $\operatorname{sen} p_i^* \tau$, hallamos (con $p_i^* \to 0$):

$$p^{q_i} = -4\partial\varphi_1^{q_i}/\partial\xi; \tag{9.314}$$

$$p^{\dot{q}_i} = -4\,[k^{-2}\partial\dot{\varphi}_1^{q_i}/\partial\xi - \varphi_1^{q_i}(1 + M_\infty^2/k^2) - (\partial\varphi_1^{q_i}/\partial\xi)\, M_\infty^2\xi/k^2] =$$

$$= -(4/k^2)\,(\partial\dot{\varphi}_1^{q_i}/\partial\xi - \varphi_1^{q_i}) - p^{q_i} M_\infty^2 \xi/k^2. \tag{9.315}$$

De manera análoga determinamos las derivadas del coeficiente de presión en un fluido incompresible [tomando en consideración (9.296)]:

$$p^{q_i\ inc} q_{i\ inc} + p^{\dot{q}_i\ inc} \dot{q}_{i\ inc} =$$

$$= -4k\,[(\partial\Phi_{inc}^{q_i\ inc}/\partial\xi + p_i^{*2}\dot{\Phi}_{inc}^{q_i\ inc})\, q_{i\ inc} + (\partial\dot{\Phi}_{inc}^{q_i\ inc}/\partial\xi_{inc} - \Phi_{inc}^{q_i\ inc})\, \dot{q}_{i\ inc}].$$

Igualando los factores de $q_{i\ inc}$ y $\dot{q}_{i\ inc}$ en los miembros primero y segundo de la ecuación y tomando pequeños números de Strouhal, obtenemos

$$p^{q_i\ inc} = -4k\,\partial\Phi_{inc}^{q_i\ inc}/\partial\xi_{inc}; \tag{9.316}$$

$$p^{\dot{q}_i\ inc} = -4k\,(\partial\dot{\Phi}_{inc}^{q_i\ inc}/\partial\xi_{inc} - \Phi_{inc}^{q_i\ inc}). \tag{9.317}$$

Teniendo en cuenta (9.310), hallamos la dependencia entre los coeficientes aerodinámicos en los fluidos compresible e incompresible. Comparando (9.314) y (9.316), obtenemos

$$p^{q_i} = p^{q_i\,\text{inc}}/k, \tag{9.318}$$

mientras que de la comparación de (9.315) y (9.317), hallamos

$$\dot{p}^{q_i} = (\dot{p}^{q_i\,\text{inc}} - \xi_{\text{inc}} M_\infty^2 p^{q_i\,\text{inc}})/k^3. \tag{9.319}$$

Examinemos las dependencias entre las derivadas aerodinámicas para las alas prefijada y transformada. Suponiendo que la expresión (9.233) para la derivada de la sección se ha reducido al ala prefijada, introducimos en ella los correspondientes parámetros para la superficie transformada: $\gamma^{q_i} = p^{q_i}/2 = p^{q_i\,\text{inc}}/(2k)$; $\xi = \xi_{\text{inc}}$; $b_0 = b_{0\,\text{inc}}k$; $b = b_{\text{inc}}k$. Como resultado obtenemos

$$c_y'^{q_i} = (2b_{0\,\text{inc}}/b_{\text{inc}}) \int\limits_{\xi_{0\,\text{inc}}}^{\xi_{1\,\text{inc}}} [p^{q_i\,\text{inc}}/(2k)]\, d\xi_{\text{inc}}, \tag{9.320}$$

de donde

$$kc_y'^{q_i} = c_y'^{q_i\,\text{inc}}. \tag{9.321}$$

De modo análogo, empleando la fórmula (9.234), en la que $\dot{\gamma}^{q_i} = \dot{p}^{q_i}/2$, hallamos

$$\dot{c}_y'^{q_i} = \left[\dot{c}_y'^{q_i\,\text{inc}} - (b_{0\,\text{inc}}/b_{\text{inc}}) \int\limits_{\xi_{0\,\text{inc}}}^{\xi_{1\,\text{inc}}} p^{q_i\,\text{inc}} \xi_{\text{inc}}\, d\xi_{\text{inc}} M_\infty^2\right]/k^3. \tag{9.322}$$

Conforme a (9.238) el término entre paréntesis es igual a $m_z'^{q_i\,\text{inc}}(b_{\text{inc}}/b_{0\,\text{inc}})$; por consiguiente

$$k^3 \dot{c}_y'^{q_i} = \dot{c}_y'^{q_i\,\text{inc}} - m_z'^{q_i\,\text{inc}} M_\infty^2 (b_{\text{inc}}/b_{0\,\text{inc}}). \tag{9.323}$$

Examinemos la derivada de la sección (9.238):

$$m_z'^{q_i} = (2b_{0\,\text{inc}}^2/b_{\text{inc}}^2) \int\limits_{\xi_{0\,\text{inc}}}^{\xi_{1\,\text{inc}}} [p^{q_i\,\text{inc}}/(2k)]\, \xi_{\text{inc}}\, d\xi_{\text{inc}}, \tag{9.324}$$

de donde

$$km_z'^{q_i} = m_z'^{q_i\,\text{inc}}. \tag{9.325}$$

De (9.239) obtenemos

$$k^3 \dot{m}_z'^{q_i} = \dot{m}_z'^{q_i\,\text{inc}} - M_\infty^2 m_{zz}^{\text{inc}}, \tag{9.326}$$

donde

$$m_{zz}^{\text{inc}} = (b_{0\,\text{inc}}^2/b_{\text{inc}}^2) \int\limits_{\xi_{0\,\text{inc}}}^{\xi_{1\,\text{inc}}} p^{q_i\,\text{inc}} \xi_{\text{inc}}^2\, d\xi_{\text{inc}}. \tag{9.327}$$

Tomando en consideración (9.323) y (9.242), hallamos

$$m_x^{\prime q_i} = -(b_{0\,\mathrm{inc}}/b_{\mathrm{inc}})(\zeta_{\mathrm{inc}}/k)(c_y^{\prime q_i\,\mathrm{inc}}/k), \tag{9.328}$$

de donde

$$k^2 m_x^{\prime q_i} = m_x^{\prime q_i\,\mathrm{inc}}. \tag{9.329}$$

Teniendo presente (9.243) y (9.321), obtenemos

$$k^4 \dot{m}_x^{\prime q_i} = \dot{m}_x^{\prime q_i\,\mathrm{inc}} + \mathrm{M}_\infty^2 m_x^{\mathrm{inc}}, \tag{9.330}$$

donde

$$m_x^{\mathrm{inc}} = (b_{0\,\mathrm{inc}}^2/b_{\mathrm{inc}}^2)\int\limits_{\xi_{0\,\mathrm{inc}}}^{\xi_{1\,\mathrm{inc}}} p^{q_i\,\mathrm{inc}}\xi_{\mathrm{inc}}\zeta_{\mathrm{inc}}\,d\xi_{\mathrm{inc}}. \tag{9.331}$$

Para $c_y^{q_i}$, teniendo en cuenta (9.321), de la dependencia (9.249) obtenemos la derivada total:

$$c_y^{q_i} = [2b_{0\,\mathrm{inc}}^2 k^2/(S_{\mathrm{ala\,inc}}k)]\int\limits_0^{0,5\,\bar{l}_{\mathrm{inc}}} (c_y^{\prime q_i\,\mathrm{inc}}/k)\,\bar{b}_{\mathrm{inc}}\,d\zeta_{\mathrm{inc}}/k, \tag{9.332}$$

de donde

$$kc_y^{q_i} = c_y^{q_i\,\mathrm{inc}}. \tag{9.333}$$

De la segunda relación (9.249), teniendo presente (9.323), hallamos

$$\dot{c}_y^{q_i} = [2b_{0\,\mathrm{inc}}^2 k^2/(S_{\mathrm{ala\,inc}}k)]\int\limits_0^{0,5\,\bar{l}_{\mathrm{inc}}} [\dot{c}_y^{\prime q_i\,\mathrm{inc}} - m_z^{\prime q_i\,\mathrm{inc}}\mathrm{M}_\infty^2(b_{\mathrm{inc}}/b_{0\,\mathrm{inc}})]\,\bar{b}_{\mathrm{inc}}\,d\zeta_{\mathrm{inc}}/k^4. \tag{9.334}$$

De aquí, teniendo en cuenta (9.250),

$$k^3\dot{c}_y^{q_i} = \dot{c}_y^{q_i\,\mathrm{inc}} - \mathrm{M}_\infty^2 m_z^{q_i\,\mathrm{inc}}. \tag{9.335}$$

En correspondencia con (9.325) transformemos la primera dependencia (9.250):

$$m_z^{q_i} = [2b_{0\,\mathrm{inc}}^2 k^2/(S_{\mathrm{ala\,inc}}k)]\int\limits_0^{0,5\,\bar{l}_{\mathrm{inc}}} (m_z^{\prime q_i\,\mathrm{inc}}/k)\,\bar{b}_{\mathrm{inc}}^2\,d\zeta/k, \tag{9.336}$$

de donde

$$km_z^{q_i} = m_z^{q_i\,\mathrm{inc}}. \tag{9.337}$$

A continuación, hacemos uso de las fórmulas (9.250) y (9.326)

$$k^3\dot{m}_z^{q_i} = \dot{m}_z^{q_i\,\mathrm{inc}} - \mathrm{M}_\infty^2 I_{zz}^{\mathrm{inc}}, \tag{9.338}$$

donde, tomando en consideración (9.327),

$$I_{zz}^{\text{inc}} = (2b_{0\ \text{inc}}^2/S_{\text{ala inc}}) \int_0^{0,5\,\bar{l}_{\text{inc}}} \int_{\xi_{0\ \text{inc}}}^{\xi_{1\ \text{inc}}} p^{q_i\ \text{inc}} \xi_{\text{inc}}^2\, d\xi_{\text{inc}}\, d\zeta_{\text{inc}}. \quad (9.339)$$

Analicemos (9.251). Teniendo presente (9.321), hallamos

$$m_x^{q_i} = -[2b_{0\ \text{inc}}^2 k^2/(S_{\text{ala inc}} k)] \int_0^{0,5\,\bar{l}_{\text{inc}}} \bar{b}_{\text{inc}}(\zeta_{\text{inc}}/k)\,(c_y'^{\,q_i\ \text{inc}}/k)\, d\zeta_{\text{inc}}/k, \quad (9.340)$$

de donde

$$k^2 m_x^{q_i} = m_x^{q_i\ \text{inc}}. \quad (9.341)$$

Más adelante, teniendo en cuenta (9.323), obtenemos

$$k^4 m_x^{\dot{q}_i} = m_x^{\dot{q}_i\ \text{inc}} + \mathrm{M}_\infty^2 I_{xz}^{\text{inc}}, \quad (9.342)$$

donde, conforme a (9.324) y (9.325),

$$I_{xz}^{\text{inc}} = (2b_{0\ \text{inc}}^2/S_{\text{ala inc}}) \int_0^{0,5\,\bar{l}_{\text{inc}}} \int_{\xi_{0\ \text{inc}}}^{\xi_{1\ \text{inc}}} p^{q_i\ \text{inc}} \xi_{\text{inc}} \zeta_{\text{inc}}\, d\zeta_{\text{inc}}. \quad (9.343)$$

Para la superficie de sustentación transformada los coeficientes aerodinámicos de la sección se determinan, según las correspondientes derivadas, haciendo uso de las fórmulas

$$c_y'^{\,\text{inc}} = [2Y'_{\text{inc}}/(\rho_\infty V_{\infty\ \text{inc}}^2 b_{\text{inc}}\, dz_{\text{inc}})] = \sum_{i=1}^{3} (c_y'^{\,q_i\ \text{inc}} q_{i\ \text{inc}} + c_y'^{\,\dot{q}_i\ \text{inc}} \dot{q}_{i\ \text{inc}}); \quad (9.344)$$

$$m_z'^{\,\text{inc}} = [2M'_{z\ \text{inc}}/(\rho_\infty V_{\infty\ \text{inc}}^2 b_{\text{inc}}^2\, dz_{\text{inc}})] = \sum_{i=1}^{3} (m_z'^{\,q_i\ \text{inc}} q_{i\ \text{inc}} + m_z'^{\,\dot{q}_i\ \text{inc}} \dot{q}_{i\ \text{inc}}); \quad (9.345)$$

$$m_x'^{\,\text{inc}} = [2M'_{x\ \text{inc}}/(\rho_\infty V_{\infty\ \text{inc}}^2 b_{\text{inc}}^2\, dz_{\text{inc}})] = \sum_{i=1}^{3} (m_x'^{\,q_i\ \text{inc}} q_{i\ \text{inc}} + m_x'^{\,\dot{q}_i\ \text{inc}} \dot{q}_{i\ \text{inc}}). \quad (9.346)$$

Los correspondientes coeficientes aerodinámicos totales del ala:

$$c_y^{\text{inc}} = [2Y_{\text{inc}}/(\rho_\infty V_{\infty\ \text{inc}}^2 b_{\text{inc}} S_{\text{ala inc}})] = \sum_{i=1}^{3} (c_y^{q_i\ \text{inc}} q_{i\ \text{inc}} + c_y^{\dot{q}_i\ \text{inc}} \dot{q}_{i\ \text{inc}}); \quad (9.347)$$

$$m_z^{\text{inc}} = [2M_{z\ \text{inc}}/(\rho_\infty V_{\infty\ \text{inc}}^2 b_{\text{inc}}^2 S_{\text{ala inc}})] = \sum_{i=1}^{3} (m_z^{q_i\ \text{inc}} q_{i\ \text{inc}} + m_z^{\dot{q}_i\ \text{inc}} \dot{q}_{i\ \text{inc}}); \quad (9.348)$$

$$m_x^{\text{inc}} = [2M_{x\ \text{inc}}/(\rho_\infty V_{\infty\ \text{inc}}^2 b_{\text{inc}}^2 S_{\text{ala inc}})] = \sum_{i=1}^{3} (m_x^{q_i\ \text{inc}} q_{i\ \text{inc}} + m_z^{\dot{q}_i\ \text{inc}} \dot{q}_{i\ \text{inc}}). \quad (9.349)$$

2. Conforme al planteamiento del problema establezcamos las dependencias entre las derivadas por α, ω_z y $\dot{\omega}_z$ de los coeficientes de presión excesiva, así como los respectivos coeficientes de la fuerza de sustentación y el momento de cabeceo

de la sección en los medios compresible e incompresible. De acuerdo con (9.318) y con arreglo a que $p^{q_i} = 2\Gamma/\Delta\xi$, hallamos

$$p^{\alpha} = p^{\alpha \mathrm{inc}}/k = 2\Gamma^{\alpha \mathrm{inc}}/(k\Delta\bar{\xi}); \quad p^{\omega_z} = p^{\omega_z \mathrm{inc}}/k = 2\Gamma^{\omega_z \mathrm{inc}}/(k\Delta\bar{\xi}).$$

Según el planteamiento la sección está dividida en cinco partes ($\nu = 5$), o sea, $\Delta\bar{\xi} = 0{,}2$; el parámetro $k = \sqrt{1 - M_{\infty}^2} = 0{,}8$; el producto $\Delta\bar{\xi}k = 0{,}16$. Adoptemos $\Gamma^{\alpha \mathrm{inc}} = 1{,}15$; $\Gamma^{\omega_z \mathrm{inc}} = 1{,}21$ (el número de la célula de la sección $\nu = 3$); $p^{\alpha} = 14{,}38$; $p^{\omega_z} = 15{,}12$. En correspondencia con (9.319) en un fluido compresible

$$p^{\dot{\omega}_z} = (p^{\dot{\omega}_z \mathrm{inc}} - \bar{\xi}_{\mathrm{inc}} 0{,}6 \cdot 2\Gamma^{\omega_z \mathrm{inc}}/\Delta\bar{\xi})/0{,}8^3.$$

P. ej., para $\bar{\xi}_{\mathrm{inc}} = x/b = 0{,}8$ (x se cuenta desde la punta de la sección; b es la cuerda) la derivada $\Gamma^{\omega_z \mathrm{inc}} = 1{,}02$ (véase el planteamiento). Así, pues, $p^{\dot{\omega}_z} = 1{,}953\ p^{\dot{\omega}_z \mathrm{inc}} - 2{,}938)$.

Hallemos las relaciones entre las derivadas de las secciones:

$$c_y'^{\alpha} = c_y'^{\alpha \mathrm{inc}}/k = 1{,}25 c_y'^{\alpha \mathrm{inc}}; \quad c_y'^{\omega_z} = c_y'^{\omega_z \mathrm{inc}}/k = 1{,}25 c_y'^{\omega_z \mathrm{inc}};$$

$$c_y'^{\alpha \mathrm{inc}} = (2b_0/b) \sum_{\mu=1}^{5} \Gamma^{\alpha} = (2b_0/b)\,7{,}24; \quad c_y'^{\omega_z \mathrm{inc}} = (2b_0/b)\,5{,}9.$$

Como la relación entre las cuerdas de raíz y corriente $b_0/b = [1 - \bar{z}(1 - 1/\eta)]^{-1} = 4/3$, $c_y'^{\alpha \mathrm{inc}} = 19{,}31$; $c'^{\omega_z \mathrm{inc}} = 15{,}73$.

A continuación, hallamos

$$c_y'^{\dot{\omega}_z} = (c_y'^{\dot{\omega}_z \mathrm{inc}} - 2M_{\infty}^2 \sum_{\mu=1}^{5} \Gamma^{\omega_z \mathrm{inc}}\bar{\xi})/0{,}8^2,$$

donde $\bar{\xi} = x/b$ ($\bar{\xi} = 0{,}2$; $0{,}4$; $0{,}6$; $0{,}8$; $1{,}0$). Determinamos $\Gamma^{\omega_z \mathrm{inc}}\bar{\xi}$ (tabla 9.14).

Tabla 9.14

$\nu\ (\mu)$	1	2	3	4	5
$\bar{\xi}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\Gamma^{\omega_z \mathrm{inc}}\bar{\xi}$	0,342	0,5	0,726	0,811	0,71
$\Gamma^{\omega_z \mathrm{inc}}\bar{\xi}^2$	0,0684	0,20	0,434	0,653	0,71
$\Gamma^{\alpha \mathrm{inc}}$	3,45	1,54	1,15	0,75	0,35
$\Gamma^{\alpha \mathrm{inc}}\bar{\xi}$	0,69	0,616	0,690	0,600	0,35

Conforme a los datos obtenidos

$$c_y'^{\dot{\omega}_z} = 1{,}953\,(c_y'^{\dot{\omega}_z \mathrm{inc}} - 2{,}228).$$

Después hallamos:

$$m_z'^{\alpha}=m_z'^{\alpha_{\text{inc}}}/k=1{,}25m_z'^{\alpha_{\text{inc}}};\quad m_z'^{\omega_z}=m_z'^{\omega_z\,\text{inc}}/k=1{,}25m_z'^{\omega_z\,\text{inc}};$$

$$m_z'^{\alpha_{\text{inc}}}=2\sum_{\mu=1}^{5}\Gamma^{\alpha_{\text{inc}}}\bar{\xi}.$$

Haciendo uso de los datos de la tabla calculamos la suma $\sum\limits_{\mu=1}^{5}\Gamma^{\alpha_{\text{inc}}}\bar{\xi}=$ $=2{,}946$ y obtenemos $m_z'^{\alpha_{\text{inc}}}=5{,}892$.

De acuerdo con (9.328)

$$m_z'^{\dot{\omega}_z}=(m_z'^{\dot{\omega}_z\,\text{inc}}-2M_\infty^2\sum_{\mu=1}^{5}\Gamma^{\dot{\omega}_z\,\text{inc}}\bar{\xi}^2)/k^3.$$

Según los datos de la tabla 9.14 la suma $\sum\limits_{\mu=1}^{5}\Gamma^{\omega_z\,\text{inc}}\bar{\xi}^2=2{,}065$ y la derivada

$$m_z'^{\dot{\omega}_z}=1{,}953\,(m_z'^{\dot{\omega}_z\,\text{inc}}-1{,}487).$$

Las dimensiones del ala inicial: $b_0=b_{0\,\text{inc}}k=3{,}2$ m; $\lambda_{\text{ala}}=\lambda_{\text{ala inc}}/k=$ $=3{,}125$; $\eta_{\text{ala}}=\eta_{\text{ala inc}}=2$; $\lambda_{\text{ala}}\operatorname{tg}\chi=\lambda_{\text{ala inc}}\operatorname{tg}\chi_{0\,\text{inc}}=4{,}33$; $\operatorname{tg}\chi_0=$ $=4{,}33/\lambda_{\text{ala}}=1{,}385$; $\chi_0=54°12'$.

9.53. 1. Para resolver el problema de la circulación inuniforme de un flujo convencional incompresible alrededor de un ala modificada aplicaremos *el método de la superficie vorticial equivalente*, según el cual el plano de referencia se sustituye por un sistema de vórtices discretos oblicuos en herradura, situados en las células, como se muestra en la fig. 9.8. Con arreglo a este método se determina, en los respectivos puntos de referencia, la velocidad inducida por todos los vórtices discretos como función de la circulación de vórtices elementales adyacentes, o con mayor precisión, como función de dicha circulación según los parámetros cinemáticos q_i y $\dot{q}_i$. Para calcular las incógnitas, como lo son estas derivadas que entran en los correspondientes sistemas de ecuaciones, emplearemos la condición de adherencia de la circulación en la pared. Para pequeños números de Strouhal la velocidad inducida por un flujo incompresible en el punto de referencia $\xi_{\nu p-1}^{\nu p}$, $\zeta_{\nu p-1}^{\nu p}$ del ala prefijada, se determina con la ecuación (9.191) que reducimos a la forma

$$V_{\nu pp-1}=-[V_\infty/(4\pi)]\sum_{k=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{n}\underbrace{[(w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}\pm\sigma w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1})+(v_{(1)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1}+\sigma v_{(1)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1})]}_{V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}\pm\sigma V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}}\times$$

$$\times\Gamma_{\mu kk-1}^{q_i}q_i-[V_\infty/(4\pi)]\sum_{k=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{n}\times$$

$$\times\{\underbrace{[(\bar{v}_{(1)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1}\pm\sigma\bar{v}_{(1)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1})+(v_{(a)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1}\pm\sigma v_{(a)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1})]}_{W_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}\pm\sigma W_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}}\Gamma_{\mu kk-1}^{q_i}+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{n}\underbrace{[(w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}\pm\sigma w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1})+(v_{(1)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1}\pm\sigma v_{(1)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1})]}_{V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}\pm\sigma V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}}\Gamma_{\mu kk-1}^{\dot{q}_i}\}\dot{q}_i.\qquad(9.350)$$

Reduzcamos esta ecuación al caso de circulación no estacionaria alrededor de un ala modificada y tomemos

$$V_{\nu pp-1}=V_{\nu pp-1}^{\text{inc}};\quad V_{\infty}=V_{\infty\,\text{inc}};\quad q_i=q_{i\,\text{inc}};\quad \dot{q}_i=\dot{q}_{i\,\text{inc}};$$

$$\Gamma_{\mu kk-1}^{q_i}=\Gamma_{\nu kk-1}^{q_i\,\text{inc}};\quad \Gamma_{\mu kk-1}^{\dot{q}_i}=\Gamma_{\mu kk-1}^{\dot{q}_i\,\text{inc}}. \tag{9.351}$$

De acuerdo con la condición de adherencia de la circulación, la velocidad perturbada $V_{\nu p\,p-1}=V_{\nu pp-1}^{\text{inc}}$ debe extinguirse por la correspondiente componente de la velocidad del flujo no perturbado compresible (9.273).

Al pasar al medio incompresible a dicha variable hay que adicionar la componente $\overline{V}_{\text{inc}}$ (9.304):

$$V'_{\text{inc}}/V_{\infty\,\text{inc}}=\alpha+\omega_x\,(\zeta_{\text{inc}}/k)+\omega_z\xi_{\text{inc}}+\overline{V}_{\text{inc}}. \tag{9.352}$$

Introduciendo aquí el valor de (9.304), obtenemos

$$V'_{\text{inc}}/V_{\infty\,\text{inc}}=\sum_{i=1}^{3}v_{i\,\text{inc}}q_i+\mathrm{M}_{\infty}^2\sum_{i=1}^{3}\xi_{\text{inc}}v_{i\,\text{inc}}\dot{q}_{i\,\text{inc}}, \tag{9.353}$$

donde

$$v_{1\,\text{inc}}=-1;\quad v_{2\,\text{inc}}=-\zeta_{\text{inc}}/k;\quad v_{3\,\text{inc}}=-\xi_{\text{inc}}; \tag{9.354}$$

$$\left.\begin{aligned}&q_1=\alpha=q_{\alpha}^*\cos p_{\alpha}^*\tau;\quad q_2=\omega_x=q_{\omega_x}^*\cos p_{\omega_x}^*\tau;\\&q_3=\omega_z=q_{\omega_z}^*\cos p_{\omega_z}^*\tau;\quad \dot{q}_1=-q_{\alpha}^*p_{\alpha}^*\operatorname{sen}p_{\alpha}^*\tau;\\&\dot{q}_2=-q_{\omega_x}^*p_{\omega_x}^*\operatorname{sen}p_{\omega_x}^*\tau;\quad \dot{q}_3=-q_{\omega_z}^*p_{\omega_z}^*\operatorname{sen}p_{\omega_z}^*\tau.\end{aligned}\right\} \tag{9.355}$$

Sustituyendo en (9.351) $V_{\nu pp-1}/V_{\infty}$ por la variable $V'_{\text{inc}}/V_{\infty\,\text{inc}}$ de (9.353) e igualando los correspondientes factores de q_i y $\dot{q}_i$, obtenemos las ecuaciones:

$$[1/(4\pi)]\sum_{k=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{n}\left(V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}\pm\sigma V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}\right)\Gamma_{\mu kk-1}^{q_i}=v_{i\,\text{inc}\,\nu pp-1}; \tag{9.356}$$

$$[1/(4\pi)]\sum_{k=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{n}\left(W_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}\pm\sigma W_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}\right)\Gamma_{\mu kk-1}^{q_i}+$$

$$+[1/(4\pi)]\sum_{k=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{n}\left(V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}\pm\sigma V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}\right)\Gamma_{\mu kk-1}^{\dot{q}_i}=\mathrm{M}_{\infty}^2\xi_{\nu p-1}^{\nu p}v_{i\,\text{inc}\,\nu pp-1}; \tag{9.357}$$

$$v_{1\,\text{inc}\,\nu pp-1}=-1;\quad v_{2\,\text{inc}\,\nu pp-1}=-\zeta_{\nu p-1}^{\nu p};\quad v_{3\,\text{inc}\,\nu pp-1}=-\xi_{\nu p-1}^{\nu p}. \tag{9.358}$$

2. Conforme al planteamiento del problema el sistema de ecuaciones tiene la forma

$$\left.\begin{aligned}&a_1^1\Gamma^{1.\omega_x}+\ldots+a_1^5\Gamma^{5.\omega_x}+\ldots+a_1^{15}\Gamma^{15.\omega_x}+\ldots+\\&\qquad+a_1^{25}\Gamma^{25.\omega_x}=-4\pi\zeta_1/k;\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&a_{25}^1\Gamma^{1.\omega_x}+\ldots+a_{25}^5\Gamma^{5.\omega_x}+\ldots+\ldots+a_{25}^{15}\Gamma^{15.\omega_x}+\\&\qquad+\ldots+a_{25}^{25}\Gamma_{25}^{25.\omega_x}=-4\pi\zeta_{25}/k.\end{aligned}\right\} \tag{9.359}$$

$$\left.\begin{aligned} &b_1^1\Gamma^{1,\omega_x} + \ldots + b_1^5\Gamma^{5.\omega_x} + \ldots + b_1^{25}\Gamma^{25.\omega_x} + \\ &\quad + a_1^1\Gamma^{1.\dot{\omega}_x} + \ldots + a_1^{25}\Gamma^{25.\dot{\omega}_x} = -4\pi M_\infty^2\xi_1\zeta_1; \\ &b_{25}^1\Gamma^{1.\omega_x} + \ldots + b_{25}^5\Gamma^{5.\omega_x} + \ldots + \ldots + b_{25}^{25}\Gamma^{25.\omega_x} + \\ &\quad + a_{25}^1\Gamma^{1,\dot{\omega}_x} + \ldots + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + \ldots + a_{25}^{25}\Gamma^{25.\dot{\omega}_x} = -4\pi M_\infty^2\xi_{25}\zeta_{25}. \end{aligned}\right\} \quad (9.360)$$

donde los coeficientes

$$\left.\begin{aligned} b_m^n &= W_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} - \sigma W_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} = (\bar{v}_{(1)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1} - \sigma\bar{v}_{(1)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1}) + \\ &\quad + (v_{(a)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1} - \sigma v_{(a)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1}); \\ a_m^n &= V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} - \sigma V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} = (w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} - \sigma w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}) + \\ &\quad + (v_{(1)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1} - \sigma v_{(1)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1}). \end{aligned}\right\} \quad (9.361)$$

El índice m en los coeficientes a y b corresponde al número del punto de referencia y n, al número de la célula y del vórtice en herradura situado en ella (fig. 9.17). Con esto, los números de los puntos de referencia y de las células en

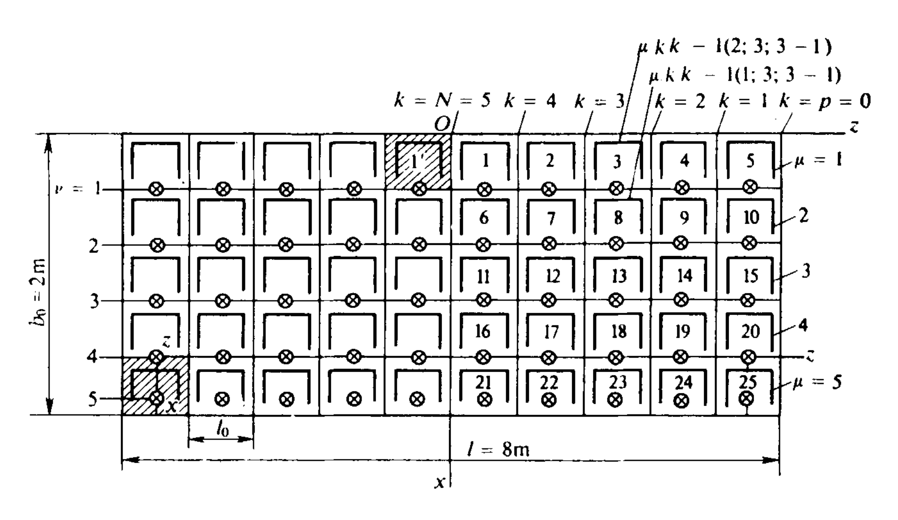


Fig. 9.17. Superficie de sustentación en el ejemplo del cálculo numérico de la circulación: ⊗ ⊗ ⊗, puntos de referencia; *1—25*, números de las células

la fig. 9.17 coinciden. Los vórtices ligados se disponen en el borde de ataque de la célula, en tanto que los puntos de referencia, en los puntos medios del borde de salida. Los puntos de referencia en las células, que hacen contacto con el borde de salida del ala, se encuentran en el centro de cada célula.

Determinemos los segundos miembros de las ecuaciones (9.359):

$$\zeta^{\nu p}_{\nu p-1} = z/b_0 = [0,5\ l/(N\ b_0)]\ 0,5 + (N-p)\ [0,5\ l/(N\ b_0)] =$$
$$= 0,4\ (5,5-p)\ (p = 1,\ 2,\ \ldots,\ 5);$$
$$4\pi\zeta_1/k = 4\pi\zeta^{1;\ 5}_{1;\ 5-1}/\sqrt{1-M^2_\infty} = 3,14;$$
$$4\pi\zeta_{6(\nu=2)}/k = 4\pi\zeta_{11(\nu=3)}/k = 4\pi\zeta_{21(\nu=4)}/k = 3,14;$$
$$4\pi\zeta_{25}/k = 4\pi\zeta^{5;\ 1}_{5;\ 1-1}/\sqrt{1-M^2_\infty} = 28,26.$$

Analicemos los segundos miembros de las ecuaciones (9.360):

$$\xi^{\nu p}_{\nu p-1} = (b_0/b_0\cdot 5)\ \nu = 0,2\nu\ (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ 4);\quad \xi^{\nu p}_{\nu p-1} = \xi^{5;\ p}_{5;\ p-1} = 0,9$$

($\nu = 5$; punto de referencia en el centro de la célula);

$$4\pi M^2_\infty\xi_1\zeta_1 = 4\pi\cdot 0,8^2\xi^{\nu=1;\ p=5}_{1;\ 5-1}\zeta^{\nu=1;\ p=5}_{1;\ 5-1} = 0,226\cdot k;$$
$$4\pi M^2_\infty\xi_6\zeta_6 = 4\pi\cdot 0,8^2\xi^{\nu=2;\ p=5}_{2;\ 5-1}\zeta^{\nu=2;\ p=5}_{2;\ 5-1} = 0,452\cdot k;$$
$$4\pi M^2_\infty\xi_{16}\zeta_{16} = 4\pi\cdot 0,8^2\xi^{\nu=4;\ p=5}_{4;\ 5-1}\zeta^{\nu=4;\ p=5}_{4;\ 5-1} = 0,924\cdot k;$$
$$4\pi M^2_\infty\xi_{25}\zeta_{25} = 4\pi\cdot 0,8^2\xi^{\nu=5;\ p=1}_{5;\ 1-1}\zeta^{\nu=5;\ p=1}_{5;\ 1-1} = 9,156\cdot k.$$

Conforme a (9.172), para $\chi_0 = 0$

$$\bar{v}^{(2)}_{(1)} = I_{2-}\ (0,5\bar{l}_0 - \zeta_0) + I_{2+}\ (0,5\bar{l}_0 + \zeta_0);$$
$$I_{2-} = [\xi_0^2 + (0,5\bar{l}_0 - \zeta_0)^2]^{-1/2} + \frac{\xi_0}{(0,5\bar{l}_0 - \zeta_0)^2}\left\{1 + \frac{\xi_0}{[\xi_0^2 + (0,5\bar{l}_0 - \zeta_0)^2]^{1/2}}\right\};$$
$$I_{2+} = [\xi_0^2 + (0,5\bar{l}_0 + \zeta_0)^2]^{-1/2} + \frac{\xi_0}{(0,5\bar{l}_0 + \zeta_0)^2}\left\{1 + \frac{\xi_0}{[\xi_0^2 + (0,5\bar{l}_0 + \zeta_0)^2]^{1/2}}\right\}.$$

Con arreglo a (9.185) el valor de $v^{(2)}_{a} = v_2 + v_3$. Tomando en consideración (9.188), obtenemos para $\chi_0 = 0$

$$v^{(2)}_{(a)} = \text{sign}\ (0,5\bar{l}_0 - \zeta_0)\ \ln\{\xi_0[\,|0,5\bar{l}_0 - \zeta_0| + \sqrt{\xi_0^2 + (0,5\bar{l}_0 - \zeta_0)^2}]^{-1}\} +$$
$$+ \text{sign}\ (0,5\bar{l}_0 + \zeta_0)\ \ln\{\xi_0[\,|0,5\bar{l}_0 + \zeta_0| + \sqrt{\xi_0^2 + (0,5\bar{l}_0 + \zeta_0)^2}]^{-1}\}.$$

Para $\chi_0 = 0$ aplicamos sa fórmula (9.159):

$$w = -(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)/(\bar{a}\sqrt{1-\cos^2\alpha_2});\quad \cos\alpha_1 = (0,5\bar{l}_0 - \zeta_0)/\sqrt{\xi_0^2 + (0,5\bar{l}_0 - \zeta_0)^2};$$
$$\cos\alpha_2 = (0,5\bar{l}_0 + \zeta_0)/\sqrt{\xi_0^2 + (0,5\bar{l}_0 + \zeta_0)^2};\quad \bar{a} = \sqrt{\xi_0^2 + (0,5\bar{l}_0 - \zeta_0)^2},$$

así como las expresiones (9.171), (9.173), (9.174):

$$v^{(1)}_{(1)} = I_{1-}\ (0,5\bar{l}_0 - \zeta_0) + I_{1+}\ (0,5\bar{l}_0 + \zeta_0);$$
$$I_{1-} = (0,5\bar{l}_0 - \zeta_0)^{-2}\ \{1 + \xi_0/[\xi_0^2 + (0,5\bar{l}_0 - \zeta_0)^2]^{1/2}\};$$
$$I_{1+} = (0,5\bar{l}_0 + \zeta_0)^{-2}\ \{1 + \xi_0/[\xi_0^2 + (0,5\bar{l}_0 + \zeta_0)^2]^{1/2}\}.$$

Consideremos el punto de referencia 1 y la velocidad inducida por el vórtice en la primera célula (coeficiente a_1^1 y b_1^1). La envergadura relativa de este vórtice y

las coordenadas del punto $\bar{l}_0 = 0{,}43$; $\zeta_0 = 0$; $\xi_0 = 0{,}2$. Calculemos el coeficiente $b_m^n = b_1^1$.

Para la célula en el lado derecho del ala ($\zeta_0 = 0$; $\xi_0 = 0{,}2$) tenemos $I_{2-} = 12{,}07$; $I_{2+} = 12{,}07$; $v_{(1)}^{(2)} = 4{,}828$; para la célula simétrica $I_{2-} = 12{,}07$; $I_{2+} = 2{,}313$; $\sigma\bar{v}_{(1)}^{(2)} = -1{,}026$; $v_{(1)}^{(2)} - \sigma v^2{}_1 = 5{,}854$; para la célula en el lado derecho del ala ($\zeta_0 = 0$; $\xi_0 = 0{,}2$) $v_{(a)}^{(2)} = -1{,}766$; para la célula simétrica izquierda ($\zeta_0 = 0{,}4$; $\xi_0 = 0{,}2$)

$$\sigma v_{(a)}^{(2)} = -0{,}938; \quad v_{(a)}^{(2)} - \sigma v_{(a)}^{(2)} = 0{,}828;$$

$$b_m^n = b_1^1 = (\bar{v}_{(l)}^{(2)} - \sigma\bar{v}_{(l)}^{(2)}) + (v_{(a)}^{(2)} - \sigma v_{(a)}^{(2)}) = 5{,}026.$$

Para la célula en el lado derecho ($\zeta_0 = 0$; $\xi_0 = 0{,}2$) $\cos\alpha_1 = 0{,}707$; $\bar{a} = 0{,}283$; $w = -7{,}065$; para la célula simétrica izquierda ($\zeta_0 = 0{,}4$; $\xi_0 = 0{,}2$) $\cos\alpha_1 = -0{,}707$; $\cos\alpha_2 = 0{,}949$; $\bar{a} = 0{,}283$; $\sigma w = 1{,}114$; $w - \sigma w = -5{,}951$; para la célula en el lado derecho ($\zeta_0 = 0$; $\xi_0 = 0{,}2$) $I_{1-} = 42{,}68$; $I_{1+} = 42{,}68$; $v_1^1 = 17{,}07$.

Para la célula simétrica en el lado izquierdo ($\zeta_0 = 0{,}4$; $\xi_0 = 0{,}2$) $I_{1-} = 42{,}68$; $I_{1+} = 3{,}656$; $\sigma v_{(2)}^{(1)} = -6{,}341$; $v_{(1)}^{(1)} - \sigma v_{(2)}^{(1)} = 23{,}41$.

$$a_m^n = a_1^1 = (w - \sigma w) + (v_{(l)}^{(1)} - \sigma v_{(l)}^{(1)}) = 17{,}46.$$

9.54. Introduzcamos las anotaciones para las derivadas de la circulación de un flujo convencional incompresible:

$$\Gamma^{q_i} = \bar{\Gamma}^{q_i}; \quad \Gamma^{\dot{q}_i} = \bar{\Gamma}^{\dot{q}_i} + \Delta\bar{\Gamma}^{\dot{q}_i} M_\infty^2 \ (\text{para } q_1 = \alpha \text{ y } q_3 = \omega_z); \tag{9.362}$$

$$\Gamma^{q_i} = \bar{\Gamma}^{q_i}/k; \quad \Gamma^{\dot{q}_i} = (\bar{\Gamma}^{\dot{q}_i} + \Delta\bar{\Gamma}^{\dot{q}_i} M_\infty^2)/k \ (\text{para } q_2 = \omega_x). \tag{9.363}$$

Después de poner (9.362) y (9.363) en (9.317) y (9.358) obtenemos nuevos sistemas de ecuaciones que no contienen M_∞ en forma explícita.

Para $q_1 = \alpha$, $\dot{q}_1 = \dot{\alpha}$, tenemos

$$\left.\begin{aligned} &[1/(4\pi)] \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} (V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} + \sigma V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}) \bar{\Gamma}_{\mu kk-1}^{\alpha} = -1; \\ &[1/(4\pi)] \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} (W_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} + \sigma W_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}) \bar{\Gamma}_{\mu kk-1}^{\alpha} + \\ &+ [1/(4\pi)] \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} (V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} + \sigma V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}) \times \\ &\times (\bar{\Gamma}_{\mu kk-1}^{\dot{\alpha}} + \Delta\bar{\Gamma}_{\mu kk-1}^{\dot{\alpha}} M_\infty^2) = -M_\infty^2 \xi_{\nu p-1}^{\nu p}. \end{aligned}\right\} \tag{9.364}$$

De la segunda ecuación (9.364), hallamos:

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} (W_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} + \sigma W_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}) \bar{\Gamma}_{\mu kk-1}^{\alpha} + \\ + \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} (V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} + \sigma V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}) \bar{\Gamma}_{\mu kk-1}^{\dot{\alpha}} = 0; \tag{9.365}$$

$$[1/(4\pi)] \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} (V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} + \sigma V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}) \Delta\bar{\Gamma}_{\mu kk-1}^{\dot{\alpha}} = -\xi_{\nu p-1}^{\nu p}. \tag{9.366}$$

Tomamos $q_3 = \omega_z$; $\dot{q}_3 = \dot{\omega}_z$;

$$[1/(4\pi)] \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} (V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} + \sigma V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}) \overline{\Gamma}_{\mu kk-1}^{\omega_z} = \xi_{\nu p-1}^{\nu p}; \tag{9.367}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} (W_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} + \sigma W_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}) \overline{\Gamma}_{\mu kk-1}^{\omega_z} + \\ + \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} (V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} + \sigma V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}) \overline{\Gamma}_{\mu kk-1}^{\dot{\omega}_z} = 0; \tag{9.368}$$

$$[1/(4\pi)] \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} (V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} + \sigma V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}) \Delta \overline{\Gamma}_{\mu kk-1}^{\dot{\omega}_z} = (\xi_{\nu p-1}^{\nu p})^2. \tag{9.369}$$

Examinamos los valores de $q_2 = \omega_x$, $\dot{q}_2 = \dot{\omega}_x$;

$$\left.\begin{aligned} &[1/(4\pi)] \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} (V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} - \sigma V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}) \overline{\Gamma}_{\mu kk-1}^{\omega_x} = -\zeta_{\nu p-1}^{\nu p}; \\ &[1/(4\pi)] \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} (W_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} - \sigma W_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}) \overline{\Gamma}_{\mu kk-1}^{\omega_x}/k + \\ &+ [1/(4\pi)] \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} (V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} - \sigma V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}) \times \\ &\times (\overline{\Gamma}_{\mu kk-1}^{\dot{\omega}_x} + \Delta \overline{\Gamma}_{\mu kk-1}^{\dot{\omega}_x} M_\infty^2)/k = -M_\infty^2 \xi_{\nu p=1}^{\nu p} \zeta_{\nu p-1}^{\nu p}/k. \end{aligned}\right\} \tag{9.370}$$

De la segunda ecuación (9.370) hallamos:

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} (W_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} - \sigma W_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}) \overline{\Gamma}_{\mu kk-1}^{\omega_x} + \\ + \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} (V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} - \sigma V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}) \overline{\Gamma}_{\mu kk-1}^{\dot{\omega}_x} = 0; \tag{9.371}$$

$$[1/(4\pi)] \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} (V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} - \sigma V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}) \Delta \overline{\Gamma}_{\mu kk-1}^{\dot{\omega}_x} = -\xi_{\nu p-1}^{\nu p} \zeta_{\nu p-1}^{\nu p}. \tag{9.372}$$

Como vemos el sistema para $\Delta \overline{\Gamma}^{\dot{\overline{\alpha}}}$ coincide (con precisión salvo un signo) con el sistema para $\overline{\Gamma}^{\omega_z}$, por lo que podemos adoptar

$$\Delta \overline{\Gamma}_{\mu kk-1}^{\dot{\overline{\alpha}}} = -\Gamma_{\mu kk-1}^{\omega_z}. \tag{9.373}$$

2. El esquema del cálculo numérico de la circulación se muestra en la fig. 9.17. El semiplano del ala está dividido en 25 células ($\mu = 5$; $N = p = 5$). Los coeficientes de las derivadas $\overline{\Gamma}^{\omega_x}$; $\overline{\Gamma}^{\dot{\omega}_x}$; $\Delta \overline{\Gamma}^{\dot{\omega}_x}$ han de designarse con los correspondientes números de los *puntos de referencia* (por abajo) y las células en las que yacen los

vórtices (los supraíndices). El primer sistema de ecuaciones (9.371) se representa en la forma

$$\left.\begin{aligned} & b_1^1\overline{\Gamma}^{1.\omega_x}+\ldots+b_1^{15}\overline{\Gamma}^{15.\omega_x}+\ldots+b_1^{25}\overline{\Gamma}^{25.\omega_x}+\\ & \quad +a_1^1\overline{\Gamma}^{1.\dot{\omega}_x}+\ldots+a_1^{25}\overline{\Gamma}^{25.\dot{\omega}_x}=0;\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & b_{25}^1\overline{\Gamma}^{1.\omega_x}+\ldots+b_{25}^{15}\overline{\Gamma}^{15.\omega_x}+\ldots+b_{25}^{25}\overline{\Gamma}^{25.\omega_x}+\\ & \quad +a_{25}^1\overline{\Gamma}^{1.\dot{\omega}_x}+\ldots+a_{25}^{25}\overline{\Gamma}^{25.\dot{\omega}_x}=0. \end{aligned}\right\} \tag{9.374}$$

El segundo sistema (9.372):

$$\left.\begin{aligned} & b_1^1\Delta\overline{\Gamma}^{1.\dot{\omega}_x}+\ldots+b_1^{15}\Delta\overline{\Gamma}^{15.\dot{\omega}_x}+\ldots+b_1^{25}\Delta\overline{\Gamma}^{25.\dot{\omega}_x}=-4\pi\xi_1\zeta_1;\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & b_{25}^1\Delta\overline{\Gamma}^{1.\dot{\omega}_x}+\ldots+b_{25}^{15}\Delta\overline{\Gamma}^{15.\dot{\omega}_x}+\ldots+b_{25}^{25}\Delta\overline{\Gamma}^{25.\dot{\omega}_x}=-4\eta\xi_{25}\zeta_{25}. \end{aligned}\right\} \tag{9.375}$$

En estas ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} b_m^n &= W_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}-\sigma W_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}=(\overline{v}_{(1)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1}-\sigma\overline{v}_{(1)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1})+\\ &\quad +(v_{(a)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1}-\sigma v_{(a)\nu pp-1}^{(2)\mu kk-1})\\ a_m^n &= V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}-\sigma V_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}=(w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}-\sigma w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1})+\\ &\quad +(v_{(1)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1}-\sigma v_{(1)\nu pp-1}^{(1)\mu kk-1}). \end{aligned}\right\} \tag{9.376}$$

Los puntos de referencia $m = 1, 2, 3, \ldots$ 0 (fig. 9.17) están situados en el centro del borde de salida de la célula, mientras que los puntos $m = 21, \ldots, 25$, en el centro de las células de la última banda. La coordenada lateral del punto de referencia (véase el problema 9.53) $\zeta_m = \zeta_{\nu p-1}^{\nu p} = 0{,}4\ (5{,}5 - p)$ ($p = 1, 2, \ldots, 5$). Las coordenadas longitudinales $\xi_m = \xi_{\nu p-1}^{\nu p} = 0{,}2\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, 4$); $\xi_m = \xi_{\nu p-1}^{\nu p} = 0{,}9$ ($\nu = 5$; $m = 21, 22, \ldots, 25$).

Hallemos los segundos miembros de las ecuaciones (9.375):

$$4\pi\xi_1\zeta_1=\xi_{\nu p-1}^{\nu p}\zeta_{\nu p-1}^{\nu p}=\xi_{1;\,5-1}^{1;\,5}\zeta_{1;\,5-1}^{1;\,5}=0{,}5024;$$

$$4\pi\xi_{16}\zeta_{16}=\xi_{4;\,5-1}^{4;\,5}\zeta_{4;\,5-1}^{4;\,5}=2{,}01;\quad 4\pi\xi_{25}\zeta_{25}=\xi_{5;\,1-1}^{5;\,1}\zeta_{5;\,1-1}^{5;\,1}=20{,}35.$$

Los coeficientes b y a para el punto de referencia *1* fueron obtenidos en el problema 3.53: $b_m^n=b_1^1=b_{\nu p-1}^{\nu p}=b_{1;\,5-1}^{1;\,5}=5{,}026$; $a_m^n=a_1^1=a_{\nu p-1}^{\nu p}=a_{1;\,5-1}^{1;\,5}=48{,}75$.

9.55. 1. En los puntos del ala, para un flujo compresible,

$$\xi_{\mu k-1}^{\mu k}=\xi_{\text{inc}\ \mu k-1}^{\mu k};\quad \zeta_{\mu k-1}^{\mu k}=\zeta_{\text{inc}\ \mu k-1}^{\mu k}/k \tag{9.377}$$

las derivadas del coeficiente de presión excesiva, en correspondencia con (9.318) y (9.319):

$$p^{\alpha}=p^{\alpha\,\mathrm{inc}}/k;\quad p^{\dot{\bar{\alpha}}}=(p^{\dot{\bar{\alpha}}\,\mathrm{inc}}-M_{\infty}^{2}\xi_{\mathrm{inc}\ \mu k-1}^{\mu k}p^{\alpha\,\mathrm{inc}})/k^{3};\tag{9.378}$$

$$p^{\omega_x}=p^{\omega_x\,\mathrm{inc}}/k;\quad p^{\dot{\omega}_x}=(p^{\dot{\omega}_x\,\mathrm{inc}}-M_{\infty}^{2}\xi_{\mathrm{inc}\ \mu k-1}^{\mu k}p^{\omega_x\,\mathrm{inc}}/k^{3};\tag{9.379}$$

$$p^{\omega_x}=p^{\omega_x\,\mathrm{inc}}/k;\quad p^{\dot{\omega}_z}=(p^{\dot{\omega}_x\,\mathrm{inc}}-M_{\infty}^{2}\xi_{\mathrm{inc}\ \mu k-1}^{\mu k}p^{\omega_z\,\mathrm{inc}})/k^{3}.\tag{9.380}$$

Teniendo en cuenta (9.235), (9.362) y (9.363)

$$\left.\begin{aligned}p^{\alpha\,\mathrm{inc}}&=(2/\Delta\xi_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1})\,\overline{\Gamma}^{\alpha\,\mathrm{inc}}_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1};\\ p^{\dot{\bar{\alpha}}\,\mathrm{inc}}&=(2/\Delta\xi_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1})\,(\overline{\Gamma}^{\dot{\bar{\alpha}}\,\mathrm{inc}}_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1}+\Delta\overline{\Gamma}^{\dot{\bar{\alpha}}\,\mathrm{inc}}_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1}M_{\infty}^{2}).\end{aligned}\right\}\tag{9.381}$$

Así, pues,

$$p^{\alpha}=2\overline{\Gamma}^{\alpha\,\mathrm{inc}}/(\Delta\xi_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1}k);\tag{9.382}$$

$$p^{\dot{\bar{\alpha}}}=[2/(\Delta\xi_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1}k^{3})]\,[\overline{\Gamma}^{\dot{\bar{\alpha}}\,\mathrm{inc}}_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1}+M_{\infty}^{2}\,(\Delta\overline{\Gamma}^{\dot{\bar{\alpha}}\,\mathrm{inc}}_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1}-\\ -\xi_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1}^{\mu k}\overline{\Gamma}^{\alpha\,\mathrm{inc}}_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1})].\tag{9.383}$$

A continuación, hallamos

$$p^{\omega_x\,\mathrm{inc}}=[2/(\Delta\xi_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1}k)]\,\overline{\Gamma}^{\omega_x\,\mathrm{inc}}_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1};$$

$$p^{\dot{\omega}_x\,\mathrm{inc}}=[2/(\Delta\xi_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1}k)]\,(\overline{\Gamma}^{\dot{\omega}_x\,\mathrm{inc}}_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1}+\Delta\overline{\Gamma}^{\dot{\omega}_x\,\mathrm{inc}}_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1}M_{\infty}^{2}).$$

Con arreglo a esto

$$p^{\omega_x}=[2/(\Delta\xi_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1}k^{2})]\,\overline{\Gamma}^{\omega_x\,\mathrm{inc}}_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1};\tag{9.384}$$

$$p^{\dot{\omega}_x}=[2/(\Delta\xi_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1}k^{4})]\,[\overline{\Gamma}^{\dot{\omega}_x\,\mathrm{inc}}_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1}+M_{\infty}^{2}\,(\Delta\overline{\Gamma}^{\dot{\omega}_x\,\mathrm{inc}}_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1}-\\ -\xi_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1}^{\mu k}\overline{\Gamma}^{\omega_x\,\mathrm{inc}}_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1})].\tag{9.385}$$

Determinamos las derivadas en el flujo incompresible

$$p^{\omega_z\,\mathrm{inc}}=(2/\Delta\xi_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1})\,\overline{\Gamma}^{\omega_z\,\mathrm{inc}}_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1};$$

$$p^{\dot{\omega}_z\,\mathrm{inc}}=2\,(\Delta\xi_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1})\,(\overline{\Gamma}^{\dot{\omega}_z\,\mathrm{inc}}_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1}+\Delta\overline{\Gamma}^{\dot{\omega}_z\,\mathrm{inc}}_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1}M_{\infty}^{2}).$$

Para un medio compresible

$$p^{\omega_z}=(2/\Delta\xi_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1})\,\overline{\Gamma}^{\omega_z\,\mathrm{inc}}_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1};\tag{9.386}$$

$$p^{\dot{\omega}_z}=[2/(\Delta\xi_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1})]\,[\overline{\Gamma}^{\dot{\omega}_z\,\mathrm{inc}}_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1}+M_{\infty}^{2}\,(\Delta\overline{\Gamma}^{\dot{\omega}_z\,\mathrm{inc}}_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1}-\\ -\xi_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1}^{\mu k}\overline{\Gamma}^{\omega_z\,\mathrm{inc}}_{\mathrm{inc}\ \mu k k-1})].\tag{9.387}$$

2. Para el fluido incompresible hallamos: $p^{\alpha \text{inc}} = 2\Gamma^{\alpha}/\Delta\xi = 17$; $p^{\dot{\bar{\alpha}} \text{inc}} = 2\Gamma^{\dot{\bar{\alpha}}}/\Delta\xi = 0{,}2$; $p^{\omega_z \text{ inc}} = 2\Gamma^{\omega_z}/\Delta\xi = 12{,}5$; $p^{\dot{\omega}_z \text{ inc}} = 2\Gamma^{\dot{\omega}_z}/\Delta\xi = -0{,}5$.

En el medio compresible ($M_\infty = 0{,}6$; $k = \sqrt{1 - M_\infty^2} = \sqrt{1 - 0{,}6^2} = 0{,}8$) $p^{\dot{\bar{\alpha}}} = -3{,}195$; $p^{\dot{\bar{\omega}}_z} = -3{,}614$.

9.56. 1. Las relaciones para pasar de las derivadas para las secciones del ala transformada a las de la superficie de sustentación prefijada tienen la forma (9.321), (9.323), (9.325), (9.327), (9.329), (9.330). Introduzcamos en dichas relaciones los valores de Γ^{q_i} y $\Gamma^{\dot{q}_i}$ para el ala transformada.

Conforme a (9.320) y (9.321)

$$kc'^{q_i}_{ykk-1} = c'^{q_i \text{ inc}}_{ykk-1} = (b_{0 \text{ inc}}/b_{\text{inc } kk-1}) \int_{\xi_{0 \text{ inc}}}^{\xi_{1 \text{ inc}}} p^{q_i \text{ inc}} \, d\xi_{\text{inc}}, \tag{9.388}$$

de donde teniendo en cuenta (9.382), (9.384) y (9.386)

$$kc'^{\alpha}_{ykk-1} = (2b_{0 \text{ inc}}/b_{\text{inc } kk-1}) \sum_{\mu=1}^{n} \bar{\Gamma}^{\alpha}_{\text{inc } \mu kk-1}; \tag{9.389}$$

$$k^2 c'^{\omega_x}_{ykk-1} = (2b_{0 \text{ inc}}/b_{\text{inc } kk-1}) \sum_{\mu=1}^{n} \bar{\Gamma}^{\omega_x}_{\text{inc } \mu kk-1}; \tag{9.390}$$

$$kc'^{\omega_z}_{ykk-1} = (2b_{0 \text{ inc}}/b_{\text{inc } kk-1}) \sum_{\mu=1}^{n} \bar{\Gamma}^{\omega_z}_{\text{inc } \mu kk-1}. \tag{9.391}$$

Haciendo uso de (9.323), hallamos

$$k^3 c'^{\dot{q}_i}_{ykk-1} = c'^{\dot{q}_i \text{ inc}}_{ykk-1} - m'^{q_i \text{ inc}}_{zkk-1} M_\infty^2 (b_{\text{inc } kk-1}/b_{0 \text{ inc}}) \tag{9.392}$$

o bien, con arreglo a (9.234) y (9.324)

$$k^3 c'^{\dot{q}_i}_{ykk-1} = (2b_{0 \text{ inc}}/b_{\text{inc } kk-1}) \sum_{\mu=1}^{n} \Gamma^{\dot{q}_i}_{\text{inc } \mu kk-1} - \\ - (2M_\infty^2 b_{0 \text{ inc}}/b_{\text{inc } kk-1}) \sum_{\mu=1}^{n} \Gamma^{q_i}_{\text{inc } \mu kk-1} \xi^{\mu k}_{\text{inc } \mu k-1}. \tag{9.393}$$

Teniendo en cuenta (9.362) y (9.363)

$$k^t c'^{\dot{q}_i}_{ykk-1} = (2b_{0 \text{ inc}}/b_{\text{inc } kk-1}) \sum_{\mu=1}^{n} \bar{\Gamma}^{\dot{q}_i}_{\text{inc } \mu kk-1} + \\ + (2M_\infty^2 b_{0 \text{ inc}}/b_{\text{inc } kk-1}) \left(\sum_{\mu=1}^{n} \Delta\Gamma^{\dot{q}_i}_{\text{inc } \mu kk-1} - \sum_{\mu=1}^{n} \bar{\Gamma}^{q_i}_{\text{inc } \mu kk-1} \xi^{\mu k}_{\text{inc } \mu k-1} \right),$$

donde, para $q_1 = \alpha$, $q_3 = \omega_z$ y $q_2 = \omega_x$, $t = 3$ y $t = 4$, respectivamente.

De acuerdo con (9.323) y (9.324) y, tomando en consideración (9.362),

$$k^f m'^{q_i}_{zkk-1} = (2b_{0 \text{ inc}}^2/b_{\text{inc } kk-1}^2) \sum_{\mu=1}^{n} \bar{\Gamma}^{q_i}_{\text{inc } \mu kk-1} \xi^{\mu k}_{\text{inc } \mu k-1}, \tag{9.395}$$

donde, para $q_1 = \alpha$, $q_3 = \omega_z$ y $q_2 = \omega_x$, $f = 1$ y $f = 2$, respectivamente.

Conforme a (9.323), (9.326)

$$k^u \dot{m}'^{q_i}_{zkk-1} = (2b^2_{0\ \text{inc}}/b^2_{\text{inc}\ kk-1}) \sum_{\mu=1}^{n} [\dot{\overline{\Gamma}}^{q_i}_{\text{inc}\ \mu kk-1} +$$

$$+ M^2_\infty (\Delta\dot{\overline{\Gamma}}^{q_i}_{\text{inc}\ \mu kk-1} - \xi^{\mu k}_{\text{inc}\ \mu kk-1}\Gamma^{q_i}_{\text{inc}\ \mu kk-1})]\,\xi^{\mu k}_{\text{inc}\ \mu kk-1}, \tag{9.396}$$

donde, para $q_1 = \alpha$, $q_3 = \omega_z$ y $q_2 = \omega_x$, $u = 3$ y $u = 4$, respectivamente.

Hallemos las derivadas del coeficiente del momento de balanceo de la sección. De (9.328) y (9.388), obtenemos

$$k^d m'^{q_i}_x = -(2b^2_{0\ \text{inc}}/b^2_{\text{inc}\ kk-1}) \sum_{\mu=1}^{n} \overline{\Gamma}^{q_i}_{\text{inc}\ \mu kk-1}\zeta^{\mu k}_{\text{inc}\ \mu k-1}, \tag{9.397}$$

donde, para $q_1 = \alpha$, $q_3 = \omega_z$ y $q_2 = \omega_x$, $d = 2$ y $d = 3$, respectivamente.

De acuerdo con (9.331)

$$k^g \dot{m}'^{q_i}_{xkk-1} = -(b_{0\ \text{inc}}/b_{\text{inc}\ kk-1})\,\zeta^{\mu k}_{\text{inc}\ \mu k-1}\,[\dot{c}'^{q_i\ \text{inc}}_{ykk-1} - m'^{q_i\ \text{inc}}_{zkk-1} M^2_\infty (b_{\text{inc}\ kk-1}/b_{0\ \text{inc}\ kk-1})].$$

De esta forma, por analogía con (9.394)

$$k^g \dot{m}'^{q_i}_x = -(2b^2_{0\ \text{inc}}/b^2_{\text{inc}\ kk-1})\,\zeta^{\mu k}_{\text{inc}\ \mu k-1} \sum_{\mu=1}^{n} [\dot{\overline{\Gamma}}^{q_i}_{\text{inc}\ \mu kk-1} +$$

$$+ M^2_\infty (\Delta\dot{\overline{\Gamma}}^{q_i}_{\text{inc}\ \mu kk-1} - \overline{\Gamma}^{q_i}_{\text{inc}\ \mu kk-1}\xi^{\mu k}_{\text{inc}\ \mu k-1})], \tag{9.398}$$

donde, para $q_1 = \alpha$, $q_3 = \omega_z$ y $q_2 = \omega_x$, $g = 4$ y $g = 5$, respectivamente.

Con el *movimiento simétrico* ($q_2 = \omega_x = 0$) se debe tomar $c'^{q_i}_{ykk-1}$ y $\dot{m}'^{q_i}_{zkk-1}$ (sólo para $q_1 = \alpha$, $q_3 = \omega_z$ y considerar que $\dot{m}'^{q_i}_{xkk-1} = 0$.

En el caso del *movimiento asimétrico* $q_2 = \omega_x$, $q_1 = q_3 = 0$ ($\alpha = \omega_z = 0$) y $c'^{q_i}_{ykk-1} = \dot{c}'^{q_i}_{ykk-1} = m'^{q_i}_{zkk-1} = \dot{m}'^{q_i}_{zkk-1} = 0$.

2. Conforme al planteamiento del problema, tomando en consideración la compresibilidad, determinamos para la sección:

$$c'^{\alpha}_y = [(2b_{0\ \text{inc}}/b_{\text{inc}}) \sum_{\mu=1}^{5} \Gamma^\alpha_\mu]/k; \tag{9.399}$$

$$c'^{\dot{\bar{\alpha}}}_y = [(2b_{0\ \text{inc}}/b_{\text{inc}}) \sum_{\mu=1}^{5} \Gamma^{\dot{\bar{\alpha}}}_\mu - (2M^2_\infty b_{0\ \text{inc}}/b_{\text{inc}}) \sum_{\mu=1}^{5} \Gamma^\alpha_\mu \xi]/k^3; \tag{9.400}$$

$$m'^{\alpha}_z = [(2b^2_{0\ \text{inc}}/b^2_{\text{inc}}) \sum_{\mu=1}^{5} \Gamma^\alpha_\mu \xi]/k; \tag{9.401}$$

$$m'^{\dot{\bar{\alpha}}}_z = [(2b^2_{0\ \text{inc}}/b^2_{\text{inc}}) \sum_{\mu=1}^{5} (\Gamma^{\dot{\bar{\alpha}}}_\mu - M^2_\infty \xi \Gamma^\alpha)\,\xi]/k^3. \tag{9.402}$$

En la sección prefijada, con coordenada $\bar{z} = 2\,z/l = 0{,}5$, la razón entre las cuerdas $b_{0\ \text{inc}}/b_{\text{inc}} = [1 - \bar{z}\,(1 - 1/\eta)]^{-1} = 4/3$; la cuerda de la sección $b_{\text{inc}} = (3/4)\,b_{0\ \text{inc}} = 3$ m.

Como la envergadura relativa $l/b_{0\ \mathrm{inc}} = (\lambda_{\mathrm{ala}}/2)(\eta + 1)/\eta = 15/8$, obtendremos $l = (15/8)\ b_{0\ \mathrm{inc}} = 7{,}5$ m. La coordenada de la sección $z = \bar{z}l/2 = 1{,}875$ y la distancia hasta su borde de ataque $x = z\ \mathrm{tg}\ \chi = 3{,}248$ m.

Dividamos la cuerda de la sección en $\mu = 5$ segmentos iguales y determinemos la distancia desde el eje z hasta el punto medio de cada uno de los segmentos, reducida a $b_{0\ \mathrm{inc}} = 4$ m; $\xi = x/b_{0\ \mathrm{inc}} = 0{,}812\ [1 + 0{,}185\ (\mu - 0{,}5)]$ $(\mu = 1, 2, \ldots, 5)$. Los resultados del cálculo de las magnitudes necesarias, según las fórmulas (9.399) —(9.402), se aducen en la tabla 9.15.

Tabla 9.15

μ (número de la sección)	1	2	3	4	5
ξ (punto medio del segmento)	0,887	1,037	1,188	1,338	1,488
Γ_{μ}^{α}	3,45	1,54	1,15	0,75	0,35
$\Gamma_{\mu}^{\dot{\bar{\alpha}}}$	−0,54	0,03	0,21	0,25	0,24
$\Gamma_{\mu}^{\alpha}\xi$	3,060	1,597	1,366	1,004	0,521
$(\Gamma_{\mu}^{\dot{\bar{\alpha}}} - M_{\infty}^2\Gamma_{\mu}^{\alpha}\xi)\ \xi$	−2,216	−1,028	−0,789	−0,526	−0,138

Sumamos por la sección:

$$\sum_{\mu=1}^{5}\Gamma_{\mu}^{\alpha} = 7{,}24;\quad \sum_{\mu=1}^{5}\Gamma_{\mu}^{\dot{\bar{\alpha}}} = 0{,}19;\quad \sum_{\mu=1}^{5}\Gamma_{\mu}^{\alpha}\xi = 7{,}548;\quad \sum_{\mu=1}^{5}(\Gamma_{\mu}^{\dot{\bar{\alpha}}} - M_{\infty}^2\Gamma_{\mu}^{\alpha}\xi)\ \xi = -4{,}697.$$

Determinamos las derivadas aerodinámicas $c_y'^{\alpha} = 32{,}18$; $c_y'^{\dot{\bar{\alpha}}} = 57{,}29$; $m_z'^{\alpha} = 44{,}92$; $m_z'^{\dot{\bar{\alpha}}} = -77{,}32$.

9.57. Consideremos el movimiento simétrico ($q_1 = \alpha$; $q_2 = \omega_x = 0$; $q_3 = \omega_z$). En correspondencia con (9.332) y (9.333) la derivada total del ala en un flujo compresible

$$kc_y^{q_i} = c_y^{q_i\ \mathrm{inc}} = 2\ (b_{0\ \mathrm{inc}}^2/S_{\mathrm{ala\ inc}}) \int_0^{0{,}5\bar{l}_{\mathrm{inc}}} c_y'^{q_i\ \mathrm{inc}}\bar{b}_{\mathrm{inc}}\ d\zeta_{\mathrm{inc}}.$$

Hagamos uso de (9.233), (9.362) y (9.363):

$$k^d c_{y\,kk-1}'^{q_i\ \mathrm{inc}} = 2\ (b_{0\ \mathrm{inc}}/b_{\mathrm{inc}\ kk-1}) \sum_{\mu=1}^{n} \bar{\Gamma}_{\mathrm{inc}\ \mu kk-1}^{q_i},$$

donde, para $q_1 = \alpha$, $q_3 = \omega_z$ y $q_2 = \omega_x$, $d = 0$ y $d = 1$, respectivamente. Así, pues,

$$k^{1+d}c_y^{q_i} = 4\ (b_{0\ \mathrm{inc}}^2/S_{\mathrm{ala\ inc}}) \sum_{k=1}^{N} l_{\mathrm{inc}\ kk-1} \sum_{\mu=1}^{n} \bar{\Gamma}_{\mathrm{inc}\ \mu kk-1}^{q_i}. \quad (9.403)$$

Analicemos la fórmula (9.334), sustituyendo los términos entre corchetes en el segundo miembro de (9.394) y pasando de las integrales a las sumas, obtenemos

$$k^t \dot{c}_y^{q_i} = 4\,(b_{0\ \text{inc}}^2/S_{\text{ala inc}}) \sum_{k=1}^{N} \bar{l}_{\text{inc}\ kk-1} \sum_{\mu=1}^{n} [\dot{\bar{\Gamma}}_{\text{inc}\ \mu kk-1}^{q_i} + $$
$$+ \mathrm{M}_\infty^2 (\Delta\dot{\bar{\Gamma}}_{\text{inc}\ \mu kk-1}^{q_i} - \bar{\Gamma}_{\text{inc}\ \mu kk-1}^{q_i} \xi_{\text{inc}\ \mu kk-1}^{\mu k})], \qquad (9.404)$$

donde, para $q_1 = \alpha$, $q_3 = \omega_z$ y $q_2 = \omega_x$, $t = 3$ y $t = 4$, respectivamente.

Examinemos (9.336) tomando en consideración (9.395):

$$k^f m_z^{q_i} = 4\,(b_{0\ \text{inc}}^2/S_{\text{ala inc}}) \sum_{k=1}^{N} \bar{l}_{\text{inc}\ kk-1} \sum_{\mu=1}^{n} \bar{\Gamma}_{\text{inc}\ \mu kk-1}^{q_i} \xi_{\text{inc}\ \mu kk-1}^{\mu k}, \qquad (9.405)$$

donde, para $q_1 = \alpha$, $q_3 = \omega_z$ y $q_2 = \omega_x$, $f = 1$ y $f = 2$, respectivamente. En (9.338) efectuemos la sustitución de la derivada de la sección según (9.241), (9.362) y (9.363):

$$k^g \dot{m}_z'^{q_i\ \text{inc}} = 2\,(b_{0\ \text{inc}}^2/b_{\text{inc}\ kk-1}^2) \sum_{\mu=1}^{n} (\dot{\bar{\Gamma}}_{\text{inc}\ \mu kk-1}^{q_i} + \mathrm{M}_\infty^2 \Delta\dot{\bar{\Gamma}}_{\text{inc}\ \mu kk-1}^{q_i})\, \xi_{\text{inc}\ \mu k-1}^{\mu k},$$

donde, para $q_1 = \alpha$, $q_3 = \omega_z$ y $q_2 = \omega_x$, $g = 0$ y $g = 1$, respectivamente.

Así, pues, para el primer término del segundo miembro de (9.338)

$$k^g \dot{m}_z^{q_i\ \text{inc}} = 4\,(b_{0\ \text{inc}}^2/S_{\text{ala inc}}) \sum_{k=1}^{N} \bar{l}_{\text{inc}\ kk-1} \sum_{\mu=1}^{n} (\dot{\Gamma}_{\text{inc}\ \mu kk-1}^{q_i} + \mathrm{M}_\infty^2 \Delta\dot{\Gamma}_{\text{inc}\ \mu kk-1}^{q_i})\, \xi_{\text{inc}\ \mu k-1}^{\mu k}.$$

Pasamos a las sumas en (9.339):

$$k^g I_{zz} = 4\,(b_{0\ \text{inc}}^2/S_{\text{ala}}) \sum_{k=1}^{N} \bar{l}_{\text{inc}\ kk-1} \sum_{\mu=1}^{n} \bar{\Gamma}_{\text{inc}\ \mu kk-1}^{q_i} (\xi_{\text{inc}\ \mu kk-1}^{\mu k})^2.$$

Así, pues, con arreglo a (9.338)

$$k^{3+g} \dot{m}_z^{q_i} = 4\,(b_{0\ \text{inc}}^2/S_{\text{ala inc}}) \Big\{ \sum_{k=1}^{N} \bar{l}_{\text{inc}\ kk-1} \sum_{\mu=1}^{n} \dot{\bar{\Gamma}}_{\text{inc}\ \mu kk-1}^{q_i} \xi_{\text{inc}\ \mu k-1}^{\mu k} + $$
$$+ \mathrm{M}_\infty^2 \sum_{k=1}^{N} \bar{l}_{\text{inc}\ \mu kk-1} \sum_{\mu=1}^{n} [\Delta\dot{\bar{\Gamma}}_{\text{inc}\ \mu kk-1}^{q_i} \xi_{\text{inc}\ \mu k-1}^{\mu k} - \bar{\Gamma}_{\text{inc}\ \mu kk-1}^{q_i} (\xi_{\text{inc}\ \mu k-1}^{\mu k})^2] \Big\}. \qquad (9.406)$$

Empleando (9.389)—(9.391) y (9.340), (9.341), obtenemos

$$k^f m_x^{q_i} = -4\,(b_{0\ \text{inc}}^2/S_{\text{ala inc}}) \sum_{k=1}^{N} \bar{l}_{\text{inc}\ kk-1} \sum_{\mu=1}^{n} \bar{\Gamma}_{\text{inc}\ \mu kk-1}^{q_i} \zeta_{\text{inc}\ \mu k-1}^{\mu k}, \qquad (9.407)$$

donde, para $q_1 = \alpha$, $q_3 = \omega_z$ y $q_2 = \omega_x$, $f = 2$ y $f = 3$, respectivamente.

El segundo miembro en (9.342) es análogo a (9.394). Por ello,

$$k^e \dot{m}_x^{q_i} = -4\,(b_{0\ \text{inc}}^2/S_{\text{ala inc}}) \Big[\sum_{k=1}^{N} \bar{l}_{\text{inc}\ kk-1} \sum_{\mu=1}^{n} \dot{\bar{\Gamma}}_{\text{inc}\ \mu kk-1}^{q_i} \zeta_{\text{inc}\ \mu k-1}^{\mu k} + $$
$$+ \mathrm{M}_\infty^2 \sum_{k=1}^{N} \bar{l}_{\text{inc}\ kk-1} \sum_{\mu=1}^{n} (\Delta\dot{\bar{\Gamma}}_{\text{inc}\ \mu kk-1}^{q_i} \zeta_{\text{inc}\ \mu k-1}^{\mu k} - \bar{\Gamma}_{\text{inc}\ \mu kk-1}^{q_i} \zeta_{\text{inc}\ \mu kk-1}^{\mu k} \xi_{\text{inc}\ \mu kk-1}^{\mu k}) \Big]. \qquad (9.408)$$

Para los movimientos simétricos ($q_2 = \omega_x = 0$) se debe tomar $c_y^{q_i}$ y $m_z^{q_i}$ sólo para $q_1 = \alpha$ y $q_3 = \omega_z$, así como hemos de considerar $m_x^{q_i} = \dot{m}_x^{q_i} = 0$. Con el movi-

miento asimétrico $q_2 = \omega_x$, $q_1 = q_3 = 0$ $(\alpha = \omega_z = 0)$ y $c_y^{q_i} = c_y^{\dot{q}_i} = m_z^{q_i} = m_z^{\dot{q}_i} = 0$.

9.58. 1. Designemos con el índice 1 el coeficiente del momento de balanceo y sus derivadas reducidas a la envergadura del ala l:

$$m_{x1} = 2M_x/(\rho_\infty V_\infty^2 l S_{\text{ala}}) = \sum_{i=1}^{3} (m_{x1}^{q_i} q_i + m_{x1}^{\dot{q}_i} \dot{q}_i).$$

Si se elige como dimensión característica la cuerda central, en esta expresión l se sustituye por b_0. Como el momento M_x no depende de la elección de la dimensión característica, $m_{x1} l = m_x b_0$, de donde

$$m_{x1} = m_x (b_0/l). \qquad (9.409)$$

De acuerdo con esto

$$m_{x1}^{q_i} = m_x^{q_i} (b_0/l); \quad m_{x1}^{\dot{q}_i} = m_x^{\dot{q}_i} (b_0/l). \qquad (9.410)$$

2. De la condición $m_{xl} l = m_{x\text{A}} b_\text{A}$ hallamos $m_{x\text{A}} = m_{xl} l/b_\text{A}$ y $m_{x\text{A}}^{\omega_x} = m_{xl}^{\omega_x} l/b_\text{A}$. Para el ala en flecha ($\lambda_{\text{ala}} = 2{,}5$; $\eta_{\text{ala}} = \infty$), tenemos

$$l/b_\text{A} = (3\lambda_{\text{ala}}/4)(\eta_{\text{ala}} + 1)^2/[\eta_{\text{ala}}(\eta_{\text{ala}} + 1) + 1] = 1{,}875,$$

por lo que $m_{x\text{A}}^{\omega_x} = -0{,}3426$.

9.59. Los parámetros $\omega_{x1} = 0{,}5\, l\Omega_z/V_\infty$, $\omega_x = b_0 \Omega_x/V_\infty$ y las correspondientes derivadas están ligadas entre sí por las dependencias

$$\omega_{x1} = \omega_x (0{,}5\, l/b_0); \quad \dot{\omega}_{x1} = \dot{\omega}_x (0{,}5\, l/b_0)^2, \qquad (9.411)$$

donde $\dot{\omega}_{x1} = \partial\omega_{x1}/\partial\tau_1$; $\dot{\omega}_x = \partial\omega_x/\partial\tau$; $\tau_1 = tV_\infty/(0{,}5\, l)$; $\tau = tV_\infty/b_0$.

Conforme a (9.411)

$$m_x^{\omega_{x1}} = (\partial m_x/\partial\omega_x)[b_0/(0{,}5l)] = m_x^{\omega_x}(2b_0/l); \qquad (9.412)$$

$$m_x^{\dot{\omega}_{x1}} = (\partial m_x/\partial\dot{\omega}_x)[b_0/(0{,}5l)]^2 = m_x^{\dot{\omega}_x}(2b_0/l). \qquad (9.413)$$

Supongamos que estas derivadas se han obtenido del coeficiente del momento de balanceo reducido a la cuerda central b_0. Para su recálculo referente a la envergadura l hay que hacer uso de (9.412) y (9.413):

$$m_{x1}^{\omega_{x1}} = m_x^{\omega_{x1}}(b_0/l) = 2m_x^{\omega_x}(b_0/l)^2, \qquad (9.414)$$

$$m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}} = m_x^{\dot{\omega}_{x1}}(2b_0/l)^2 = 4m_x^{\dot{\omega}_x}(b_0/l)^3. \qquad (9.415)$$

A continuación, obtenemos

$$\dot{\omega}_{xl} = (d\Omega_x/dt)(0{,}5l/V_\infty)^2 b_\text{A}^2/b_\text{A}^2 = \dot{\omega}_{x\text{A}}(0{,}5l/b_\text{A})^2; \quad m_{xl} = m_{x\text{A}} b_\text{A}/l,$$

donde $\dot{\omega}_{x\text{A}}$ y $m_{x\text{A}}$ son el parámetro cinemático y el coeficiente del momento, calculados según b_A (cuerda aerodinámica media CAM).

De acuerdo con esto $m_{xl}^{\dot{\omega}_{xl}} = (\partial m_{xl}/\partial\dot{\omega}_{xl}) = 4m_{x\text{A}}^{\dot{\omega}_{x\text{A}}}(b_\text{A}/l)^3$, de donde $m_{x\text{A}}^{\dot{\omega}_{x\text{A}}} = m_{xl}^{\dot{\omega}_{xl}}(l/b)^3/4$.

Para el ala prefijada ($\lambda_{\mathrm{a\,la}} = 2{,}5$; $\eta_{\mathrm{a\,la}} = \infty$) la razón $l/b_{\mathrm{A}} = 1{,}875$, por lo que $m_{x\mathrm{A}}^{\dot{\omega}_{x\mathrm{A}}} = -\,0{,}0625$.

9.60. Como resultado de la resolución de las ecuaciones (9.356) y (9.357), por regla, se hallan no las propias derivadas, sino ciertos parámetros que las determinan, p. ej., kc_y^{α}, km_z^{α}A, etc. Para hacer uso de estos datos hay que utilizar las siguientes relaciones:

$$c_y^{\alpha} = (kc_y^{\alpha})/k; \quad c_{y\mathrm{A}}^{\omega_{z\mathrm{A}}} = (kc_{y\mathrm{A}}^{\omega_{z\mathrm{A}}})/k; \tag{9.416}$$

$$m_{z\mathrm{A}}^{\alpha} = (km_{z\mathrm{A}}^{\alpha})/k; \quad m_{z\mathrm{A}}^{\omega_{z\mathrm{A}}} = (km_{z\mathrm{A}}^{\omega_{z\mathrm{A}}})/k; \quad m_{x1}^{\omega_{x1}} = (km_{x1}^{\omega_{x1}})/k; \tag{9.417}$$

$$\left.\begin{aligned} c_y^{\dot{\alpha}_{\mathrm{A}}} &= [(k^3 c_{y\mathrm{A}1}^{\dot{\alpha}_{\mathrm{A}}}) + \mathrm{M}_\infty^2\,(k^3 c_{y\mathrm{A}2}^{\dot{\alpha}_{\mathrm{A}}})]/k^3;\\ c_{y\mathrm{A}}^{\dot{\omega}_{z\mathrm{A}}} &= [(k^3 c_{y\mathrm{A}1}^{\dot{\omega}_{z\mathrm{A}}}) + \mathrm{M}_\infty^2\,(k^3 c_{y\mathrm{A}2}^{\dot{\omega}_{z\mathrm{A}}})]/k^3; \end{aligned}\right\} \tag{9.418}$$

$$\left.\begin{aligned} m_{z\mathrm{A}}^{\dot{\alpha}_{\mathrm{A}}} &= [(k^3 m_{z\mathrm{A}1}^{\dot{\alpha}_{\mathrm{A}}}) + \mathrm{M}_\infty^2\,(k^3 m_{z\mathrm{A}2}^{\dot{\alpha}_{\mathrm{A}}})]/k^3;\\ m_{z\mathrm{A}}^{\dot{\omega}_{z\mathrm{A}}} &= [(k^3 m_{z\mathrm{A}1}^{\dot{\omega}_{z\mathrm{A}}}) + \mathrm{M}_\infty^2\,(k^3 m_{z\mathrm{A}2}^{\dot{\omega}_{z\mathrm{A}}})]/k^3; \end{aligned}\right\} \tag{9.419}$$

$$m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}} = [(k^2 m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}})_1 + \mathrm{M}_\infty^2\,(k^2 m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}})_2]/k^2. \tag{9.420}$$

Aquí los parámetros cinemáticos

$$\dot{\alpha}_{\mathrm{A}} = (d\alpha/dt)\,b_{\mathrm{A}}/V_\infty; \quad \omega_{z\mathrm{A}} = \Omega_z b_{\mathrm{A}}/V_\infty; \quad \dot{\omega}_{z\mathrm{A}} = (d\Omega_z/dt)\,b_{\mathrm{A}}^2/V_\infty^2,$$

donde b_{A} es la cuerda aerodinámica media (CAM).

El coeficiente del momento $m_{z\mathrm{A}}$ también se calcula partiendo de esa cuerda. Los parámetros $\omega_{x1} = \Omega_x\,(0{,}5\ l/V_\infty)$; $\dot{\omega}_{x1} = (d\Omega_z/dt)\,(0{,}5\ l/V_\infty)^2$, donde $0{,}5\ l$ es la semienvergadura del ala.

El coeficiente del momento de balanceo m_{x1} se calcula según la envergadura l del ala. Los datos obtenidos corresponden al sistema de coordenadas en el que el eje Oz pasa por la punta de la CAM (posición del centro de gravedad $\bar{x}_g = 0$).

Consideremos un flujo incompresible. De la solución de las indicadas ecuaciones, para $\lambda_{\mathrm{a\,la}}\ \mathrm{tg}\ \chi_0 = 4$; $\eta_{\mathrm{a\,la}} = 2$ y $\lambda_{\mathrm{a\,la}} = 2{,}5$ con $k = \sqrt{1 - \mathrm{M}_\infty^2} = 1$ ($\mathrm{M}_\infty = 0$) directamente hallamos:

$$c_y^{\alpha} = 2{,}449; \quad c_{y\mathrm{A}}^{\omega_{z\mathrm{A}}} = 1{,}763; \quad m_{z\mathrm{A}}^{\alpha} = -0{,}7019; \quad m_{z\mathrm{A}}^{\omega_{z\mathrm{A}}} = -1{,}017;$$

$$m_{x1}^{\omega_{x1}} = -0{,}2214;$$

$$c_y^{\dot{\alpha}_{\mathrm{A}}} = c_{y\mathrm{A}1}^{\dot{\alpha}_{\mathrm{A}}} = 0{,}2395; \quad c_{y\mathrm{A}}^{\dot{\omega}_{z\mathrm{A}}} = c_{y\mathrm{A}1}^{\dot{\omega}_{z\mathrm{A}}} = -0{,}0018; \quad m_{z\mathrm{A}}^{\dot{\alpha}_{\mathrm{A}}} = m_{z\mathrm{A}1}^{\dot{\alpha}_{\mathrm{A}}} = -0{,}0726;$$

$$m_{z\mathrm{A}}^{\dot{\omega}_{z\mathrm{A}}} = m_{z\mathrm{A}}^{\dot{\omega}_{z\mathrm{A}}} = -0{,}1501; \quad m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}} = (m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}})_1 = -0{,}0647.$$

Para un fluido compresible ($\mathrm{M}_\infty = 0{,}8$) $k = \sqrt{1 - \mathrm{M}_\infty^2} = 0{,}6$; $k\lambda_{\mathrm{a\,la}} = 1{,}5$. De la solución de las ecuaciones, para $k\lambda_{\mathrm{a\,la}} = 1{,}5$; $\eta_{\mathrm{a\,la}} = 2$; $\lambda_{\mathrm{a\,la}}\ \mathrm{tg}\ \chi_0 = 4$,

determinamos:

$$kc_y^{\alpha}=1{,}638;\quad kc_{y\text{A}}^{\omega_{z\text{A}}}=1{,}183;\quad km_{z\text{A}}^{\alpha}=-0{,}4859;$$

$$km_{z\text{A}}^{\omega_{z\text{A}}}=-0{,}6975;\quad km_{x1}^{\omega_{x1}}=-0{,}1408;$$

$$k^3c_{y\text{A}1}^{\dot{\alpha}_\text{A}}=0{,}3930;\quad k^3c_{y\text{A}2}^{\dot{\alpha}_\text{A}}=-0{,}6997;\quad k^3c_{y\text{A}1}^{\dot{\omega}_{z\text{A}}}=0{,}1495;$$

$$k^3c_{y\text{A}2}^{\dot{\omega}_{z\text{A}}}=-0{,}4096;\quad k^3m_{z\text{A}1}^{\dot{\alpha}_\text{A}}=-0{,}1197;$$

$$k^3m_{z\text{A}2}^{\dot{\alpha}_\text{A}}=0{,}1562;\quad k^3m_{z\text{A}1}^{\dot{\omega}_{z\text{A}}}=-0{,}1528;\quad k^3m_{z\text{A}2}^{\dot{\omega}_{z\text{A}}}=0{,}2069;$$

$$k^3(m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}})_1=-0{,}0796;\quad k^2(m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}})_2=0{,}0864.$$

Hagamos uso de las fórmulas (9.416) — (9.420);

$$c_y^{\alpha}=2{,}730;\quad c_{y\text{A}}^{\omega_{z\text{A}}}=1{,}971;\quad m_{z\text{A}}^{\alpha}=-0{,}8098;\quad m_{z\text{A}}^{\omega_{z\text{A}}}=-1{,}162;$$

$$m_{x1}^{\omega_{x1}}=-0{,}2347;\quad c_{y\text{A}}^{\dot{\alpha}_\text{A}}=-0{,}2537;\quad c_{y\text{A}}^{\dot{\omega}_{z\text{A}}}=-0{,}5212;$$

$$m_{z\text{A}}^{\dot{\alpha}_\text{A}}=-0{,}0926;\quad m_{z\text{A}}^{\dot{\omega}_{z\text{A}}}=-0{,}0944;\quad m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}}=-0{,}0675.$$

9.61. El régimen de circulación indicado se simula en el túnel aerodinámico, en cuya zona de trabajo, bajo cierto ángulo de ataque de montaje α_0, se ubica el modelo del ala que, alrededor de la posición del ángulo α_0, realiza pequeños movimientos oscilatorios. Considerando fuera del ala y de su estela el movimiento del fluido *libre de torbellinos*, es posible resolver el problema de la determinación del potencial de velocidad que puede ser representado en la forma

$$\bar{\varphi}=b_0V_\infty\left[\varphi_0+\sum_{i=1}^{3}(\varphi^{q_i}q_i+\varphi^{\dot{q}_i}\dot{q}_i)\right], \tag{9.421}$$

donde φ_0 es una función potencial, correspondiente a la circulación fundamental uniforme; $\bar{\varphi}=\varphi/(b_0V_\infty)$, el potencial adimensional del flujo sumario perturbado alrededor de la superficie de sustentación.

Con arreglo al valor del potencial de velocidad se calcula el coeficiente de presión en la superficie del ala:

$$\bar{p}=2(p-p_\infty)/(\rho_\infty V_\infty^2)=\bar{p}_0+\sum_{i=1}^{3}(p^{q_i}q_i+p^{\dot{q}_i}\dot{q}_i), \tag{9.422}$$

donde $\bar{p}_0$ es el coeficiente de presión con la circulación uniforme alrededor del ala bajo el ángulo de ataque α_0.

Los respectivos valores de los coeficientes aerodinámicos sumarios:

$$c_y=c_{y0}+\sum_{i=1}^{3}(c_y^{q_i}q_i+c_y^{\dot{q}_i}\dot{q}_i); \tag{9.423}$$

$$m_z=m_{z0}+\sum_{i=1}^{3}(m_z^{q_i}q_i+m_z^{\dot{q}_i}\dot{q}_i); \tag{9.424}$$

$$m_x=\sum_{i=1}^{3}(m_x^{q_i}q_i+m_x^{\dot{q}_i}\dot{q}_i), \tag{9.425}$$

donde c_{y0} y m_{z0} son los coeficientes de la fuerza normal y del momento longitudinal durante la circulación estacionaria alrededor del ala bajo ángulo de ataque α_0.

Con la circulación en torno de un perfil simétrico en el caso de $\alpha_0 = 0$ los coeficientes c_{y0} y m_{z0} son iguales a cero, pero ellos tienen valores finitos para el perfil de forma asimétrica. Por lo visto, el coeficiente de presión excesiva $\Delta\bar{p}_0 = \bar{p}_{0i} - \bar{p}_{0s}$ en los correspondientes puntos de los intradós y trasdós del ala para $\alpha_0 = 0$ es asimismo nulo cuando el perfil es simétrico; al ser éste asimétrico $\Delta\bar{p}_0 \neq 0$ incluso cuando el ángulo de ataque de montaje es nulo.

Analicemos el problema de la circulación de un flujo incompresible uniforme alrededor de un ala de forma arbitraria en la planta. Al resolver este problema podemos no hallar el potencial de velocidad $\bar{\varphi}$ (9.421), sino utilizar el método de acuerdo con el cual la superficie de sustentación se sustituye por un *sistema de vórtices discretos estacionarios*, cada uno de los cuales es un haz de torbellinos discretos en herradura. Conforme a los valores calculados de la circulación de estos vórtices es posible determinar la distribución de la presión y los coeficientes aerodinámicos.

Dividamos el plano del ala en células (véase la fig. 9.8) y en cada una de ellas ubiquemos un vórtice oblicuo en herradura. La circulación de semejante vórtice se determina con el valor de $\bar{\Gamma}_{0\mu kk-1}$ que es la componente de la circulación total en un flujo no estacionario

$$\Gamma_{\mu kk-1} = V_\infty b_0 \left[\bar{\Gamma}_{0\mu kk-1} + \sum_{i=1}^{3} (\bar{\Gamma}^{q_i}_{\mu kk-1} q_i + \bar{\Gamma}^{\dot{q}_i}_{\mu kk-1} \dot{q}_i) \right]. \qquad (9.426)$$

La velocidad en el punto de referencia $\xi^{\nu p}_{\nu pp-1}$, $\zeta^{\nu p}_{\nu pp-1}$, inducida por el vórtice en herradura situado en la célula $\mu kk - 1$ (véase la fig. 9.8), con arreglo a (9.62), (9.69) y (9.70) es igual a

$$W'_{\nu pp-1} = -[V_\infty/(4\pi)]\, w'^{\mu kk-1}_{\nu pp-1} \Gamma_{\mu kk-1}.$$

Introduzcamos la anotación para la función de la velocidad inducida $\sigma w'^{\mu kk-1}_{\nu pp-1}$ (en ese mismo punto de referencia) por el vórtice ligado opuesto con las coordenadas en su punto medio $\xi_{\mu kk-1}$, $-\zeta_{\mu kk-1}$. De acuerdo con esto, para la velocidad en el punto de referencia, obtenemos

$$W'_{\nu pp-1} = -[V_\infty/(4\pi)]\,(w'^{\mu kk-1}_{\nu pp-1} \pm \sigma w'^{\mu kk-1}_{\nu pp-1})\, \Gamma_{\mu kk-1}, \qquad (9.427)$$

donde el signo «+» se toma para el movimiento simétrico ($q_i = \alpha$; ω_z) y el «—», para el asimétrico ($q_i = \omega_x$). La velocidad total inducida por todos los vórtices adyacentes del plano de referencia

$$W'_{\nu pp-1} = -[V_\infty/(4\pi)] \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} (w'^{\mu kk-1}_{\nu pp-1} \pm \sigma w'^{\mu kk-1}_{\nu pp-1})\, \Gamma_{\mu kk-1}. \qquad (9.427')$$

De forma análoga calculamos la velocidad de los vórtices libres izquierdo y derecho:

$$W''_{\nu pp-1} = -[V_\infty/(4\pi)] \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} (w''^{\mu kk-1}_{\nu pp-1} \pm \sigma w''^{\mu kk-1}_{\nu pp-1})\, \Gamma_{\mu kk-1}. \qquad (9.428)$$

donde $w''^{\mu kk-1}_{\nu pp-1}$ es la función de la velocidad determinada con (9.71).

La velocidad sumaria inducida por todo el sistema de vórtices en el punto de referencia

$$W_{\nu pp-1} = (W' + W'')_{\nu pp-1} = -[V_\infty/(4\pi)] \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} (w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} \pm \sigma w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}) \Gamma_{\mu kk-1}, \quad (9.429)$$

donde $w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} = w_{\nu pp-1}'^{\mu kk-1} + w_{\nu pp-1}''^{\mu kk-1}$; $\sigma w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} = \sigma w_{\nu pp-1}'^{\mu kk-1} + \sigma w_{\nu pp-1}''^{\mu kk-1}$.

De acuerdo con la condición de la adherencia de la circulación, la componente normal de la velocidad perturbada es nula en el punto que consideramos:

$$W_{\nu pp-1} + (dy/dx)\, V_\infty = 0, \quad (9.430)$$

donde dy/dx es la inclinación de la línea media del perfil hacia la dirección $\bar{V}_\infty$ $[y = 0{,}5\,(y_i + y_s)]$; y_i, y_s, las coordenadas de los puntos de los lados inferior

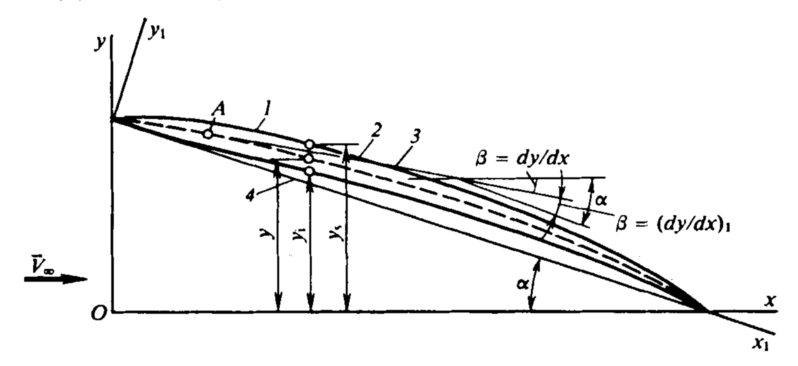


Fig. 9.18. Perfil bajo ángulo de ataque:
1, perfil; *2*, línea central; *3*, tangente a ella en el punto *A*; *4*, cuerda

y superior del perfil (fig. 9.18). Introduciendo (9.429) en (9.430) obtenemos la ecuación para el cálculo de la distribución de la circulación:

$$[1/(4\pi)] \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} (w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} + \sigma w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}) \Gamma_{\mu kk-1} = dy/dx \quad (q_{1,3} = \alpha;\ \omega_z). \quad (9.431)$$

Analicemos las coordenadas x_1, y_1 ligadas al perfil. En la fig. 9.18 vemos que la variable $dy/dx = \beta = \alpha - \beta_1$, donde $\beta_1 = (dy/dx)_1$. De acuerdo con esto

$$[1/(4\pi)] \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n} (w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} + \sigma w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}) \Gamma_{\mu kk-1} = -(dy/dx)_1 + \alpha. \quad (9.432)$$

Conforme a la fig. 9.8 el número de ecuaciones del sistema $(n - 1) N = 90$, pero las incógnitas $\Gamma_{\mu kk-1}$ son $nN = 100$. Las incógnitas que faltan se calculan haciendo uso de la hipótesis de Chapliguin—Zhukovski, en correspondencia con la cual la circulación en las células que hacen contacto directo con el borde de salida

$$\Gamma_{\mu kk-1}|_{\mu=n} = 0. \quad (9.433)$$

El coeficiente de presión excesiva, con arreglo a (9.222),

$$\Delta\bar{p} = 2\Gamma_{\mu kk-1}/\Delta\xi_{\mu kk-1}. \quad (9.434)$$

El coeficiente de la fuerza normal de la sección se calcula con (9.223) y (9.434) o bien por analogía con (9.235)

$$c'_{ykk-1} = (2b_0/b_{kk-1}) \sum_{\mu=1}^{n} \Gamma_{\mu kk-1}. \quad (9.435)$$

De (9.225) y (9.434) [o bien empleando análogamente (9.240)], obtenemos el coeficiente del momento del perfil:

$$m'_{zkk-1} = (2b_0^2/b_{kk-1}^2) \sum_{\mu=1}^{n} \Gamma_{\mu kk-1}\xi_{\mu k-1}^{\mu k}. \quad (9.436)$$

Utilizando (9.435) y (9.224) hallamos el coeficiente total de la fuerza normal:

$$c_y = (4b_0^2/S_{\text{ala}}) \sum_{k=1}^{N} \bar{l}_{kk-1} \sum_{\mu=1}^{n} \Gamma_{\mu kk-1}. \quad (9.437)$$

Con (9.436) y (9.226) calculamos el coeficiente total del momento de cabeceo

$$m_z = (4b_0^2/S_{\text{ala}}) \sum_{k=1}^{N} \bar{l}_{kk-1} \sum_{\mu=1}^{n} \Gamma_{\mu kk-1}\xi_{\mu k-1}^{\mu k}. \quad (9.438)$$

2. Con la ecuación de la línea media del perfil $y = 0{,}5\,(y_i + y_s) = 0{,}11x\,(1 - x/b_0)$ hallamos el ángulo de inclinación de la tangente local: $\beta_1 = (dy/dx)_1 = 0{,}11\,(1 - 2\xi)$. La inclinación de la tangente local hacia el eje (ξ), de acuerdo con la fig. 9.18, $\beta = \alpha - \beta_1 = 0{,}1\,[1 - 1{,}1\,(1 - 2\xi)]$.

La velocidad en el punto de referencia, inducida por el sistema de vórtices discretos estacionarios, $W_{\nu pp-1} = -V_\infty\beta = -V_\infty \cdot 0{,}1\,[1 - 1{,}1\,(1 - 2\xi)]$. De acuerdo con esto, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones para la circulación local adimensional $\Gamma_{\mu kk-1}$:

$$[1/(4\pi)] \sum_{k=1}^{5} \sum_{\mu=1}^{5} (w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1} + \sigma w_{\nu pp-1}^{\mu kk-1})\, \Gamma_{\mu kk-1} = 0{,}1\,[1 - 1{,}1\,(1 - 2\xi_\nu)].$$

Ubiquemos los puntos de referencia para cuatro células en el punto medio de la base de cada una de ellas, para la quinta célula, que hace contacto con el borde de salida,en su centro. Las coordenadas de estos puntos y los correspondientes valores de los ángulos de inclinación hacia el eje ξ, tangente a la línea media, se dan en la tabla 9.16.

Tabla 9.16

μ	1	2	3	4	5
ξ_ν	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9
β	0,034	0,078	0,122	0,166	0,188

La velocidad adimensional inducida por el vórtice ligado se determina con (9.158):

$$w' = -(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)/(\bar{a}\sqrt{1 - \cos^2\alpha_2}), \quad (9.439)$$

donde, para el vórtice recto en herradura,

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha_1 &= (0{,}5\bar{l}_0-\zeta_0)/[\xi_0^2+(0{,}5\bar{l}_0-\zeta_0)^2]^{1/2};\\ \cos\alpha_2 &= (0{,}5\bar{l}_0+\zeta_0)/[(\xi_0^2+(0{,}5\bar{l}_0+\zeta_0)^2]^{1/2};\end{aligned}\right\} \qquad (9.440)$$

$$\bar{a}=[\xi_0^2+(0{,}5\bar{l}_0-\zeta_0)^2]^{1/2}. \qquad (9.441)$$

La velocidad inducida por un par de haces vorticiales se calcula por (9.65):

$$w''=-(1+\cos\beta_1)/(0{,}5\bar{l}_0-\zeta_0)-(1+\cos\beta_2)/(0{,}5\bar{l}_0+\zeta_0), \qquad (9.442)$$

donde

$$\cos\beta_1=\xi_0/\bar{a};\quad \cos\beta_2=\xi_0/\bar{c}; \qquad (9.443)$$

$$\bar{c}=[\xi_0^2+(0{,}5\bar{l}_0+\zeta_0)^2]^{1/2}. \qquad (9.444)$$

La envergadura del vórtice discreto, que situamos en el borde de ataque de la célula (véase la fig. 9.17), es igual a la anchura de ésta, o sea, $\bar{l}_0 = l_0/b_0 = 4$. En el sistema de ecuaciones aduzcamos a las velocidades adimensionales inducidas y a la circulación notaciones con índices que coincidan con los números de las células (véase la fig. 9.17):

$$\left.\begin{aligned}&a_1^1\Gamma^1+\ldots+a_1^{15}\Gamma^{15}+\ldots+a_1^{25}\Gamma^{25}=0{,}427;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{16}^1\Gamma^1+\ldots+a_{16}^{15}\Gamma^{15}+\ldots+a_{16}^{25}\Gamma^{25}=2{,}085;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{25}^1\Gamma^1+\ldots+a_{25}^{15}\Gamma^{15}+\ldots+a_{25}^{25}\Gamma^{25}=2{,}361.\end{aligned}\right\} \qquad (9.445)$$

Aquí los coeficientes $a_m^n=a_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}=[w'+w''+\sigma(w'+w'')]_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}$, mientras que los valores desconocidos de la circulación $\Gamma^n=\Gamma_{\mu kk-1}$.

Calculemos varios coeficientes a_m^n. Examinemos el punto de referencia y el vórtice en la célula 1 (punto 1), donde la circulación es Γ^1.

Las coordenadas del punto 1 (en los ejes x, z) $\zeta_0 = 0$; $\xi_0 = (b_0/5)/b_0 = 0{,}2$. Hallamos: $\cos\alpha_1 = 0{,}707$; $\cos\alpha_2 = 0{,}707$; $\bar{a} = 0{,}283$; $w' = -7{,}065$; $\bar{c} = 0{,}283$; $\cos\beta_1 = 0{,}707$; $\cos\beta_2 = 0{,}707$; $w'' = -17{,}07$; $w' + w'' = -24{,}14$.

Examinemos la célula simétrica 1′ y la velocidad que en el punto de referencia 1, situado en ella, induce un vórtice de intensidad Γ' $(\Gamma_{1;5;5-1})$. Las coordenadas del punto 1 con relación a este vórtice $\zeta_0 = 0{,}4$; $\xi_0 = 0{,}2$. Hacemos los cálculos: $\cos\alpha_1 = -0{,}707$; $\cos\alpha_2 = 0{,}949$; $\bar{a} = 0{,}282$; $\sigma w' = -2{,}712$; $\bar{c} = 0{,}632$; $\cos\beta_1 = 0{,}707$; $\cos\beta_2 = 0{,}316$; $\sigma w'' = 6{,}342$; $\sigma(w' + w'') = 3{,}631$. Así, pues,

$$a_1^1=a_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}=a_{1;\,5;\,5-1}^{1;\,5;\,5-1}=[w'+w''+\sigma(w'+w'')]_{1;\,5;\,5-1}^{1;\,5;\,5-1}=-20{,}5.$$

Calculemos el último coeficiente a_1^{25} de la primera ecuación del sistema (9.445). Hallamos las coordenadas del punto 1 con relación al vórtice en la célula 25 (véase la fig. 9.17); $\zeta_0 = -4\bar{l}_0 = 1{,}6$; $\xi_0 = -3\cdot 0{,}2 = -0{,}6$. Determinamos: $\cos\alpha_1 = 0{,}949$; $\cos\alpha_2 = -0{,}919$; $\bar{a} = 1{,}897$; $w' = 0{,}041$; $\bar{c} = 1{,}523$; $\cos\beta_1 = -0{,}316$; $\cos\beta_2 = -0{,}394$; $w'' = 0{,}053$; $w' + w'' = 0{,}0118$.

Analicemos el vórtice simétrico Γ^{25} en la célula 25. Las coordenadas del punto de referencia 1 con relación a este vórtice $\zeta_0 = 5\bar{l}_0 = 2{,}0$; $\xi_0 = -0{,}6$. Hacemos los cálculos: $\cos\alpha_1 = -0{,}949$; $\cos\alpha_2 = 0{,}965$; $\bar{a} = 1{,}897$; $\sigma w' = -0{,}032$; $\bar{c} = 2{,}280$; $\cos\beta_1 = -0{,}316$; $\cos\beta_2 = -0{,}263$; $\sigma w'' = 0{,}045$; $\sigma(w'' + w') = 0{,}013$.

Conforme a los datos obtenidos

$$a_1^{25}=a_{\nu pp-1}^{\mu kk-1}=a_{1;\,5;\,5-1}^{5;\,1;\,1-1}=[(w'+w'')+\sigma(w'+w'')]_{1;\,5;\,5-1}^{5;\,1;\,1-1}=0{,}025.$$

De forma análoga se calculan todos los restantes coeficientes a_m^n y, continuación, se resuelve el sistema (9.445). Como resultado se determina la distribución de la circulación Γ^n por las células del ala.

9.62. Admitamos que $\varphi_0 = V_\infty b\bar{\varphi}_0$ es una función potencial para el caso de la circulación uniforme de un flujo subsónico (compresible) alrededor de un ala delgada ($\bar{\varphi}_0$ es el potencial adimensional). Dicha función satisface la ecuación

$$k^2\partial^2\bar{\varphi}_0/\partial\xi^2+\partial^2\bar{\varphi}_0\partial/\eta^2+\partial^2\bar{\varphi}_0/\partial\zeta^2=0, \quad (9.446)$$

que es la generalización de la ecuación (9.50) en el caso de movimiento tridimensional para la circulación uniforme ($\partial\bar{\varphi}/\partial\tau = 0$). Las coordenadas adimensionales $\xi = x/b_0$; $\eta = y/b_0$; $\zeta = z/b_0$.

Introduzcamos nuevas coordenadas adimensionales que se determinan con (9.285), es decir,

$$\xi_{\mathrm{inc}}=\xi;\quad \eta_{\mathrm{inc}}=\eta k;\quad \zeta_{\mathrm{inc}}=\zeta k. \quad (9.447)$$

Poniendo estas coordenadas en (9.446), hallamos

$$\partial^2\bar{\varphi}_0/\partial\xi_{\mathrm{inc}}^2+\partial^2\bar{\varphi}_0/\partial\eta_{\mathrm{inc}}^2+\partial^2\bar{\varphi}_0/\partial\zeta_{\mathrm{inc}}^2=0. \quad (9.448)$$

Esta relación es la ecuación de continuidad para un flujo incompresible. Así, pues, el problema de la circulación de un flujo compresible alrededor del ala puede reducirse al problema de la circulación de un fluido incompresible alrededor de cierta ala de forma modificada. Esta forma se halla con ayuda de la *transformación de coordenadas* (9.447).

La condición de frontera en el ala transformada tiene la siguiente forma [véase (9.430)]:

$$\partial\bar{\varphi}_0/\partial\eta=-\beta;\quad \partial\bar{\varphi}_0/\partial\eta_{\mathrm{inc}}=-\beta/k. \quad (9.449)$$

Analicemos el movimiento uniforme del ala transformada en un medio incompresible. Demos al potencial de perturbaciones la siguiente notación

$$\Phi_{\mathrm{inc}}=k^2 b_{0\,\mathrm{inc}} V_{\infty\,\mathrm{inc}}\bar{\Phi}_{\mathrm{inc}}, \quad (9.450)$$

donde $\bar{\Phi}_{\mathrm{inc}}$ es el potencial adimensional al que satisface la ecuación de continuidad [véase (9.448)]

$$\partial^2\bar{\Phi}_{\mathrm{inc}}/\partial\xi_{\mathrm{inc}}^2+\partial^2\bar{\Phi}_{\mathrm{inc}}/\partial\eta_{\mathrm{inc}}^2+\partial^2\bar{\Phi}_{\mathrm{inc}}/\partial\zeta_{\mathrm{inc}}^2=0. \quad (9.451)$$

Examinemos la correspondiente condición de frontera en el ala transformada. Por analogía con (9.449)

$$\partial\Phi_{\mathrm{inc}}/\partial y_{\mathrm{inc}}=-V_{\infty\,\mathrm{inc}}\beta \quad \text{o bien} \quad \partial\bar{\Phi}_{\mathrm{inc}}/\partial\eta_{\mathrm{inc}}=-\beta/k. \quad (9.452)$$

Comparando (9.448), (9.449) con (9.451) y (9.452) obtenemos que la función $\bar{\varphi}_0$, que determina el potencial de circulación durante el movimiento de la superficie de sustentación en un medio compresible, y la función $\bar{\Phi}_{\mathrm{inc}}$ del potencial de velocidad del ala transformada en un medio incompresible satisfacen las mismas ecuaciones diferenciales y condiciones de frontera. Por esta razón,los valores de

estos potenciales en los puntos del flujo, ligados por las condiciones de transformación de las coordenadas (9.447), son iguales, es decir,

$$\bar{\varphi}(\xi_{\text{inc}}, \eta_{\text{inc}}/k, \zeta_{\text{inc}}/k) = \bar{\Phi}_{\text{inc}}(\xi_{\text{inc}}, \eta_{\text{inc}}, \zeta_{\text{inc}}). \tag{9.453}$$

De este modo, el problema de la circulación uniforme de un flujo compresible (subsónico) alrededor de un ala delgada es equivalente al problema de la circulación estacionaria de un medio incompresible alrededor del ala transformada.

Analicemos la relación entre los coeficientes aerodinámicos en los flujos compresible e incompresible. Según (9.44), para la circulación uniforme de un medio compresible, el coeficiente de la presión excesiva

$$\Delta\bar{p} = -4(\partial\varphi_0/\partial x)/V_\infty \quad \text{o bien} \quad \Delta\bar{p} = -4\partial\bar{\varphi}_0/\partial\xi. \tag{9.454}$$

Para el fluido incompresible

$$\Delta\bar{p}_{\text{inc}} = -4(\partial\bar{\Phi}_{\text{inc}}/\partial x_{\text{inc}})/V_\infty = -4k\,\partial\bar{\Phi}_{\text{inc}}/\partial\xi_{\text{inc}}. \tag{9.455}$$

Comparando (9.454) y (9.455), hallamos

$$\Delta\bar{p} = \Delta p_{\text{inc}}/k. \tag{9.456}$$

De acuerdo con (9.236) y (9.240), así como tomando en consideración (9.456), obtenemos para los coeficientes de las secciones

$$c'_{ykk-1} = c'_{ykk-1\ \text{inc}}/k; \tag{9.457}$$

$$m'_{zkk-1} = m'_{zkk-1\ \text{inc}}/k. \tag{9.458}$$

Haciendo uso de (9.224), (9.226), (9.457) y (9.458), hallamos la ligazón entre los coeficientes totales en los flujos compresible e incompresible:

$$c_y = c_{y\ \text{inc}}/k, \tag{9.459}$$

$$m_z = m_{z\ \text{inc}}/k. \tag{9.460}$$

2. Determinemos la ecuación de la línea media del perfil en la sección prefijada: $y = 0{,}5\,(y_s + y_i) = 0{,}11x\,(1 - x/2)$. El ángulo de inclinación de la tangente a la cuerda $\beta = dy/dx = 0{,}11\,(1 - x)$. En el punto del borde de ataque ($x = 0$) el ángulo $\beta = 0{,}11$, en el de salida ($x = b_0 = 2$ m) el ángulo $\beta = -0{,}11$. La inclinación respecto del eje x (ξ) $\alpha_1 = \alpha - \beta = 0{,}1 - 0{,}11\,(1 - 2\xi)$.

En correspondencia con el método de las «láminas» locales el coeficiente de presión excesiva en cierto punto en la línea media es el mismo que en una lámina inclinada bajo el ángulo de ataque $\alpha_1 = \alpha - \beta$, es decir, $\Delta\bar{p} = p^\alpha\alpha_1 = p^\alpha\cdot 0{,}1\,[1 - 1{,}1\,(1 - 2\xi)]$.

Calculemos $\Delta\bar{p}$ para diversos valores de ξ desde 0 hasta 1,0 (con intervalo $\Delta\xi = 0{,}1$) y mediante la integración numérica hallamos $c'_{y0\ \text{inc}} = \int_0^1 \Delta\bar{p}\,d\xi = 0{,}1244$.

De forma análoga hallamos el coeficiente del momento longitudinal de la sección: $m'_{z0\ \text{inc}} = \int_0^1 \Delta\bar{p}\,\xi\,d\xi = 0{,}0646$. En el medio compresible $c'_{y0} = c_{y0\ \text{inc}}/k = 0{,}207$; $m'_{z0} = m'_{z0\ \text{inc}}/k = 0{,}108$.

3. Calculemos las derivadas de los coeficientes aerodinámicos para el ala en un flujo compresible: $c_y^\alpha = c^\alpha_{y\ \text{inc}}/k = 4{,}082$; $m_z^\alpha = m^\alpha_{z\ \text{inc}}/k = -1{,}17$. Los parámetros geométricos de esta ala:

$$b_0 = b_{0\ \text{inc}}k = 1{,}2\ \text{m};\quad \lambda_{\text{a la}} = \lambda_{\text{a la inc}}/k = 4{,}167;\quad \eta_{\text{a la}} = \eta_{\text{a la inc}} = 2;$$
$$\lambda_{\text{a la}}\ \text{tg}\ \chi_0 = (\lambda_{\text{a la}}\ \text{tg}\ \chi_0)_{\text{inc}} = 4;\quad \text{tg}\ \chi_0 = (\lambda_{\text{a la}}\ \text{tg}\ \chi_0)_{\text{inc}}/\lambda_{\text{a la}} = 0{,}96.$$

9.63. Representemos el potencial de velocidad creado por el flujo de una fuente tridimensional en la forma $\varphi = -q/r$. Si el fluido es incompresible, las perturbaciones de la fuente se propagan instantáneamente induciendo en el punto que se considera un potencial que corresponde a la dependencia $\varphi = -q/r$, donde $q = q(t)$ es la potencia de la fuente en el momento dado de tiempo t. Pero en un flujo compresible la perturbación se propaga a velocidad finita (velocidad del sonido a). Por ello, en el momento de tiempo t, sobre el punto que consideramos, actúa una fuente cuya potencia no es $q(t)$, sino que su valor es $q(t - r/a)$ que corresponde al comienzo de la salida de la fuente de una onda sonora de perturbaciones que llega al punto prefijado en el momento de tiempo t.

Conforme a lo expuesto $\varphi = -q(t - r/a)/r = -b(t - r/a)^2/r$. Derivando hallamos la velocidad: $\partial\varphi/\partial r = V_r = -b(t - r/a)^2/r^2 - 2b(t - r/a)/(ar) = 0{,}002733$ m/s.

En el fluido incompresible la correspondiente velocidad es otra: $V_r = \partial\varphi/\partial r = q/r^2 = 0{,}0035$ m/s.

9.64. Para un fluido incompresible el potencial de velocidad creado por una fuente puntual $\varphi_{\text{inc}} = -q_{\text{inc}}/(4\pi r_{\text{inc}})$, donde q es la potencia de la fuente, $r_{\text{inc}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, la distancia hasta el punto prefijado. En el caso de fuentes repartidas se introduce la noción de densidad (o intensidad) de distribución de las fuentes $dq_{\text{inc}}/d\sigma_{\text{inc}} = Q_{\text{inc}}$, donde $d\sigma_{\text{inc}} = dx_{\text{inc}}dz_{\text{inc}}$ es el área elemental de la superficie. Si v es la componente vertical de la velocidad, $dq_{\text{inc}} = 2\ v_{\text{inc}}d\sigma_{\text{inc}}$ y $Q_{\text{inc}} = 2\ v_{\text{inc}}$.

Así, pues, para una fuente elemental $d\varphi_{\text{inc}} = -Q_{\text{inc}}d\sigma_{\text{inc}}/(4\pi r_{\text{inc}})$. Al pasar al flujo compresible (subsónico) empleamos la fórmula de recálculo de las coordenadas: $x_{\text{inc}} = x/\sqrt{1 - \mathrm{M}_\infty^2}$, $y_{\text{inc}} = y$, $z_{\text{inc}} = z$. En correspondencia con esto, $d\sigma_{\text{inc}} = dx_{\text{inc}}dz_{\text{inc}} = d\sigma/\sqrt{1 - \mathrm{M}_\infty^2}$ y, por lo tanto, para el flujo compresible

$$d\varphi = -Q\ d\sigma/[4\pi\sqrt{x^2 + (1 - \mathrm{M}_\infty^2)(y^2 + z^2)}],$$

donde $Q = Q_{\text{inc}}$ (ya que las componentes verticales de la velocidad en la superficie son iguales: $\partial\varphi/\partial y_{\text{inc}} = \partial\varphi/\partial y$).

Mediante la sustitución directa en la ecuación para el potencial de velocidad es posible cerciorarse de que la función φ hallada de la fuente es en realidad la integral de dicha ecuación. Con ello, no tiene importancia si las velocidades serán subsónicas ($\mathrm{M}_\infty < 1$) o bien supersónicas ($\mathrm{M}_\infty > 1$). Para el último caso

$$d\varphi = -Q\ d\sigma/[4\pi\sqrt{x^2 - \alpha'^2(y^2 + z^2)}],$$

donde $\alpha' = \sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}$.

De la dependencia obtenida se desprende que ella ofrece los valores reales sólo dentro del espacio donde $x^2 \geqslant \alpha'^2(y^2 + z^2)$, es decir el punto, donde las fuentes ejercen su efecto, debe yacer en el interior de una superficie cónica cuya ecuación es $x^2 = \alpha'^2(y^2 + z^2)$. Desde el punto de vista formal hay dos conos semejantes (directo e inverso), pero, no obstante, las perturbaciones se propagan por el flujo

hacia abajo, o sea, dentro del cono con el vértice orientado al encuentro del flujo. En tal cono se consume no toda la potencia, sino sólo su mitad, por lo que

$$d\varphi = -Q\, d\sigma/[2\pi \sqrt{x^2 - \alpha'^2 (y^2 + z^2)}].$$

En el caso que consideramos el área elemental $d\sigma = d\xi d\zeta$ (con la sustitución de x por ξ y z por ζ) se encuentra en el origen de coordenadas. Si ella está desplazada y situada en cierto punto $x = \xi$, $z = \zeta$, entonces

$$d\varphi = -Qd\sigma/(2\pi r),$$

donde $r = \sqrt{(x-\xi)^2 - \alpha'^2 [y^2 + (z-\zeta)^2]}$.

El potencial creado por el sistema de fuentes repartidas en el ala

$$\varphi = -[1/(2\pi)] \int\int_{\sigma} (1/r)\, Q(\xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta. \qquad (9.461)$$

El ámbito de integración σ se sitúa en el ala en la zona de intersección de aquélla con el *cono inverso de Mach*, cuyo vértice se encuentra en el punto que examinamos. Ahora, analicemos la circulación inuniforme. Sea que por toda la superficie de sustentación surgen, simultáneamente, fuentes de intensidad variable $q(x, z, t)$. Debido a ellas, el potencial elemental en el punto P, con coordenadas x_1, y_1, z_1

$$d\varphi(x_1, y_1, z_1, t) = q(x, z, t_1)\, d\sigma/r + q(x, z, t_2)\, d\sigma/r, \qquad (9.462)$$

donde $r = \sqrt{(x_1 - x)^2 - \alpha'^2 [y_1^2 + (z_1 - z)^2]}$.

En (9.462) el primer sumando tiene en cuenta la fuente cuando ésta se encuentra en el punto A, es decir, en el centro de la onda de perturbaciones (de Mach) que actúa en el punto P con su frente delantero; el segundo sumando determina la

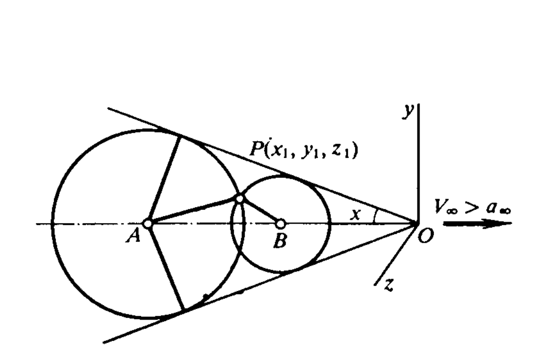


Fig. 9.19. Esquema para determinar el potencial de velocidad provocado por fuentes no estacionarias

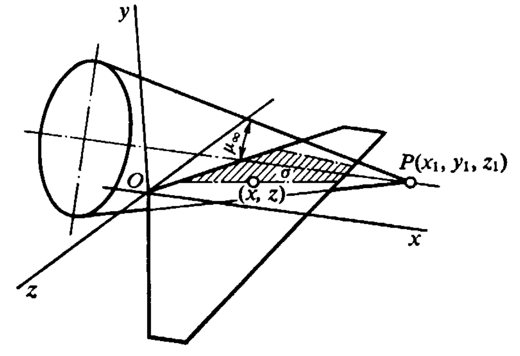


Fig. 9.20. Región de influencia de las fuentes sobre la superficie de sustentación

componente del potencial debido a la fuente que se encuentra en el punto B, o sea, en el centro de la onda que actúa en el punto P con su frente posterior (fig. 9.19). Con ello, los valores del tiempo $t_1 = t - \Delta t_1$ y $t_2 = t - \Delta t_2$, donde Δt_1 y Δt_2 son los intervalos en cuyo transcurso, hacia el momento t, las perturbaciones se propagan hasta el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ con los frentes delantero y posterior. Toman-

do en consideración (9.462) el potencial creado por un sistema de fuentes no estacionarias

$$\varphi(x_1, y_1, z_1, t) = \iint\limits_{\sigma_1} q(x, y, z, t_1)\, dx\, dz/r + \iint\limits_{\sigma_2} q(x, y, z, t_2)\, dx\, dz/r. \quad (9.463)$$

Los ámbitos de integración $\sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ y $\sigma_2(x_1, y_1, z_1)$ son las partes del área xOz, yacente en el interior del cono de Mach, que contienen las fuentes desde las que, en el momento de tiempo t, las perturbaciones llegan con el frente delantero y posterior, respectivamente. Dichas partes del área están limitadas por la curva de intersección del cono de Mach con el plano $y = 0$. Si el vértice del cono de Mach tuviera las coordenadas $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, evidentemente la ecuación de la superficie cónica sería $R^2 = x^2 \operatorname{tg}^2\mu$ o bien $x^2 = \operatorname{ctg}^2 \mu R^2 = \alpha'^2 (z^2 + y^2)$.

En el caso de disposición arbitraria del vértice en el punto x_1, y_1, z_1 dicha ecuación toma la forma

$$(x_1 - x)^2 = \alpha'^2 [(z_1 - z)^2 + (y_1 - y)^2]. \quad (9.464)$$

Haciendo $y = 0$ (la superficie del cono pasa por la fuente situada en el plano xOz), obtenemos la ecuación de la rama que limita el ámbito de integración (fig. 9.20):

$$\alpha'^2 y_1^2 = (x_1 - x)^2 - \alpha'^2 (z_1 - z)^2. \quad (9.465)$$

Al determinar el potencial en la superficie del ala $y_1 = 0$, las zonas de integración se encuentran en su superficie entre los sectores rectilíneos de las generatrices, cuyas ecuaciones $x_1 - x = \pm \alpha' (z_1 - z)$.

9.65. Representemos las ecuaciones (9.462) indicando los límites de variación de las integrales:

$$\varphi(x_1, y_1, z_1, t) = \int\limits_{A_1}^{x_1 - \alpha' y_1} \int\limits_{z_1 - z_0}^{z_1 + z_0} \frac{1}{r} q(x, z, t_1)\, dx\, dy + $$

$$+ \int\limits_{A_2}^{x_1 - \alpha' y_1} \int\limits_{z_1 - z_0}^{z_1 + z_0} \frac{1}{r} q(x, z, t_2)\, dx\, dz. \quad (9.466)$$

Los límites de las integrales se han determinado partiendo de las condiciones de que el ámbito de influencia de las fuentes σ_1 y σ_2 yace en el plano limitado por la curva de Mach:

$$(x_1 - x)^2 - \alpha'^2 (z_1 - z)^2 = \alpha'^2 y_1^2. \quad (9.467)$$

Tras los límites de dicho ámbito, desde el que las perturbaciones no llegan hasta el punto $P(x_1, y_1, z_1)$, podemos tomar $q(x, z, t) = 0$. Al resolver la ecuación (9.467) respecto a z, hallamos los límites inferior y superior de la segunda integral:

$$z = z_1 \mp (1/\alpha') \sqrt{(x_1 - x)^2 - \alpha'^2 y_1^2} = z_1 \mp z_0. \quad (9.468)$$

Para x hallamos el límite superior con (9.467) a condición de que $z_1 = z$, es decir, $x = x_1 - \alpha' y_1$. Los límites inferiores A_1 y A_2 son ciertas constantes que satisfacen las desigualdades $A_{1(2)} \leqslant x \leqslant x_1 - \alpha' y_1$. Introduzcamos una nueva variable de integración θ de acuerdo con la fórmula $z = z_1 - z_0 \cos\theta$. Tomando

ésta en consideración $dz = z_0 \operatorname{sen} \theta$, $r = \operatorname{sen} \theta \alpha' z_0$. Poniendo estos valores en (9.466), obtenemos

$$\varphi(x_1, y_1, z_1, t) = (1/\alpha') \int_{A_1}^{x_1-\alpha' y_1} \int_0^{\pi} q(x, z, t_1)\, d\theta\, dx + \\ + \int_{A_2}^{x_1-\alpha' y_1} \int_0^{\pi} q(x, z, t_2)\, d\theta\, dx. \quad (9.469)$$

El límite inferior de la segunda integral se determina partiendo de la condición $z_1 - z_0 = z_1 - z_0 \cos\theta$, conforme a la cual $\theta = 0$; el límite superior se calcula con la ecuación $z_1 + z_0 = z_1 - z_0 \cos\theta$, según la cual $\theta = \pi$.

Derivando (9.469) por y_1 y pasando al límite para $y_1 \to 0$, hallamos

$$q(x, z, t) = -[1/(2\pi)]\, [\partial\varphi/\partial y_1]_{y_1=0}. \quad (9.470)$$

La ecuación (9.463), haciendo en ella $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ y teniendo en cuenta (9.470), puede presentarse en la forma

$$\varphi(x_1, y_1, z_1, t) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} \left[\frac{\partial\varphi(x, z, t_1)}{\partial y}\right]_{y=0} \frac{dx\, dz}{r} - \\ - \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} \left[\frac{\partial\varphi(x, z, t_2)}{\partial y}\right]_{y=0} \frac{dx\, dz}{r}. \quad (9.471)$$

Para el cálculo de los coeficientes aerodinámicos es suficiente conocer el potencial en el ala, por lo que en (9.471) es posible adoptar $y_1 = 0$.

9.66. El tiempo Δt, necesario para que desde el punto O (0, 0, 0) la perturbación llegue al punto $P(x_1, y_1, z_1)$ que analizamos, lo determinamos con ayuda de la fig. 9.19. En el transcurso de ese tiempo la fuente se trasladará a una distancia OB igual a $x = V_\infty \Delta t$ y la onda esférica de perturbación alcanzará el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ desde la fuente. Así, pues, el tiempo $\Delta t = BP/a_\infty$, donde BP es el radio de la onda igual a la distancia

$$BP = \sqrt{(x_1 - V_\infty \Delta t)^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

entre los puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x = V_\infty \Delta t,\ y = 0,\ z = 0)$.

Por consiguiente, para determinar el tiempo Δt tenemos la ecuación

$$\Delta t = (1/a_\infty) \sqrt{(x_1 - V_\infty \Delta t)^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Resolviendo esta ecuación respecto a Δt, obtenemos

$$\Delta t_1 = [M_\infty^2/(V_\infty \alpha'^2)]\,(x_1 - r/M_\infty); \quad \Delta t_2 = (M_\infty^2/V_\infty \alpha'^2)\,(x_1 + r/M_\infty), \quad (9.472)$$

donde $\alpha'^2 = M_\infty^2 - 1$; $r = \sqrt{x_1^2 - \alpha'^2 (y_1^2 + z_1^2)}$.

Supongamos que la fuente se encuentra no en el punto O (0, 0, 0), sino en el mismo plano xOz, pero en el punto $O'(x,\ y = 0,\ z)$. De arreglo con esto

$$\Delta t = (1/a_\infty) \sqrt{(\Delta x_1 - V_\infty \Delta t)^2 + y_1^2 + \Delta z_1^2},$$

donde $\Delta x_1 = x_1 - x$, $\Delta z_1 = z_1 - z$.

Resolviendo esta ecuación, hallamos

$$\left.\begin{aligned}\Delta t_1 &= [\mathrm{M}_\infty^2/(V_\infty \alpha'^2)]\,(\Delta x_1 - r/\mathrm{M}_\infty),\\ \Delta t_2 &= [\mathrm{M}_\infty^2/(V_\infty \alpha'^2)]\,(\Delta x_1 + r/\mathrm{M}_\infty),\end{aligned}\right\} \tag{9.473}$$

donde $r = \sqrt{\Delta x_1^2 - \alpha'^2 (y_1^2 + \Delta z_1^2)}$.

La primera expresión (9.473) con $\mathrm{M}_\infty > 1$ determina el tiempo en que llega al punto P el frente delantero de la onda de perturbación desde la fuente, en tanto que la segunda expresión, el frente posterior.

Para calcular los límites de las zonas de influencia de las fuentes sobre el punto (x_1, z_1) (ámbitos de integración), examinemos las expresiones

$$t_1 = t - \Delta t_1 = t - [\mathrm{M}_\infty^2/(V_\infty \alpha'^2)]\,(\Delta x_1 - r/\mathrm{M}_\infty);$$
$$t_2 = t - \Delta t_2 = t - [\mathrm{M}_\infty^2/V_\infty \alpha'^2)]\,(\Delta x_1 + r/\mathrm{M}_\infty).$$

Haciendo $t_1 = t_2 = 0$ y $r = \sqrt{\Delta x_1^2 - \alpha'^2 \Delta z_1^2}$ obtenemos dos ecuaciones que, al resolverlas con relación a $\Delta x_1 = x_1 - x'$ y $\Delta z_1 = z_1 - z'$, hallamos $\Delta x_1 = x_1 - x' = tV_\infty \alpha'^2/M_\infty^2$; $\Delta z_1 = z_1 - z' = \pm tV_\infty \alpha'/\mathrm{M}_\infty^2$.

En la fig. 9.21 se muestran los parámetros geométricos $\Delta x_1 = x_1 - x'$ y $\Delta z_1 = z_1 - z'$ que se determinan con las coordenadas x', z' del punto de tangencia del cono inverso de Mach y la onda circular de perturbación que viene de la fuente. De la figura se desprende que $\Delta x_1 = tV_\infty \cos\mu_\infty \cos\mu_\infty = tV_\infty \alpha'^2/\mathrm{M}_\infty^2$; $\Delta z_1 = r\cos\mu_\infty = tV_\infty \alpha'/\mathrm{M}_\infty^2$, donde $\alpha' = \sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}$; $r = ta_\infty$ es el radio de la onda sonora de perturbación que viene de la fuente.

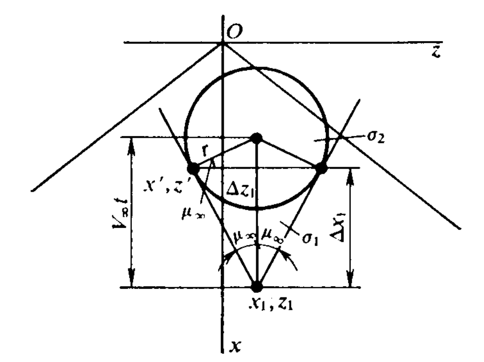


Fig. 9.21. Esquema para determinar las regiones de integración (zonas de influencia de las fuentes)

En la fig. 9.21, en correspondencia con los resultados obtenidos para Δx_1 y Δz_1, el ámbito de integración σ_1 se encuentra entre el cono inverso de Mach, prefijado con la ecuación $z = z_1 \pm (x_1 - x)/\alpha'$, y el frente delantero de la onda de perturbación; el ámbito de integración σ_2 se halla en el interior de ese mismo cono inverso de Mach y está limitado por el frente posterior de la onda de perturbación. En la práctica se adopta que los dos ámbitos de integración se reúnen en uno ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$) que coincide con el sector del plano Oxy ubicado dentro del cono inverso de Mach (cono característico).

9.67. Cuando el ala realiza *oscilaciones armónicas*, los respectivos parámetros cinemáticos pueden representarse en la forma

$$q_j = q_j^* \cos p_j t \quad (q_j = \alpha;\ \omega_x;\ \omega_z). \tag{9.474}$$

Tomando en consideración la fórmula

$$e^{ip_j t} = \cos p_j t + i \,\mathrm{sen}\, p_j t, \tag{9.475}$$

obtenemos

$$q_j = q_j^* e^{ip_j t}. \tag{9.476}$$

Conforme a esta expresión la condición de frontera

$$V_y/V_\infty = -\alpha - \omega_x\zeta - \omega_z\xi = \sum_{j=1}^{3} q_j v_j$$
$$(j = 1;\ 2;\ 3;\ v_1 = -1;\ v_2 = -\zeta;\ v_3 = -\xi)$$

también varía con arreglo a leyes armónicas

$$V_j/V_\infty = \sum_{j=1}^{3} q_j^* v_j e^{ip_j t}. \tag{9.477}$$

De esta dependencia se deduce que la derivada del potencial $\partial\varphi/\partial y$, igual a la componente vertical de la velocidad V_y (deflexión del flujo), puede asimismo expresarse mediante cierta función armónica, es decir, para la superficie sometida a la circulación

$$|\partial\varphi(x,\ y,\ z,\ t)/\partial y|_{y=0} = |\partial\varphi(x,\ y,\ z)/\partial y|_{y=0}\, e^{ipt}, \tag{9.478}$$

donde p es la frecuencia de las oscilaciones del ala.

9.68. En la fórmula (9.471) para el potencial de velocidad buscado $\varphi\ (x_1,\ y_1,\ z_1,\ t)$ entran las derivadas $\partial\varphi/\partial y$ (deflexiones del flujo) como funciones del tiempo $t_1 = t - \Delta t_1$ y $t_2 = t - \Delta t_2$ que determinan el influjo de las fuentes, en el momento t, sobre el punto que examinamos con el frente delantero (durante el intervalo Δt_1) y con el posterior (durante el intervalo Δt_2):

$$|\,\partial\varphi\ (x,\ y,\ z,\ t_1)/\partial y\,|_{y=0} = |\,\partial\varphi\ (x,\ y,\ z,\ t - \Delta t_1)/\partial y\,|_{y=0};$$
$$|\,\partial\varphi\ (x,\ y,\ z,\ t_2)/\partial y\,|_{y=0} = |\,\partial\varphi\ (x,\ y,\ z,\ t - \Delta t_2)/\partial y\,|_{y=0},$$

donde, de acuerdo con (9.473),

$$t_1 = t - \Delta t_1 = t - (\mathrm{M}_\infty^2/V_\infty\alpha'^2)\,(\Delta x_1 - r/\mathrm{M}_\infty);$$
$$t_2 = t - \Delta t_2 = t - (\mathrm{M}_\infty^2/V_\infty\alpha'^2)\,(\Delta x_1 + r/\mathrm{M}_\infty). \tag{9.479}$$

Introduzcamos (9.478) en (9.471) sustituyendo t por t_1 y t_2:

$$\varphi\,(x_1,\ y_1,\ z_1,\ t) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\sigma(x_1y_1z_1)} \left|\frac{\partial\varphi\,(x,\ y,\ z)}{\partial y}\right|_{y=0} [e^{ip(t-\Delta t_1)} + e^{ip(t-\Delta t_2)}]\,\frac{dx\,dz}{r}. \tag{9.480}$$

En (9.480) se ha adoptado que los ámbitos de integración σ_1 y σ_2 [véase (9.471)] son iguales y forman la parte del plano Oxz ($\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$) que yace dentro de la región del cono característico limitado por la curva

$$(x_1 - x)^2 - \alpha'^2\,(z_1 - z)^2 = \alpha'^2 y_1^2. \tag{9.481}$$

El vértice de este cono coincide con el punto $(x_1,\ y_1,\ z_1)$. Teniendo en cuenta (9.479) obtenemos la expresión definitiva para el potencial de velocidad en caso de oscilaciones armónicas del ala:

$$\varphi\,(x_1,\ y_1,\ z_1,\ t) = -\frac{1}{\pi}\,Re^{ipt}\iint\limits_{\sigma}\left|\frac{\partial\varphi\,(x,\ y,\ z)}{\partial y}\right|_{y=0}\times$$
$$\times\, e^{-i\Delta x\omega/b_0}\,\frac{\cos\,[\omega r/(\mathrm{M}_\infty b_0)]\,dx\,dz}{r}, \tag{9.482}$$

donde

$$\left.\begin{array}{l} r=\sqrt{(x_1-x)^2-\alpha'^2\,[y_1^2+(z_1-z)^2]};\\ \omega=p^*\mathbf{M}_\infty^2/\alpha'^2;\quad p^*=pb_0/V_\infty.\end{array}\right\} \qquad (9.483)$$

9.69. El potencial de velocidad perturbada representémoslo en forma de una serie:

$$\varphi(x,\ y,\ z,\ t)=V_\infty b_0\sum_{j=1}^{3}[\varphi^{q_j}(x,\ y,\ z)\,q_j+\varphi^{\dot{q}_j}(x,\ y,\ z)\,\dot{q}_j]. \qquad (9.484)$$

Aquí las derivadas de la función potencial son adimensionales (sus valores reales están reducidos al valor de $V_\infty b_0$). Para las oscilaciones armónicas

$$q_j=q_j^*e^{ip_jt};\quad \dot{q}_j=dq_j/d\tau=iq_j^*p_j^*e^{ip_j^*\tau};\quad p_j^*=p_jb_0/V_\infty. \qquad (9.485)$$

Introduzcamos (9.485) en (9.484) tomando $p_j^*=p^*$;

$$\varphi(x,\ y,\ z,\ t)=V_\infty b_0Re^{ip^*\tau}\sum_{j=1}^{3}q_j^*\,(\varphi^{q_j}+ip_j^*\varphi^{\dot{q}_j}). \qquad (9.486)$$

Derivemos (9.486) por y y pongamos la expresión obtenida en el primer miembro de (9.478) (omitimos el signo R):

$$|\partial\varphi(x,\ y,\ z)/\partial y|_{y=0}=V_\infty b_0\sum_{j=1}^{3}q_j^*\,(\partial\varphi^{q_j}/\partial y+ip_j^*\,\partial\varphi^{\dot{q}_j}/\partial y). \qquad (9.487)$$

Pongamos esta relación en (9.482), en la que sustituimos el primer miembro por (9.486):

$$V_\infty b_0e^{ip^*\tau}\sum_{j=1}^{3}q_j^*\,(\varphi^{q_j}+ip^*\varphi^{\dot{q}_j})=-(1/\pi)\,e^{ip^*\tau}V_\infty b_0\times$$

$$\times\iint_\sigma\sum_{j=1}^{3}q_j^*\left(\frac{\partial\varphi^{q_j}}{\partial y}+ip^*\frac{\partial\varphi^{\dot{q}_j}}{\partial y}\right)\frac{e^{-i\Delta x\omega/b_0}\cos[\omega r/(\mathbf{M}_\infty b_0)]}{r}\,dx\,dz. \qquad (9.488)$$

Considerando que

$$e^{-i\Delta x\omega/b_0}=\cos(\Delta x\omega/b_0)-i\,\mathrm{sen}\,(\Delta x\omega/b_0), \qquad (9.489)$$

e igualando entre sí, correspondientemente, las magnitudes reales e imaginarias en los miembros primero y segundo de (9.488), obtenemos las relaciones para las derivadas de la función potencial:

$$\varphi^{q_j}=-\frac{1}{\pi}\iint_\sigma\left[\left|\frac{\partial\varphi^{q_j}}{\partial y}\right|_{y=0}\cos(\Delta x\omega/b_0)+\right.$$

$$\left.+p^*\left|\frac{\partial\varphi^{\dot{q}_j}}{\partial y}\right|_{y=0}\mathrm{sen}\,(\Delta x\omega/b_0)\right]\cos[r\omega/(b_0\mathbf{M}_\infty)]\,\frac{dx\,dz}{r}; \qquad (9.490)$$

$$\varphi^{\dot{q}_j}=-\frac{1}{\pi}\iint_\sigma\left[\left|\frac{\partial\varphi^{\dot{q}_j}}{\partial y}\right|_{y=0}\cos(\Delta x\omega/b_0)-\right.$$

$$\left.-p^{*-1}\left|\frac{\partial\varphi^{\dot{q}_j}}{\partial y}\right|_{y=0}\mathrm{sen}\,(\Delta x\omega/b_0)\right]\cos[r\omega/(b_0\mathbf{M}_\infty)]\,\frac{dx\,dz}{r}. \qquad (9.491)$$

9.70. Con pequeños números de Strouhal ($p^* \to 0$; $\omega = p^* M_\infty^2/\alpha'^2 \to 0$)

$$\left.\begin{aligned} &\cos(\Delta x\omega/b_0) \approx 1; \ \operatorname{sen}(\Delta x\omega/b_0) \approx \Delta x\omega/b_0; \\ &p^{*-1} \operatorname{sen}(\Delta x\omega/b_0) \approx M_\infty^2/\alpha'^2; \ \cos[r\omega/(b_0 M_\infty)] \approx 1. \end{aligned}\right\} \tag{9.492}$$

Tomando en consideración estos valores y despreciando en (9.490) y (9.491) los términos con p^*, para las derivadas obtenemos relaciones que en las coordenadas adimensionales

$$\xi = x/b_0; \quad \eta = y/b_0; \quad \zeta = z/b$$

(b_0 es la cuerda central elegida en calidad de dimensión geométrica característica), toman la forma

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{q_j}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) &= -\frac{1}{\pi}\iint_\sigma \left|\frac{\partial\varphi^{q_j}}{\partial\eta}\right|_{\eta=0} \frac{d\xi\, d\zeta}{\bar r}; \\ \dot\varphi^{q_j}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) &= -\frac{1}{\pi}\iint_\sigma \left[\left|\frac{\partial\dot\varphi^{q_j}}{\partial\eta}\right|_{\eta=0} - \frac{M_\infty^2\,\Delta\xi}{\alpha'^2}\left|\frac{\partial\varphi^{q_j}}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}\right]\frac{d\xi\, d\zeta}{\bar r}, \end{aligned}\right\} \tag{9.493}$$

donde

$$\bar r = \sqrt{(\xi_1-\xi)^2 - \alpha'^2[\eta_1^2 + (\zeta_1-\zeta)^2]}. \tag{9.494}$$

Para determinar las cargas aerodinámicas sobre el ala es suficiente hallar el valor de la función potencial en la superficie ($\eta = 0$):

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{q_j}(\xi_1, 0, \zeta_1) &= -\frac{1}{\pi}\iint_\sigma \left|\frac{\partial\varphi^{q_j}}{\partial\eta}\right|_{\eta=0} \frac{d\xi\, d\zeta}{\bar r}; \\ \dot\varphi^{q_j}(\xi_1, 0, \zeta_1) &= -\frac{1}{\pi}\iint_\sigma \left[\left|\frac{\partial\dot\varphi^{q_j}}{\partial\eta}\right|_{\eta=0} - \frac{M_\infty^2\,\Delta\xi}{\alpha'^2}\left|\frac{\partial\varphi^{q_j}}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}\right]\frac{d\xi\, d\zeta}{\bar r}, \end{aligned}\right\} \tag{9.495}$$

donde

$$\bar r = \sqrt{(\xi_1-\xi)^2 - \alpha'^2(\zeta_1-\zeta)^2}. \tag{9.496}$$

9.71. 1. La condición de frontera para las deflexiones del flujo corresponde al requerimiento de que en cada punto del plano de referencia las velocidades perturbadas V_y extingan la componente condicionada por la influencia del ángulo de ataque, así como las velocidades angulares del ala Ω_x y Ω_z. Dicha condición tiene la forma

$$V_y/V_\infty = \partial\varphi/\partial\eta = -\alpha - \omega_x\zeta_1 - \omega_z\xi_1 = \sum_{j=1}^{3} q_j v_j \tag{9.497}$$

($j = 1$; 2; 3; $q_j = \alpha$; ω_x; ω_z; $v_1 = -1$; $v_2 = -\zeta_1$; $v_3 = -\xi_1$).

De (9.493) hallamos

$$\partial\varphi^{q_j}/\partial\eta = v_j; \quad \partial\dot\varphi^{q_j}/\partial\eta = 0 \tag{9.498}$$

o bien en forma desarrollada

$$\left.\begin{aligned} &\partial\varphi^{\alpha}/\partial\eta = -1; \quad \partial\varphi^{\omega_x}/\partial\eta = -\zeta_1; \quad \partial\varphi^{\omega_z}/\partial\eta = -\xi_1; \\ &\partial\dot\varphi^{\alpha}/\partial\eta = \partial\dot\varphi^{\omega_x}/\partial\eta = \partial\dot\varphi^{\omega_z}/\partial\eta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9.499}$$

El potencial de velocidad y las deflexiones del flujo que buscamos deben satisfacer, asimismo, la condición en la banda vorticial que corresponde al requerimiento de que en los lados superior e inferior de la banda no haya caída de presión:

$$\partial\varphi_1/\partial t + V_\infty\partial\varphi_1/\partial x = \partial\varphi_s/\partial t + V_\infty\partial\varphi_s/\partial x \qquad (9.500)$$

(el eje x está orientado en dirección al borde de salida).

La condición (9.500) se reduce a la siguiente forma:

$$\partial\,(\varphi_1 - \varphi_s)/\partial t + V_\infty\partial\,(\varphi_1 - \varphi_s)/\partial x = d\,(\varphi_1 - \varphi_s)/dt = 0. \qquad (9.501)$$

La diferencia de potencial determina la circulación por cierto contorno cerrado: $\varphi_1 - \varphi_s = \Gamma$. Así, pues, de acuerdo con la condición (9.500) la circulación Γ es una magnitud constante. Esta conclusión es el conocido *teorema de Thomson*. Conforme a él, los valores de la circulación por dos contornos, uno de los cuales pasa por el punto x^* en el borde de salida en el momento de tiempo t^*, y el otro, por cierto punto x en la banda vorticial (en esa misma sección) en el momento $t > t^*$, son iguales:

$$\Gamma^*\,(x^*,\ 0,\ z,\ t^*) = \Gamma\,(x,\ 0,\ z,\ t), \qquad (9.502)$$

donde $t - t^*$ es el tiempo de la desviación por la banda vorticial de cierto punto móvil a la velocidad V_∞, es decir, $x^* - x = V_\infty\,(t - t^*)$.

Para los potenciales tenemos las relaciones

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^* &= \varphi_1(x^*,\ 0,\ z,\ t^*) - \varphi_s(x^*,\ 0,\ z,\ t^*);\\ \Gamma &= \varphi_1(x,\ 0,\ z,\ t) - \varphi_s(x,\ 0,\ z,\ t). \end{aligned}\right\} \qquad (9.503)$$

Tomando en consideración que conforme a (9.501), para la simetría $\varphi_1 = -\varphi_s = \varphi$, obtenemos en forma adimensional la condición buscada en la banda vorticial:

$$\varphi\,(\xi,\ 0,\ \zeta,\ \tau) = \varphi\,(\xi^*,\ 0,\ \zeta,\ \tau^*)\ [\tau^* = \tau - (\xi^* - \xi)]. \qquad (9.504)$$

La condición ofrecida permite determinar el potencial de velocidad φ en cierto punto de la banda vorticial $(x,\ z)$ según su valor directamente tras el borde de salida del ala (en el punto x^*, $z = z^*$), pero en otro momento de tiempo $t^* > t$.

Representemos los miembros primero y segundo de (9.504) en forma de series:

$$\sum_{j=1}^{3}[\varphi^{q_j}(\xi,\ 0,\ \zeta,\ \tau)\,q_j(\tau) + \varphi^{\dot{q}_j}(\xi,\ 0,\ \zeta,\ \tau)\,\dot{q}_j(\tau)] =$$

$$= \sum_{j=1}^{3}[\varphi^{q_j}(\xi^*,\ 0,\ \zeta,\ \tau^*)\,q_j(\tau^*) + \varphi^{\dot{q}_j}(\xi^*,\ 0,\ \zeta,\ \tau^*)\,\dot{q}_j(\tau^*)], \qquad (9.505)$$

donde las funciones armónicas

$$\left.\begin{aligned} &q_j(\tau) = q_j^* e^{ip^*\tau};\quad \dot{q}_j = iq_j^* p^* e^{ip^*\tau};\\ &q_j(\tau^*) = q_j^* e^{ip^*[\tau - (\xi^* - \xi)]};\\ &\dot{q}_j(\tau^*) = ip^* q_j^* e^{ip^*[\tau - (\xi^* - \xi)]}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.506)$$

Para pequeños números de Strouhal ($p^* \to 0$) el valor de $e^{-ip^*(\xi^* - \xi)} = 1 - ip^*\,(\xi^* - \xi)$. Después de poner este valor en (9.505) y de separar las partes real e imaginaria, obtenemos las condiciones de frontera para las derivadas del po-

tencial de velocidad en la banda vorticial (despreciando el término con p^{*2} y omitiendo el signo de suma):

$$\left.\begin{aligned}\varphi^{qj}(\xi,\ 0,\ \zeta)&=\varphi^{qj}(\xi^*,\ 0,\ \zeta);\\ \dot{\varphi}^{qj}(\xi,\ 0,\ \zeta)&=\dot{\varphi}^{qj}(\xi^*,\ 0,\ \zeta)-(\xi^*-\xi)\,\varphi^{qj}(\xi^*,\ 0,\ \zeta).\end{aligned}\right\} \tag{9.507}$$

Tras los límites de los conos de perturbación el flujo supersónico queda no perturbado, por lo que en esta región el potencial adicional, incluido el límite del cono, es nulo, es decir, la condición de frontera

$$\varphi\ (\xi,\ \eta,\ \zeta,\ t)=0. \tag{9.508}$$

Al mismo tiempo, en el plano xOz, salvo el ala y la capa vorticial detrás de ella, se cumple la condición

$$\varphi\ (\xi,\ 0,\ \zeta,\ t)=0, \tag{9.509}$$

con arreglo a la cual la función φ es continua e impar con relación a la coordenada y.

2. El esquema del ala y la disposición de la línea de Mach para $M_\infty = 1{,}2$ y 2,2 se muestran en la fig. 9.22. Con $M_\infty = 1{,}2$ el borde de ataque es subsónico, ya que $\operatorname{tg}\chi_0 > \operatorname{tg}(\pi/2 - \mu_\infty) = \operatorname{ctg}\mu_\infty$ ($\operatorname{tg}\chi_0 = 1{,}732$; $\operatorname{ctg}\mu_\infty = \alpha' = 0{,}663$).

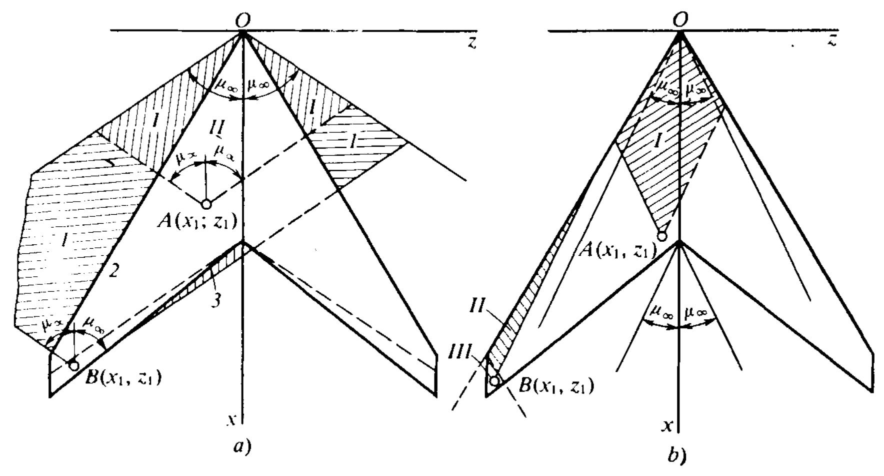


Fig. 9.22. Disposición de las líneas de Mach y las zonas de influencia de las fuentes en el ala: *a*, los bordes de ataque y de salida son subsónicos; *b*, ambos bordes son supersónicos

Hallamos el ángulo de flecha del borde de salida:

$$\operatorname{tg}\chi_{\text{sal}} = \operatorname{tg}\chi_0 - (4/\lambda_{\text{ala}})\,(\eta_{\text{ala}} - 1)/(\eta_{\text{ala}} + 1) = 0{,}843.$$

Así, pues, $\operatorname{tg}\chi_{\text{sal}} > \alpha'$ ($\operatorname{tg}\chi_{\text{sal}} = 0{,}843$; $\alpha' = 0{,}663$). Por consiguiente, el indicado borde también es subsónico. Conforme a esto la banda vorticial, que se forma detrás del ala, ejerce influencia sobre la circulación alrededor de la superficie, limitada por la línea de Mach y el borde de salida. Examinemos el punto A (x_1, z_1) en el ala. La zona de efecto de las fuentes sobre este punto se encuentra entre los límites del cono inverso característico (fig. 9.22, *a*). Por esta razón, hay que conocer las deflexiones del flujo en dicha zona y las respectivas condiciones de frontera. En el sector *1*, entre el borde de ataque y la línea de Mach, se cumple

la condición (9.509). En el ámbito *II* del ala la condición de frontera tiene la forma (9.497).

Sobre el punto B (x_1, z_1) ejercen influencia las fuentes en los sectores *1* (entre los bordes de ataque, las líneas de Mach y las generatrices del cono inverso característico); en la zona *2* sobre el ala, o sea, en la región de la banda vorticial *3*, situada entre los bordes de salida y la línea inversa de Mach. En el sector *1* se cumple la condición de frontera (9.509), en la zona *2*, la (9.497) y en la región *3*, las (9.504), (9.509). Para $\mathrm{M}_\infty = 2{,}2$ los bordes de ataque y de salida son supersónicos, ya que $\operatorname{tg}\chi_0 < \operatorname{ctg}\mu_\infty$ y $\operatorname{tg}\chi_{\text{sal}} < \operatorname{ctg}\mu_\infty$ ($\operatorname{tg}\chi_0 = 1{,}732$; $\operatorname{tg}\chi_{\text{sal}} = 0{,}843$; $\operatorname{ctg}\mu_\infty = \alpha' = 1{,}96$). El esquema de disposición de las líneas de Mach se muestra en la fig. 9.22, *b*. Sobre el punto A (x_1, z_1) actúa la fuente en el ala en los límites del cono inverso característico (región *1*). El punto B (x_1, z_1) sufre el influjo de las fuentes en la zona *II* del ala y en el sector *III* entre el borde lateral y las líneas directa e inversa de Mach. En la región *I* y la zona *II* se cumplen las condiciones de frontera (9.497) y en el sector *III*, las (9.509).

9.72. 1. Las dificultades relacionadas con el empleo de las ecuaciones (9.495) para los cálculos numéricos consisten en que cuando se realiza la igualdad $\xi_1 - \xi = \pm\alpha'(\zeta_1 - \zeta)$, las expresiones subintegrales en las indicadas ecuaciones adquieren la singularidad del tipo $\bar{r}^{-1/2}$. Para eliminar esa singularidad transformemos las ecuaciones para otras variables. Introduzcamos un nuevo sistema de coordenadas:

$$\xi_{\mathrm{M}} = \xi/\alpha'; \quad \eta_{\mathrm{M}} = \eta; \quad \zeta_{\mathrm{M}} = \zeta. \tag{9.510}$$

En estas coordenadas las ecuaciones (9.495) toman la forma

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{qj}(\xi_{1\mathrm{M}}, 0, \zeta_{1\mathrm{M}}) &= -\frac{1}{\pi}\iint_\sigma \left|\frac{\partial\varphi^{qj}}{\partial\eta_{\mathrm{M}}}\right|_{\eta_{\mathrm{M}}=0} \frac{d\xi_{\mathrm{M}}\,d\zeta_{\mathrm{M}}}{\bar{r}_{\mathrm{M}}}; \\ \dot{\varphi}^{qj}(\xi_{1\mathrm{M}}, 0, \zeta_{1\mathrm{M}}) &= -\frac{1}{\pi}\iint_\sigma \left[\left|\frac{\partial\dot{\varphi}^{qj}}{\partial\eta_{\mathrm{M}}}\right|_{\eta_{\mathrm{M}}=0} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mathrm{M}_\infty^2 \Delta\xi_{1\mathrm{M}}}{\alpha'}\left|\frac{\partial\varphi^{qj}}{\partial\eta_{\mathrm{M}}}\right|_{\eta_{\mathrm{M}}=0}\right]\frac{d\xi_{\mathrm{M}}\,d\zeta_{\mathrm{M}}}{\bar{r}_{\mathrm{M}}}, \end{aligned}\right\} \tag{9.511}$$

donde $\Delta\xi_{\mathrm{M}} = \xi_{1\mathrm{M}} - \xi_{\mathrm{M}}$; $\bar{r} = \sqrt{(\xi_{1\mathrm{M}} - \xi_{\mathrm{M}})^2 - (\zeta_{1\mathrm{M}} - \zeta_{\mathrm{M}})^2}$.

Para simplificar la resolución de las ecuaciones (9.511) introducimos las dependencias

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{qj}(\xi_{\mathrm{M}}, 0, \zeta_{\mathrm{M}}) &= F^{qj}(\xi_{\mathrm{M}}, 0, \zeta_{\mathrm{M}}); \\ \dot{\varphi}^{qj}(\xi_{\mathrm{M}}, 0, \zeta_{\mathrm{M}}) &= \dot{F}^{qj}(\xi_{\mathrm{M}}, 0, \zeta_{\mathrm{M}}) - \frac{\mathrm{M}_\infty^2 \xi_{\mathrm{M}}}{\alpha'} F^{qj}(\xi_{\mathrm{M}}, 0, \zeta_{\mathrm{M}}). \end{aligned}\right\} \tag{9.511'}$$

Después de sustituir φ^{qj} por F^{qj}, la primera ecuación (9.511) toma la forma

$$F^{qj}(\xi_{1\mathrm{M}}, 0, \zeta_{1\mathrm{M}}) = -\frac{1}{\pi}\iint_\sigma \left|\frac{\partial F^{qj}}{\partial\eta_{\mathrm{M}}}\right|_{\eta_{\mathrm{M}}=0} \frac{d\xi_{\mathrm{M}}\,d\zeta_{\mathrm{M}}}{\bar{r}_{\mathrm{M}}}. \tag{9.512}$$

Introduzcamos las relaciones para φ^{qj} y $\dot{\varphi}^{qj}$ en la segunda ecuación (9.511), realizando la sustitución de F^{qj} según (9.512) y la reducción; la segunda ecuación (9.511) se obtiene en forma transformanda:

$$\dot{F}^{qj}(\xi_{1M},\ 0,\ \zeta_{1M}) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\sigma} \left| \frac{\partial \dot{F}^{qj}}{\partial \eta_M} \right|_{\eta_M=0} \frac{d\xi_M\, d\zeta_M}{\bar{r}_M}. \qquad (9.513)$$

Las posteriores transformaciones se realizan en las coordenadas características (fig. 9.23)

$$r = (\xi_M - \xi_{0OM}) - \zeta_M; \quad s = (\xi_M - \xi_{0OM}) + \zeta_M, \qquad (9.514)$$

elegidas de forma que en los cálculos sólo se empleen los valores positivos de las variables. El valor $\xi_{0\,OM}$ de la desviación del sistema característico de coordenadas se calcula según la fig. 9.23 (las líneas de coordenadas, trazadas desde el vértice desviado O_1, pasan por las discontinuidades del borde de ataque del ala junto a los bordes laterales):

$$\xi_{0\,OM} = \text{mín}\,[\xi_{OM}(\zeta_M) - \zeta_M], \qquad (9.515)$$

donde $\zeta_{OM}(\xi_M)$ es la ecuación del borde de ataque en el sistema transformado de coordenadas; ζ_M, la coordenada transversal.

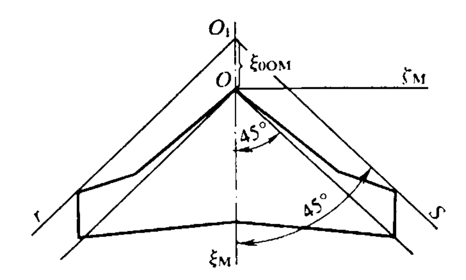


Fig. 9.23. Sistema de coordenadas característico

Para el borde de ataque con discontinuidades $m = N_\varepsilon$

$$\xi_{0\,OM} = \text{mín}\left[\sum_{\varepsilon=1}^{m} (\zeta_{M\varepsilon} - \zeta_{M\varepsilon-1})\, \text{tg}\, \chi_{OM\varepsilon-1} - \zeta_{Mm}\right], \qquad (9.516)$$

donde $m = 1, 2, \ldots, N_\varepsilon$; ε es el número corriente de la discontinuidad (junto a la sección de raíz $\varepsilon = 0$); $\text{tg}\, \chi_{OM\varepsilon-1}$, la tangente del ángulo de flecha de la discontinuidad.

Si el valor de la desviación $\xi_{0\,OM}$, hallado con (9.515) o bien (9.516), es positivo, él se debe considerar igual a cero (la línea de coordenada, trazada desde el vértice del ala hace contacto o pasa más arriba de la discontinuidad).

Las líneas de coordenadas, representadas con las ecuaciones (9.515), son perpendiculares (fig. 9.23).

En las coordenadas características (9.514) las ecuaciones (9.512) y (9.513) toman la forma

$$\left.\begin{aligned} F^{qj}(r_1,\ 0,\ s_1) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{r_1}\int_0^{s_1} D_j\,[(r_1 - r)(s_1 - s)]^{-1/2}\, dr\, ds; \\ \dot{F}^{qj}(r_1,\ 0,\ s_1) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{r_1}\int_0^{s_1} E_j\,[(r_1 - r)(s_1 - s)]^{-1/2}\, dr\, ds, \end{aligned}\right\} \qquad (9.517)$$

donde

$$D_j = \left| \frac{\partial F^{qj}}{\partial \eta_M} \right|_{\eta_M=0}; \quad E_j = \left| \frac{\partial \dot{F}^{qj}}{\partial \eta_M} \right|_{\eta_M=0}. \qquad (9.518)$$

Para las posteriores transformaciones introducimos las variables

$$v = \sqrt{r_1 - r}; \quad u = \sqrt{s_1 - s}. \tag{9.519}$$

Con estas variables representemos las ecuaciones (9.517) en la siguiente forma:

$$\left.\begin{aligned} F^{q_j}(r_1, 0, s_1) &= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{r_1}}\int_0^{\sqrt{s_1}} D_j\,dv\,du; \\ \dot{F}^{q_j}(r_1, 0, s_1) &= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{r_1}}\int_0^{\sqrt{s_1}} E_j\,dv\,du. \end{aligned}\right\} \tag{9.520}$$

2. La ecuación del borde de ataque del ala prefijada en los ejes x, y tiene la forma $z = \pm x \operatorname{ctg} \chi_0$ o bien, en forma adimensional, $\zeta = \pm \xi \operatorname{ctg} \chi_0$ ($\zeta = z/b_0$, $\xi = x/b_0$).

Para el borde de salida $z = \pm (x - b_0) \operatorname{ctg} \chi_{sal}$ o bien $\zeta = \pm (\xi - 1) \operatorname{ctg} \chi_{sal}$ (aquí el signo «+» corresponde al lado derecho del ala, en tanto que «—», al izquierdo). Las ecuaciones de los bordes laterales tienen la forma $\zeta = \pm (0{,}5\, l)/b_0$.

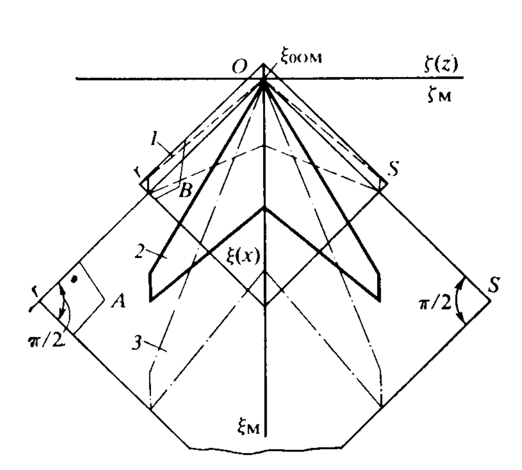


Fig. 9.24. Esquema del ala:
1, en los ejes ζ_M, ξ_M ($M_\infty = 2{,}2$); 2 y 3, en las coordenadas ζ, ξ, ξ_M y ζ_M ($M_\infty = 1{,}2$); A y B, características con $M_\infty = 1{,}2$ y $2{,}2$

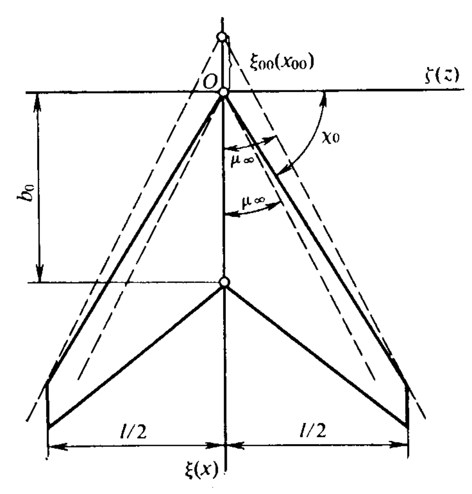


Fig. 9.25. Desviación de las coordenadas características

De acuerdo con el planteamiento $\operatorname{ctg} \chi_0 = 0{,}577$ ($\operatorname{tg} \chi_0 = 1{,}732$), por lo que para el borde de ataque $\zeta = \pm 0{,}577\xi$.

Para el borde de salida

$$\operatorname{tg} \chi_{sal} = \operatorname{tg} \chi_0 - (4/\lambda_{ala})(\eta_{ala} - 1)/(\eta_{ala} + 1) = 0{,}843;$$
$$\zeta = \pm (\xi - 1)/\operatorname{tg} \chi_{sal} = \pm 1{,}186\,(\xi - 1).$$

A continuación hallamos $0{,}5\, l/b_0 = (\lambda_{ala}/4)(\eta_{ala} + 1)/\eta_{ala} = 0{,}9$. Por ello, para los bordes laterales $\zeta = \pm 0{,}9$. En la fig. 9.24 se muestra el esquema del ala en los ejes ζ, ξ.

Analicemos el sistema de coordenadas $\zeta_M = \zeta$; $\xi_M = \xi/\alpha'$. Para el número $M_\infty = 1{,}2$ el parámetro $\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 0{,}663$.

Por consiguiente,

$$\left.\begin{aligned} &\zeta_M = \pm 0{,}577\xi_M\alpha' = \pm 0{,}383\xi_M \text{ (bordes de ataque);} \\ &\zeta_M = \pm 1{,}186\ (0{,}663\xi_M - 1) \text{ (bordes de salida);} \\ &\zeta_M = \pm 0{,}9 \text{ (bordes laterales).} \end{aligned}\right\} \qquad (9.521)$$

Para $M_\infty = 2{,}2$ la variable $\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 1{,}96$. En virtud de esto

$$\left.\begin{aligned} &\zeta_M = \pm 0{,}577\xi_M\alpha' = \pm 1{,}13\xi_M \text{ (bordes de ataque);} \\ &\zeta_M = \pm 1{,}186\ (1{,}96\xi_M - 1) \text{ (bordes de salida);} \\ &\zeta_M = \pm 0{,}9 \text{ (bordes laterales).} \end{aligned}\right\} \qquad (9.522)$$

En la fig. 9.24 los contornos de las alas se han construido de acuerdo con estas ecuaciones. Desde el vértice del ala *3* en la fig. 9.24 trazamos los ejes r y s, perpendiculares entre sí. Es evidente que en este caso (para $M_\infty = 1{,}2$ los bordes de ataque son subsónicos), la desviación del origen de coordenadas $\xi_{0\,OM}$ en (9.514) es nula, por lo que las coordenadas características

$$r = \xi_M - \zeta_M; \quad s = \xi_M + \zeta_M. \qquad (9.523)$$

En el caso que analizamos la *región característica* cerrada se encuentra dentro de las características trazadas desde el vértice y los extremos de los bordes laterales (fig. 9.24). Para $M_\infty = 2{,}2$ (bordes supersónicos) la desviación $\xi_{0\,OM} \neq 0$. El valor de ésta se determina por la intersección del eje ξ_M con la línea característica trazada desde el comienzo del borde lateral. De la fig. 9.25 se deduce que la desviación relativa (en los ejes ξ, ζ)

$$\xi_{00} = -x_{00}/b_0 = -(0{,}5\ l/b_0)\alpha'\ (1 - \operatorname{tg}\chi_0/\alpha'). \qquad (9.524)$$

Pasando a las coordenadas $\xi_M = \xi/\alpha'$, $\zeta_M = \zeta$, obtenemos $\xi_{0\,OM} = \xi_{00}/\alpha' = -0{,}104$. Para las coordenadas características

$$r = \xi_M + 0{,}104 - \zeta_M; \quad s = \xi_M + 0{,}104 + \zeta_M. \qquad (9.525)$$

Con $M_\infty = 1{,}2$ para el borde de ataque, conforme a (9.523) y (9.521), $r = 0{,}167\ \xi_M$; $s = 1{,}383\ \xi_M$; $r = 0{,}466\ s$ (borde derecho); $r = 1{,}383\ \xi_M$; $s = 0{,}617\ \xi_M$; $r = 2{,}242\ s$ (borde izquierdo).

Para los bordes de salida $r = 0{,}214\ \xi_M + 1{,}186$; $s = 1{,}786\ \xi_M - 1{,}186$; $r - 1{,}186 = 0{,}12\ (s + 1{,}186)$ (borde derecho); $r = 1{,}786\ \xi_M - 1{,}186$; $s = 0{,}214\ \xi + 1{,}186$; $r + 1{,}186 = 8{,}346\ (s - 1{,}186)$ (borde izquierdo).

Para los bordes laterales $r = \xi_M - 0{,}9$; $s = \xi_M + 0{,}9$; $r - s = -1{,}8$ (borde derecho); $r = \xi_M + 0{,}9$; $s = \xi_M - 0{,}9$; $r - s = 1{,}8$ (borde izquierdo).

Para $M_\infty = 2{,}2$ de (9.522) y (9.525), hallamos: $r = -0{,}104 - 0{,}13\ \xi_M$; $s = -0{,}104 + 2{,}13\ \xi_M$; $r + 0{,}104 = -0{,}061\ (s + 0{,}104)$ (borde de ataque derecho); $r = 2{,}13\ \xi_M - 0{,}104$; $s = -0{,}104 - 0{,}13\ \xi_M$; $r + 0{,}104 = -16{,}38\ (s + 0{,}104)$ (borde de ataque izquierdo); $r = -1{,}325\ \xi_M + 1{,}082$; $s = 3{,}325\ \xi_M - 1{,}29$; $r - 1{,}082 = -0{,}398\ (s + 1{,}29)$ (borde de salida derecho); $r = 3{,}325\ \xi_M - 1{,}29$; $s = -1{,}325\ \xi_M + 1{,}082$; $r + 1{,}29 = -2{,}509\ \times$

$\times (s - 1{,}082)$ (borde de salida izquierdo); $r = \xi_M - 1{,}004$; $s = \xi_M + 0{,}796$; $r - s = -1{,}8$ (borde lateral derecho); $r = \xi_M + 0{,}796$; $s = \xi_M - 1{,}004$; $r - s = 1{,}8$ (borde lateral izquierdo).

9.73. Como en el ala asignada los bordes son supersónicos, la región de influencia de las fuentes (ámbito de integración) sólo se encuentra en el ala (fig. 9.26).

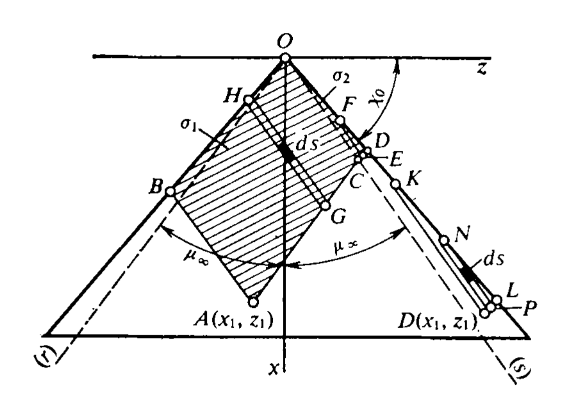


Fig. 9.26. Esquema de un ala triangular con bordes supersónicos (la región de influencia de las fuentes en el punto A están sombreadas)

Analicemos el valor de las deflexiones D_j y E_j en (9.517). De (9.511) y (9.499) se desprende que

$$D_1 = |\partial F^{\alpha}/\partial\eta_M|_{\eta_M=0} = -1; \quad D_2 = |\partial F^{\omega_x}/\partial\eta_M|_{\eta_M=0} = -\zeta_M;$$

$$D_3 = |\partial F^{\omega_z}/\partial\eta_M|_{\eta_M=0} = -\alpha'\xi_M;$$

$$E_1 = |\partial F^{\dot{\bar{\alpha}}}/\partial\eta_M|_{\eta_M=0} = -M_\infty^2\xi_M\alpha'; \quad E_2 = |\partial F^{\dot{\omega}_x}/\partial\eta_M|_{\eta_M=0} = -(M_\infty^2\xi_M/\alpha')\,\zeta_M;$$

$$E_3 = |\partial F^{\dot{\omega}_z}/\partial\eta_M|_{\eta_M=0} = -M_\infty^2\xi_M^2.$$

Introduzcamos las coordenadas características (9.514) (tomamos la desviación $\xi_{0\,OM} = 0$):

$$\left.\begin{aligned} &D_1 = -1; \quad D_2 = 0{,}5\,(r - s); \quad D_3 = -0{,}5\alpha'\,(r + s);\\ &E_1 = -0{,}5\,(M_\infty^2/\alpha')\,(r + s); \quad E_2 = 0{,}25\,(M_\infty^2/\alpha')\,(r^2 - s^2);\\ &E_3 = -0{,}25M_\infty^2\,(r + s)^2. \end{aligned}\right\} \quad (9.526)$$

Con arreglo a (9.517) y (9.526) (fig. 9.26)

$$F^{\alpha} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{r_B}\frac{dr}{\sqrt{r_1 - r}}\int_{s_H}^{s_G}\frac{ds}{\sqrt{s_1 - s}} + \frac{1}{2\pi}\int_{r_D}^{0}\frac{dr}{\sqrt{r_1 - r}}\int_{s_F}^{s_E}\frac{ds}{\sqrt{s_1 - s}}. \quad (9.527)$$

Aquí $s_H = r\,(1 - \operatorname{ctg}\chi_0\alpha')/(1 + \operatorname{ctg}\chi_0\alpha') = ra$; $s_G = s_A = s_1$; $r_B = r_A = r_1$; $s_F = r/a$; $s_E = s_A = s_1$; $r_D = s_1 a$.

En virtud de estos resultados

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{r_1-r}} \int_{ra}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{s_1-s}} = 2\left[\sqrt{s_1 r_1} + \frac{-r_1 a + s_1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{-a r_1}{s_1}}\right]; \qquad (9.528)$$

$$\int_{s_1 a}^{0} \frac{dr}{\sqrt{r_1-r}} \int_{r/a}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{s_1-s}} = 2\left[-\sqrt{s_1 r_1} - \frac{-r_1/a + s_1}{\sqrt{-1/a}} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{-r_1}{a s_1}} - \frac{\pi}{2}\right)\right]; \qquad (9.528')$$

$$F^{\alpha} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-r_1 a + s_1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{-a r_1}{s_1}} - \frac{-r_1/a + s_1}{\sqrt{-1/a}} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{-r_1}{a s_1}} - \frac{\pi}{2}\right)\right]. \qquad (9.529)$$

Introduzcamos aquí $r_1 = \xi_{M1} - \zeta_{M1}$ y $s_1 = \xi_{M1} + \zeta_{M1}$:

$$F^{\alpha} = [1/(\pi\sqrt{-a})]\,\{[\xi_{M1}(1-a) + \zeta_{M1}(1+a)] \operatorname{arctg} \sqrt{-(\xi_{M1}-\zeta_{M1})\,a/(\xi_{M1}+\zeta_{M1})} -$$
$$-[\xi_{M1}(1-a) - \zeta_{M1}(1+a)]\,[\operatorname{arctg} \sqrt{-(\xi_{M1}-\zeta_{M1})/a\,(\xi_{M1}+\zeta_{M1})} - \pi/2]\}. \qquad (9.530)$$

Aducimos la expresión general para la derivada por el balanceo:

$$F^{\omega_x} = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma_1+\sigma_2} \frac{(r-s)\,dr\,ds}{\sqrt{(r_1-r)(s_1-s)}} = -\frac{1}{4\pi}\left[\int_0^{r_B} \frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}} \int_{s_H}^{s_G} \frac{ds}{\sqrt{s_1-s}} + \right.$$
$$+ \int_{r_D}^{0} \frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}} \int_{s_F}^{s_E} \frac{ds}{\sqrt{s_1-s}} + \int_0^{r_B} \frac{dr}{\sqrt{r_1-r}} \int_{s_H}^{s_G} \frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}} +$$
$$\left. + \int_{r_D}^{0} \frac{dr}{\sqrt{r_1-r}} \int_{s_F}^{s_E} \frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}\right]. \qquad (9.531)$$

De modo análogo se representan las restantes derivadas:

$$F^{\omega_z} = [\alpha'/(4\pi)] \iint_{\sigma_1+\sigma_2} (r+s)\,dr\,ds/\sqrt{(r_1-r)(s_1-s)}; \qquad (9.532)$$

$$F^{\dot{\alpha}} = [M_\infty^2/(4\pi\alpha')] \iint_{\sigma_1+\sigma_2} (r+s)\,dr\,ds/\sqrt{(r_1-r)(s_1-s)}; \qquad (9.533)$$

$$F^{\dot{\omega}_x} = -[M_\infty^2/(8\pi\alpha')] \iint_{\sigma_1+\sigma_2} (r^2-s^2)\,dr\,ds/\sqrt{(r_1-r)(s_1-s)}; \qquad (9.534)$$

$$F^{\dot{\omega}_z} = -[M_\infty^2/(8\pi)] \iint_{\sigma_1+\sigma_2} (r+s)^2\,dr\,ds/\sqrt{(r_1-r)(s_1-s)}. \qquad (9.535)$$

Los ámbitos de integración σ_1 y σ_2 se muestran en la fig. 9.26.

9.74. Examinemos el punto D (x_1, z_1) situado en el sector del ala entre el borde de ataque supersónico y la línea de Mach (fig. 9.26). De acuerdo con el planteamiento del problema, determinemos para dicho punto las derivadas de la función potencial F^{α} y F^{ω_z}, tomando en consideración que sobre el punto D (x_1, z_1) actúan las fuentes situadas en el triángulo KDL. Conforme a esto, representemos (9.527) en la forma

$$F^{\alpha} = [1/(2\pi)] \int_{r_L}^{r_D} dr/\sqrt{r_1-r} \int_{s_N}^{s_P} ds/\sqrt{s_1-s}.$$

Para los límites tenemos:

$$s_N = r\,(1 + \operatorname{ctg}\chi_0\alpha')/(1 - \operatorname{ctg}\chi_0\alpha') = r/a; \quad s_P = s_D = s_1;$$

$$r_L = s_1 a; \quad r_D = r_1.$$

Hallamos

$$\int_{s_N}^{s_P} ds/\sqrt{s_1 - s} = \int_{r/a}^{s_1} ds/\sqrt{s_1 - s} = 2\sqrt{s_1 - r/a};$$

$$F^{\alpha} = (1/\pi)\int_{s_1 a}^{r_1} (\sqrt{s_1 - r/a}/\sqrt{r_1 - r})\,dr = 0{,}5\,(-r_1/a + s_1)\sqrt{-a}. \qquad (9.536)$$

Introduzcamos aquí $r_1 = \xi_{M1} - \zeta_{M1}$; $s_1 = \xi_{M1} + \zeta_{M1}$ y obtenemos

$$F^{\alpha} = -0{,}5\,[\xi_{M1}\,(1 - a) - \zeta_{M1}\,(1 + a)]\sqrt{-a}/a. \qquad (9.537)$$

Para calcular la derivada F^{ω_z} hagamos uso de (9.532):

$$F^{\omega_z} = \frac{\alpha'}{4\pi}\Big[\underbrace{\int_{s_1 a}^{r_1} \frac{r\,dr}{\sqrt{r_1 - r}} \int_{r/a}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{s_1 - s}}}_{A} + \underbrace{\int_{s_1 a}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{r_1 - r}} \int_{r/a}^{s_1} \frac{s\,ds}{\sqrt{s_1 - s}}}_{B}\Big]. \qquad (9.538)$$

Calculamos las integrales:

$$\int_{r/a}^{s_1} ds/\sqrt{s_1 - s} = 2\sqrt{s_1 - r/a}; \qquad \int_{r/a}^{s_1} s\,ds/\sqrt{s_1 - s} = (2/3)\,(r/a + 2s_1)\,(s_1 - r/a)^{-1/2};$$

$$A = 2\int_{s_1 a}^{r_1} (r\sqrt{s_1 - r/a}/\sqrt{r_1 - r})\,dr;$$

$$B = (1/3)\,[A/a + 2s_1\,(-r_1/a + s_1)\sqrt{-a}\,\pi]. \qquad (9.539)$$

Así, pues,

$$F^{\omega_z} = [\alpha'/(4\pi)]\,(A + B) =$$

$$= [\alpha'/(4\pi)]\,\{A + (1/3)\,[A/a + 2s_1\,(-r_1/a + s_1)\sqrt{-a}\,\pi]\}.$$

9.75. En las fórmulas (9.527), (9.531) — (9.535) los límites de integración para las derivadas F^{q_i} y $\dot{F}^{q_i}$ se determinan partiendo de las condiciones de que la región de influencia de las fuentes sobre cierto punto D (x_1, z_1) de la superficie del ala se encuentra dentro del cono inverso característico trazado desde el punto que examinamos (fig. 9.27).

Representemos (9.527) en la forma siguiente:

$$F^{\alpha} = [1/(2\pi)]\int_{r_C}^{r_D} dr/\sqrt{r_1 - r}\int_{s_F}^{s_B} ds/\sqrt{s_1 - s}.$$

Como los límites $s_F = -r$; $s_B = s_D = s_1$; $r_D = r_1$; $r_C = -s_1$, $\int\limits_{s_F}^{s_B} ds/\sqrt{s_1 - s} =$ $= 2\sqrt{s_1 + r}$ y

$$F^{\alpha} = (1/2)\,(r_1 + s_1) = \xi_{M1}. \tag{9.540}$$

9.76. Para resolver el problema utilicemos las ecuaciones (9.541) para las derivadas φ^{q_j} y $\dot{\varphi}^{q_j}$. Las deflexiones del flujo $|\partial\varphi^{q_j}/\partial\eta_M|_{\eta_M=0}$ y $|\partial\dot{\varphi}^{q_j}/\partial\eta_M|_{\eta_M=0}$,

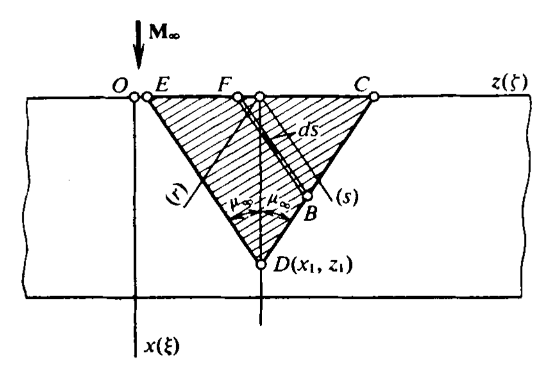


Fig. 9.27. Esquema para el cálculo de la circulación no estacionaria alrededor de un ala rectangular de envergadura infinita

que entran en ellas, se determinan para las condiciones en el ala en la que está situada la región de influencia de las fuentes [sector entre el borde de ataque y el cono inverso de Mach con su vértice en el punto D (x_1, z_1) que examinamos; (fig. 9.27)].

De acuerdo con (9.499)

$$|\partial\varphi^{\alpha}/\partial\eta_M|_{\eta_M=0} = -1;\quad |\partial\varphi^{\omega_x}/\partial\eta_M|_{\eta_M=0} = -\zeta_{M1};\quad |\partial\varphi^{\omega_z}/\partial\eta_M|_{\eta_M=0} = -\alpha'\xi_{M1};$$

$$|\partial\dot{\varphi}^{\bar{\alpha}}/\partial\eta_M|_{\eta_M=1} = |\partial\dot{\varphi}^{\omega_x}/\partial\eta_M|_{\eta_M=0} = |\partial\dot{\varphi}^{\omega_z}/\partial\eta_M|_{\eta_M=0} = 0.$$

Después de ponerlas en (9.511), obtenemos

$$\left.\begin{aligned}
\varphi^{\alpha} &= \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\sigma}\frac{1}{\bar{r}_M}\,d\xi_M\,d\zeta_M; & \dot{\varphi}^{\bar{\alpha}} &= -\frac{M_\infty^2}{\pi\alpha'}\iint\limits_{\sigma}\frac{1}{\bar{r}_M}\,\Delta\xi_M\,d\xi_M\,d\zeta_M;\\
\varphi^{\omega_x} &= \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\sigma}\frac{\zeta_M}{\bar{r}_M}\,d\xi_M\,d\zeta_M; & \dot{\varphi}^{\omega_x} &= -\frac{M_\infty^2}{\pi\alpha'}\iint\limits_{\sigma}\frac{1}{\bar{r}_M}\,\Delta\xi_M\zeta_M\,d\xi_M\,d\zeta_M;\\
\varphi^{\omega_z} &= \frac{\alpha'}{\pi}\iint\limits_{\sigma}\frac{1}{\bar{r}_M}\,\xi_M\,d\xi_M\,d\zeta_M; & \dot{\varphi}^{\omega_z} &= -\frac{M_\infty^2}{\pi}\iint\limits_{\sigma}\frac{1}{\bar{r}_M}\,\Delta\xi_M\xi_M\,d\xi_M\,d\zeta_M,
\end{aligned}\right\} \tag{9.541}$$

donde

$$\Delta\xi_M = \xi_{M1} - \xi_M;\quad \bar{r}_M = \sqrt{(\xi_{M1} - \xi_M)^2 - (\zeta_{M1} - \zeta_M)^2}.$$

Introducimos las nuevas variables t y θ en correspondencia con las dependencias $t = \xi_{M1} - \xi_M$; $\zeta_{M1} - \zeta_M = (\zeta_{M1} - \xi_M)\cos\theta = t\cos\theta$.

Hallamos

$$\bar{r}_M = \sqrt{t^2 - t^2\cos^2\theta} = t\,\text{sen}\,\theta; \quad d\xi_M = -dt; \quad d\zeta_M = t\,\text{sen}\,\theta\,d\theta.$$

Llevamos a cabo la integración por t de 0 a ξ_{M1} (desde el punto que examinamos hasta el borde de ataque). Los límites por θ se han determinado partiendo de la condición de que la región de integración se encuentra entre el cono inverso de Mach y el borde de ataque (fig. 9.27). Para el segmento DC, que por la derecha limita dicha región

$$\zeta - \zeta_1 = (\xi_1 - \xi)\,\text{tg}\,\mu_\infty; \quad \zeta_M = \zeta_{M1} + (\xi_{M1} - \xi_M).$$

Para el segmento izquierdo DF

$$\zeta_1 - \zeta = (\xi_1 - \xi)\,\text{tg}\,\mu_\infty; \quad \zeta_M = \zeta_{M1} - (\xi_{M1} - \xi_M).$$

Conforme a estos datos

$$\cos\theta = (\zeta_{M1} - \zeta_M)/(\xi_{M1} - \xi_M) = -1 \text{ (límite superior } \theta = \pi);$$
$$\cos\theta = (\zeta_{M1} - \zeta_M)/(\xi_{M1} - \xi_M) = 1 \text{ (límite inferior } \theta = 0).$$

Determinamos las derivadas: $\varphi^\alpha = \xi_{M1}$; $\varphi^{\omega_x} = \zeta_{M1}\xi_{M1}$; $\varphi^{\omega_z} = \alpha'\xi_{M1}^2/2$; $\varphi^{\dot{\alpha}} = -M_\infty^2\xi_{M1}^2/(2\alpha')$; $\varphi^{\dot{\omega}_x} = -0{,}5M_\infty^2\zeta_{M1}\xi_{M1}^2/\alpha'$; $\varphi^{\dot{\omega}_z} = -M_\infty^2\xi_{M1}^3/6$.

Comparando las expresiones obtenidas advertimos que

$$\varphi^\alpha(\xi_M, \zeta_M) = (1/\alpha')\,\partial\varphi^{\omega_z}/\partial\xi_M; \quad \varphi^{\dot{\alpha}}(\xi_M, \zeta_M) = (1/\alpha')\,\partial\varphi^{\dot{\omega}_z}/\partial\xi_M.$$

9.77. En las fórmulas (9.541) la región de integración es la parte de la superficie del ala situada dentro del cono inverso característico con su vértice en el punto

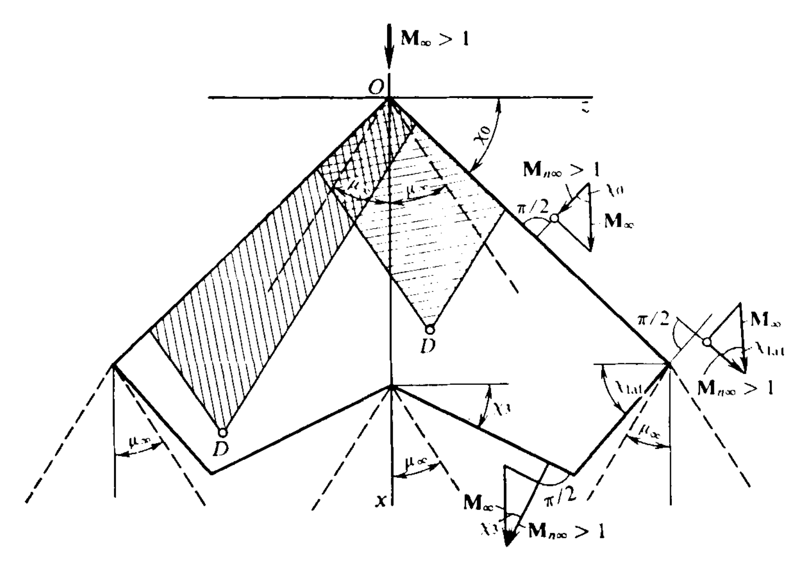


Fig. 9.28. Ala con bordes supersónicos

que examinamos D (fig. 9.28). En correspondencia con esto, los bordes de ataque y de salida de ella son supersónicos y semejante ala no tiene efecto de borde, es decir, los bordes laterales son también supersónicos (las componentes normales

a estos bordes de la velocidad son mayores que la velocidad del sonido, o sea, $M_{n\infty} > 1$).

El borde de ataque es supersónico (la línea de Mach pasa por el ala) a condición de que $\operatorname{tg}\chi_0 < \operatorname{tg}(\pi/2 - \mu_\infty) = \alpha'$, es decir, con $\alpha' > \operatorname{tg}\chi_0$.

Cuando el borde de salida es supersónico (las líneas de Mach pasan fuera del ala a partir de la cuerda de raíz) $\operatorname{tg}\chi_{sal} < \operatorname{tg}(\pi/2 - \mu_\infty) = \alpha'$, de donde se deduce que $\alpha' > \operatorname{tg}\chi_{sal}$.

Para el borde lateral supersónico (no hay efecto de borde; la línea de Mach pasa tras los límites del ala a partir del comienzo del borde) $\operatorname{tg}\chi_{lat} < \operatorname{tg}(\pi/2 - \mu_\infty) = \alpha'$, o sea, en este caso $\alpha' > \operatorname{tg}\chi_{lat}$.

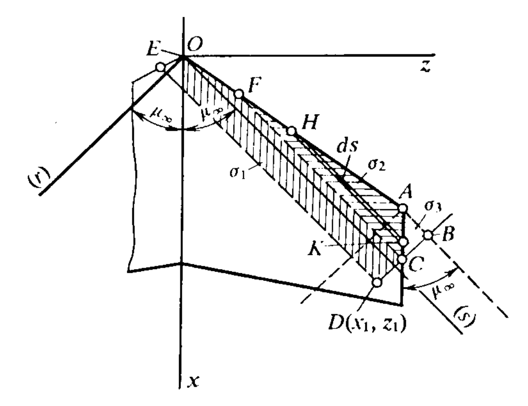


Fig. 9.29. Esquema de la influencia de los bordes laterales sobre la circulación alrededor del ala

9.78. El punto D que examinamos está situado como se muestra en la fig. 9.29. Con el fin de determinar en él la derivada de la función potencial hacemos uso, en particular, de la expresión (9.517) para F^{qj}. La región de integración coincide con el sector de la superficie $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = OEDBA$, con la singularidad de que en el sector del ala $\sigma_1 + \sigma_2 = OEDCA$ la deflexión del flujo (función $D_j^{(1,2)}$) es conocida, mientras que en la zona $\sigma_3 = ACB$, fuera del ala junto al borde lateral, la deflexión $D_j^{(3)}$ ha de determinarse. Para la región de integración que examinamos

$$F^{qj} = -\frac{1}{2\pi}\iint_{\sigma_1} D_j^{(1,2)} \frac{dr\,ds}{\sqrt{r_D - r)(s_D - s)}} - \frac{1}{2\pi}\iint_{\sigma_2} D_j^{(1,2)} \frac{dr\,ds}{\sqrt{r_D - r)(s_D - s)}} - \\ -\frac{1}{2\pi}\iint_{\sigma_3} D_j^{(3)} \frac{dr\,ds}{\sqrt{r_D - r)(s_D - s)}}. \qquad (9.542)$$

Examinemos el punto C en el sector entre la línea de Mach, que sale del punto delantero del borde lateral, y el propio borde. En virtud de la condición de frontera en ese punto el potencial de velocidad es nulo y, por lo tanto,

$$-\frac{1}{2\pi}\iint_{\sigma_2} D_j^{(1,2)} \frac{dr\,ds}{\sqrt{(r_C - r)(s_C - s)}} - \frac{1}{2\pi}\iint_{\sigma_3} D_j^{(3)} \frac{dr\,ds}{\sqrt{(r_C - r)(s_C - s)}} = 0. \qquad (9.543)$$

De la fig. 9.29 se desprende que la coordenada $s_C = s_D$. Por ello,

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{r_C}^{r_B} \frac{1}{\sqrt{r_C - r}} \left(\int_{s_H}^{s_K} \frac{D_j^{(1,2)}\,ds}{\sqrt{s_D - s}} + \int_{s_K}^{s_D} \frac{D_j^{(3)}\,ds}{\sqrt{s_D - s}} \right) dr = 0. \qquad (9.544)$$

La ecuación integral (9.544) es una ecuación de Abel de la forma

$$\int_a^{r'} \varphi(r)\,dr/\sqrt{r' - r} = f(r'),$$

en la que el segundo miembro $f(r') = 0$. Como es sabido, para $f(r') = 0$ la ecuación (9.544) sólo tiene solución nula, es decir,

$$\int_{s_H}^{s_K} D_j^{(1,\,2)}\, ds/\sqrt{s_D - s} = -\int_{s_K}^{s_D} D_j^{(3)}\, ds/\sqrt{s_D - s}. \tag{9.545}$$

Reduzcamos (9.542) a la siguiente forma:

$$F^{qj} = -\frac{1}{2\pi}\iint_{\sigma_1} D_j^{(1,\,2)} \frac{dr\, ds}{\sqrt{(r_D - r)(s_D - s)}} - \frac{1}{2\pi}\int_{r_C}^{r_B} \frac{1}{\sqrt{r_C - r}} \times$$
$$\times \left(\int_{s_H}^{s_K} \frac{D_j^{(1,\,2)}\, ds}{\sqrt{s_D - s}} + \int_{s_K}^{s_D} \frac{D_j^{(3)}\, ds}{\sqrt{s_D - s}} \right). \tag{9.546}$$

De acuerdo con (9.545) el polinomio entre los paréntesis de la expresión (9.546) es igual a cero, por esta razón

$$F^{qj} = -\frac{1}{2\pi}\iint_{\sigma_1} D_j^{(1,\,2)}\, dr\, ds/\sqrt{(r_D - r)(s_D - s)}.$$

De esta ecuación se deduce que el influjo sumario sobre el punto D de las fuentes, situadas fuera del ala (σ_3) y en parte de su superficie (σ_2), es igual a cero. Así,

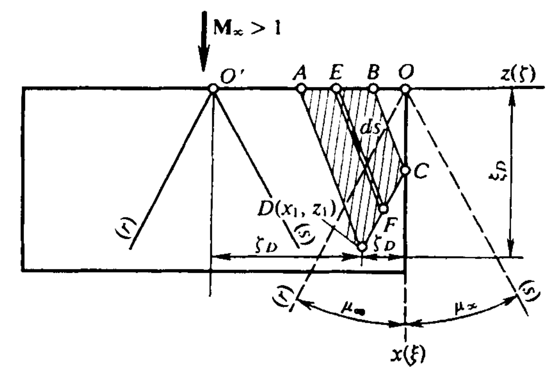


Fig. 9.30. Esquema de circulación alrededor de un ala rectangular con borde lateral subsónico

pues, para determinar la derivada de la función potencial, cuando el borde lateral es subsónico (es decir, tomando en consideración el efecto de borde que consiste en el derrame del gas desde el lado inferior de la superficie al superior), el ámbito de integración se debe difundir al sector $OEDCF$ del ala, excluyendo las zonas de influencia de las fuentes $\sigma_3 = ABC$ tras sus límites (junto al borde lateral) y $\sigma_2 = FCA$ en la propia ala.

9.79. En correspondencia con el planteamiento del problema, hallamos las derivadas:

$$F^{\alpha} = \frac{1}{2\pi}\iint_{\sigma} \frac{dr\, ds}{\sqrt{(r_1 - r)(s_1 - s)}}; \quad F^{\omega_z} = \frac{\alpha'}{4\pi}\iint_{\sigma} \frac{(r+s)\, dr\, ds}{\sqrt{(r_1 - r)(s_1 - s)}}. \tag{9.547}$$

La región de integración σ (influencia de las fuentes sobre el punto D) ocupa el sector $ABCD$ del ala (fig. 9.30). Conforme a esto

$$F^{\alpha} = [1/(2\pi)] \int_{r_C}^{r_D} dr/\sqrt{r_1 - r} \int_{s_E}^{s_F} ds/\sqrt{s_1 - s}.$$

Para los límites tenemos: $s_E = -r$; $s_F = s_D = s_1$; $r_C = s_1$; $r_D = r_1$. Integramos:

$$F^{\alpha} = (1/\pi) [\sqrt{2(r_1 - s_1) s_1} + (r_1 + s_1) \operatorname{arctg} \sqrt{(r_1 - s_1)/(2s_1)}]. \tag{9.548}$$

Como $r_1 - s_1 = -2\zeta_{M1}$, $s_1 = \xi_{M1} + \zeta_{M1}$, $r_1 + s_1 = 2\xi_{M1}$,

$$F^{\alpha} = (2/\pi) [\sqrt{-(\xi_{M1} + \zeta_{M1}) \zeta_{M1}} + \xi_{M1} \operatorname{arctg} \sqrt{-\zeta_{M1}/(\xi_{M1} + \zeta_{M1})}]. \tag{9.549}$$

Aquí, la coordenada ξ_{M1} se toma con signo negativo. La derivada F^{ω_z} se calcula mediante (9.537). Teniendo en cuenta los nuevos límites

$$F^{\omega_z} = \frac{\alpha'}{4\pi} \Bigg(\underbrace{\int_{s_1}^{r_1} \frac{r\, dr}{\sqrt{r_1 - r}} \int_{-r}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{s_1 - s}}}_{F} + \underbrace{\int_{s_1}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{r_1 - r}} \int_{-r}^{s_1} \frac{s\, ds}{\sqrt{s_1 - s}}}_{B} \Bigg). \tag{9.950}$$

Hallamos las integrales:

$$\int_{-r}^{s_1} ds/\sqrt{s_1 - s} = 2\sqrt{s_1 + r}; \quad \int_{-r}^{s_1} s\, ds/(s_1 - s) = (2/3)(-r + 2s_1)\sqrt{s_1 + r};$$

$$E = 2 \int_{s_1}^{r_1} r \sqrt{s_1 + r}/\sqrt{r_1 - r}\, dr; \tag{9.551}$$

$$B = (1/3) \left[-E + 4s_1 \int_{s_1}^{r_1} (\sqrt{s_1 + r}/\sqrt{r_1 - r})\, dr \right]; \tag{9.552}$$

$$\frac{4s_1}{3} \int_{s_1}^{r_1} \frac{\sqrt{s_1 + r}}{\sqrt{r_1 - r}}\, dr =$$

$$= \frac{4s_1}{3} \left[\sqrt{2(r_1 - s_1)}\, s_1 + (r_1 + s_1) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r_1 - s_1}{2s_1}} \right] = C; \quad B = -E/3 + C. \tag{9.553}$$

De este modo,

$$F^{\omega_z} = [\alpha'/(4\pi)]\ (E + B) = [\alpha'/(4\pi)]\ (2E/3 + C). \tag{9.554}$$

Calculamos:

$\xi_{M1} = x_1/(b_0\alpha') = 0{,}4472$; $\zeta_{M1} = z_1/b_0 = -0{,}3$; $s_1 = \xi_{M1} + \zeta_{M1} = 0{,}1472$; $r_1 = \xi_{M1} - \zeta_{M1} = 0{,}7472$; $F^{\alpha} = 0{,}4072$.

Dividamos el intervalo $r_1 - s_1 = 0{,}6$ en $\bar{r} = 10$ sectores de una anchura $h = (r_1 - s_1)/\bar{r} = 0{,}06$. En cada uno de los sectores determinamos las funciones subintegrales y, como resultado de la integración numérica, hallamos $E = 1{,}343$.

A continuación, hallamos $C = 0{,}251$ y calculamos $F^{\omega_z} = 0{,}102$.

9.80. En correspondencia con (9.517) y (9.527), (9.531)—(9.535) las derivadas F^{qj} y $\dot{F}^{qj}$ tienen la forma

$$F^{qj} = -\frac{1}{2\pi}\iint_{\sigma} D_j \frac{dr\,ds}{\sqrt{(r_1-r)(s_1-s)}}; \quad D_1 = -1; \quad D_2 = 0{,}5\,(r-s);$$

$$D_3 = -0{,}5\alpha'\,(r+s); \tag{9.555}$$

$$\dot{F}^{qj} = -\frac{1}{2\pi}\iint_{\sigma} E_j \frac{dr\,ds}{\sqrt{(r_1-r)(s_1-s)}}; \quad E_1 = -0{,}5\mathrm{M}_\infty^2\,(r+s)/\alpha';$$

$$E_2 = [\mathrm{M}_\infty^2/(4\alpha')]\,(r^2-s^2); \quad E_3 = -(\mathrm{M}_\infty^2/4)\,(r^2+s^2). \tag{9.556}$$

En la fig. 9.31 las áreas destacadas $I \ldots VIII$ son los sectores característicos para los que en el punto A se hallan las derivadas F^{qj} y $\dot{F}^{qj}$. Más adelante vamos a considerar las derivadas F^{qj}, teniendo en cuenta que los valores de $\dot{F}^{qj}$ se calculan de forma análoga.

El ámbito de integración σ_1 en la fig. 9.31, *a* ocupa el área AOC. De arreglo con esto

$$F^{qj} = -\frac{1}{2\pi}\int_{r_C}^{r_A} \frac{1}{\sqrt{r_1-r}}\left(\int_{s_{B'}}^{s_{C'}} D_j \frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}\right) dr,$$

donde los límites $s_{B'} = r\,(1+\operatorname{ctg}\chi_0\alpha')/(1-\operatorname{ctg}\chi_0\alpha') = r/a$; $s_{C'} = s_A = s_1$; $r_C = s_1 a$; $r_A = r_1$.

Para el sector II (fig. 9.31, *b*) la región de integración $\sigma_1 + \sigma_2$ se encuentra en el área $OKK'' + OK''AL$, por lo que

$$F^{qj} = -\frac{1}{2\pi}\int_{r_K}^{r_{K''}} \frac{1}{\sqrt{r_1-r}}\left(\int_{s_{K_0}}^{s_{K'}} \frac{D_j\,ds}{\sqrt{s_1-s}}\right) dr -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{r_{K''}}^{r_A} \frac{1}{\sqrt{r_1-r}}\left(\int_{s_{L'}}^{s_{A'}} \frac{D_j\,ds}{\sqrt{s_1-s}}\right) dr; \tag{9.557}$$

$$s_{K_0} = r\,(1+\operatorname{ctg}\chi_0\alpha')/(1-\operatorname{ctg}\chi_0\alpha') = r/a;$$

$$s_{K'} = s_A = s_1; \quad r_K = s_1 a; \quad r_{K''} = 0; \quad s_{L'} = ra;$$

$$s_{A'} = s_A = s_1; \quad r_{K''} = 0; \quad r_A = r_1.$$

Para el sector III, mostrado en la fig. 9.31, *c*, la región de integración σ_1 se determina con el área $DD_2A'A$. En virtud de esto

$$F^{qj} = -\frac{1}{2\pi}\int_{r_{A'}}^{r_A} \frac{1}{\sqrt{r_1-r}}\left(\int_{s_{D_1}}^{s_{D_3}} \frac{D_j\,ds}{\sqrt{s_1-s}}\right) dr; \tag{9.558}$$

$$s_{D_1} = r\,(1+\operatorname{ctg}\chi_0\alpha')/(1-\operatorname{ctg}\chi_0\alpha') = r/a;$$

$$s_{D_3} = s_A = s_1; \quad r_{A'} = s_1 - l/b_0; \quad r_A = r_1.$$

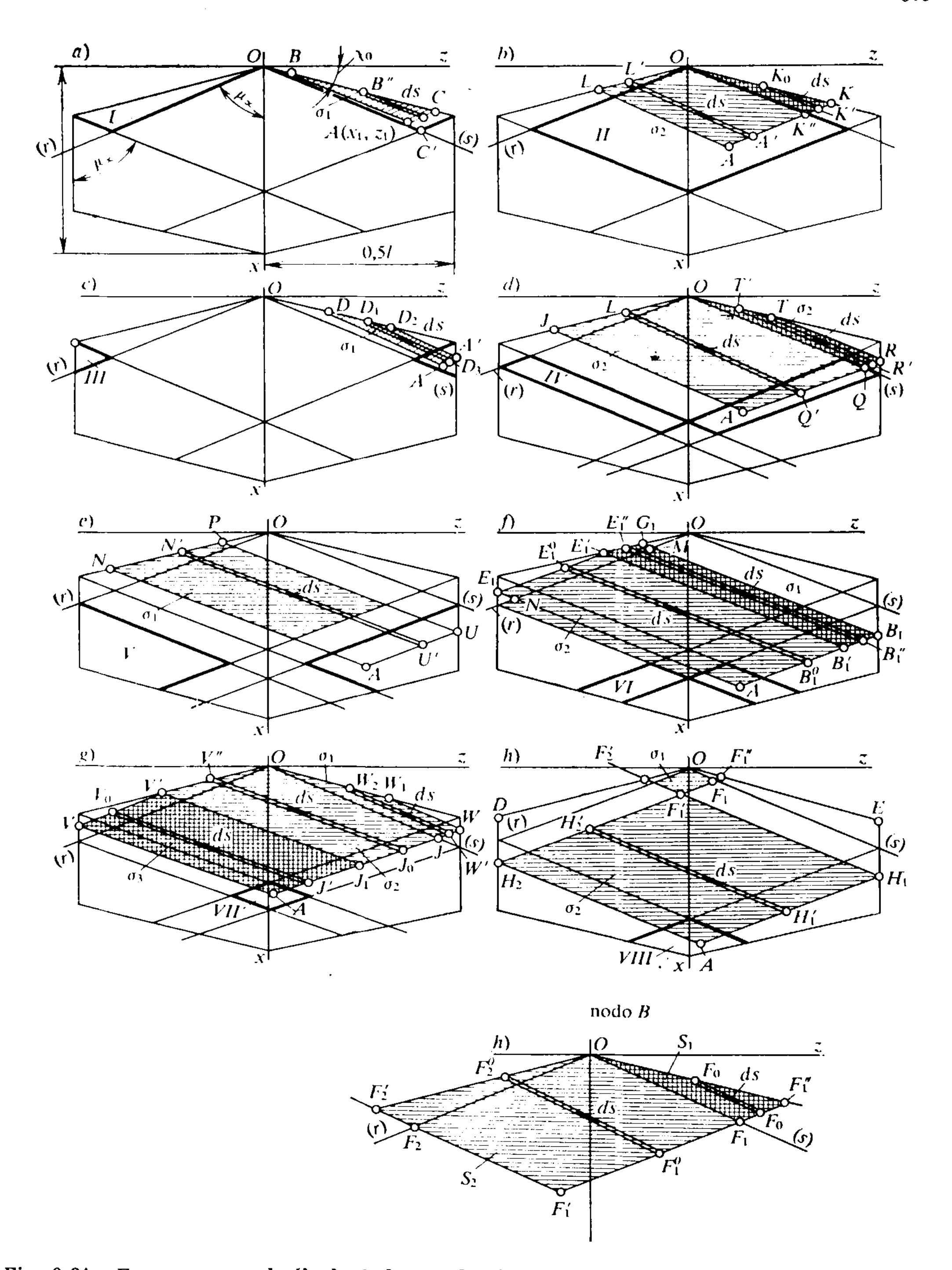


Fig. 9.31. Esquema para el cálculo de la circulación no estacionaria alrededor de un ala hexagonal

En la fig. 9.31, *d* se muestra el sector *IV* para el que la región de integración $\sigma_1 + \sigma_2$ se encuentra en las áreas *OTRQ* y *OQAJ*. Teniendo esto en cuenta

$$F^{qj} = -\frac{1}{2\pi}\int_{r_R}^{r_A}\frac{1}{\sqrt{r_1-r}}\left(\int_{s_{T'}}^{s_{R'}}\frac{D_j\,ds}{\sqrt{s_1-s}}\right)dr -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{r_Q}^{r_A}\frac{1}{\sqrt{r_1-r}}\left(\int_{s_L}^{s_{Q'}}\frac{D_j\,ds}{\sqrt{s_1-s}}\right)dr; \tag{9.559}$$

$$s_{T'} = r\,(1+\text{ctg}\,\chi_0\alpha')/(1-\text{ctg}\,\chi_0\alpha') = r/a;$$
$$s_{R'} = s_A = s_1;\quad r_R = s_1 - l/b_0;\quad s_L = ra;$$
$$s_{Q'} = s_A = s_1;\quad r_Q = 0;\quad r_A = r_1.$$

El sector *V* del ala está representado en la fig. 9.31, *e*. La correspondiente región de integración σ_1 para el punto *A* se determina con el área *PUAN*; así, pues,

$$F^{qj} = -\frac{1}{2\pi}\int_{r_V}^{r_A}\frac{1}{\sqrt{r_1-r}}\left(\int_{s_{N'}}^{s_{V'}}\frac{D_j\,ds}{\sqrt{s_1-s}}\right)dr; \tag{9.560}$$

$$s_{N'} = r\,(1-\text{ctg}\,\chi_0\alpha')/(1+\text{ctg}\,\chi_0\alpha') = ra;$$
$$s_{V'} = s_A = s_1;\quad r_V = s_1 - l/b_0;\quad r_A = r_1.$$

Examinemos la fig. 9.31, *f* (sector *VI*). Aquí, para el punto *A* la región de integración $\sigma_1 + \sigma_2$ ocupa el área $G_1B_1B_1^1E_1^1 + E_1^1B_1^1AE_1$. De acuerdo con esto

$$F^{qj} = -\frac{1}{2\pi}\int_{r_{B_1}}^{r_{B_1'}}\frac{1}{\sqrt{r_1-r}}\left(\int_{s_{E_1''}}^{s_{B_1''}}\frac{1}{\sqrt{s_1-s}}\right)dr -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{r_{B_1'}}^{r_A}\frac{1}{\sqrt{r_1-r}}\left(\int_{s_{E_1^0}}^{s_{B_1^0}}\frac{D_j\,ds}{\sqrt{s_1-s}}\right)dr; \tag{9.561}$$

$$s_{E_1''} = r\,(1-\text{ctg}\,\chi_0\alpha')/(1+\text{ctg}\,\chi_0\alpha') = ra;\quad s_{B_1''} = s_A = s_1;$$
$$r_{B_1} = s_1 - l/b_0;\quad r_{B_1'} = (r_1 - l/b_0)/a;\quad s_{E_1^0} = r_1 - l/b_0;$$
$$s_{B_1^0} = s_A = s_1;\quad r_A = r_1.$$

Al sector *VII* en la fig. 9.31, *g* le corresponde la región de integración $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ que se extiende por el área $OW_1WJ + OJJ_1V' + V'\,J_1AV$. Tomando esto en consideración

$$F^{qj} = -\frac{1}{2\pi}\int_{r_W}^{r_J}\frac{1}{\sqrt{r_1-r}}\left(\int_{s_{W_2}}^{s_{W'}}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}\right)dr - \frac{1}{2\pi}\int_{r_J}^{r_{J_1}}\frac{1}{\sqrt{r_1-r}}\times$$

$$\times\left(\int_{s_{V''}}^{s_{J_0}}\frac{D_j\,ds}{\sqrt{s_1-s}}\right)dr - \frac{1}{2\pi}\int_{r_{J_1}}^{r_A}\frac{1}{\sqrt{r_1-r}}\left(\int_{s_{V_0}}^{s_{J'}}\frac{D_j\,ds}{\sqrt{s_1-s}}\right)dr; \tag{9.562}$$

$$s_{W_2} = r\,(1+\text{ctg}\,\chi_0\alpha')/(1-\text{ctg}\,\chi_0\alpha') = r/a;\quad s_{W'} = s_A = s_1;$$
$$r_W = s_1 - l/b_0;\quad s_{V''} = ra;\quad s_{J0} = s_A = s_1;\quad r_J = 0;$$
$$r_{J1} = (r_1 - l/b_0)/a;\quad s_{V_0} = r_1 - l/b_0;\quad s_{J'} = s_A = s_1;\quad r_A = r_1.$$

Pasemos a analizar el último sector, el *VIII* (fig. 9.31, *h*), al que corresponde la región de integración $\sigma_1 + \sigma_2$, que ocupa las áreas $OF_1'''F_1^1F_2^1$ y $F_1'H_1AH_2$, con la particularidad de que esta integral debe tomarse por la región σ_1 con signo inverso, ya que ella se sobrecubre dos veces con los sectores de las áreas OEH_1F_2' y ODH_2F_1''. Conforme a esto

$$F^{qj} = -\frac{1}{2\pi}\int_{r_{H_1}}^{r_A}\frac{1}{\sqrt{r_1-r}}\left(\int_{s_{H_2'}}^{s_{H_1'}}\frac{D_j\,ds}{\sqrt{s_1-s}}\right)dr + \frac{1}{2\pi}\int_{r_{F_1''}}^{r_{F_1}}\frac{1}{\sqrt{r_1-r}}\times$$

$$\times\left(\int_{s_{F_0''}}^{s_{F_0}}\frac{D_j\,ds}{\sqrt{s_1-s}}\right)dr + \frac{1}{2\pi}\int_{r_{F_1}}^{r_{F_1'}}\frac{1}{\sqrt{r_1-r}}\left(\int_{s_{F_2^0}}^{s_{F_1^0}}\frac{D_j\,ds}{\sqrt{s_1-s}}\right)dr; \quad (9.563)$$

$$s_{H_2'} = r_1 - l/b_0; \quad s_{H_1'} = s_A = s_1; \quad r_{H_1} = s_1 - l/b_0; \quad r_A = r_1;$$
$$s_{F_0''} = r\,(1+\operatorname{ctg}\chi_0\alpha')/(1-\operatorname{ctg}\chi_0\alpha') = r/a; \quad s_{F_0} = r_1 - l/b_0;$$
$$r_{F_1''} = (r_1 - l/b_0)\,a; \quad r_{F_1} = 0; \quad s_{F_2^0} = r\,(1-\operatorname{ctg}\chi_0\alpha')/(1+\operatorname{ctg}\chi_0\alpha') = ra;$$
$$s_{F_1^0} = r_1 - l/b_0; \quad r_{F_1'} = s_1 - l/b_0.$$

9.81. En la fig. 9.32 se muestran los esquemas de la circulación supersónica alrededor de un ala rectangular y las correspondientes regiones de integración

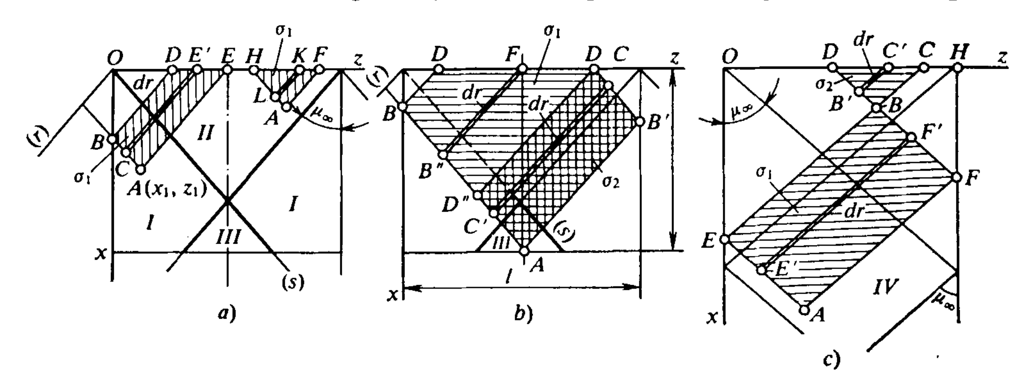


Fig. 9.32. Esquema de la circulación supersónica de un ala rectangular

para cuatro sectores de la superficie, en los que se sitúa el punto prefijado A (x_1, z_1). Obtengamos las expresiones generales para las derivadas F^{qj} (9.555) y $\dot{F}^{qj}$ (9.556) en dicho punto. Además, nos limitaremos a examinar la derivada F^{qj}, ya que $\dot{F}^{qj}$, se calcula de manera análoga. Para el punto A, que yace en el sector I (fig. 9.32, *a*), la región de integración σ_1 está situada en el área $BDEA$, por lo que

$$F^{qj} = -\frac{1}{2\pi}\int_{s_B}^{s_A}\frac{1}{\sqrt{s_1-s}}\left(\int_{r_{E'}}^{r_C}\frac{D_j\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\right)ds. \quad (9.564)$$

Aquí los límites $r_{E'} = -s$; $r_C = r_A = r_1$; $s_B = r_B = r_A = r_1$; $s_A = s_1$.

En el sector II la región de integración para el punto A yace en el área $\sigma_1 = HFA$; por lo tanto

$$F^{qj} = -\frac{1}{2\pi}\int_{s_H}^{s_A} \frac{1}{\sqrt{s_1-s}} \left(\int_{r_K}^{r_L} \frac{D_j\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\right) ds; \quad (9.565)$$

$$r_K = -s;\quad r_L = r_A = r_1;\quad s_H = -r_H = -r_1;\quad s_A = s_1.$$

Para el punto A, situado en el sector III (fig. 9.32, b), el ámbito de integración $\sigma_1 + \sigma_2$ se dispone en el área $DD'D''B + D'B'AD''$, por lo que

$$F^{qj} = -\frac{1}{2\pi}\int_{s_B}^{s_{D''}} \frac{1}{\sqrt{s_1-s}} \left(\int_{r_F}^{r_{B''}} \frac{D_j\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\right) ds - \frac{1}{2\pi}\int_{s_{D''}}^{s_A} \frac{1}{\sqrt{s_1-s}} \left(\int_{r_C}^{r_{C'}} \frac{D_j\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\right) ds; \quad (9.566)$$

$$r_F = -s;\quad r_{B''} = r_A = r_1;\quad s_B = r_B = r_A = r_1;$$

$$s_{D''} = -s_1 + 2\,l/b_0;\quad r_C = s_1 - 2\,l/b_0;\quad r_{C'} = r_A = r_1;\quad s_A = s_1.$$

El punto A en el sector IV (fig. 9.32, c) está situado de tal modo que las zonas HFD y OCE sobrecubren dos veces la región del ala $\sigma_2 = DCB$, por lo que la inte-

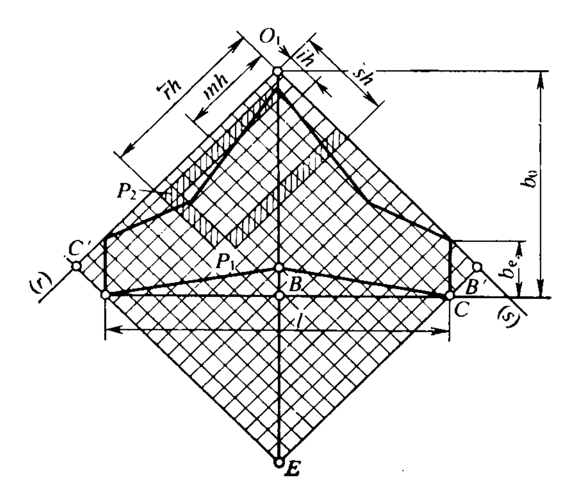


Fig. 9.33. Esquema para el cálculo de la circulación inuniforme alrededor de un ala con diferentes bordes:

gral por este ámbito se calcula con signo contrario. Así, pues,

$$F^{qj} = -\frac{1}{2\pi}\int_{s_E}^{s_A} \frac{1}{\sqrt{s_1-s}} \left(\int_{r_{F'}}^{r_{E'}} \frac{D_j\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\right) ds + \frac{1}{2\pi}\int_{s_D}^{s_B} \frac{1}{\sqrt{s_1-s}} \left(\int_{r_{C'}}^{r_{B'}} \frac{D_j\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\right) ds; \quad (9.567)$$

$$r_{F'} = s_1 - 2\,l/b_0;\quad r_{E'} = r_A = r_1;\quad s_E = r_1 + 2\,l/b_0;\quad s_A = s_1;\ r_{C'} = -s;$$

$$r_{B'} = r_F = r_{F'} = s_1 - 2\,l/b_0;\quad s_D = -r_D = -r_{F'} = -s_1 + 2\,l/b_0;$$

$$s_B = s_E = r_1 + 2\,l/b_0.$$

9.82. Para realizar los cálculos numéricos dividamos la región de integración en células (fig. 9.33). Con este fin, dividimos la semienvergadura BC en N partes

y por los puntos de división trazamos rectas paralelas a los ejes r y s. Toda la región de integración se llena con las células obtenidas. La anchura de la mayor parte de las células cuadradas es la misma e igual a h (en el sentido de los ejes r y s). Por los bordes parte de las células tiene una anchura menor que h. Si más de la mitad de la célula se encuentra en el cuadrante $O_1B'EC'$, ésta se considera entera. Las coordenadas de los puntos B y C $s_B = \xi_B$ y $s_C = \xi_B + \zeta_B = \xi_C + \zeta_C$, respectivamente. En el sentido de s la longitud del segmento $s_C - s_B = \zeta_C = 0{,}5\ l/b_0$. Dividiéndolo en N partes obtenemos $(s_C - s_B)/N = h = 0{,}5\ l/(Nb_0)$.

Sean r y s las coordenadas de un punto fijado (punto P_1 en la fig. 9.33), en el que buscamos el potencial de velocidad o bien sus derivadas, en tanto que m y l, las coordenadas de los puntos corrientes por los que se efectúa la integración. De acuerdo con esto las coordenadas características

$$r_1 = \bar{r}h, \qquad r = mh, \quad s_1 = \bar{s}h, \quad s = ih. \tag{9.568}$$

Suponiendo que las deflexiones [funciones D_j y E_j (9.518)] en el interior de las células son variables, vamos a representar las ecuaciones (9.520) mediante la suma de las integrales por las células:

$$F^{qj}(r_1, 0, s_1) = -\frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\bar{r}} \sum_{i=1}^{\bar{s}} \overbrace{\int_{\sqrt{r_1 - mh}}^{\sqrt{r_1-(m-1)h}} \int_{\sqrt{s_1 - ih}}^{\sqrt{s_1-(i-1)h}} D_j\, dv\, du}^{A_i};$$

$$\dot{F}^{qj}(r_1, 0, s_1) = -\frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\bar{r}} \sum_{i=1}^{\bar{s}} \overbrace{\int_{\sqrt{r_1 - mh}}^{\sqrt{r_1-(m-1)h}} \int_{\sqrt{s_1 - ih}}^{\sqrt{s_1-(i-1)h}} E_j\, dv\, du}^{C_i}. \tag{9.569}$$

Las regiones de integración que contienen la proyección del ala en el plano $\eta = 0$, la banda vorticial, así como los sectores del flujo perturbado fuera del ala y de la banda vorticial, se sustituyen por un número suficientemente grande de células enteras. Con ello, obtenemos cierta ala convencional con bordes mellados (fig. 9.33). Es de suponer que la célula pertenece a cierto sector de integración si su punto medio se halla en este sector.

En el interior de la célula con área suficientemente pequeña las deflexiones $D_j = D_{jmi}$ y $E_j = E_{jmi}$ se pueden considerar constantes e iguales a sus valores en el punto medio de las células. En virtud de esto

$$A_i = D_{jmi}h \underbrace{[\sqrt{\bar{r}-(m-1)} - \sqrt{\bar{r}-m}]\,[\sqrt{\bar{s}-(i-1)} - \sqrt{\bar{s}-i}\,]}_{B_{\bar{r}m\bar{s}i}} = hD_{jmi}B_{\bar{r}m\bar{s}i}. \tag{9.570}$$

De modo análogo

$$C_i = hE_{jmi}B_{\bar{r}m\bar{s}i}. \tag{9.571}$$

Teniendo en cuenta las dependencias obtenidas

$$F^{q_j}(\bar{r}h,\ \bar{s}h) = -(2h/\pi)\sum_{m=1}^{\bar{r}}\sum_{i=1}^{\bar{s}} D_{jmi}B_{\bar{r}m\bar{s}i}; \tag{9.572}$$

$$\dot{F}^{q_j}(\bar{r}h,\ \bar{s}h) = -(2h/\pi)\sum_{m=1}^{\bar{r}}\sum_{i=1}^{\bar{s}} E_{jmi}B_{\bar{r}m\bar{s}i}, \tag{9.573}$$

donde $B_{\bar{r}m\bar{s}i}$ es un parámetro llamado *función de influencia.*

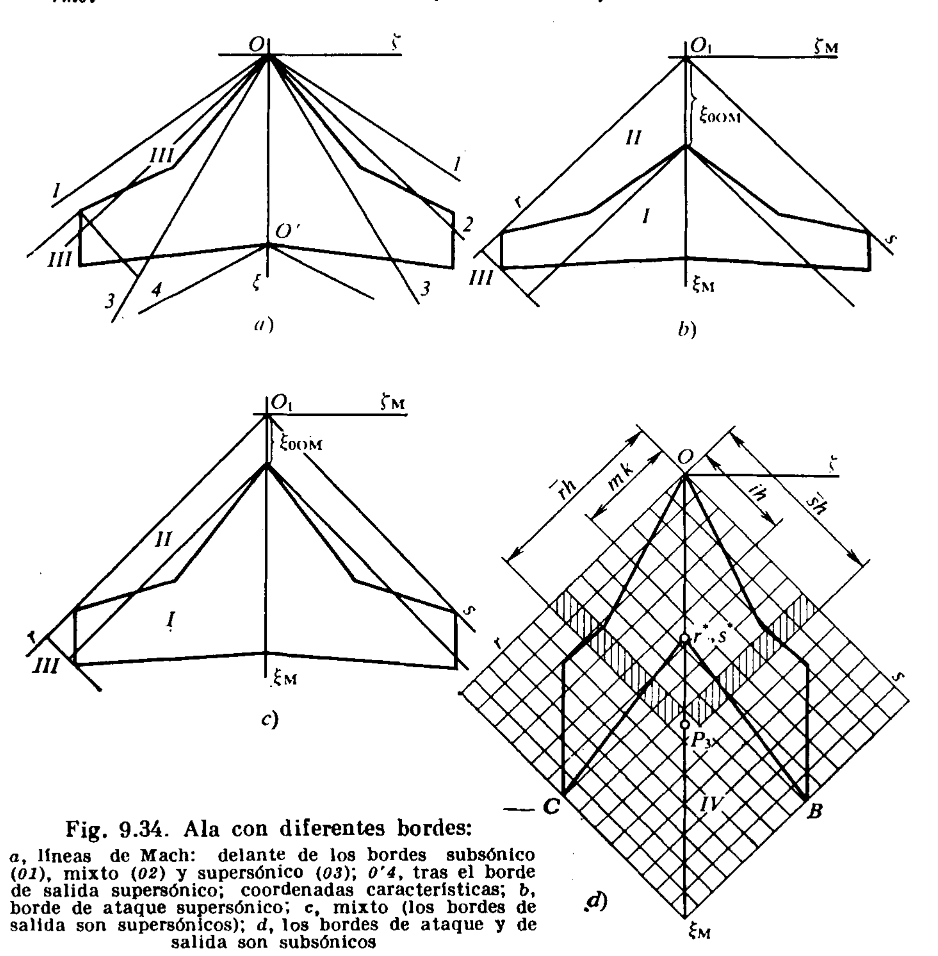


Fig. 9.34. Ala con diferentes bordes:

a, líneas de Mach: delante de los bordes subsónico (*01*), mixto (*02*) y supersónico (*03*); *0'4*, tras el borde de salida supersónico; coordenadas características; *b*, borde de ataque supersónico; *c*, mixto (los bordes de salida son supersónicos); *d*, los bordes de ataque y de salida son subsónicos

9.83. Analicemos un ala con borde de ataque supersónico (o mixto) y de salida supersónico (fig. 9.34). En el ala *las deflexiones* (sector *I* en la fig. 9.34, *b*) se determinan con las condiciones de frontera (9.499) conforme a las que (para $j = 1; 2; 3$)

$$\left.\begin{aligned} E_{1mi} &= D_{jmi} = |\,\partial\varphi^{\alpha}/\partial\eta\,|_{\eta=0} = |\,\partial F^{\alpha}/\partial\eta\,|_{\eta=0} = -1;\\ D_{2mi} &= |\,\partial\varphi^{\omega_x}/\partial\eta\,|_{\eta=0} = |\,\partial F^{\omega_x}/\partial\eta\,|_{\eta=0} = -\zeta = 0{,}5h/(m-i);\\ D_{3mi} &= |\,\partial\varphi^{\omega_z}/\partial\eta\,|_{\eta=0} = |\,\partial F^{\omega_z}/\partial\eta\,|_{\eta=0} = -\xi = -0{,}5\alpha' h\,(m+i-1) - \alpha'\xi_{00M}. \end{aligned}\right\} \tag{9.574}$$

En virtud de (9.499) en el ala las derivadas $\partial\varphi^{q_j}/\partial\eta = 0$. Por ello, con arreglo a (9.511)

$$\left.\begin{aligned} E_{1mi} &= |\,\partial F^{\dot{\alpha}}/\partial\eta\,|_{\eta=0} = -(M_\infty^2/\alpha')\,[0{,}5h\,(m+i-1)+\xi_{0\,\text{OM}}];\\ E_{2mi} &= |\,\partial F^{\dot{\omega}_x}/\partial\eta\,|_{\eta=0} = (0{,}5M_\infty^2 h/\alpha')\,[0{,}5h\,(m+i-1)+\xi_{0\,\text{OM}}]\,(m-i);\\ E_{3mi} &= |\,\partial F^{\dot{\omega}_z}/\partial\eta\,|_{\eta=0} = -M_\infty^2\,[0{,}5h\,(m+i-1)+\xi_{0\,\text{OM}}]^2. \end{aligned}\right\}\quad (9.575)$$

El sector II (fuera del ala), entre el eje característico y el borde de ataque (fig. 9.34, *b*) o bien entre los ejes característicos (fig. 9.34, *c*), está situado en la zona no perturbada, por lo que en él las deflexiones son nulas:

$$D_{jmi} = E_{jmi} = 0. \qquad (9.576)$$

Calculemos las deflexiones en las regiones perturbadas III, limitadas con las líneas de Mach, así como con los bordes de ataque y laterales (fig. 9.34, *a*, *b*, *c*, *d*). El potencial de velocidad en dichas regiones es una función continua e impar, respecto de la coordenada y; por lo tanto,

$$\varphi\,(x,\ 0,\ z,\ t) = 0 \qquad (9.577)$$

y en correspondencia con (9.511)

$$F^{q_j} = F^{\dot{q}_j} = 0. \qquad (9.578)$$

Por esta razón, las integrales dobles en las ecuaciones (9.517) son iguales a cero. Ellas pueden ser representadas en la forma

$$\int_0^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}\int_0^{r_1} D_j\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}} = 0;\quad \int_0^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}\int_0^{r_1} E_j\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}} = 0 \qquad (9.579)$$

o bien

$$\int_0^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_0^{s_1} D_j\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}} = 0\quad \int_0^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_0^{s_1} E_j\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}} = 0. \qquad (9.579')$$

Las igualdades (9.579) y (9.579′) son ecuaciones de Abel, cuyos segundos miembros son idénticamente iguales a cero. Por ello,

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{r_1} D_j\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}} &= \int_0^{r_1-h} D_j\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}} + \int_{r_1-h}^{r_1} D_j^{(\mathrm{III})}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}} = 0;\\ \int_0^{s_1} D_j\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}} &= \int_0^{s_1-h} D_j\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}} + \int_{s_1-h}^{s_1} D_j^{(\mathrm{III})}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}} = 0;\\ \int_0^{r_1} E_j\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}} &= \int_0^{r_1-h} E_j\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}} + \int_{r_1-h}^{r_1} E_j^{(\mathrm{III})}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}} = 0;\\ \int_0^{s_1} E_j\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}} &= \int_0^{s_1-h} E_j\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}} + \int_{s_1-h}^{s_1} E_j^{(\mathrm{III})}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}} = 0, \end{aligned}\right\}\quad (9.580)$$

donde $D_j^{(III)}$, $E_j^{(III)}$ son las deflexiones que buscamos en el punto (célula) con coordenadas $r_1 = \bar{r}h$, $s_1 = \bar{s}h$.

Tomándolas constantes en la célula, obtenemos

$$\int_{r_1-h}^{r_1} D_j^{(III)} \frac{dr}{\sqrt{r_1-r}} = D_j^{(III)} 2\sqrt{h}\,; \quad \int_{s_1-h}^{s_1} D_j^{(III)} \frac{ds}{\sqrt{s_1-s}} = D_j^{(III)} 2\sqrt{h}\,.$$

De forma análoga

$$\int_{r_1-h}^{r_1} E_j^{(III)} \frac{dr}{\sqrt{r_1-r}} = E_j^{(III)} 2\sqrt{h}\,; \quad \int_{s_1-h}^{s_1} E_j^{(III)} \frac{ds}{\sqrt{s_1-s}} = E_j^{(III)} 2\sqrt{h}\,.$$

Pasemos de las integrales a las sumas:

$$\int_0^{r_1-h} D_j \frac{dr}{\sqrt{r_1-r}} = -2\sqrt{h} \sum_{m=1}^{\bar{r}-1} D_j B_{\bar{r}m}, \tag{9.581}$$

donde

$$B_{\bar{r}m} = \sqrt{\bar{r}-m+1} - \sqrt{\bar{r}-m}. \tag{9.582}$$

Por analogía

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{s_1-h} D_j\, ds/\sqrt{s_1-s} = -2\sqrt{h} \sum_{i=1}^{\bar{s}-1} D_j B_{\bar{s}i};\\
&\int_0^{r_1-h} E_j\, dr/\sqrt{r_1-r} = -2\sqrt{h} \sum_{m=1}^{\bar{r}-1} E_j B_{\bar{r}m};\\
&\int_0^{s_1-h} E_j\, ds/\sqrt{s_1-s} = -2\sqrt{h} \sum_{i=1}^{\bar{s}-1} E_j B_{\bar{s}i};\\
&B_{\bar{s}i} = \sqrt{\bar{s}-i+1} - \sqrt{\bar{s}-i}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{9.583}$$

Teniendo en cuenta las expresiones obtenidas, reducimos las ecuaciones (9.580) a la forma

$$D_j(\bar{r}h, \bar{s}h) = -\sum_{m=1}^{\bar{r}-1} D_j B_{\bar{r}m}; \quad E_j(\bar{r}h, \bar{s}h) = -\sum_{m=1}^{\bar{r}-1} E_j B_{\bar{s}i}; \tag{9.584}$$

$$D_j(\bar{r}h, \bar{s}h) = -\sum_{i=1}^{\bar{s}-1} D_j B_{\bar{r}m}; \quad E_j(\bar{r}h, \bar{s}h) = -\sum_{i=1}^{\bar{s}-1} F_j B_{\bar{s}i}. \tag{9.585}$$

Las ecuaciones (9.584) se emplean para los puntos que yacen a la izquierda del eje ξ_M, en tanto que las ecuaciones (9.585), para los puntos situados a la derecha de ese eje.

De acuerdo con las dependencias aducidas, la deflexión del flujo en el punto P_2 $(\bar{r}h, \bar{s}h)$ se determina sumando los valores de las deflexiones en las células situadas en la banda i = const (a la izquierda del eje ξ_M véase la fig. 9.33) o bien en la banda m = const (a la derecha del eje ξ_M). El cálculo se realiza consecutiva-

mente comenzando por la célula en el vértice del ala, donde la deflexión es conocida [véase (9.574), (9.575)].

Pasemos a determinar las deflexiones en la banda vorticial en la zona IV tras el borde de salida subsónico (fig. 9.34, d). En dicha zona analicemos el punto P_3 $(\bar{r}h, \bar{s}h)$. En virtud de la condición (9.507) en el punto P_3 en la banda vorticial la derivada del potencial φ^{qj} es la misma que en el borde de salida, mientras que la otra derivada $\dot{\varphi}^{qj}$ se determina con la segunda expresión (9.507). Con las nuevas variables $\zeta_M = \zeta$, $\xi_M = \xi/\alpha'$, las condiciones (9.507) toman la forma

$$\left.\begin{aligned} &\varphi^{qj}(\xi_M, 0, \zeta_M) = \varphi^{qj}(\xi_M^*, 0, \zeta_M^*),\\ &\dot{\varphi}^{qj}(\xi_M, 0, \zeta_M) = \dot{\varphi}^{qj}(\xi_M^*, 0, \zeta_M^*) - \alpha'(\xi_M - \xi_M^*)\,\varphi^{qj}(\xi_M^*, 0, \zeta_M^*), \end{aligned}\right\} \quad (9.586)$$

donde ξ_M^*, $\zeta_M^* = \zeta_M$ son las coordenadas transformadas de los puntos del borde de salida.

Introduzcamos la función F [véase (9.511)] y las coordenadas características $r = \xi_M - \zeta_M$, $s = \xi_M + \zeta_M$.

Como los ejes de coordenadas pasan por el vértice del ala, en (9.514) la desviación $\xi_{0\,OM} = 0$. Tomando que para el punto P_3 las coordenadas son r_1, s_1, obtenemos

$$\left.\begin{aligned} &\varphi^{qj}(r_1, 0, s_1) = F^{qj}[0{,}5(r^* + s^*),\ 0{,}5(s^* - r^*)];\\ &\dot{\varphi}^{qj}(r_1, 0, s_1) = \dot{F}^{qj}[0{,}5(r^* + s^*),\ 0{,}5(s^* - r^*)] -\\ &-[M_\infty^2(r_1 + s_1)/(2\alpha')]\,F^{qj}[0{,}5(r^* + s^*),\ 0{,}5(s^* - r^*)] -\\ &-(0{,}5/\alpha')\,[(r^* + s^* - (r_1 + s_1)]\,F^{qj}[0{,}5(r^* + s^*),\ 0{,}5(s^* - r^*)]. \end{aligned}\right\} \quad (9.587)$$

Estas relaciones se realizan para las condiciones $r^* < r_1$, $s^* < s_1$. Los primeros miembros de (9.587), en virtud de (9.511) y tomando en consideración (9.517), se pueden representar en la siguiente forma:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi^{qj}(r_1, 0, s_1) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{r_1}\int_0^{s_1} D_j \frac{dr\,ds}{\sqrt{(r_1 - r)(s_1 - s)}};\\ &\dot{\varphi}^{qj}(r_1, 0, s_1) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{r_1}\int_0^{s_1} E_j \frac{dr\,ds}{\sqrt{(r_1 - r)(s_1 - s)}} - \frac{M_\infty^2(r_1 + s_1)}{2\alpha'} \times\\ &\times F^{qj}[0{,}5(r_1 + s_1),\ 0{,}5(s_1 - r_1)]. \end{aligned}\right\} \quad (9.588)$$

Comparando las ecuaciones (9.587) y (9.588) y teniendo en cuenta la igualdad

$$F^{qi}[0{,}5(r^* + s^*),\ 0{,}5(s^* - r^*)] = F^{qi}[0{,}5(r_1 + s_1),\ 0{,}5(s_1 - r_1)],$$

obtenemos la relación integral para determinar las deflexiones en la banda vorticial:

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{1}{2\pi}\int_0^{r_1}\int_0^{s_1} D_j \frac{dr\,ds}{\sqrt{(r_1 - r)(s_1 - s)}} = F^{qj}[0{,}5(r^* + s^*),\ 0{,}5(s^* - r^*)];\\ &-\frac{1}{2\pi}\int_0^{r_1}\int_0^{s_1} E_j \frac{dr\,ds}{\sqrt{(r_1 - r)(s_1 - s)}} = \dot{F}^{qj}[0{,}5(r^* + s^*),\ 0{,}5(s^* - r^*)] -\\ &-(0{,}5/\alpha')\,[r^* + s^* - (r_1 - s)]\,F^{qj}[0{,}5(r^* + s^*),\ 0{,}5(s^* - r^*)]. \end{aligned}\right\} \quad (9.589)$$

Ambas ecuaciones se resuelven empleando un mismo procedimiento. Como ejemplo consideremos la primera ecuación (9.589). Destaquemos en el sector IV (fig. 9.34) de la banda vorticial, en el entorno del punto P_3 con coordenadas $r_1 = \bar{r}h$, $s_1 = \bar{s}h$, una célula en forma de un cuadrado con lado h (fig. 9.34, d). Representemos la integral izquierda en forma de la suma de cuatro integrales:

$$\int_0^{r_1}\int_0^{s_1} D_j \frac{dr\,ds}{\sqrt{(r_1-r)(s_1-s)}} = \underbrace{\int_0^{s_1-h} \frac{ds}{\sqrt{s_1-s}} \int_0^{r_1-h} \frac{D_j\,dr}{\sqrt{r_1-r}}}_{I_1} +$$

$$+ \underbrace{\int_{s_1-h}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{s_1-s}} \int_0^{r_1-h} D_j \frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}}_{I_2} + \underbrace{\int_0^{s_1-h} \frac{ds}{\sqrt{s_1-s}} \int_{r_1-h}^{r_1} D_j \frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}}_{I_3} +$$

$$+ \underbrace{\int_{s_1-h}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{s_1-s}} \int_{r_1-h}^{r_1} D_j \frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}}_{I_4}. \qquad (9.590)$$

Para calcular las integrales hay que dividir toda la región IV en células con lado h y considerar constantes las deflexiones en cada una de ellas. La primera integral de (9.590) se representa en la forma

$$I_1 = 4h \sum_{i=1}^{\bar{s}-1} \sum_{m=1}^{\bar{r}-1} D_j B_{\bar{r}m\bar{s}i}, \qquad (9.591)$$

donde $B_{\bar{r}m\bar{s}i}$ es la función de influencia [véase (9.570)]:

$$B_{\bar{r}m\bar{s}i} = (\sqrt{\bar{r}-(m-1)} - \sqrt{\bar{r}-m})\,(\sqrt{\bar{s}-(i-1)} - \sqrt{\bar{s}-i}\,). \qquad (9.592)$$

Analicemos las integrales segunda y tercera en (9.590):

$$I_2 = 4h \sum_{\bar{r}=1}^{\bar{r}-1} D_j B_{\bar{r}m\bar{s}\bar{s}}; \qquad (9.593)$$

$$I_3 = 4h \sum_{\bar{s}=1}^{\bar{s}-1} D_j B_{\bar{r}\bar{r}\bar{s}i}, \qquad (9.594)$$

donde

$$\left.\begin{aligned} B_{\bar{r}m\bar{s}\bar{s}} &= \sqrt{\bar{r}-(m-1)} - \sqrt{\bar{r}-m}; \\ B_{\bar{r}\bar{r}\bar{s}i} &= \sqrt{\bar{s}-(i-1)} - \sqrt{\bar{s}-1}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (9.595)$$

Para la cuarta integral

$$I_4 = 4\ hD_j. \qquad (9.596)$$

Sumando los valores de las integrales, obtenemos la deflexión en el punto P_3 con coordenadas $\bar{r}h$, $\bar{s}h$:

$$D_j^{(\mathrm{IV})} = -\frac{\pi}{2h} F^{q_j}(r^*h, \bar{s}^*h) - \sum\sum D_j B_{\bar{r}m\bar{s}i}, \qquad (9.597)$$

donde el signo $\Sigma\Sigma$ doble significa la adición por todas las células situadas en el cono inverso de Mach con el vértice en el punto que consideramos, omitiendo la célula en la que se halla la deflexión.

Por analogía calculamos la integral en el segundo miembro de la segunda ecuación (9.589):

$$\int_0^{r_1}\int_0^{s_1} E_j \frac{dr\,ds}{\sqrt{(r_1-r)(s_1-s)}} = 4h \sum_{i=1}^{\bar{s}-1}\sum_{m=1}^{\bar{r}-1} E_j B_{\bar{r}m\bar{s}i} +$$

$$+ 4h \sum_{\bar{r}=1}^{\bar{r}-1} D_j B_{\bar{r}m\bar{s}\bar{s}} + 4h \sum_{\bar{s}-1}^{s-1} E_j B_{\overline{rrs}i} + 4hD_j. \qquad (9.598)$$

En virtud de esto la deflexión E_j en la banda vorticial

$$E_j^{(\mathrm{IV})} = -\frac{\pi}{2h}\{\dot{F}^{q_j}(\bar{r}^*h,\ \bar{s}^*h) + (0{,}5/\alpha')\,[r^* + s^* - (r_1 + s_1)] \times$$

$$\times F^{q_j}(\bar{r}^*h,\ \bar{s}^*h)\} - \sum\sum E_j B_{\bar{r}m\bar{s}i}. \qquad (9.599)$$

La integración numérica se lleva a cabo mediante la adición doble por todas las células situadas en los límites del cono inverso de Mach, con el vértice en el punto que examinamos $(\bar{r}h,\ \bar{s}h)$, omitiendo la célula inicial en la que se determina la deflexión. Con esto, su valor se calcula consecutivamente comenzando por el punto en el borde de salida con la menor coordenada $\bar{r}^*h$ (para el lado derecho) y $\bar{s}^*h$ (para el lado izquierdo). Las coordenadas de los puntos del borde de salida están relacionadas con las coordenadas del punto prefijado con las relaciones

$$r_1 - s_1 = r_1^* - s_1^*;\quad \bar{r} - \bar{s} = \bar{r}^* - \bar{s}^*;\quad \bar{r}^* < \bar{r};\quad \bar{s}^* < \bar{s}. \qquad (9.600)$$

Realizamos el cálculo del modo siguiente. Primero determinamos en la célula del borde de salida con el menor número $\bar{s}^*$ (para el lado izquierdo) y $\bar{r}^*$ (para el lado derecho). Con este fin, calculamos los valores de las funciones $F^{q_j}(\bar{r}^*h,\ \bar{s}^*h)$ y $\dot{F}^{q_j}(\bar{r}^*h,\ \bar{s}^*h)$. A continuación, calculamos los productos de las deflexiones por las funciones de influencia en las células situadas en la región entre las coordenadas características, que salen del vértice del ala y del punto P_3 $(\bar{r}h,\ \bar{s}h)$, dispuesto en la célula vecina a la elegida en el borde de salida. Después de esto sumamos el producto de las deflexiones por la función de influencia y obtenemos el correspondiente valor de la deflexión. Pasando a lo largo de la banda $\bar{r}$ = const a la siguiente célula $\bar{r}h$, $(\bar{s} + 1)\,h$ [o bien a lo largo de la banda $\bar{s}$ = const a la célula $\bar{s}h$, $(\bar{r} + 1)\,h$], repetimos los cálculos y determinamos en dicha célula el correspondiente valor de la deflexión. Realizando cálculos análogos es posible hallar las deflexiones en la banda vorticial tras el ala. Hay que tener en cuenta que es conveniente realizar semejantes cálculos sólo para aquellos sectores de la banda vorticial que ejercen influencia sobre la circulación alrededor del ala (en la fig. 9.34 este sector se encuentra entre el borde de salida y las coordenadas características que pasan por los puntos B y C de este borde).

9.84. Para $\mathbf{M}_\infty = 2$ el borde de ataque es supersónico. En efecto, el ángulo de Mach $\mu_\infty = \operatorname{arcsen}(1/\mathbf{M}_\infty) = 30°$ y la diferencia entre los ángulos $\pi/2 - \mu_\infty > \chi$ $(\chi = 45°)$ (fig. 9.35).

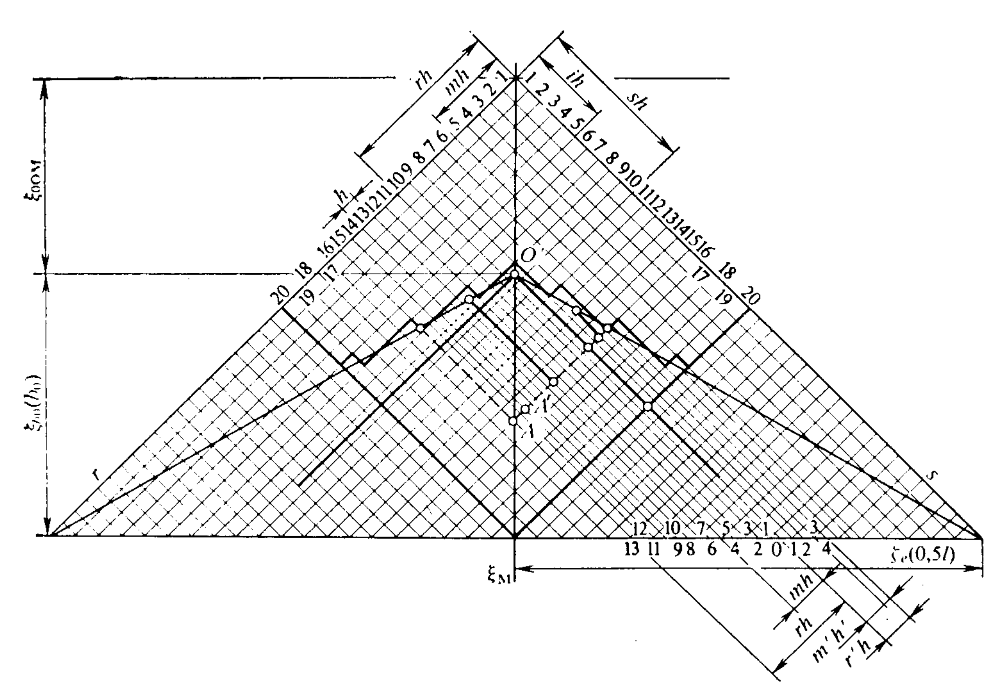


Fig. 9.35. Circulación alrededor de un ala triangular con borde de ataque supersónico

Así, pues, la línea de Mach que sale del vértice se encuentra en el ala. Por lo tanto, su borde de ataque es supersónico. Hallemos las dimensiones del ala en las coordenadas $\xi_M = \xi/\alpha' = x/(b_0\alpha')$; $\zeta_M = z/b_0$.

La cuerda de raíz $\xi_{b0} = b_0/(b_0\alpha') = 5/(5\sqrt{M_\infty^2 - 1}) = 0{,}577$. La semienvergadura $\zeta_l = 0{,}5l/b_0 = 1$.

Hallemos la desviación de las coordenadas (r, s):

$$\xi_{0\,OM} = -\xi_{0\,O}/\alpha' = -x_{0\,O}/(b_0\alpha') = -(0{,}5l\,\mathrm{tg}\,60° - b_0)/(b_0\alpha') = -0{,}423.$$

El esquema del ala en los ejes ξ_M, ζ_M se muestra en la fig. 9.35. Dividimos la envergadura del ala en 20 segmentos y determinamos la anchura de la célula: $h = 0{,}5\,l/(b_0N) = 0{,}05$. Por los extremos de los segmentos trazamos líneas paralelas a los ejes r y s (bajo el ángulo de 45° entre sí) y rellenamos con las células la región entre estos ejes (fig. 9.35). Vamos a limitarnos a calcular las deflexiones en un cuadrado ($\bar{r} = \bar{s} = 20$), con la particularidad de que las deflexiones en las células, situadas en ese cuadrado fuera de los límites del ala, son iguales a cero.

Según el ángulo α la deflexión es igual en todas las células del ala: $D_{1mi} = | \partial F^\alpha/\partial\eta |_{\eta=0} = -11{,}55\,h\alpha'$. Los valores de las deflexiones por ω_x y ω_z son los siguientes:

$$D_{2mi} = | \partial F^{\omega_x}/\partial\eta |_{\eta=0} = 0{,}5\,(m - i) = 0{,}289\,(m - i)\,h\alpha';$$

$$D_{3mi} = -0{,}5\,h\alpha'\,(m + i - 1) - \alpha'\xi_{0\,OM} = -0{,}5\,(m + i - 16{,}92)\,h\alpha'.$$

Las deflexiones según las derivadas:

$$E_{1mi} = |\,\partial \dot{F}^{\alpha}/\partial\eta\,|_{\eta=0} = -(M_{\infty}^2/\alpha')\,[0{,}5h\,(m+i-1) + \xi_{0\,OM}] = -0{,}667\,(m+i-16{,}92)\,h\alpha';$$

$$E_{2mi} = |\,\partial \dot{F}^{\omega_x}/\partial\eta\,|_{\eta=0} = 0{,}5\,(M_{\infty}^2/\alpha')\,h\,[0{,}5h\,(m+i-1) + \xi_{0\,OM}]\,(m-1) = 0{,}0167\,(m+i-16{,}92)\,(m-1)\,h\alpha';$$

$$E_{3mi} = |\,\partial \dot{F}^{\omega_z}/\partial\eta\,|_{\eta=0} = -M_{\infty}^2\,[0{,}5h\,(m+i-1) + \xi_{0\,OM}]^2 = -0{,}0289\,(m+i-1692)^2\,h\alpha'.$$

Como vemos, los valores de las deflexiones se han determinado en fracciones del parámetro $h\alpha'$ que caracteriza la intensidad relativa de la fuente y, por lo tanto, el grado de su influencia sobre el potencial de velocidad en el punto que examinamos. Los valores de las deflexiones en las células del ala se representan en la tabla 9.17 (D_1, D_2, D_3) y en la tabla 9.18 (E_1, E_2, E_3). Con ello, vamos a considerar que la célula pertenece al ala si su punto medio se encuentra en el borde. Rellenaremos las tablas empezando por las células con los números $m = i = 6$, tomando en consideración que las correspondientes células extremas ($m = 16$, $i = 7$ a la izquierda y $m = 7$, $i = 16$ a la derecha) están situadas en el ala (en la fig. 9.35 estas células vienen sombreadas).

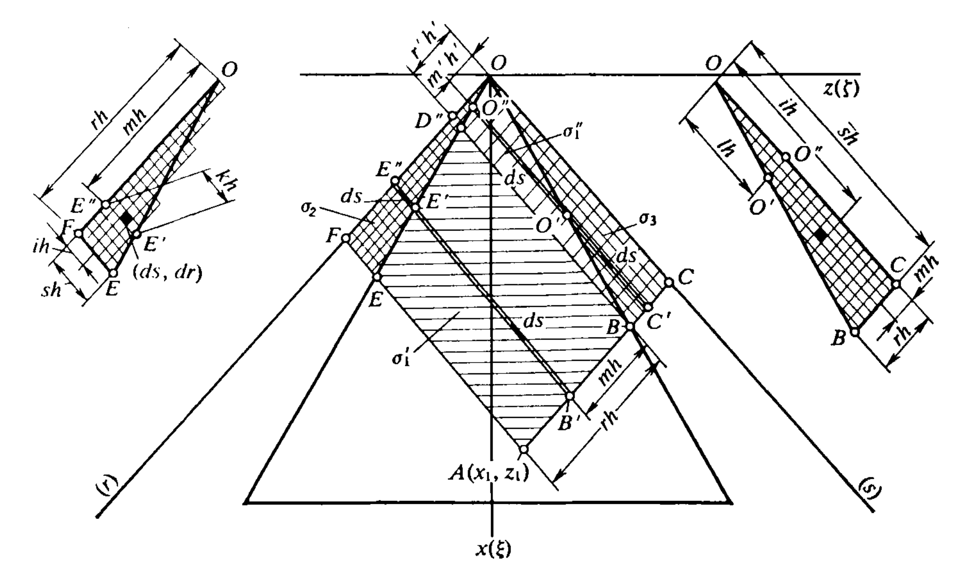


Fig. 9.36. Esquema de la corriente alrededor de un ala triangular con borde subsónico

9.85. Analicemos la forma del borde de ataque (fig. 9.36). Hallemos $\operatorname{tg}(\pi/2 - \mu_{\infty}) = \operatorname{ctg}\mu_{\infty} = \sqrt{M_{\infty}^2 - 1} = \alpha' = 1{,}118$. A continuación, determinamos que $\operatorname{tg}\chi_0 = 1{,}732$. De este modo, $\alpha' < \operatorname{tg}\chi_0$, es decir, el ángulo $\chi_0 > \pi/2 - \mu_{\infty}$.

Por consiguiente, la línea de Mach que sale del vértice se sitúa fuera del ala y el borde de ataque es subsónico.

Tabla 9.17

$m = 16$	15	14	13	12	11	10	9	8	7	m	i
$D_{2;\,3}/(h\alpha')$											
2,601 −3,04										D_2 D_3	7
2,312 −3,54	2,023 −3,04	1,734 −2,54	1,445 −2,04	1,156 −1,54						D_2 D_3	8
0 −7,54	0,289 −7,04	0,578 −6,54	0,867 −6,04	1,156 −5,54	1,445 −5,04	1,734 −4,54	2,023 −4,04	2,312 −3,54	2,601 −3,04	D_2 D_3	16

Tabla 9.18

$m = 16$	15	14	13	12	11	10	9	8	7	m	i
$E_{1;\,2;\,3}/(h\alpha')$											
−4,055 0,914 −1,068										E_1 E_2 E_3	7
−4,722 0,946 −1,449	−4,055 0,711 −1,068	−3,388 0,609 −0,746	−2,721 0,508 −0,481	−2,054 0,406 −0,274						E_1 E_2 E_3	8...
−10,06 0 −6,572	−9,391 0,235 −5,729	−8,724 0,435 −5,944	−8,057 0,605 −4,217	−7,390 0,740 −3,548	−6,723 0,842 −2,936	−6,056 0,910 −2,383	−5,389 0,945 −1,887	−4,722 0,946 −1,449	−4,055 0,914 −1,068	E_1 E_2 E_3	16

En virtud de (9.517) y la fig. 9.35 representamos la expresión para F^{ω_z} en la forma

$$F^{\omega_z} = \underbrace{\frac{\alpha'}{4\pi}\iint\limits_{\sigma'+\sigma''}\frac{(r+s)\,dr\,ds}{\sqrt{(r_1-r)(s_1-s)}}}_{I_1} - \underbrace{\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\sigma_2}\frac{D_3\,dr\,ds}{\sqrt{(r_1-r)(s_1-s)}}}_{I_2} - \underbrace{\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\sigma_3}\frac{D_3\,dr\,ds}{\sqrt{(r_1-r)(s_1-s)}}}_{I_3}. \qquad (9.601)$$

Aquí se ha tomado en consideración que en el sector del área del ala (fig. 9.36) $\sigma_1' + \sigma_1'' = OEAB$ son conocidas las deflexiones del flujo, mientras que en las regiones $\sigma_2 = OFE$ y $\sigma_3 = OCB$, dispuestas tras los límites de la superficie, dichas deflexiones han de calcularse adicionalmente. Hallamos la integral:

$$I_1 = \underbrace{\int_{r_B}^{r_A}\frac{r}{\sqrt{r_1-r}}\Bigg(\overbrace{\int_{s_{E'}}^{s_{B'}}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}^{I'_{11}}\Bigg)dr}_{I_{11}} + \underbrace{\int_{0}^{r_D}\frac{r}{\sqrt{r_1-r}}\Bigg(\overbrace{\int_{s_{D'}}^{s_{O'}}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}^{I'_{13}}\Bigg)dr}_{I_{13}} +$$

$$+\underbrace{\int_{r_B}^{r_A}\frac{1}{\sqrt{r_1-r}}\Bigg(\overbrace{\int_{s_{E'}}^{s_{B'}}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}}^{I'_{12}}\Bigg)dr}_{I_{12}} + \underbrace{\int_{0}^{r_D}\frac{1}{\sqrt{r_1-r}}\Bigg(\overbrace{\int_{s_{D'}}^{s_{O'}}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}}^{I'_{14}}\Bigg)dr}_{I_{14}};$$

$$s_{E'} = r\,(1-\operatorname{ctg}\chi_0\alpha')/(1+\operatorname{ctg}\chi_0\alpha') = ra;$$

$$s_{B'} = s_A = s_1; \quad I'_{11} = 2\sqrt{s_1-ra}; \quad r_B = s_1a; \quad r_A = r_1;$$

$$I_{11} = 2\int_{s_1a}^{r_1}\frac{r\sqrt{s_1-ra}}{\sqrt{r_1-r}}\,dr; \quad I'_{12} = (2/3)\,(ra+2s_1)\sqrt{s_1-ra};$$

$$I_{12} = \frac{2}{3}\int_{s_1a}^{r_1}\frac{(ra+2s_1)\sqrt{s_1-ra}}{\sqrt{r_1-r}}\,dr.$$

Seguidamente realizamos los cálculos para la región $\sigma_1'' = ODB$:

$$s_{D'} = r_{D'}\,(1-\operatorname{ctg}\chi_0\alpha')/(1+\operatorname{ctg}\chi_0\alpha') = ra; \quad s_{O'} = r/a;$$

$$I'_{13} = -2\sqrt{s_1-r/a} + 2\sqrt{s_1-ra}; \quad r_D = s_1a;$$

$$I_{13} = \int_0^{s_1a}\frac{r\,(-2\sqrt{s_1-r/a}+2\sqrt{s_1-ra'})}{\sqrt{r_1-r}}\,dr;$$

$$I'_{14} = (-2/3)\,(r/a+2s_1)\sqrt{s_1-r/a} + (2/3)\,(ra+2s_1)\sqrt{s_1-ra};$$

$$I_{14} = -\frac{2}{3}\int_0^{s_1a}\frac{(r/a+2s_1)\sqrt{s_1-r/a}-(ra+2s_1)\sqrt{s_1-ra}}{\sqrt{r_1-r}}\,dr.$$

Para la región de integración $\sigma_2 = OFE$ tras los límites del ala, tenemos

$$I_2 = \int_0^{r_F} \frac{1}{\sqrt{r_1 - r}} \left(\int_{s_{E''}}^{s_{E'}} \frac{D_3\,ds}{\sqrt{s_1 - s}} \right) dr;$$

$$s_{E''} = 0; \quad s_{E'} = ra; \quad r_F = r_1.$$

Por analogía, para el sector $\sigma_3 = OCB$

$$I_3 = \int_{r_C}^{r_B} \frac{1}{\sqrt{r_1 - r}} \left(\int_{s_{O'}}^{s_{C'}} \frac{D_3\,ds}{\sqrt{s_1 - s}} \right) dr;$$

$$s_{O'} = r/a; \quad s_{C'} = s_1; \quad r_C = 0; \quad r_B = s_1 a.$$

Examinemos la integración numérica hallando, para las condiciones prefijadas de la circulación, los valores de

$$\left.\begin{aligned} &\xi_{M1} = \xi_1/\alpha' = 0{,}835; \quad \zeta_{M1} = z_1/b_0 = 0{,}13; \\ &r_1 = \xi_{M1} - \zeta_{M1} = 0{,}705; \quad s_1 = \xi_{M1} + \zeta_{M1} = 0{,}965; \\ &a = (1 - \operatorname{ctg}\chi_0\alpha')/(1 + \operatorname{ctg}\chi_0\alpha') = 0{,}216. \end{aligned}\right\} \qquad (9.601')$$

Al calcular las integrales I_{11}, I_{12} tomamos el número de bandas $\bar{r} = 5$ y la anchura $h = (r_1 - s_1 a)/\bar{r} = 0{,}0994$. Habiendo determinado para la banda las funciones subintegrales respectivas, calculamos: $I_{11} = 1{,}326$; $I_{12} = 1{,}77$.

Analicemos las integrales I_{13} e I_{14} tomando el número de bandas $\bar{r}' = 5$ y la anchura de cada una $h' = s_1 a/\bar{r}' = 0{,}042$. A continuación, después de hallar las funciones subintegrales y realizando la integración numérica, obtenemos $I_{13} = 0{,}0278$; $I_{14} = 0{,}057$.

Consideremos las integrales I_2 e I_3, calculadas por las regiones $\sigma_2 = OFE$ y $\sigma_3 = OCB$. Dividamos la semienvergadura del ala $0{,}5l$ en N segmentos de longitud $h = 0{,}5l/(Nb_0)$. El número de semejantes segmentos por el lado $OF = r_F$ será $\bar{r} = r_F/h = r_1/h$, y por el lado $FE = s_E$; $\bar{s} = r_1 a/h$.

Haciendo constante el valor de la deflexión D_3 dentro de la célula, representemos la suma

$$I_2 = 4 \sum_{m=1}^{\bar{r}} \sum_{i=1}^{k} D_3 [\sqrt{r_1 - (m-1)h} - \sqrt{r_1 - mh}] [\sqrt{s_1 - (i - 1/h} - \sqrt{s_1 - ih}]. \qquad (9.602)$$

donde m e i son los números corrientes de las células; k, el número de células en la sección alejada del vértice del ala a la distancia mh (de la semejanza de los triángulos $OE''E'$ y OFE se desprende que $k = m\bar{s}/\bar{r}$).

Analicemos la integral I_3 calculada por la región triangular $\sigma_3 = OCB$. Dividamos el lado $OC = s_C = s_1$ en $\bar{s}'$ y el lado $CB = r_B = s_1 a$ en $\bar{r}'$ segmentos de longitud $h = 0{,}5l/(Nb_0)$ cada uno (los valores de $\bar{r}$ y $\bar{s}$ pueden distinguirse de sus correspondientes valores para el lado izquierdo). En virtud de esto obtenemos la suma:

$$I_3 = 4 \sum_{m=1}^{\bar{r}} \sum_{i}^{\bar{s}} D_3 [\sqrt{r_1 - (m-1)h} - \sqrt{r_1 - mh}] [\sqrt{s_1 - (i-1)h} - \sqrt{s_1 - ih}]. \qquad (9.602')$$

Aquí la variable l se halla de la semejanza de los triángulos $OO'O''$ y OCB, es decir, $lh_s/(mh_r) = \bar{s}\,h_s/(\bar{r}h_r)$; $l = ms/\bar{r}$. El número de células en cualquier sección del área (en el sentido de los ejes r o bien s) entre la línea de Mach y el borde de ataque puede ser quebrado. Si, p. ej., la variable $\bar{r}$ es igual o mayor que $N' + 0{,}5$ (N′ es un número entero), se puede considerar que la correspondiente célula pertenece a la región de integración.

Para calcular las integrales I_2 e I_3 hay que conocer la distribución de las deflexiones D_3 (o sea, sus valores en las respectivas células) en los sectores $\sigma_2 = OFE$ y $\sigma_3 = OCB$. Estos valores se determinan según los valores conocidos de las deflexiones en el ala: $D_3 = \partial F^{\omega_z}/\partial\eta = -\xi = -0{,}5\,(r + s)\,\alpha'$.

Dividamos en células las regiones de integración (fig. 9.37) y determinemos las deflexiones comenzando por la primera línea de células. De acuerdo con (9.584), la deflexión en cierto punto (célula)

$$D_3 = -\sum_{m=1}^{\bar{r}-1} D_j B_{\bar{r}m} =$$

$$= -\sum_{m=1}^{\bar{r}-1} D_j\left(\sqrt{\bar{r}-m+1} - \sqrt{\bar{r}-m}\right),$$

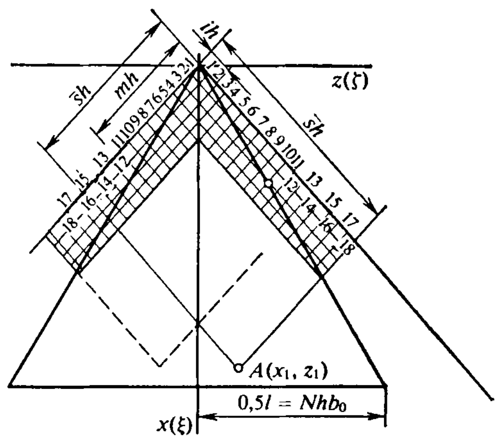


Fig. 9.37. Deflexión del flujo delante de un ala triangular

donde D_j son las deflexiones en las células anteriores (en el ala o tras sus límites).

Dividamos la semienvergadura $0{,}5l$ en $N = 11$ partes. La correspondiente anchura de la célula $h = 0{,}5l/(b_0N) = 0{,}0524$.

En los lados $OF = r_1$ y $EF = r_1a$ el número de células $\bar{r} = r_1/h \approx 14$; $\bar{s} = r_1a/h \approx 3$ y en los lados $OC = s_1$ y $CB = r_B = s_1a$ el número de células $\bar{s} = s_1/h \approx 18$; $\bar{r} = s_1a/h \approx 4$.

La red constituida por células de anchura $h = 0{,}0524$ está aplicada en la fig. 9.37, en la que se muestra la numeración. Los cálculos se realizan consecutivamente, comenzando por la célula *1* de cada una de las cuatro líneas ($i = 1$; 2; 3; 4) hasta la célula *18* en el extremo. En la fig. 9.37 vemos que en las células *1* y *2* de la primera línea ($i = 1$; $m = 1$ y 2), situadas en el ala, las deflexiones son conocidas y se determinan para el punto medio de las células:

$$D_{j=1} = D_{3j=1} = -0{,}5\,(r + s)\,\alpha' = -0{,}5\alpha' \quad (m = 1);$$

$$D_{j=2} = D_{3j=2} = -h\alpha' \quad (m = 2).$$

Hallamos la deflexión en la célula *3*:

$$D_{3j=3} = -(-0{,}5h\alpha')\left(\sqrt{3-1+1} - \sqrt{3-1}\right) + $$
$$+(-h\alpha')\left(\sqrt{3-2+1} - \sqrt{3-2}\right) = 0{,}573h\alpha'.$$

Las deflexiones en las siguientes células ($\bar{r} = 4h$; $5h$; $6h$, . . .):

$$D_{3j=4} = -0{,}215h\alpha'; \quad D_{3j=5} = 0{,}115h\alpha';$$

$$D_{3j=6} = 0{,}0725h\alpha'; \quad \ldots; \quad D_{3j=13} = 0{,}0146h\alpha';$$

$$D_{3j=14} = -[(-0{,}5h\alpha')(\sqrt{14-1+1} - \sqrt{14-1}) + \ldots$$
$$\ldots + 0{,}0146(\sqrt{14-13+1} - \sqrt{14-13})] = 0{,}0142h\alpha'.$$

Continuando, con la misma fórmula calculemos las deflexiones del flujo en las células convencionales *15—18*, las que, debido a la simetría de la circulación, son las mismas que las que buscamos en las correspondientes células del lado derecho. Es evidente, que por esa misma causa las deflexiones halladas en las células *1—14* de la primera línea a la izquierda son iguales a sus respectivos valores en esas mismas células a la derecha. Calculamos:

$$D_{3j=15} = -[(-0{,}5h\alpha')(\sqrt{15-1+1} - \sqrt{15-1}) + \ldots] =$$
$$= 0{,}0114h\alpha'; \quad \ldots; \quad D_{3j=18} = 0{,}00867h\alpha'.$$

Examinemos la segunda línea de células situadas a la izquierda ($i = 2$). En estas células las deflexiones son las mismas que en las células simétricas en el lado derecho. De la fig. 9.37 se desprende que las primeras siete células *1—7* de la segunda línea pueden considerarse que pertenecen al ala, en la que las condiciones de frontera (deflexiones) son conocidas. En cada una de estas siete células las deflexiones son las siguientes:

$$D_{j=1} = D_{3j=1} = -0{,}5\,(r+s)\,\alpha' = -0{,}5\,(0{,}5h + 1{,}5h)\,\alpha' = -h\alpha'$$
$$(i = 2;\ m = 1);$$
$$D_{j=2} = D_{3j=2} = -0{,}5\,(1{,}5h + 1{,}5h)\,\alpha' = -1{,}5h\alpha'\ (i = 2;\ m = 2); \quad \ldots;$$
$$D_{j=7} = D_{3j=7} = 4h\alpha'\ (i = 2;\ m = 7).$$

Vamos a considerar que la célula *8* ($m = 8$) se refiere a una región fuera del ala. Hallemos la deflexión en ésta y otras células de la segunda línea:

$$D_{3j=8} = -[(-h\alpha')(\sqrt{8-1+1} - \sqrt{8-1}) + \ldots +$$
$$+ (-4h\alpha')(\sqrt{8-7+1} - \sqrt{8-7})] = 5{,}067h\alpha';$$
$$D_{3j=9} = 2{,}192h\alpha'; \quad \ldots; \quad D_{3j=17} = 0{,}255h\alpha';$$
$$D_{3j=18} = -[(-h\alpha')\,(\sqrt{18-1+1} - \sqrt{18-1} + \ldots] = 0{,}220h\alpha'.$$

Consideremos la tercera línea de células ($i = 3$). En la célula *1* de esta línea, situada a la derecha del borde de ataque, debido a la simetría de circulación, la deflexión es la misma que en la célula *3* de la primera línea a la izquierda, es decir, $D_{j=1} = D_{3j=3} = 0{,}573h\alpha'$. En las siguientes células de la tercera línea (*2*, *13*, ..., *12*) ,pertenecientes a la superficie, las deflexiones son las siguientes:

$$D_{j=2} = -0{,}5\,(r+s) = -0{,}5\,(1{,}5h + 2{,}5h)\,\alpha' = -2h\alpha'\ (i = 3;\ m = 2);$$
$$D_{j=3} = -2{,}5h\alpha'\ (i = 3;\ m = 2); \quad \ldots; \quad D_{j=12} = -7h\alpha'\ (i = 3;\ m = 11).$$

Calculemos las deflexiones en las células *13—18* de la tercera línea:

$$D_{3j=13} = -[-0{,}573h\alpha'(\sqrt{13-1+1} - \sqrt{13-1}) + \ldots +$$
$$+ (-7h\alpha')(\sqrt{13-12+1} - \sqrt{13-12})] = 12{,}19h\alpha'; \ldots; \ D_{3j=17} = 1{,}604h\alpha'; \ \ldots;$$
$$D_{3j=18} = -[0{,}573h\alpha'(\sqrt{18-1+1} - \sqrt{18-1}) + \ldots] = 1{,}876h\alpha'.$$

Examinemos las células de la cuarta línea ($i = 4$). En la célula *1* de esta línea (entre el borde de ataque y la línea de Mach en la parte derecha) la deflexión es

la misma que en la célula análoga a la izquierda, es decir, $D_{j=1} = 0{,}215h\alpha'$; las células *2—16* pertenecen a la superficie del ala, por lo que en ellas las deflexiones son las siguientes:

$$D_{j=2} = -0{,}5\ (r + s) = -0{,}5\ (1{,}5h + 3{,}5h) = -2{,}5h\alpha'\ (i = 4;\ m = 1);\quad \ldots;$$
$$D_{j=16} = -9{,}5h\alpha'\ (i = 4;\ m = 15).$$

Calculemos las deflexiones en las células *17* y *18* de la cuarta línea:

$$D_{3j=17} = -[0{,}215h\alpha'\ (\sqrt{17-1+1} - \sqrt{17-1}) + \ldots +$$
$$+ (-9{,}5h\alpha')(\sqrt{17-16+1} - \sqrt{17-16})] = 20{,}13h\alpha';$$
$$D_{3j=18} = -[0{,}215h\alpha' \sqrt{18-1+1} - \sqrt{18-1})] = 9{,}344h\alpha'.$$

Realicemos los cálculos necesarios relacionados con la determinación del valor de F^{ω_z} en el punto dado A ($x = 2{,}1$ m, $z = 0{,}9$ m). La integral $I_1 = I_{11} + I_{12} + I_{13} + I_{14} = 3{,}108$.

Calculemos la integral I_2 [véase (9.62)] tomando los consecutivos valores de $m = 14$ ($i = 1; 2; 3$); $m = 13$ ($i = 1; 2; 3$); $m = 12$ ($i = 1; 2$) y los correspondientes valores de las deflexiones D_j;

$$I_2 = 4h\{(\sqrt{14-13+1} - \sqrt{14-13})[0{,}142h\alpha'(\sqrt{18-1+1} -$$
$$-\sqrt{18-1}) + \ldots] + \ldots + (\sqrt{14+2-1} - \sqrt{14-2})[0{,}573h\alpha' \times$$
$$\times (\sqrt{18-1+1} - \sqrt{18-1})]\} = 4{,}416h^2\alpha'.$$

Para $\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 1{,}118$ y $h = 0{,}0524$ hallamos $I_2 = 0{,}0136$.

Hallemos la integral I_3 para el lado derecho en las células del cual las deflexiones son conocidas. Realizamos el cálculo con la fórmula (9.602'), comenzando por la banda extrema de cuatro células, con el número *18* de las líneas primera — cuarta ($m = 1; 2; 3; 4$). Con esto, el número de células en cada banda se determina directamente con ayuda de la fig. 9.37:

$$I_3 = 4h\{(\sqrt{18-17+1} - \sqrt{18-17})[0{,}00867h\alpha'(\sqrt{18-1+1} -$$
$$-\sqrt{18-1}) + \ldots] + \ldots + (\sqrt{18-2+1} - \sqrt{18-2}) \times$$
$$\times [0{,}573h\alpha'(\sqrt{18-1+1} - \sqrt{18-1})]\} = 8{,}092h^2\alpha'.$$

Como $\alpha' = 1{,}118$ y $h = 0{,}0524$, $I_3 = 0{,}0248$.

Conforme a (9.601)

$$F^{\omega_z} = [\alpha'/(4\pi)]\, I_1 - [1/(2\pi)]\, I_2 - [1/(2\pi)]\, I_3 = 0{,}2706.$$

De los datos obtenidos se desprende que la influencia sobre la derivada del potencial de velocidad en el punto A de las fuentes situadas en el sector entre los bordes de ataque y las líneas de Mach, que salen del vértice del ala, es pequeña y constituye un poco más del 2 %. Por esta razón, en los cálculos aproximados de la función F^{ω_z} podemos limitarnos a la integración sólo por la superficie del ala (véase la fig. 9.36, región $OBAF$).

9.86. Determinamos el carácter de los bordes del ala (fig. 9.38):

$$\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 0{,}831;\quad \operatorname{ctg}\mu_\infty = \alpha' = 0{,}831\ (\mu_\infty = 50°16');$$
$$\pi/2 - 50°16' < \chi_0 = 60°.$$

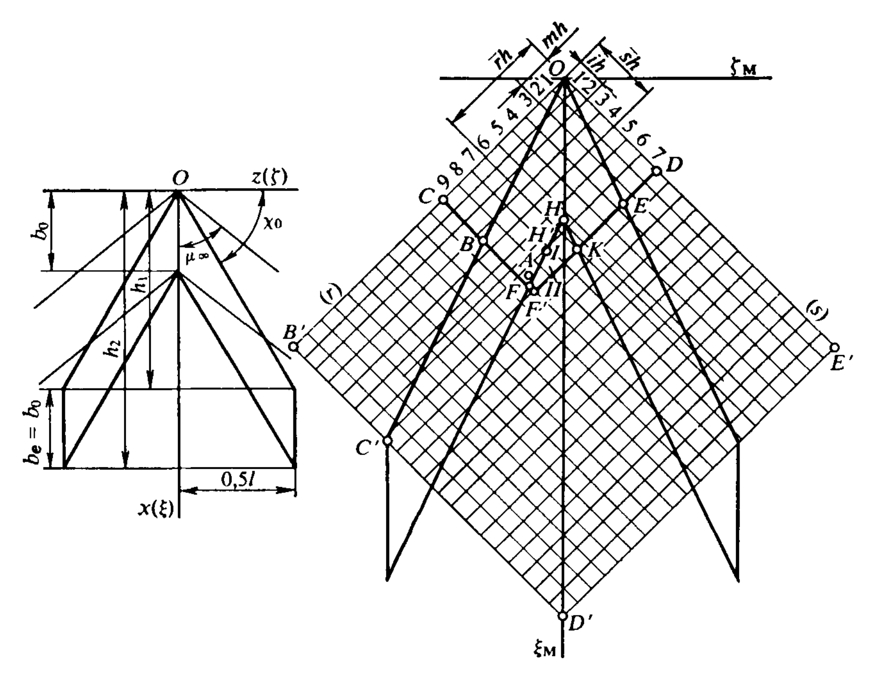


Fig. 9.38. Esquema de circulación alrededor de un ala hexagonal con bordes de salida subsónicos

Así, pues, los dos bordes, de ataque y de salida, son subsónicos (las líneas de Mach trazadas desde los vértices resultan situadas delante de los bordes). La altura del triángulo exterior $h_1 = 0{,}5l \operatorname{ctg}(\pi/2 - 60) = 5{,}196$ m, en tanto que la del ala $h_2 = h_1 + b_0 = 7{,}196$ m.

Las dimensiones relativas:

$$\xi_{Mb} = b_0/(b_0\alpha') = 1{,}203; \quad \xi_{Mh1} = h_1/(b_0\alpha') = 3{,}126;$$

$$\xi_{Mh2} = h_2/(b_0\alpha') = \xi_{Mb} + \xi_{Mh1} = 4{,}329; \quad \zeta_l = 0{,}5l/b_0 = 1{,}5.$$

El ángulo de inclinación de la línea de Mach en las coordenadas ξ_M, ζ_M

$$\operatorname{tg}\mu = \zeta_M = \operatorname{tg}\mu_\infty\alpha' = 1 \quad (\mu = 45°).$$

El correspondiente ángulo de flecha $\operatorname{tg}\chi = \xi_M/\zeta_M = \operatorname{tg}\chi_0/\alpha' = 2{,}084$ ($\chi = 64°22'$).

Con las características construyamos el cuadrado $OB'D'E'$. El lado del cuadrado $OB' = r_B = r_C = \xi_{MC} - \zeta_{MC} = 5{,}829$. Dividamos ese lado en $N = 30$ segmentos de longitud $h = r_B/N = 0{,}291$.

El número total de células con lado h en el cuadrado $OB'D'E'$ constituye $30 \cdot 20 = 600$. Las coordenadas adimensionales del punto A

$$\xi_A = x_A/(b_0\alpha') = 1{,}697; \quad \zeta_A = z_A/b_0 = 0{,}3.$$

De la fig. 9.38 se deduce que sobre el punto A actúan las fuentes situadas en un cuadrilátero característico que contiene tres regiones. Una de ellas (las áreas OCB y ODE) está situada en los sectores entre las líneas de Mach OC, OD y los bordes de ataque; la segunda (hexágono $OBFHKE$) se encuentra directamente en el ala; la tercera (el sector $HFF'K$) se halla en la zona vorticial tras el ala. Para

calcular la función F^{ω_z} en el punto A hay que determinar las deflexiones en los sectores OCB y ODE, así como en la zona vorticial tras el ala. Los valores de dichas deflexiones en el ala son conocidas $[D_j = -\xi = -0{,}5\ (r + s)]$.

En la célula *1* de la primera línea, perteneciente al ala, la deflexión es conocida:

$$D_{j=1} = D_{3j=1} = -0{,}5\ (r + s)\ \alpha' = -0{,}5\ (0{,}5h + 0{,}5h)\ \alpha' = -0{,}5h\alpha'\ (m = 1).$$

Determinemos las deflexiones en las células *2—9* de dicha línea:

$$D_{3j=2} = -[(-0{,}5h\alpha')(\sqrt{2-1+1} - \sqrt{2-1})] = 0{,}207h\alpha';$$
$$D_{3j=3} = -[(-0{,}5h\alpha')(\sqrt{3-1+1} - \sqrt{3-1}) + \ldots] = 0{,}0733h\alpha', \quad \ldots,$$
$$D_{3j=9} = 0{,}00828h\alpha'.$$

Consideremos las células de la segunda línea. En la célula *1* de esta línea la deflexión es igual a la de la célula *2* de la primera línea:

$$D_{j=1} = D_{3j=1} = 0{,}207h\alpha'.$$

Las células *2*, *3*, *4* pertenecen al ala y, por consiguiente,

$$D_{j=2} = D_{3j=2} = -0{,}5\ (1{,}5h + 1{,}5h)\ \alpha' = -1{,}5h\alpha'\ (m = 2); \quad \ldots;$$
$$D_{j=4} = D_{3j=4} = -2{,}5h\alpha'\ (m = 4).$$

Hallemos las deflexiones en las células *5—9* de la segunda línea:

$$D_{3j=5} = -[0{,}267h\alpha'(\sqrt{5-1+1} - \sqrt{5-1}) + \ldots$$
$$\ldots + (-2{,}5h\alpha')(\sqrt{5-4+1} - \sqrt{5-4})] = 2{,}01h\alpha'; \quad \ldots; \quad D_{3j=9} = 0{,}2h\alpha'.$$

En la célula *1* de la tercera línea la deflexión es igual a la de la célula *3* de la primera línea:

$$D_{j=1} = D_{3j=1} = 0{,}0733h\alpha' \quad (i = 3;\ m = 1).$$

En las células *2—7* de esta línea las deflexiones se determinan de las condiciones en el ala

$$D_{j=2} = -2h\alpha'\ (i = 3;\ m = 2); \quad \ldots; \quad D_{j=7} = -4{,}5h\alpha'\ (i = 3;\ m = 6).$$

Las deflexiones en las células *8* y *9* de la tercera línea

$$D_{j=8} = -[0{,}0732h\alpha'(\sqrt{8-1+1} - \sqrt{8-1}) + \ldots$$
$$\ldots + (-4{,}5h\alpha')(\sqrt{8-7+1} - \sqrt{8-7})] = 5{,}69h\alpha';$$
$$D_{j=9} = 2{,}456h\alpha'.$$

Sobre el punto ejercen influencia las fuentes situadas en la región vorticial (células *I* y *II* que son las células *7* y *8* de la séptima línea, respectivamente). Con el fin de determinar las deflexiones en dichas células agrupemos en la tabla 9.19 los valores conocidos de esas deflexiones en el cono inverso de Mach (región $ODF'C$).

Para calcular la deflexión en la célula *1* empleemos la fórmula (9.597):

$$D^{(1)} = -[\pi/(2h)]\ F^{\omega_z}(H) - \sum\sum D_j B_{\bar{r}m\bar{s}i},$$

Tabla 9.19

$(h\alpha')$				$\longleftarrow \bar{r} \longrightarrow$					
						$\longleftarrow m \longrightarrow$			
9	8	7	6	5	4	3	2	1	
0,00828	0,00893	0,0127	0,0165	0,0232	0,0379	0,0733	0,207	−0,5	1
0,2	0,295	0,452	0,796	2,01	−2,5	−2	−1,5	0,207	2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
−7,5	II	I	−6	−5,5	−5	−4,5	0,452	0,0127	7
	−1,561	1,449							

donde $F^{\omega_z}(H)$ es la derivada en el borde de salida (en el punto H de la célula *6* de la sexta línea) que, de acuerdo con (9.572), es igual a (véase la fig. 9.38)

$$F^{\omega_z}(H) = -(2h/\pi) \sum_{m=1}^{6} \sum_{i=1}^{6} D_j B_{\bar{r} m \bar{s} i}. \tag{9.603}$$

Realizamos la suma por las células tomando en consideración los respectivos valores de las deflexiones, representadas más abajo en la tabla 9.20:

$$\sum_1^6 \sum_1^6 D_j B_{\bar{r} m \bar{s} i} = (\sqrt{6-1+1} - \sqrt{6-1})[(-05h\alpha')(\sqrt{6-1+1} - \\ - \sqrt{6-1}) + \ldots] + \ldots + (\sqrt{6-6+1} - \sqrt{6-6})\,[0{,}0165h\alpha'(\sqrt{6-1+1} - \\ - \sqrt{6-1}) + \ldots + (-5{,}5h\alpha')(\sqrt{6-6+1} - \sqrt{6-6})] = -18{,}22h\alpha'.$$

Así, pues, $F^{\omega_z}(H) = 11{,}68h^2\alpha'$. Teniendo esto en cuenta

$$D^{(\mathrm{I})} = -18{,}22h\alpha' - \sum\sum D_j B_{\bar{r} m \bar{s} i}.$$

A continuación , calculamos

$$\sum\sum D_j B_{\bar{r} m \bar{s} i} = h\alpha' \{(\sqrt{7-1+1} - \sqrt{7-1})\,[(-0{,}5\,(\sqrt{7-1+1} - \\ - \sqrt{7-1}) + \ldots] + \ldots + (\sqrt{7-7+1} - \sqrt{7-7})\,[0{,}0127\,(\sqrt{7-1+1} - \\ - \sqrt{7-1}) + \ldots - 6{,}0\,(\sqrt{7-6+1} - \sqrt{7-6})]\} = 19{,}67h\alpha'.$$

Con arreglo a esto

$$D^{(\mathrm{I})} = -18{,}22h\alpha' + 19{,}67h\alpha' = 1{,}449h\alpha'.$$

Determinemos la deflexión del flujo en la célula *II* vecina en la región vorticial:

$$D^{(\mathrm{II})} = -[\pi/(2h)]\,F^{\omega_z}(H') - \sum_{m=1}^{8} \sum_{i=1}^{7} D_j B_{\bar{r} m \bar{s} i}.$$

Aquí, la derivada en el borde de salida de F^{ω_z} (H') será examinada como la de la célula 7 de la sexta línea ($m = 7$; $i = 6$):

$$F^{\omega_z}(H') = = (2h/\pi) \sum_{m=1}^{7} \sum_{i=1}^{6} D_j B_{\bar{r}m\bar{s}i}.$$

Empleando los datos de la tabla 9.19, hallamos

$$\sum_{m=1}^{7} \sum_{i=1}^{6} D_j B_{\bar{r}m\bar{s}i} = h\alpha' \{(\sqrt{6-1+1} - \sqrt{6-1})[-0{,}5(\sqrt{7-1+1} - \sqrt{7-1}) + \ldots] + (\sqrt{6-6+1} - \sqrt{6-6})[0{,}0165(\sqrt{7-1+1} - \sqrt{7-1}) + \ldots - 6{,}0(\sqrt{7-7+1} - \sqrt{7-7})]\} = -19{,}23h\alpha'.$$

Así, pues

$$F^{\omega_z}(H') = -(2h/\pi)(1 - 19{,}23h\alpha') = 12{,}25h^2\alpha',$$

mientras que la deflexión del flujo

$$D^{(II)} = -19{,}23h\alpha' - \sum\sum D_j B_{\bar{r}m\bar{s}i}.$$

Según los datos de la tabla 9.19 calculamos:

$$\sum\sum D_j B_{\bar{r}m\bar{s}i} = h\alpha' \{(\sqrt{7-1+1} - \sqrt{7-1})[-0{,}5(\sqrt{8-1+1} - \sqrt{8-1}) + \ldots] + (\sqrt{7-7+1} - \sqrt{7-7})[0{,}0127(\sqrt{8-1+1} - \sqrt{8-1}) + \ldots + 1{,}449(\sqrt{8-7+1} - \sqrt{8-7})]\} = -17{,}67h\alpha'.$$

Empleando los datos obtenidos

$$D^{(II)} = -19{,}23h\alpha' + 17{,}67h\alpha' = -1{,}56h\alpha'.$$

Así, pues, hemos determinado las deflexiones en todas las células de la región de integración. Utilizando la tabla 9.19 y la fórmula (9.603) calculamos en el punto A prefijado la función

$$F^{\omega_z} = -(2h/\pi) \sum_{m=1}^{9} \sum_{i=1}^{7} D_j B_{\bar{r}m\bar{s}i}. \quad (9.604)$$

Hallamos

$$\sum_{m=1}^{9} \sum_{i=1}^{7} D_j B_{\bar{r}m\bar{s}i} = h\alpha' \{(\sqrt{7-1+1} - \sqrt{7-1})[-0{,}5(\sqrt{9-1+1} - \sqrt{9-1}) +]\ldots + (\sqrt{7-7+1} - \sqrt{7-7})[0{,}0127(\sqrt{9-1+1} - \sqrt{9-1}) + \ldots - 7{,}5(\sqrt{9-9+1} - \sqrt{9-9})]\} = -27{,}27h\alpha';$$

$$F^{\omega_z} = -(2h/\pi)(-27{,}27h\alpha') = 1{,}222.$$

Respectivamente en los puntos H' y H

$$F^{\omega_z} = 12{,}25h^2\alpha' = 0{,}862; \quad F^{\omega_z} = 11{,}68h^2\alpha' = 0{,}822.$$

9.87. Analicemos el carácter del borde de ataque (fig. 9.39). Hallamos sen $\mu_\infty = 1/M_\infty = 1/2$; $\mu_\infty = 30°$. Como el ángulo $\pi/2 - \chi < \mu_\infty$ ($\chi = 70°$, $\mu_\infty = 30°$), la línea de Mach pasa delante de la parte superior del borde de ataque que, por lo

tanto, será subsónico; la parte inferior del borde es supersónica. Calculemos las dimensiones relativas del ala [en las coordenadas $\xi_M = \xi/\alpha' = x/(b_0\alpha')$; $\zeta_M = z/b_0$]:

$$\xi_{b_0} = b_0/(b_0\sqrt{M_\infty^2 - 1}) = 0{,}577; \quad \xi_{b_c} = b_c/(b_0\alpha') = 0{,}346;$$
$$\xi_{b_e} = b_e/(b_0\alpha') = 0{,}115; \quad \zeta_l = 0{,}5l/b_0 = 0{,}6;$$
$$\zeta_{l'} = 0{,}5l'/b_0 = b_c \operatorname{tg}(\pi/2 - 70)/b_0 = 0{,}218.$$

De acuerdo con estos datos en la fig. 9.40 se ha construido el contorno del ala. En dicha figura vemos que las líneas de Mach que salen del vértice forman un ángulo recto.

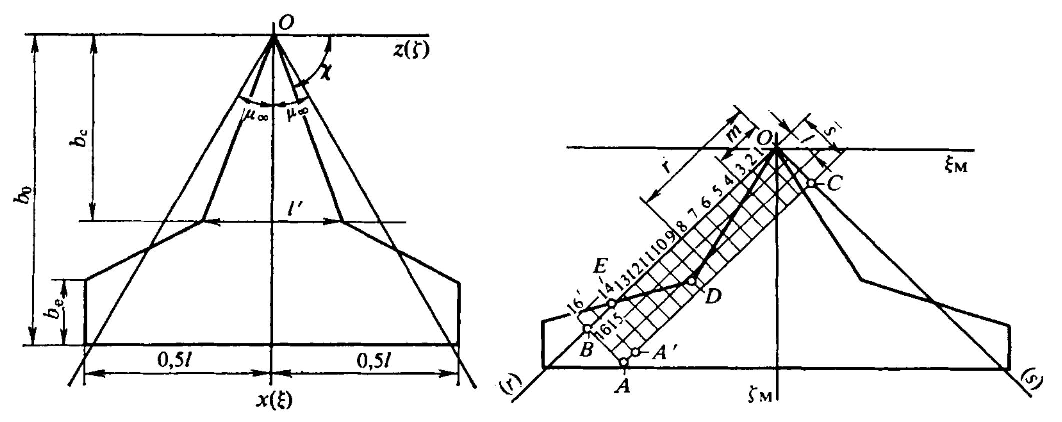


Fig. 9.39. Forma del ala con borde de ataque quebrado

Fig. 9.40. Esquema para el cálculo de la circulación alrededor de un ala en coordenadas ξ_M, ζ_M

Determinemos la función F^{ω_z} en el punto A ($x = 4{,}85$ m; $z = 2$ m). Dividamos una parte del plano de la superficie de sustentación en células de anchura $h = 0{,}5l/(Nb_0) = 0{,}06$, donde $N = 10$ es el número de segmentos en la semienvergadura del ala. Hallemos la cantidad de estos segmentos en los sectores OB y OC:

$$OB = r_A = \xi_{MA} - \zeta_{MA} = 0{,}96; \quad \bar{r} = r_A/h = 16; \quad OC = s_A = \xi_{MA} + \zeta_{MA} = 0{,}16; \quad \bar{s} = 2{,}667 \ (\sim 3).$$

Calculemos las deflexiones en las células en el sector ODE. Determinemos directamente según la fig. 9.40 si la célula pertenece a la superficie del ala (donde las deflexiones son conocidas) o bien a la región entre la característica (línea de Mach) y el borde delantero donde se hallan las deflexiones. En las células *1* y *2* de la primera línea las deflexiones son las mismas que en el ala:

$$D_{j=1} = D_{3j=1} = -0{,}5\,(r + s)\,\alpha' = -0{,}5\,(0{,}5h + 0{,}5h)\,\alpha' = -0{,}5h\alpha' \ (m = 1);$$
$$D_{j=2} = D_{3j=2} = -h\alpha' \ (m = 2).$$

Hallamos las deflexiones en las células *3*, *4*, *5*, . . ., *13* (véase el problema 9.85). Introducimos los resultados obtenidos en la tabla 9.20.

Las células *14—16* pertenecen al ala (fig. 9.40), por lo que en ellas las deflexiones son las siguientes:

$$D_{3j=14} = -0{,}5\,(r + s)\,\alpha' = -0{,}5\,(13{,}5h + 0{,}5h)\,\alpha' = -7h\alpha', \quad \ldots,$$
$$D_{3j=16} = -8h\alpha'.$$

Tabla 9.20

$(h\alpha')$

16′	15′						
−7,5	−7,0		← $\bar{r}$ →	← m →			
16	15	14	13	12...	2	1	
−8,0	−7,5	−7,0	0,0146	0,0183	−1,0	−0,5	1
−8,5	−8,0	−7,5	−7,0	−6,5	−1,5	−1,0	2
−9,0	−8,5	−8,0	−7,5	−7,0	−2,0	0,573	3

Del mismo modo se determinan las deflexiones en las células *15′*, *16′* (consideramos que la célula *15′* se encuentra en el ala):

$$D_{3j=15'} = -0{,}5\,(r+s)\,\alpha' = -0{,}5\,(14{,}5h - 0{,}5h)\,\alpha' = -7h\alpha';$$
$$D_{3j=16} = -7{,}5h\alpha'.$$

Aquí $s = -0{,}5h$ se toma con signo negativo (fig. 9.41). Las células de la segunda línea ($i = 2$), con los números *1*, *2*, . . ., *6*, se encuentran en la superficie sometida

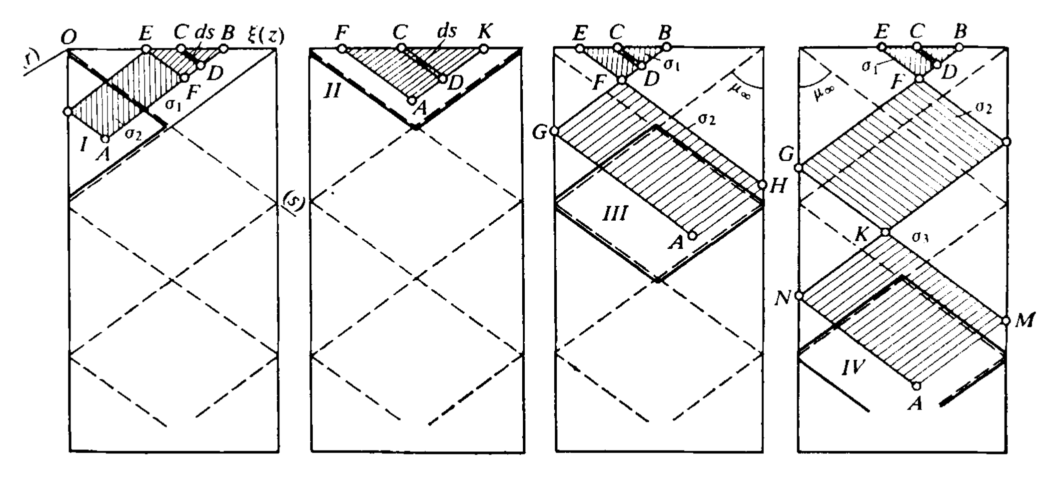


Fig. 9.41. Esquema de la circulación supersónica alrededor de un ala triangular de pequeño alargamiento

a la circulación. En ellas las correspondientes deflexiones fueron calculadas en el problema 9.85 (véase la tabla 9.20).

Hallamos las deflexiones en las células *7*, *8*, . . ., *11*:

$$D_{3j=7} = -h\alpha' [-1{,}0\sqrt{7-1+1} - \sqrt{7-1}) - \ldots - 3{,}5(\sqrt{7-6+1} - \\ - \sqrt{7-6}) = 4{,}062h\alpha';$$

$$D_{3j=8} = -h\alpha' [-1{,}0(\sqrt{8-1+1} - \sqrt{8-1}) + \ldots + \\ + 4{,}062(\sqrt{8-7+1} - \sqrt{8-7})] = 1{,}728h\alpha';$$

$$D_{3j=9} = 1{,}01h\alpha'; \quad D_{3j=10} = 0{,}684h\alpha';$$

$$D_{3j=11} = -h\alpha' [-1{,}0(\sqrt{11-1+1} - \sqrt{11-1}) + \ldots] = 0{,}508h\alpha'.$$

Las células *12*, *13*, . . ., *16* se encuentran en el ala, por lo que las deflexiones:

$$D_{3j=12} = -0{,}5(r+s)\alpha' = -0{,}5(11{,}5h + 1{,}5h)\alpha' = -6{,}5h\alpha';$$

$$D_{3j=13} = -7h\alpha'; \quad D_{3j=14} = -7{,}5h\alpha'; \quad D_{3j=15} = -8h\alpha'; \ldots \\ \ldots D_{3j=16} = -8{,}5h\alpha'.$$

Todas las células de la tercera línea (salvo la célula *1*, donde $D_{3j=1} = 0{,}573$) se encuentran asimismo en el ala, por consiguiente,

$D_{3j=2} = -0{,}5\ (1{,}5h + 2{,}5h)\ \alpha' = -2h\alpha'$; $D_{3j=3} = -2{,}5h\alpha'$,

etc. (véase la tabla 9.20). Con los valores hallados de las deflexiones, empleando (9.604), determinamos en el punto A la función F^{ω_z}. Con ello, para las células 15′ y 16′, situadas en el ala por el lado opuesto de la línea de Mach OB, hacemos $i = -1$, mientras que el valor de $\sqrt{s-i+1} - \sqrt{s-i}$, igual a $\sqrt{3+1-1} + \sqrt{3+1} = 0{,}268$. Teniendo en cuenta este valor y los dados de la tabla 9.20, hallamos

$$\sum\sum D_j B_{\bar{r}m\bar{s}i} = h\alpha' \{(-\sqrt{3+1-1} + \sqrt{3+1})[-7{,}0(\sqrt{16-15+1} - \\ - \sqrt{16-15}) - 7{,}5(\sqrt{16-16+1} - \sqrt{16-16})] + \ldots + (\sqrt{3-3+1} - \\ - \sqrt{3-3})[0{,}573(\sqrt{16-1+1} - \sqrt{16-1}) + \ldots + 9{,}0(\sqrt{16-16+1} - \\ - \sqrt{16-16})]\} = -40{,}49h\alpha'.$$

En virtud de esto $F^{\omega_z} = -(2h/\pi)\ (-40{,}49h\alpha') = 25{,}79h^2\alpha'$.
Para $h = 0{,}06$ y $\alpha' = 1{,}732$ ($M_\infty = 2$), $F^{\omega_z} = 0{,}161$.

9.88. El coeficiente de la diferencia de presión en los trasdós e intradós del ala se puede representar en forma de la serie (9.58) y calcularlo, conociendo el potencial de velocidad, con ayuda de la *integral de Cauchy — Lagrange* (9.44). Introduciendo en esa integral el potencial de velocidad (con mayor precisión, sus derivadas $\partial\varphi/\partial\xi$ y $\partial\varphi/\partial\tau$) y comparando la expresión obtenida con (9.58), hallamos las dependencias

$$p^{qj} = -4(\partial\varphi^{qj}/\partial\xi + p^{*2}\dot{\varphi}^{qj}), \tag{9.605}$$

$$\dot{p}^{qj} = -4(\partial\dot{\varphi}^{qj}/\partial\xi - \varphi^{qj}). \tag{9.606}$$

Con pequeños números de Strouhal ($p^* \to 0$) la relación para p^{qj}, teniendo en cuenta la variación del sentido del eje $O\xi$, toma la forma

$$p^{qj} = 4\partial\varphi^{qj}/\partial\xi. \tag{9.607}$$

Empleando (9.511) y tomando en consideración el cambio del sentido del eje $O\xi$ (el signo antes de la derivada por ξ cambia por el inverso), con las derivadas F^{qj} y $\dot{F}^{q}{}_{j}$, determinamos p^{qj} y $\dot{p}^{qj}$:

$$p^{qj} = (4/\alpha)\ \partial F^{qj}(\xi_M,\ \zeta_M)/\partial\xi_M; \tag{9.608}$$

$$\dot{p}^{qj} = \frac{4}{\alpha'}\left[\frac{\partial \dot{F}^{qj}(\xi_M,\ \zeta_M)}{\partial\xi_M} - \frac{M_\infty^2\xi_M}{\alpha'}\,\frac{\partial F^{qj}(\xi_M,\ \zeta_M)}{\partial\xi_M} - \frac{F^{qj}(\xi_M,\ \zeta_M)}{\alpha'}\right]. \tag{9.609}$$

9.89. Como resultado de la resolución numérica del problema acerca de la circulación inuniforme alrededor del ala se determinan las derivadas de la función F (F^{qj}, $\dot{F}^{qj}$) en cada una de las células, en las que se divide la región de influencia de las fuentes. Podemos tomar, aproximadamente, que la derivada respecto de la coordenada ξ_M

$$\partial F^{qj}/\partial\xi_M \approx [F\xi_M + \Delta\xi_M,\ \zeta_M) - F(\xi_M,\ \zeta_M)]/\Delta\xi_M.$$

Representemos $\Delta\xi_M$ en las coordenadas características (9.514), tomando en consideración que $\xi_M = 0{,}5\ (r + s)$ (hacemos $\xi_{00M} = 0$):

$$\Delta\xi_M = 0{,}5\ [(\bar{r} + 1)\ h + (\bar{s} + 1)\ h] - 0{,}5\ (\bar{r} + \bar{s})\ h = h.$$

Entonces

$$\partial F^{qj}/\partial\xi_M = [F^{qj}(\bar{r}+1,\ \bar{s}+1) - F^{qj}(\bar{r},\ \bar{s})]/h. \tag{9.610}$$

De modo análogo, para la otra derivada hallamos

$$\partial \dot{F}^{qj}/\partial\xi_M = [\dot{F}^{qj}(\bar{r}+1,\ \bar{s}+1) - \dot{F}^{qj}(\bar{r},\ \bar{s})]/h. \tag{9.611}$$

Introducimos (9.610) y (9.611) en (9.608) y (9.609):

$$p^{qj} = [4/(\alpha' h)]\,[F^{qj}(\bar{r}+1,\ \bar{s}+1) - F^{qj}(\bar{r},\ \bar{s})]; \tag{9.612}$$

$$\dot{p}^{qj} = \frac{4}{\alpha'}\left\{\frac{1}{h}\ [\dot{F}^{qj}(\bar{r}+1,\ \bar{s}+1) - \dot{F}^{qj}(\bar{r},\ \bar{s})] - \frac{M_\infty^2\ (\bar{r}+\bar{s})}{2\alpha'}\times\right.$$

$$\times\left[F^{qj}(\bar{r}+1,\ \bar{s}+1) - F^{qj}(\bar{r},\ \bar{s}) - \frac{F^{qj}}{\alpha'}\right]. \tag{9.613}$$

Para aumentar la precisión de los cálculos el número de células, en las que se determinan las derivadas F^{qj} y $\dot{F}^{qj}$, debe ser mayor que el número de células al calcular p^{qj} y $\dot{p}^{qj}$. Con esto, $\Delta\xi_M$ es mayor que la anchura de la célula h en cierto número múltiple n, es decir, $\Delta\xi_M = nh$. Por ello,

$$\frac{\partial F^{qj}}{\partial\xi_M} = \frac{1}{nh}\,[F^{qj}\,[\bar{r}+n,\ \bar{s}+n) - F^{qj}(\bar{r},\ \bar{s})],$$

$$\frac{\partial \dot{F}^{qj}}{\partial\xi_M} = \frac{1}{nh}\,[\dot{F}^{qj}(\bar{r}+n,\ \bar{s}+n) - \dot{F}^{qj}(\bar{r},\ \bar{s})]. \tag{9.614}$$

9.90. Para hallar las derivadas $\partial F^{\omega_z}/\partial\xi_M$ y p^{ω_z} en el punto A calculamos la función F^{ω_z} en el punto vecino A' (véase la fig. 9.40) con coordenadas $\bar{r} = 15h$ y

$\bar{s} = 3h$. Empleando los valores de las deflexiones en la tabla 9.20, hallamos

$$\sum\sum D_j B_{\bar{r}m\bar{s}i} = h\alpha' \{(-\sqrt{3+1-1} + \sqrt{3+1})[-7{,}0(\sqrt{15-1+1} - \\ -\sqrt{15-1}) + \ldots] + (\sqrt{3-3+1} - \sqrt{3-3})[0{,}573(\sqrt{15-1+1} - \\ -\sqrt{15-1}) - \ldots - 8{,}5(\sqrt{15-15+1} - \sqrt{15-15})]\} = -35{,}82h\alpha'.$$

Teniendo en cuenta este valor, $F^{\omega_z} = -(2h/\pi)(-35{,}82h\alpha') = 22{,}81h^2\alpha'$. Calculamos el incremento: $\Delta\xi_M = 0{,}5[(\bar{r}+1)h + \bar{s}h] - 0{,}5(\bar{r}+\bar{s})h = 0{,}5h$. Conforme a esto [véase el valor de $F^{\omega_z}(\bar{r}, \bar{s})$ en el problema 9.87]

$$\partial F^{\omega_z}/\partial\xi_M \approx [1/(0{,}5h)][F^{\omega_z}(\bar{r}, \bar{s}) - F^{\omega_z}(\bar{r}-1, \bar{s})] = 0{,}619.$$

Según (9.608) la derivada $p^{\omega_z} = (4/\alpha')\,5{,}96h\alpha' = 1{,}43$.

9.91. De acuerdo con el planteamiento del problema, determinamos las derivadas p^{α}, p^{ω_z}, $p^{\dot{\alpha}}$ y $p^{\dot{\omega}_z}$ (véase la fig. 9.35) en el punto A ($x = 2{,}86$ m, $z = 0$). Para ello, en correspondencia con (9.608) y (9.609), calculamos los valores de F^{α}, F^{ω_z}, $F^{\dot{\alpha}}$ y $F^{\dot{\omega}_z}$ en el punto prefijado A, haciendo uso de las fórmulas de integración numérica (9.572) y (9.573):

$$F^{q_j} = -(2h/\pi)\sum_{m=1}^{15}\sum_{i=1}^{15} D_{jmi} B_{\bar{r}m\bar{s}i}; \qquad (9.615)$$

$$F^{\dot{q}_j} = -(2h/\pi)\sum_{m=1}^{15}\sum_{i=1}^{15} F_{jmi} B_{\bar{r}m\bar{s}i}. \qquad (9.616)$$

Aquí, los números de las células $m = \bar{r} = 15$ e $i = \bar{s} = 15$ han sido directamente determinadas de la fig. 9.35 según la coordenada adimensional del punto A ($r = 0$): $\xi_{MA} = x_A/(b_0\alpha') = 0{,}33$. Al calcular la derivada F^{α} ($q_i = 1$) tomamos la deflexión para toda la superficie del ala $D_{jmi} = -1$, por esta razón

$$F^{\alpha} = (2h/\pi)\sum_{m=1}^{15}\sum_{i=1}^{15} B_{\bar{r}m\bar{s}i}. \qquad (9.617)$$

Haciendo uso de la fig. 9.35 y la tabla 9.17, obtenemos:

$$\sum_{m=1}^{15}\sum_{i=1}^{15} B_{\bar{r}m\bar{s}i} = (\sqrt{15-8+1} - \sqrt{15-8})[(\sqrt{15-12+1} - \sqrt{15-12}) + \ldots \\ \ldots + (\sqrt{15-15+1} - \sqrt{15-15})] + \ldots + (\sqrt{15-15+1} - \sqrt{15-15}) \times \\ \times [(\sqrt{15-8+1} - \sqrt{15-9-1}) + \ldots] = 7{,}729;$$

$$F^{\alpha} = (2h/\pi)\,7{,}729 = 0{,}2461.$$

Para determinar la derivada $\partial F^{\alpha}/\partial\xi_M$ en el punto A hallamos el valor de F^{α} en el punto vecino A' (véase la fig. 9.35 y la tabla 9.17). Calculamos:

$$\sum_{m=1}^{14}\sum_{i=1}^{15} B_{\bar{r}m\bar{s}i} = (\sqrt{15-8+1} - \sqrt{15-8})[(\sqrt{14-12+1} - \\ -\sqrt{14-12}) + \ldots + (\sqrt{14-14+1} - \sqrt{14-14})] + \ldots \\ + (\sqrt{15-15+1} - \sqrt{15-15})[(\sqrt{14-8+1} - \sqrt{14-8}) + \ldots \\ \ldots + (\sqrt{14-14+1} - \sqrt{14-14})] = 7{,}189.$$

Empleando (9.617), hallamos $F^{\alpha}=(2h/\pi)\sum_{m=1}^{14}\sum_{i=1}^{15}B_{\bar{r}m\bar{s}i}=0{,}229.$

Conforme a (9.614) y (9.608)

$$\partial F^{\alpha}/\partial\xi_M = [1/(0{,}5h)]\,[F^{\alpha}(\bar{r},\bar{s})-F^{\alpha}(\bar{r}-1,\bar{s})]=0{,}684;$$
$$p^{\alpha}=(4/\alpha')\,\partial F^{\alpha}/\partial\xi_M=1{,}58.$$

Calculamos las funciones F^{ω_z}, $\partial F^{\omega_z}/\partial\xi_M$ y p^{ω_z} en el punto A (para ello utilizamos la fig. 9.35 y los datos sobre las deflexiones D_3 en la tabla 9.17):

$$F^{\omega_z}=-(2h/\pi)\sum_{m=1}^{15}\sum_{i=1}^{15}D_{3mi}B_{\bar{r}m\bar{s}i};$$
$$\sum_{m=1}^{15}\sum_{i=1}^{15}D_{3mi}B_{\bar{r}m\bar{s}i}=h\alpha'\{(\sqrt{15-8+1}-\sqrt{15-8})\times$$
$$\times[-1{,}54(\sqrt{15-12+1}-\sqrt{15-12})-\ldots-3{,}04(\sqrt{15-15-1}-$$
$$-\sqrt{15-15})]+\ldots+(\sqrt{15-15+1}-\sqrt{15-15})[-3{,}04(\sqrt{15-8+1}-$$
$$-\sqrt{15-8})-\ldots-6{,}54(\sqrt{15-15+1}-\sqrt{15-15})]\}=-34{,}32h\alpha';$$
$$F^{\omega_z}(\bar{r},\bar{s})=-(2h/\pi)(-34{,}32h\alpha')=0{,}09465.$$

Calculamos la función F^{ω_z} en el punto A' (véase la fig. 9.35 y la tabla 9.17):

$$F^{\omega_z}(\bar{r}-1,\bar{s})=-(2h/\pi)\sum_{m=1}^{14}\sum_{i=1}^{15}D_{3mi}B_{\bar{r}m\bar{s}i};$$
$$\sum_{m=1}^{14}\sum_{i=1}^{15}D_{3mi}B_{\bar{r}m\bar{s}i}=h\alpha'\{(\sqrt{15-8+1}-\sqrt{15-8})[-1{,}54\times$$
$$\times(\sqrt{14-21+1}-\sqrt{14-12})-\ldots-2{,}54(\sqrt{14-14+1}-$$
$$-\sqrt{14-14})]+\ldots+(\sqrt{15-15+1}-\sqrt{15-15})[-3{,}04(\sqrt{14-8+1}-$$
$$-\sqrt{14-8})-\ldots-6{,}04(\sqrt{14-14+1}-\sqrt{14-14})]\}=-29{,}54h\alpha';$$
$$F^{\omega_z}(r-h,\bar{s})=-(2h/\pi)(-29{,}54h\alpha')=0{,}08145.$$

Calculamos las derivadas

$$\partial F^{\omega_z}/\partial\xi_M=[1/(0{,}5h)]\,[F^{\omega_z}(\bar{r},\bar{s})-F^{\omega_z}(\bar{r}-1,\bar{s})]=0{,}528;$$
$$p^{\omega_z}=(4/\alpha')\,0{,}528=1{,}219.$$

Empleando los datos sobre las deflexiones E_{1mi} en la tabla 9.18, efectuamos el cálculo de la derivada en el punto A:

$$F^{\dot{\alpha}}(\bar{r},\bar{s})=-(2h/\pi)\sum_{m=1}^{15}\sum_{i=1}^{15}E_{1mi}B_{\bar{r}m\bar{s}i}.$$

El cálculo numérico de las sumas $\sum_{m=1}^{15}\sum_{i=1}^{15}E_{1mi}B_{\bar{r}m\bar{s}i}$ es el mismo que para las sumas $\sum_{m=1}^{15}\sum_{i=1}^{15}D_{3mi}B_{\bar{r}m\bar{s}i}$, pero con la diferencia de que los factores de los

parámetros $(\sqrt{15-m+1}-\sqrt{15-m})$ son las deflexiones E_{1mi}, tomadas para las respectivas células en la tabla 9.18:

$$\sum_{m=1}^{15}\sum_{i=1}^{15} E_{1mi}B_{\bar{r}m\bar{s}i} = -h\alpha'\,[0{,}182\,(2{,}054\cdot 0{,}268+\ldots+4{,}055\cdot 1{,}0)+\ldots$$
$$\ldots+1{,}0\,(4{,}055\cdot 0{,}182+\ldots+8{,}724\cdot 1{,}0)] = -46{,}92h\alpha';$$
$$F^{\dot{\bar{\alpha}}}(\bar{r},\ \bar{s}) = -(2h/\pi)\,(-46{,}92h\alpha') = 0{,}1294.$$

Empleando los datos de las tablas 9.18 y 9.19, de modo análogo determinamos en el punto A':

$$F^{\dot{\bar{\alpha}}}(\bar{r}-1.\ \bar{s}) = -(2h/\pi)\sum_{m=1}^{14}\sum_{i=1}^{15} E_{1mi}B_{\bar{r}m\bar{s}i};$$
$$\sum_{m=1}^{14}\sum_{i=1}^{15} E_{1mi}B_{\bar{r}m\bar{s}i} = -h\alpha'\,[0{,}182\cdot(2{,}054\cdot 0{,}318+\ldots+3{,}388\cdot 1{,}0)+\ldots$$
$$\ldots+1{,}0\,(4{,}055\cdot 0{,}197+\ldots+8{,}057\cdot 1{,}0)] = -39{,}44h\alpha';$$
$$F^{\dot{\bar{\alpha}}}(\bar{r}-1,\ \bar{s}) = -(2h/\pi)\,(-39{,}44h\alpha') = 0{,}1088.$$

Calculamos:

$$\partial F^{\dot{\bar{\alpha}}}/\partial\xi_M = [1/(0{,}5h)]\,[F^{\dot{\bar{\alpha}}}(\bar{r},\ \bar{s}) - F^{\dot{\bar{\alpha}}}(\bar{r}-1,\ \bar{s})] = 0{,}824.$$

De acuerdo con (9.609) hallamos la derivada $p^{\dot{\bar{\alpha}}} = 0{,}1606$.

En virtud de los valores de E_{3mi}, aducidos en la tabla 9.18, hallamos en el punto A

$$F^{\dot{\omega}_z}(\bar{r},\ \bar{s}) = -(2h/\pi)\sum_{m=1}^{15}\sum_{i=1}^{15} E_{3mi}B_{\bar{r}m\bar{s}i}.$$

Con esto, la suma $\sum_{m=1}^{15}\sum_{i=1}^{15} E_{3mi}B_{\bar{r}m\bar{s}i}$ resulta ser igual que la obtenida más arriba, pero con la diferencia de que los coeficientes de los parámetros $(\sqrt{15-m+1}-\sqrt{15-m})$ son las deflexiones E_{3mi} tomadas en la tabla 9.18:

$$\sum_{m=1}^{15}\sum_{i=1}^{15} E_{3mi}B_{\bar{r}m\bar{s}i} = -h\alpha'\,[0{,}182\,(0{,}274\cdot 0{,}268+\ldots+1{,}068\cdot 1{,}0)+\ldots$$
$$\ldots+1{,}0\,(1{,}068\cdot 0{,}182+\ldots+4{,}944\cdot 1{,}0)] = -19{,}49h\alpha';$$
$$F^{\dot{\omega}_z}(\bar{r},\ \bar{s}) = -(2h/\pi)\,(-19{,}49h\alpha') - 0{,}05376.$$

En el punto A' (véase la fig. 9.35) determinamos

$$F^{\dot{\omega}_z}(\bar{r}-1,\ \bar{s}) = -(2h/\pi)\sum_{m=1}^{14}\sum_{i=1}^{15} D_{3mi}B_{\bar{r}m\bar{s}i}.$$

Al calcular las sumas $\sum\sum$, tenemos en cuenta que su valor puede ser obtenido a partir de las correspondientes expresiones, halladas con anterioridad, mediante

la sustitución de los coeficientes de $(\sqrt{14-m+1} - \sqrt{14-m}) = 0{,}182$; $0{,}197, \ldots, 1{,}0$ por los valores de las deflexiones D_{3mi} tomadas en la tabla 9.18:

$$\sum_{m=1}^{14}\sum_{i=1}^{15} D_{3mi}B_{\bar{r}m\bar{s}i} = -h\alpha'\,[0{,}182\,(0{,}274\cdot 0{,}318 + \ldots + 0{,}746\cdot 1{,}0) + \ldots$$

$$\ldots + 1{,}0\,(1{,}068\cdot 0{,}197 + \ldots + 4{,}217\cdot 1{,}0)] = -15{,}63h\alpha';$$

$$\dot{F}^{\omega_z}(\bar{r}-1,\ \bar{s}) = -(2h/\pi)\,(-15{,}63h\alpha') = 0{,}04309.$$

Hallemos las derivadas:

$$\partial\dot{F}^{\omega_z}/\partial\xi_M = (1{,}05h)\,[\dot{F}^{\omega_z}(\bar{r},\ \bar{s}) - \dot{F}^{\omega_z}(\bar{r}-1,\ \bar{s})] = 0{,}4268;\quad p^{\omega_z} = -0{,}06986.$$

9.92. Haciendo uso de (9.530) calculamos en el punto dado A ($x = 2{,}86$ m, $z = 0$): $\xi_{M1} = 0{,}33$; $\zeta_{M1} = 0$ (coordenadas adimensionales del punto A):

$$a = (1 - \operatorname{ctg}\chi_0\alpha')/(1 + \operatorname{ctg}\chi_0\alpha') = -0{,}268$$

y la derivada $F^\alpha = 0{,}2458$.

Derivemos (9.530) respecto de ξ_M:

$$\frac{\partial F^\alpha}{\partial\xi_M} = \frac{1}{\pi\sqrt{-a}}\left\{(1-a)\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{-a\,(\xi_{M1}-\zeta_{M1})}{\xi_{M1}+\zeta_{M1}}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\xi_{M1}-\zeta_{M1}}{-a\,(\xi_{M1}+\zeta_{M1})}} + \frac{\pi}{2}\right] + 2\zeta_{M1}\sqrt{\frac{-a}{\xi_{M1}^2-\zeta_{M1}^2}}\right\}. \quad (9.618)$$

Para $\zeta_{M1} = 0$ las derivadas

$$\partial F^\alpha/\partial\xi_M = [1/(\pi\sqrt{-a}\,]\,[(1-a)\operatorname{arctg}\sqrt{-a} - (1-a)\times$$

$$\times(\operatorname{arctg}\sqrt{-1/a} - \pi/2)] = 0{,}7453;$$

$$p^\alpha = (4/\alpha')\,\partial F^\alpha/\partial\xi_M = 1{,}72. \quad (9.618')$$

Conforme al resultado obtenido la derivada p^α es igual en todos los puntos, situados por el eje $\zeta_M = 0$, del ala triangular con bordes supersónicos.

Para determinar la derivada $\dot{F}^\alpha$ empleamos la fórmula (9.533), de acuerdo con la cual

$$\dot{F}^{\bar{\alpha}} = \frac{M_\infty^2}{4\pi\alpha'}\Bigg[\underbrace{\int_0^{r_1}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{ra}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{A} + \underbrace{\int_{s_1a}^{0}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{r/a}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{B} +$$

$$+ \underbrace{\int_{sa}^{0}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{r/a}^{s_1}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{C} + \underbrace{\int_0^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{ra}^{s_1}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{D}. \quad (9.619)$$

Las integrales respecto de s se calculan en forma explícita:

$$A = 2\int_0^{r_1}\frac{r\sqrt{s_1-ra}}{\sqrt{r_1-r}}\,dr;\qquad D = \frac{2}{3}\int_0^{s_1}\frac{(ra+2s_1)\sqrt{s_1-ra}}{\sqrt{r_1-r_1}}\,dr; \quad (9.620)$$

$$B = 2\int_{s_1a}^{0}\frac{r\sqrt{s_1-r/a}}{\sqrt{r_1-r}}\,dr;\qquad C = \frac{2}{3}\int_{s_1a}^{0}\frac{(r/a+2s_1)\sqrt{s_1-r/a}}{\sqrt{r_1-r}}\,dr. \quad (9.621)$$

A continuación calculamos:

$$F=\int_0^{r_1}\frac{\sqrt{s_1-ra}}{\sqrt{r_1-r}}\,dr=\sqrt{s_1r_1}+\frac{-ra+s_1}{\sqrt{-a}}\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{ar_1}{s_1}};\qquad(9.622)$$

$$G=\int_{s_1a}^{0}\frac{\sqrt{s_1-r/a}}{\sqrt{r_1-r}}\,dr=-\sqrt{s_1r_1}-\frac{-r_1/a+s_1}{\sqrt{-1/a}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{r_1}{as_1}}-\frac{\pi}{2}\right);\qquad(9.623)$$

$$D=(a/3)\,A+(4s_1/3)\,F;\qquad(9.624)$$

$$C=[1/(3a)]\,B+(4s_1/3)\,G.\qquad(9.625)$$

Así, pues,

$$\dot{\bar{F^{\alpha}}}=[\mathrm{M}_\infty/(4\pi\alpha')]\,\{A\,(1+a/3)+B\,[1+(1/3a)]+(4s_1/3)\,(G+F)\}.\qquad(9.626)$$

Las integrales A y B las determinamos aplicando el método numérico, tomando en consideración que $a=-0{,}268$; $r_1=s_1=13h$; $A=0{,}1967$; $B=-0{,}00368$. A continuación, calculamos:

$$G+F=-\frac{-r_1/a+s_1}{\sqrt{-1/a}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{r_1}{as_1}}-\frac{\pi}{2}\right)+$$
$$+\frac{-r_1a+s_1}{\sqrt{-a}}\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{ar_1}{s_1}}=0{,}7719;\qquad(9.627)$$

$\dot{\bar{F^{\alpha}}}=0{,}09556$ y determinamos la derivada

$$\frac{\partial \dot{\bar{F^{\alpha}}}}{\partial\xi_{\mathrm{M}}}=\frac{\mathrm{M}_\infty^2}{4\pi\alpha'}\left\{\frac{\partial A}{\partial\xi_{\mathrm{M}}}(1+a/3)+\frac{\partial B}{\partial\xi_{\mathrm{M}}}[1+(1/3a)]+\right.$$
$$\left.+\frac{4}{3}\left[(G+F)+s_1\frac{\partial(G+F)}{\partial\xi_{\mathrm{M}}}\right]\right\}.\qquad(9.628)$$

Hallamos:

$$\partial A/\partial\xi_{\mathrm{M}}=2{,}152;\quad \partial B/\partial\xi_{\mathrm{M}}=0{,}0208;$$

$$\frac{\partial(G+F)}{\partial\xi_{\mathrm{M}}}=\frac{1-a}{\sqrt{-a}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{ar_1}{s_1}}-\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{r_1}{as_1}}+\frac{\pi}{2}\right)=2{,}338.\qquad(9.629)$$

Calculamos $\partial\dot{\bar{F^{\alpha}}}/\partial\xi_{\mathrm{M}}=0{,}7305$ y, de acuerdo con (9.609), obtenemos

$$\dot{\bar{p^{\alpha}}}=(4/\alpha')\,[\partial\dot{\bar{F^{\alpha}}}(\xi_{\mathrm{M}1},\zeta_{\mathrm{M}1})/\partial\xi_{\mathrm{M}}-$$
$$-(\mathrm{M}_\infty^2\xi_{\mathrm{M}1}/\alpha')\,\partial F^{\alpha}(\xi_{\mathrm{M}1},\zeta_{\mathrm{M}1})/\partial\xi_{\mathrm{M}}-F^{\alpha}(\xi_{\mathrm{M}},\zeta_{\mathrm{M}})/\alpha']=0{,}0476.\qquad(9.630)$$

9.93. Las derivadas del coeficiente de la caída de presión se determinan con las fórmulas (9.605) y (9.606), las que al pasar a los ejes $\xi_{\mathrm{M}}=\xi/\alpha'$; $\zeta_{\mathrm{M}}=\zeta$ y al cambiar el sentido del eje $O\xi$ tienen la forma

$$p^{q_j}=(4/\alpha')\,\partial\varphi^{q_j}/\partial\xi_{\mathrm{M}};\quad \dot{p}^{q_j}=4\,[(1/\alpha')\,\partial\dot{\varphi}^{q_j}/\partial\xi_{\mathrm{M}}+\varphi^{q_j}].\qquad(9.631)$$

Durante la resolución del problema 9.76 fueron determinadas las funciones

$$\left.\begin{aligned}&\varphi^{\alpha}=\xi_M;\quad \varphi^{\omega_x}=\xi_M\zeta_M;\quad \varphi^{\omega_z}=(\alpha'/2)\,\xi_M^2;\\&\varphi^{\dot{\alpha}}=-[M_\infty^2/(2\alpha')]\,\xi_M^2;\quad \varphi^{\dot{\omega}_x}=-[M_\infty^2/(2\alpha')]\,\zeta_M\xi_M^2;\\&\varphi^{\dot{\omega}_z}=-(M_\infty^2/6)\,\xi_M^3.\end{aligned}\right\}\qquad(9.632)$$

Para el punto A calculamos

$$\xi_M=x/(b_0\alpha')=-2/(4\sqrt{M_\infty^2-1})=0{,}2887;\quad \zeta_M=z/b_0=0{,}5$$

y hallamos las derivadas: $\varphi^{\alpha}=0{,}2887$; $\varphi^{\omega_x}=0{,}1444$; $\varphi^{\omega_z}=0{,}07218$; $\varphi^{\dot{\alpha}}=$ $=-0{,}09624$; $\varphi^{\dot{\omega}_x}=-0{,}04812$; $\varphi^{\dot{\omega}_z}=-0{,}016$;

$$\partial\varphi^{\alpha}/\partial\xi_M=1;\quad \partial\varphi^{\omega_x}/\partial\xi_M=\zeta_M=0{,}5;\quad \partial\varphi^{\omega_z}/\partial\xi_M=\alpha'\xi_M=0{,}5;$$

$$\partial\varphi^{\dot{\alpha}}/\partial\xi_M=-(M_\infty^2/\alpha')\,\xi_M=-0{,}667;\quad \partial\varphi^{\dot{\omega}_x}/\partial\xi_M=-(M_\infty^2/\alpha')\,\xi_M\zeta_M=-0{,}334;$$

$$\partial\varphi^{\dot{\omega}_z}/\partial\xi_M=-(M_\infty^2/2)\,\xi_M^2=-0{,}1667;\quad p^{\alpha}=4/\alpha'=4/\sqrt{M_\infty^2-1}=2{,}309;$$

$$p^{\omega_x}=(4/\alpha')\,\zeta_M=1{,}154;\quad p^{\omega_z}=(4/\alpha')\,\alpha'\xi_M=4\xi_M=1{,}155;$$

$$p^{\dot{\alpha}}=-4\xi_M/\alpha'^2=-0{,}385;\quad p^{\dot{\omega}_x}=-(4/\alpha'^2)\,\xi_M\zeta_M=-0{,}1925;$$

$$p^{\dot{\omega}_z}=-2\xi_\infty^2/\alpha'=-0{,}09624.$$

Calculamos las derivadas F^{q_j} y $F^{\dot{q}_j}$ que, en correspondencia con (9.511), determinan las funciones φ^{q_j} y $\varphi^{\dot{q}_j}$:

$$F^{\alpha}=\varphi^{\alpha}=0{,}2887;\quad F^{\omega_x}=\varphi^{\omega_x}=-0{,}1435;\quad F^{\omega_z}=\varphi^{\omega_z}=0{,}07218;$$

$$F^{\dot{\alpha}}=\varphi^{\dot{\alpha}}+(M_\infty^2\xi_M/\alpha')\,F^{\alpha}=0{,}09625;$$

$$\partial F^{\dot{\alpha}}/\partial\xi_M=\partial\varphi^{\dot{\alpha}}/\partial\xi_M+(M_\infty^2/\alpha')\,\varphi^{\alpha}+(M_\infty^2/\alpha'\xi_M)\,\partial F^{\alpha}/\partial\xi_M=0{,}667;$$

$$\partial F^{\dot{\omega}_x}/\partial\xi_M=\partial\varphi^{\dot{\omega}_x}/\partial\xi_M+(M_\infty^2/\alpha')\,\varphi^{\omega_x}+(M_\infty^2/\alpha')\,\xi_M\,\partial\varphi^{\omega_x}/\partial\xi_M=0{,}3334;$$

$$\partial F^{\dot{\omega}_z}/\partial\xi_M=\partial\varphi^{\dot{\omega}_z}/\partial\xi_M+(M_\infty^2/\alpha')\,\varphi^{\omega_z}+(M_\infty^2/\alpha')\,\xi_M\,\partial\varphi^{\omega_z}/\partial\xi_M=0{,}3334.$$

Analicemos las derivadas (9.609): $p^{\dot{\alpha}}=-0{,}385$; $p^{\dot{\omega}_x}=0{,}1925$; $p^{\dot{\omega}_z}=$ $=-0{,}09264$.

9.94. Calculemos las coordenadas adimensionales del punto D (véase la fig. 9.30):

$$\xi_M=x/(b_0/\alpha')=3/(4\sqrt{M_\infty^2-1})=0{,}433;\quad \zeta_M=-z/b_0=-0{,}25.$$

Con la fórmula (9.548) calculamos la función F^{α}: $F^{\alpha}=0{,}3743$ (0,2887). Derivemos (9.548) respecto de ξ_M:

$$\partial F^{\alpha}/\partial\xi_M=(2/\pi)\,\mathrm{arctg}\sqrt{-\zeta_M/(\xi_M+\zeta_M)}=0{,}5497.\qquad(9.633)$$

Según el valor de la derivada hallamos

$$p^{\alpha} = (4/\alpha')\, \partial F^{\alpha}/\partial \xi_M = 1{,}27\ (2{,}309). \tag{9.634}$$

Para comparar se muestran entre paréntesis los correspondientes valores para el ala rectangular de envergadura infinita. La derivada F^{ω_z} se calcula con (9.550). Hallemos:

$$r_1 = \xi_M - \zeta_M = 0{,}683; \quad s_1 = \xi_M + \zeta_M = 0{,}183; \quad r_1 - s_1 = 0{,}5.$$

Dividamos el intervalo $r_1 - s_1 = 0{,}5$ en segmentos de una anchura $h = 0{,}05$ y, después de integrar (9.551), obtenemos $E = 0{,}7477$.

Haciendo uso de (9.553) determinamos $C(r_1, s_1) = 0{,}2868$. En definitiva, según (9.554), hallamos $F^{\omega_z}(r_1, s_1) = 0{,}1089$.

Determinamos la derivada:

$$\partial F^{\omega_z}/\partial \xi_M = [\alpha'/(4\pi)]\,[(2/3)\,\partial E/\partial \xi_M + \partial C/\partial \xi_M]. \tag{9.635}$$

Examinemos el valor de la función $E(r_1 - h, s_1)$ en el punto con coordenadas $r_1 - h, s_1$, haciendo $h = 0{,}05$. La integración numérica de (9.551) en los límites $r_1 - h = 0{,}633$ y $s_1 = 0{,}183$ proporciona $E(r_1 - h, s_1) = 0{,}6501$. La correspondiente derivada $\partial E/\partial \xi_M = 4{,}736$.

Calculamos la derivada C (9.553):

$$\partial C/\partial \xi_M = (4/3)\,[\sqrt{2(r_1 - s_1)\,s_1} + (r_1 + 3s_1)\operatorname{arctg}\sqrt{(r_1 - s_1)/(2s_1)}] = 1{,}988. \tag{9.636}$$

Con arreglo a los datos obtenidos

$$\partial F^{\omega_z}/\partial \xi_M = 0{,}7095; \quad p^{\omega_z} = (4/\alpha')\,\partial F^{\omega_z}/\partial \xi_M = 1{,}177\ (1{,}732). \tag{9.637}$$

En virtud de (9.556), tenemos

$$F^{\dot{\alpha}} = \frac{M_\infty^2}{4\pi\alpha'}\Bigg(\underbrace{\int_{s_1}^{r_1}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1 - r}}\int_{-r}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1 - s}}}_{E} + \underbrace{\int_{s_1}^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1 - r}}\int_{-r}^{s_1}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1 - s}}}_{B}\Bigg). \tag{9.638}$$

Aquí, E se calcula con (9.551); la función $B = -E/3 + C$, donde C se halla de (9.553). De este modo, en el punto A

$$\partial F^{\dot{\alpha}}/\partial \xi_M = [M_\infty^2\,(4\pi\alpha')]\,[(2/3)\,\partial E/\partial \xi_M + \partial C/\partial \xi_M] = 0{,}9461;$$

$$p^{\dot{\alpha}} = (4/\alpha')\,[\partial F^{\dot{\alpha}}/\partial \xi - (\partial F^{\alpha}/\partial \xi)\,\xi M_\infty^2/\alpha' - F^{\alpha}/\alpha'] = 0{,}4164.$$

Determinemos las derivadas $F^{\dot{\omega}_z}$ y $p^{\dot{\omega}_z}$. Por analogía con (9.638)

$$F^{\dot{\omega}_z} = \frac{M_\infty^2}{8\pi}\Bigg(\underbrace{\int_{s_1}^{r_1}\frac{r^2\,dr}{\sqrt{r_1 - r}}\int_{-r}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1 - s}}}_{F} + 2\underbrace{\int_{s_1}^{r_1}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1 - r}}\int_{-r}^{s_1}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1 - s}}}_{G} +$$

$$+ \underbrace{\int_{s_1}^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1 - r}}\int_{-r}^{s_1}\frac{s^2\,ds}{\sqrt{s_1 - s}}}_{H}\Bigg).$$

Aquí,

$$\int_{-r}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{s_1-s}} = 2\sqrt{s_1+r}; \quad J = \int_{s_1}^{r_1} \frac{r^2\sqrt{s_1+r}\,dr}{\sqrt{r_1-r}}; \quad F = 2J;$$

$$\int_{-r}^{s_1} \frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}} = \frac{2}{3}(-r+2s_1)\sqrt{s_1+r}; \quad G = -\frac{4}{3}J + \frac{4}{3}s_1E;$$

$$\int_{-r}^{s_1} \frac{s^2\,ds}{\sqrt{s_1-s}} = \frac{2}{15}(3r^2+4s_1r+8s_1^2)\sqrt{s_1+r}; \quad H = \frac{2}{5}J + \frac{4}{15}s_1E + \frac{4}{5}s_1C.$$

Así, pues,

$$\dot{F}^{\omega_z} = [M_\infty^2/(10\pi)]\,[4J/3 + s_1(2E + C)]. \tag{9.638'}$$

Para $s_1 = 0{,}183$ y $r_1 = 0{,}683$ la integral $J = 0{,}1966$. Los valores de E y C se han determinado más arriba: $E = 0{,}7477$; $C = 0{,}2868$. Teniendo en cuenta los datos obtenidos $\dot{F}^{\omega_z}(r_1, s_1) = 0{,}07493$. Determinamos la derivada:

$$\partial\dot{F}^{\omega_z}/\partial\xi_M = [M_\infty^2/(10\pi)]\,[(4/3)\,\partial J/\partial\xi_M + 2E + C + (2\partial E/\partial\xi_M + \partial C/\partial\xi_M)\,s_1].$$

Calculemos el valor de la función $J(r_1 - h, s_1)$ en el punto con las coordenadas $r_1 - h$, s_1 para $h = 0{,}5$. La integración numérica nos da el valor $J(r_1 - h, s_1) = 0{,}1538$ y la correspondiente derivada $\partial J/\partial\xi_M = 1{,}713$. Más arriba hemos hallado los valores de $E = 0{,}7477$; $\partial E/\partial\xi_M = 4{,}736$; $C = 0{,}2868$; $\partial C/\partial\xi_M = 1{,}988$. Teniendo en cuenta estos valores $\partial\dot{F}^{\omega_z}/\partial\xi_M = 0{,}7462$; $p^{\dot{\omega}_z} = -0{,}055$.

La derivada F^{ω_x} se calcula con (9.555). El ámbito de integración σ se determina por el área $ABCD$ con relación a los ejes r, s que pasan por el punto O' en el punto medio del borde de ataque (véase la fig. 9.30). Entonces,

$$F^{\omega_x} = -\frac{1}{4\pi}\Bigg(\underbrace{\int_{r_C}^{r_D}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{s_E}^{s_F}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{E} - \underbrace{\int_{r_C}^{r_D}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{s_E}^{s_F}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{B}\Bigg); \tag{9.639}$$

$$s_E = -r; \quad s_F = s_D = s_1; \quad r_D = r_1.$$

Introducimos las anotaciones:

$$D = \int_{s_2-2\zeta_C}^{r_1} \frac{r\sqrt{s_1+r}}{\sqrt{r_1-r}}\,dr; \quad E = 2D; \tag{9.640}$$

$$B = \frac{2}{3}\Bigg(-D + 2s_1\int_{s_1-2\zeta_C}^{r_1}\frac{\sqrt{s_1+r}}{\sqrt{r_1-r}}\,dr\Bigg); \tag{9.641}$$

$$C = \frac{4s_1}{3}\left[\sqrt{2(s_1-\zeta_C)(r_1-s_1+2\zeta_C)} + (r_1+s_1)\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{r_1-s_1+2\zeta_C}{2(s_1-\zeta_C)}}\right]. \tag{9.642}$$

Así, pues,

$$F^{\omega_x} = -[1/(4\pi)]\,(E-B) = -[1/(4\pi)]\,(8D/3 - C). \tag{9.643}$$

Dividamos el segmento $CD = r_1 - s_1 + 2\zeta_C$ en $n = 10$ bandas de una anchura $h = (r_1 - s_1 + 2\zeta_C)/n$, considerando que para el punto D las nuevas coordenadas son $x = 3$ m; $z = 3$ m ($\xi_M = 0{,}433$; $\zeta_M = 3/4 = 0{,}75$). Hallamos:

$$r_1 = \xi_1 - \zeta_M = -0{,}317; \quad s_1 = \xi_M + \zeta_M = 1{,}183; \quad \zeta_C = 1;$$
$$r_1 - s_1 + 2\zeta_C = 0{,}5; \quad h = 0{,}05.$$

La integración numérica nos da el valor $D(r_1, s_1) = -0{,}435$.

Calculamos: $C = 1{,}854$; $F^{\omega x}(r_1, s_1) = 0{,}24$. Determinamos la derivada:

$$\partial F^{\omega x}/\partial \xi_M = -[1/(4\pi)]\,[(8/3)\,\partial D/\partial \xi_M - \partial C/\partial \xi_M]. \tag{9.644}$$

Para el punto con coordenadas $r_1 - h = -0{,}367$; $s_1 = 1{,}183$, mediante la integración numérica, calculamos $D(r_1 - h, s_1) = -0{,}4214$. La correspondiente derivada $\partial D/\partial \xi_M = [1/(0{,}5h)]\,(-0{,}435 + 0{,}4214) = -0{,}542$. A continuación, hallamos

$$\frac{\partial C}{\partial \xi_M} = \frac{4}{3}\Big[\sqrt{2(s_1 - \zeta_C)(r_1 - s_1 + 2\zeta_C)} + (r_1 + 3s_1)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{r_1 - s_1 + 2\zeta_C}{2(s_1 - \zeta_C)}}\Big] = 4{,}29; \tag{9.645}$$

$$\partial F^{\omega x}/\partial \xi_M = 0{,}456; \quad p^{\omega x} = (4/\alpha')\,\partial F^{\omega x}/\partial \xi_M = 1{,}053\,(1{,}732).$$

Calculemos las derivadas $\partial \dot{F}^{\omega x}/\partial \xi_M$ y $\dot{p}^{\omega x}$. Por analogía con (9.639), tenemos:

$$\dot{F}^{\omega x} = -\frac{M_\infty^2}{8\pi\alpha'}\Big(\underbrace{\int_{s_1-2\zeta_C}^{r_1} \frac{r^2\,dr}{\sqrt{r_1 - r}} \int_{-r}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{s_1 - s}}}_{E'} - \underbrace{\int_{s_1-2\zeta_C}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{r_1 - r}} \int_{-r}^{s_1} \frac{s^2\,ds}{\sqrt{s_1 - s}}}_{B'}\Big); \tag{9.646}$$

$$\int_{-r_1}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{s_1 - s}} = 2\sqrt{s_1 + r};$$

$$D' = \int_{s_1-2\zeta_C}^{r_1} \frac{r^2\sqrt{s_1 + r}}{\sqrt{r_1 - r}}\,dr; \quad E' = 2D'; \tag{9.647}$$

$$\int_{-r}^{s_1} \frac{s^2\,ds}{\sqrt{s_1 - s}} = \frac{2}{15}\,(3r^2 + 4s_1 r + 8s_1^2)\sqrt{s_1 + r}; \tag{9.648}$$

$$B' = (2/5)\,D' + (8/15)\,s_1 D + (4/5)\,s_1 C.$$

Así, pues,

$$\dot{F}^{\omega x} = -[M_\infty^2\,(40\pi\alpha')]\,[8D' - (8/3)\,s_1 D - 4s_1 C]. \tag{9.649}$$

La integración numérica de D' (9.647) dentro de los límites $s_1 - 2\zeta_C = -0{,}817$ y $r_1 = 0{,}317$, con el paso $h = 0{,}05$, nos proporciona el valor $D'(r_1, s) = 0{,}2469$.

Los valores de D y C de (9.640) y (9.642) se han determinado más arriba: $D = -0{,}435$; $C = 1{,}854$. Teniendo en cuenta dichos valores $\dot{F}^{\omega x}(r_1, s_1) = 0{,}09974$, hallamos la derivada:

$$\frac{\partial \dot{F}^{\omega x}}{\partial \xi_M} = -\frac{M_\infty^2}{40\pi\alpha'}\left[8\frac{\partial D'}{\partial \xi_M} - \frac{8}{3}\left(D + s_1\frac{\partial D}{\partial \xi_M}\right) - 4\left(C + s_1\frac{\partial C}{\partial \xi_M}\right)\right]. \quad (9.650)$$

Para determinar la derivada $\partial D'/\partial \xi_M$ calculemos $D'(r_1 - h, s_1)$ en el punto con coordenadas $r_1 - h = -0{,}367$; $s_1 = 1{,}183$.

La integración numérica de (9.647) da como resultado $D'(r_1 - h_1, s_1) = 0{,}2496$. Ya que $D'(r_1, s_1) = 0{,}2469$, $\partial D'/\partial \xi_M = [1/(0{,}5h)]\,(0{,}2469 - 0{,}2496) = -0{,}1096$.

Más arriba fueron calculadas $D = -0{,}435$; $\partial D/\partial \xi_M = -0{,}542$; $C = 1{,}854$; $\partial C/\partial \xi_M = 4{,}29$. Tomando en consideración estos datos $\partial \dot{F}^{\omega x}/\partial \xi_M = 0{,}473$; $\dot{p}^{\omega x} = -0{,}2807$.

9.95. Realizamos los correspondientes cálculos con las fórmulas (9.555) y (9.556).

Zona I (véase la fig. 9.31). Para esta zona, en el punto A,

$$F^\alpha = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{s_1 a}^{r_1}\frac{\partial r}{\sqrt{r_1 - r}}\int_{r/a}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1 - s}}}_{G_I};$$

$$\dot{F}^{\bar{\alpha}} = \frac{M_\infty^2}{4\pi\alpha'}\Bigg(\underbrace{\int_{s_1 a}^{r_1}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1 - r}}\int_{r/a}^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1 - s}}}_{A_I} + \underbrace{\int_{s_1 a}^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1 - r}}\int_{r/a}^{s_1}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1 - s}}}_{B_I}\Bigg).$$

La integral F^α se determina con (9.537). Las derivadas

$$\partial F^\alpha/\partial \xi_{M1} = [1 - (\operatorname{tg}\chi_0/\alpha')^2]^{-1/2}; \quad (9.651)$$

$$p^\alpha = (4/\alpha')\,\partial F^\alpha/\partial \xi_{M1} = (4/\alpha')\,[1 - (\operatorname{tg}\chi_0/\alpha')^2]^{-1/2}. \quad (9.652)$$

Calculamos:

$$\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 0{,}75; \quad a = -0{,}2; \quad \partial F^\alpha/\partial \xi_M = -1{,}342; \quad p^\alpha = -7{,}157.$$

Así, pues, en todos los puntos de la zona I (incluido el prefijado con coordenadas $x = 1{,}5$ m; $z = 2{,}25$ m) las derivadas F^α y p^α son magnitudes constantes. Calculemos $\dot{F}^{\bar{\alpha}}$ y $\dot{p}^{\bar{\alpha}}$. Las integrales A_I y B_I, que determinan la función $\dot{F}^{\bar{\alpha}}$, se calculan con (9.539): $A_I = A$; $B_I = B$.

De acuerdo con esto

$$\dot{F}^{\bar{\alpha}} = [M_\infty^2/4\pi\alpha')]\,(A_I + B_I). \quad (9.653)$$

Calculando $r_1 = \xi_{M1} - \zeta_{M1} = x/(b_0\alpha') - z/b_0 = -0{,}5$; $s_1 = \xi_{M1} + \zeta_{M1} = 0{,}85$; $s_1 a = -0{,}17$ e integrando (9.539) para el paso $h = 0{,}012$, hallamos el

valor de $A_I = -0{,}0499$ y, a continuación, calculamos $B_I = 0{,}5606$ y $\dot{F}^{\bar{\alpha}}(r_1, s_1) = 0{,}08472$.

Determinamos la derivada:

$$\partial \dot{F}^{\bar{\alpha}}/\partial \xi_M = [M_\infty^2/(4\pi\alpha')]\{\partial A/\partial \xi_M (1 + 1/3a) + (2/3)(\pi \sqrt{-a}/a) \times \times [-r_1 + s_1(2a-1)]\}. \quad (9.654)$$

Primero calculamos la función $A_I(r_1 - h, s_1)$ para el punto con coordenadas $r_1 - h = -0{,}512$; $s_1 = 0{,}85$. La integración numérica de (9.539) proporciona $A_I(r_1 - h, s_1) = -0{,}04764$. Las respectivas derivadas $\partial A_I/\partial \xi_M = [1/(0{,}5h)] \times (-0{,}04991 + 0{,}04764) = -0{,}3787$; $\partial \dot{F}^{\bar{\alpha}}/\partial \xi_M = 0{,}927$.

Seguidamente, después de determinar

$$F^\alpha = 0{,}5\,[\xi_{M1}(1 - a) - \xi_{M1}(1 + a)]\sqrt{-a}/a = -0{,}1342, \quad (9.655)$$

calculamos $\dot{p}^{\bar{\alpha}} = -0{,}4446$.

Zona II (véase la fig. 9.31). Las derivadas en esta zona

$$\left.\begin{aligned} F^\alpha &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{s_1 a}^{0}\frac{dr}{\sqrt{r_1 - r}}\int_{r/a}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1 - s}} + \int_{0}^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1 - r}}\int_{ra}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1 - s}}\right); \\ \dot{F}^{\bar{\alpha}} &= \frac{M_\infty^2}{4\pi\alpha'}\Bigg[\underbrace{\int_{s_1 a}^{0}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1 - r}}\int_{r/a}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1 - s}}}_{B_{II}} + \underbrace{\int_{s_1 a}^{0}\frac{dr}{\sqrt{r_1 - r}}\int_{r/a}^{s_1}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1 - s}}}_{C_{II}} + \\ &+ \underbrace{\int_{0}^{r_1}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1 - r}}\int_{ra}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1 - s}}}_{A_{II}} + \underbrace{\int_{0}^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1 - r}}\int_{ra}^{s_1}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1 - s}}}_{D_{II}}\Bigg]. \end{aligned}\right\} \quad (9.656)$$

En el problema 9.73 fueron calculadas las integrales para F^α (9.529) y (9.530). Para el punto A con coordenadas $x = 2{,}5$ m; $z = 1$ m hallamos $\xi_{M1} = x/(b_0\alpha') = 0{,}6667$; $\zeta_{M1} = z/b_0 = 0{,}2$; $r_1 = \xi_{M1} - \zeta_{M1} = 0{,}4667$; $s_1 = \xi_{M1} + \zeta_{M1} = 0{,}8667$ y según (9.529) calculamos $F^\alpha = 0{,}4659$.

Calculamos las derivadas:

$$\frac{\partial F^\alpha}{\partial \xi_M} = \frac{1-a}{\pi\sqrt{-a}}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{-a(\xi_M - \zeta_M)}{\xi_M + \zeta_M}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{-(\xi_M - \zeta_M)}{a(\xi_M + \zeta_M)}} + \frac{\pi}{2}\right] = 0{,}738; \quad (9.657)$$

$$p^\alpha = (4/(\alpha')\,\partial F^\alpha/\partial \xi_M = 3{,}936.$$

Analicemos la función

$$\dot{F}^{\bar{\alpha}} = [M_\infty^2/(4\pi\alpha')]\,(A_{II} + B_{II} + C_{II} + D_{II}). \quad (9.658)$$

donde A_{II}, B_{II}, C_{II} y D_{II} son magnitudes que se calculan con las correspondientes fórmulas (9.620) y (9.621).

Dividiendo el segmento de longitud $r_1 = 0{,}4667$ en $\bar{r} = 15$ bandas de anchura $h = r_1/\bar{r} = 0{,}0311$ y después de la integración numérica de (9.620), obtenemos $A_{II} = 0{,}539$.

Determinamos la integral B_{II} con la fórmula (9.621) ($B = B_{II}$). En ésta el límite $s_1 a = 0{,}1733$. Tomando la anchura de la banda $h' = 0{,}02889$ e integrando numéricamente, obtenemos $B_{II} = -0{,}01897$.

Acto seguido, hallamos:

$$G+F=-\frac{-r_1/a+s_1}{\sqrt{-1/a}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{r}{as_1}}-\frac{\pi}{2}\right)+$$
$$+\frac{-r_1a+s_1}{\sqrt{-a}}\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{ar_1}{s_2}}=1{,}463;$$
$$C_{II}+D_{II}=(1/3a)\,B_{II}+(a/3)\,A_{II}+(4/3)\,s_1\,(G+F)=1{,}686.$$

La correspondiente función $F^{\dot{\bar{\alpha}}} = 0{,}36$. Calculamos la derivada:

$$\partial F^{\alpha}/\partial\xi_M = [M_\infty^2/(4\pi\alpha')]\,(\partial A_{II}/\partial\xi_M + \partial B_{II}/\partial\xi_M + \partial C_{II}/\partial\xi_M + \partial D_{II}/\partial\xi_M). \tag{9.659}$$

Para el punto con coordenadas ($r_1 - h = 0{,}4356$; $s_1 = 0{,}8667$), mediante la integración numérica según (9.620), hallamos A_{II} ($r_1 - h$; s) $= 0{,}4777$. Examinando el punto ($r_1 - h = 0{,}4378$; $s_1 = 0{,}8667$) y recurriendo a la expresión (9.621), determinamos la otra función B_{II} ($r_1 - h$; s_1) $= -0{,}1536$ y las correspondientes derivadas

$$\partial A_{II}/\partial\xi_M = [1/(0{,}5h)]\,(0{,}539 - 0{,}4777) = 3{,}942;$$
$$\partial B_{II}/\partial\xi_M = [1/(0{,}5h)]\,(-0{,}01897 + 0{,}01536) = -0{,}2324.$$

Más adelante, hallamos

$$\partial C_{II}/\partial\xi_M + \partial D_{II}/\partial\xi_M = (1/3a)\,\partial B_{II}/\partial\xi_M + (a/3)\,\partial A_{II}/\partial\xi_M +$$
$$+ (4/3)\,[G + F + s_1\partial\,(G + F)/\partial\xi_M].$$

Haciendo uso de (9.631) $\partial\,(G + F)/\partial\xi_M = 2{,}317$, calculamos:

$$\partial\,(C_{II}+D_{II})/\partial\xi_M=4{,}753;\quad \partial F^{\dot{\bar{\alpha}}}/\partial\xi_M=1{,}404;$$

$$p^{\dot{\bar{\alpha}}}=(4/\alpha')\,[\partial F^{\dot{\bar{\alpha}}}/\partial\xi_M-(M_\infty^2/\alpha')\,\xi_M\,\partial F^{\alpha}/\partial\xi_M-F^{\alpha}/\alpha']=-1{,}294.$$

Zona III. En el problema 9.80 fueron determinados los límites de las integrales, con arreglo a los cuales

$$F^{\alpha}=\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{s_1-l/b_0}^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{r/a}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{C'_{III}};$$

$$F^{\dot{\bar{\alpha}}}=\frac{M_\infty^2}{4\pi\alpha'}\Bigg(\underbrace{\int_{s_1-l/b_0}^{r_1}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{r/a}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{A_{III}}+\underbrace{\int_{s_1-l/b_0}^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{r/a}^{s_1}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{B_{III}}\Bigg);$$

$$\int_{r/a}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{s_1 - s}} = 2\sqrt{s_1 - r/a};$$

$$G'_{III} = \sqrt{(s_1 - s_0/a)(r_1 - s_0)} + \frac{-r_1/a + s_1}{\sqrt{-1/a}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r_1 - s_0}{a(s_1 - s_0/a)}}; \qquad (9.660)$$

$$F^{\alpha} = G'_{III}/\pi. \qquad (9.661)$$

Efectuamos los cálculos:

$\xi_{M1} = x/(b_0\alpha') = 0{,}5067$; $\zeta_{M1} = z/b_0 = 0{,}55$; $r_1 = \xi_{M1} - \zeta_{M1} = -0{,}0433$; $s_1 = \xi_{M1} + \zeta_{M1} = 1{,}057$; $s_0 = s_1 - l/b_0 = s_1 - \bar{l} = -0{,}143$; $a = -0{,}2$;
$G'_{III} = 0{,}5154$; $F^{\alpha} = G'_{III}/\pi = 0{,}1641$.

Calculamos las derivadas:

$$\frac{\partial F^{\alpha}}{\partial \xi_M} = \frac{1}{\pi}\frac{G'}{\partial \xi_M} = \frac{1-a}{\pi\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r_1 - s_0}{a(s_1 - s_0)}} = 2{,}364\frac{1}{\pi} = 0{,}7529; \qquad (9.662)$$

$p^{\alpha} = (4/\alpha')\, \partial F^{\alpha}/\partial \xi_M = 4{,}015$.
Analicemos las funciones

$$A_{III} = 2\int_{s_0}^{r_1} \frac{r\sqrt{s_1 - r/a}}{\sqrt{r_1 - r}}\, dr; \quad B_{III} = \frac{1}{3}\left(\frac{A}{a} + 4s_1 G'_{III}\right). \qquad (9.663)$$

Dividamos el sector de integración de longitud $r_1 - s_0 = 0{,}1$ en $n = 10$ bandas, cada una de longitud $h = 0{,}01$, y realizando la integración numérica dentro de los límites $s_0 = 0{,}1433$ y $r_1 = -0{,}0433$, obtenemos $A_{III} = -0{,}06133$.

Más arriba fue hallado el valor de $G'_{III} = 0{,}5154$, por lo que $B = 0{,}8289$; $F^{\dot{\bar{\alpha}}} = 0{,}1273$.

Determinamos la derivada:

$$\partial F^{\dot{\bar{\alpha}}}/\partial \xi_M = [M_{\infty}^2/(4\pi\alpha')]\,(\partial A_{III}/\partial \xi_M + \partial B_{III}/\partial \xi_M). \qquad (9.664)$$

Para ello, calculamos la función A_{III} $(r_1 - h, s_1 - h)$ en el punto con coordenadas $r_1 - h_1 = -0{,}0533$, $s_1 - h = 1{,}047$. Utilizando la integración numérica de (9.663), obtenemos $A_{III} = -0{,}06881$. La correspondiente derivada

$$\partial A_{III}/\partial \xi_M = (1/h)\,(-0{,}06163 + 0{,}06881) = -0{,}7177.$$

Determinamos la segunda derivada

$\partial B/\partial \xi_M = (1/3)\,[(1/a)\,\partial A_{III}/\partial \xi_M + 4\,(G'_{III} + s_1\, \partial G'_{III}/\partial \xi_M)] = 5{,}214$

y calculamos

$$\partial F^{\dot{\bar{\alpha}}}/\partial \xi_M = 0{,}7458; \quad p^{\dot{\bar{\alpha}}} = \frac{4}{\alpha'}\left[\frac{\partial F^{\dot{\bar{\alpha}}}}{d\xi_M} - \frac{M_{\infty}^2}{\alpha'}\xi_M \frac{\partial F^{\alpha}}{\partial \xi_M} - \frac{F^{\alpha}}{\alpha'}\right] = -1{,}428.$$

Zona IV. Para esta zona (véase el problema 9.80 y la fig. 9.31)

$$F^{\alpha}=\frac{1}{2\pi}\Bigg(\underbrace{\int\limits_{s_0=s_1-l/b_0}^{0}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int\limits_{r/a}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{G'_{\rm IV}}+\underbrace{\int\limits_{0}^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int\limits_{ra}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{E'_{\rm IV}}\Bigg);$$

$$F^{\dot{\bar{\alpha}}}=\frac{M_{\infty}^2}{4\pi\alpha'}\Bigg(\underbrace{\int\limits_{s_0}^{0}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int\limits_{r/a}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{B_{\rm IV}}+\underbrace{\int\limits_{s_0}^{0}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int\limits_{r/a}^{s_1}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{C_{\rm IV}}+$$

$$+\underbrace{\int\limits_{0}^{r_1}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int\limits_{ra}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{A_{\rm IV}}+\underbrace{\int\limits_{0}^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int\limits_{ra}^{s_1}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{D_{\rm IV}}\Bigg).$$

Como $\int\limits_{r/a}^{s_1} ds/\sqrt{s_1-s}=2\sqrt{s_1-r/a}$, en correspondenciá con (9.660)

$$G_{\rm IV}=2\Big\{\sqrt{(s_1-s_0/a)(r_1-s_0)}-\sqrt{s_1r_1}+$$
$$+\frac{-r_1/a+s_1}{\sqrt{-1/a}}\Big[\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{r_1-s_1}{a(s_1-s_0/a)}}-\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{r_1}{as_1}}\Big]\Big\}.$$

Seguidamente hallamos $\int\limits_{ra}^{s_1} ds/\sqrt{s_1-s}=2\sqrt{s_1-ra}$ y, tomando en consideración (9.528),

$$E'_{\rm IV}=2\{\sqrt{s_1r_1}+[(-r_1a+s_1)/\sqrt{-a}]\operatorname{arctg}\sqrt{-ar_1/s_1}\}.$$

La correspondiente derivada

$$F^{\alpha}=[1/(2\pi)]\,(G'_{\rm IV}+E'_{\rm IV}). \qquad (9.665)$$

Calculamos:

$$\xi_{\rm M}=x/(b_0\alpha')=0{,}8;\quad \zeta_{\rm M}=z/b_0=0{,}3;\quad r_1=\xi_{\rm M}-\zeta_{\rm M}=0{,}5;$$

$s_1=\xi_{\rm M}+\zeta_{\rm M}=1{,}1$; $s_0=s_1-l/b_0=s_1-\bar{l}=-0{,}1$; $a=-0{,}2$; $G'_{\rm IV}=0{,}2485$; $E'_{\rm IV}=3{,}056$; $F^{\alpha}=[1/(2\pi)]\,(G'_{\rm IV}+E'_{\rm IV})=[1/(2\pi)]\times\times(0{,}2485+3{,}056)=0{,}5129$.

Determinamos la derivada:

$$\partial F^{\alpha}/\partial\xi_{\rm M}=[1/(2\pi)]\,(\partial G'_{\rm IV}/\partial\xi_{\rm M}+\partial E'_{\rm IV}/\partial\xi_{\rm M}); \qquad (9.666)$$

$$\frac{\partial G'_{\rm IV}}{\partial\xi_{\rm M}}+\frac{\partial E'_{\rm IV}}{\partial\xi_{M}}=\frac{2(1-a)}{\sqrt{-a}}\Big[\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{r_1-s_0}{a(s_1-s_0/a)}}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{-r_1}{as_1}}+$$
$$+\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{-ar_2}{s_1}}\Big]. \qquad (9.667)$$

Calculamos:

$\partial G'_{\rm IV}/\partial\xi_{\rm M}+\partial E'_{\rm IV}/\partial\xi_{\rm M}=2{,}458$; $\partial F^{\alpha}/\partial\xi_{\rm M}=0{,}3914$; $p^{\alpha}=(4/\alpha')\,0{,}3914=2{,}087$.

Más adelante, realizamos el cálculo:

$$\dot{\bar{F}}^{\alpha} = [M_{\infty}^2/(4\pi\alpha')] (A_{IV} + B_{IV} + C_{IV} + D_{IV}). \quad (9.668)$$

Empleando la fórmula (9.620), mediante la integración numérica para $r_1 = 0,5$ y el paso $h = 0,025$, hallamos el valor de $A_{IV} = A = 0,7134$.

Por analogía con (9.620), para $s_0 = -0,1$ y el paso $h = 0,01$, según (9.621), calculamos la integral $B_{IV} = -0,01065$.

Por analogía con (9.620) — (9.625)

$$D_{IV} = \frac{2}{3} \int_0^{r_1} \frac{(ra + 2s_1) \sqrt{s_1 - ra}}{\sqrt{r_1 - r}} dr; \quad C_{IV} = \frac{2}{3} \int_{s_0}^{0} \frac{(r/a + 2s_1) \sqrt{s_1 - r/a}}{\sqrt{r_1 - r}} dr; \quad (9.669)$$

$$F_{IV} = \int_0^{r_1} \frac{\sqrt{s_1 - ra}}{\sqrt{r_1 - r}} dr = \sqrt{s_1 r_1} + \frac{-r_1 a + s_1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \sqrt{-\frac{ar_1}{s_2}}; \quad (9.670)$$

$$G_{IV} = \sqrt{(s_1 - s_0/a)(r_1 - s_0)} - \sqrt{s_1 r_1} + \frac{-r_1/a + s_1}{\sqrt{-1/a}} \left[\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{-(r_1 - s_0)}{a(s_1 - s_0/a)}} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{-r_1}{as_1}} \right]; \quad (9.671)$$

$$D_{IV} = (a/3) A_{IV} + (4/3) s_1 F_{IV}; \quad (9.672)$$

$$C_{IV} = (1/3a) B_{IV} + (4/3) s_1 G_{IV}. \quad (9.673)$$

Más arriba fueron hallados los valores de $G'_{IV} = 2G_{IV} = 0,2485$; $E'_{IV} = 2F'_{IV} = 3,056$. Teniendo éstos en cuenta $G_{IV} = 0,1242$; $F_{IV} = 1,528$; $D_{IV} = 2,179$; $C_{IV} = 0,20$; $\dot{\bar{F}}^{\alpha} = 0,4962$.

Determinamos la derivada:

$$\partial \dot{\bar{F}}^{\alpha}/\partial\xi_M = [M_{\infty}^2/(4\pi\alpha')] (\partial A_{IV}/\partial\xi_M + \partial B_{IV}/\partial\xi_M + \partial C_{IV}/\partial\xi_M + \partial D_{IV}/\partial\xi_M). \quad (9.674)$$

Calculamos la función A_{IV} para el punto $(r_1 - h, s_1 - h)$, haciendo $h = 0,025$. Introduzcamos en (9.620) los valores de $r_1 - h = 0,475$; $s_1 - h = 1,075$ y, después de integrar, obtenemos $A_{IV} = 0,6459$.

Realizando los correspondientes cálculos con (9.621) para $h = 0,01$; $s_0 - h = -0,11$, determinamos B_{IV} $(r_1 - h, s_1 - h) = -0,01142$.

Seguidamente hallamos las derivadas respecto de ξ_M:

$$\partial A_{IV}/\partial\xi_{IV} = (1/h)(0,7134 - 0,6459) = 2,702;$$

$$\partial B_{IV}/\partial\xi_M = (1/h)(-0,01066 + 0,01142) = 0,03044$$

y determinamos:

$$\partial C_{IV}/\partial\xi_M = (1/3a)\, \partial B_{IV}/\partial\xi_M + (4/3)(G_{IV} + s_1\, \partial G_{IV}/\partial\xi_M);$$

$$\partial D_{IV}/\partial\xi_M = (a/3)\, \partial A_{IV}/\partial\xi_M + (4/3)(F_{IV} + s_1\, \partial F_{IV}/\partial\xi_M);$$

$$\partial C_{IV}/\partial\xi_M + \partial D_{IV}/\partial\xi_M = (1/3a)\, \partial B_{IV}/\partial\xi_M + (a/3)\, \partial A_{IV}/\partial\xi_M +$$

$$+ (4/3)(G_{IV} + E_{IV}) + (4/3)(\partial G_{IV}/\partial\xi_M + \partial F_{IV}/\partial\xi_M);$$

$$G_{IV} + E_{IV} = \sqrt{(s_1 - s_0/a)(r_1 - s_0)} + \frac{-r_1/a + s_1}{\sqrt{-1/a}} \times$$

$$\times\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{-(r_1-s_0)}{a(s_1-s_0/a)}}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{-r_1}{as_1}}\right]+\frac{-r_1a+s_1}{\sqrt{-a}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{-ar_1}{s_1}}=1{,}652;$$

$$\partial G_{\text{IV}}/\partial\xi_{\text{M}}+\partial F_{\text{IV}}/\partial\xi_{\text{M}}=(1/2)(\partial G'_{\text{IV}}/\partial\xi_{\text{M}}+\partial F'_{\text{IV}}/\partial\xi_{\text{M}})=1{,}229;$$

$$\partial B_{\text{IV}}/\partial\xi_{\text{M}}=0{,}03044;\quad \partial A_{\text{IV}}/\partial\xi_{\text{M}}=2{,}702;$$

$$\partial G_{\text{IV}}/\partial\xi_{\text{M}}+\partial D_{\text{IV}}/\partial\xi_{\text{M}}=3{,}611;\quad \partial F^{\dot{\bar{\alpha}}}/\partial\xi_{\text{M}}=1{,}052;\quad p^{\dot{\bar{\alpha}}}=0{,}563.$$

Zona V (véase la fig. 9.31). Para esta zona las expresiones (9.555) y (9.556), referentes a las derivadas F^{α} y $F^{\dot{\bar{\alpha}}}$, toman la forma

$$F^{\alpha}=\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{s_0}^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{ra}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{F_{\text{V}}};$$

$$F^{\dot{\bar{\alpha}}}=\frac{\text{M}_\infty^2}{4\pi\alpha'}\left(\underbrace{\int_{s_0}^{r_1}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{ra}^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{A_{\text{V}}}+\underbrace{\int_{s_0}^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{ra}^{s_1}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{D_{\text{V}}}\right),$$

donde $s_0=s_1-l/b_0$.

Los límites de las integrales fueron determinados en el problema 9.80.

Consideremos el cálculo de la derivada F^{α}. Tenemos

$$\int_{ra}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}=2\sqrt{s_1-ra};$$

$$F_{\text{V}}=2\int_{s_0}^{r_1}\frac{\sqrt{s_1-ra}}{\sqrt{r_1-r}}\,dr=2\left[\sqrt{(s_1-s_0a)(r_1-s_0)}+\right.$$

$$\left.+\frac{-r_1a+s_1}{\sqrt{-a}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{-a(r_1-s_0)}{s_1-s_0a}}\right];\tag{9.675}$$

$$F^{\alpha}=[1/(2\pi)]\,F_V.\tag{9.676}$$

Calculemos:

$$\xi_{\text{M}}=x/(b_0\alpha')=1{,}067;\quad \zeta_{\text{M}}=0{,}3;\quad r_1=\xi_{\text{M}}-\zeta_{\text{M}}=0{,}767;$$
$$s_1=\xi_{\text{M}}+\zeta_{\text{M}}=1{,}367;\quad s_0=s_1-l/b_0=0{,}167;\quad a=-0{,}2;$$
$$F_{\text{V}}=3{,}771;\quad F^{\alpha}=[1/(2\pi)]\,F_{\text{V}}=6{,}004.$$

Determinamos la derivada $\partial F^{\alpha}/\partial\xi_{\text{M}}=[1/(2\pi)]\,\partial F_V/\partial\xi_{\text{M}}$. Hallamos:

$$\frac{\partial F_{\text{V}}}{\partial\xi_M}=\frac{2(1-a)}{\sqrt{-a}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{-a(r_1-s_0)}{s_1-s_0a}}=1{,}564;\quad \partial F^{\alpha}/\partial\xi_{\text{M}}=0{,}25;$$

$$p^{\alpha}=(4/\alpha')\,\partial F^{\alpha}/\partial\xi_{\text{M}}=1{,}333.$$

Examinemos la derivada $\dot{\bar{F^{\alpha}}}$. Por analogía con (9.620),

$$A_{\text{V}} = 2\int_{s_0}^{r_1}\left(r\sqrt{s_1 - ra}/\sqrt{r_1 - r}\right)dr;\quad D_{\text{V}} = (a/3)\,A_{\text{V}} + (2/3)\,s_1 F_{\text{V}},\qquad (9.677)$$

donde F_{V} se determina con (9.675).

Dividamos el intervalo $r_1 - s_0$ en $\bar{r} = 15$ bandas, cada una de ellas de una anchura $h = (r_1 - s)/\bar{r} = 0{,}04$ y, tomando en consideración los límites $r_1 = 0{,}7667$; $s_0 = 0{,}1667$, mediante la integración numérica, obtenemos $A_{\text{V}} = 1{,}478$.

A continuación, calculamos: $D_{\text{V}} = 2{,}415$ y $\dot{\bar{F^{\alpha}}} = [\mathrm{M}_{\infty}^2/(4\pi\alpha')]\ (A_{\text{V}} + D_{\text{V}}) = 0{,}6458$.

Determinamos

$$\partial F^{\alpha}/\partial\xi_{\text{M}} = [\mathrm{M}_{\infty}^2/(4\pi\alpha')]\ (\partial A_{\text{V}}/\partial\xi_{\text{M}} + \partial D_{\text{V}}/\partial\xi_{\text{M}}).\qquad (9.678)$$

Primero calculamos A_{V} para el punto $(r_1 - h,\ s_1 - h)$. Haciendo $h = 0{,}04$; $r_1 - h = 0{,}7267$; $s_1 - h = 1{,}327$; $s_0 - h = 0{,}1267$, como resultado de la integración numérica de (9.677), hallamos $A_{\text{V}}\ (r_1 - h,\ s_1 - h) = 1{,}34$.

Calculemos la derivada $\partial A_{\text{V}}/\partial\xi_{\text{M}} = 3{,}464$. Seguidamente hallamos:

$$\partial D_{\text{V}}/\partial\xi_{\text{M}} = (a/3)\,\partial A_{\text{V}}/\partial\xi_{\text{M}} + (2/3)\,F_{\text{V}} + (2/3)\,s_1\partial F_{\text{V}}/\partial\xi_{\text{M}} = 3{,}708;$$

$$\partial\dot{\bar{F^{\alpha}}}/\partial\xi_{\text{M}} = 1{,}19;\quad \dot{\bar{p^{\alpha}}} = -0{,}8873.$$

Zona VI. En esta zona las funciones F^{α} y $\dot{\bar{F^{\alpha}}}$ se determinan mediante las siguientes relaciones [véase la fig. 9.31 y (9.555), (9.556)]:

$$F^{\alpha} = \frac{1}{2\pi}\Bigg(\underbrace{\int_{s_0=s_1-\bar{l}}^{r_0'=(r_1-\bar{l})/a}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{ra}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{E_{\text{VI}}} + \underbrace{\int_{r_0'=(r_1-\bar{l})/a}^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{r_0=r_1-\bar{l}}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{G_{\text{VI}}}\Bigg);$$

$$\dot{\bar{F^{\alpha}}} = \frac{\mathrm{M}_{\infty}^2}{4\pi\alpha'}\Bigg(\underbrace{\int_{s_0=s_1-\bar{l}}^{r_0'=(r_1-\bar{l})/a}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{ra}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{A_{\text{VI}}} + \underbrace{\int_{s_0=s_1-\bar{l}}^{r_0'=(r_1-\bar{l})/a}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{ra}^{s_1}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{D_{\text{VI}}} +$$

$$+\underbrace{\int_{r_0'=(r_1-\bar{l})/a}^{r_1}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{r_0=r_1-\bar{l}}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{F_{\text{VI}}}+$$

$$+\underbrace{\int_{r_0'=(r_1-\bar{l})/a}^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{r_0=r_1-\bar{l}}^{s_1}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{\text{H}_{\text{VI}}}\Bigg).$$

Determinamos la derivada F^{α} .Hallamos:

$$\int_{ra}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}=2\sqrt{s_1-ra}; \tag{9.679}$$

$$E_{\text{VI}}=2\Big\{-\sqrt{(s_1-r_0'a)(r_1-r_0')}+\sqrt{(s_1-s_0a)(r_1-s_0)}-$$

$$-\frac{-r_1a+s_1}{\sqrt{-a}}\Big[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{-a(r_1-r_0')}{s_1-r_0'a}}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{-a(r_1-s_0)}{s_1-s_0a}}\Big]\Big\}; \tag{9.680}$$

$$\int_{r_0}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}=2\sqrt{s_1-r_0}; \tag{9.681}$$

$$G_{\text{VI}}=4\sqrt{(s_1-r_0)(r_1-r_0')}; \tag{9.682}$$

$$F^{\alpha}=[1/(2\pi)]\,(E_{\text{VI}}+G_{\text{VI}}). \tag{9.683}$$

Calculamos:

$$\xi_{\text{M}}=x/(b_0\alpha')=1{,}2;\quad \zeta_{\text{M}}=z/b_0=0{,}15;\quad r_1=\xi_{\text{M}}-\zeta_{\text{M}}=1{,}05;$$

$$s_1=\xi_{\text{M}}+\zeta_{\text{M}}=1{,}35;\quad r_0=r_1-\bar{l}=-0{,}15;$$

$$r_0'=(r_1-\bar{l})/a=0{,}75;\quad s_0=s_1-\bar{l}=0{,}15.$$

De acuerdo con estos datos determinamos: $E_{\text{IV}}=1{,}929$; $G_{\text{IV}}=2{,}683$; $F^{\alpha}=$ $=0{,}7344$. Calculamos la derivada:

$$\partial F^{\alpha}/\partial\xi_{\text{M}}=[1/(2\pi)]\,(\partial E_{\text{IV}}/\partial\xi_{\text{M}}+\partial G_{\text{VI}}/\partial\xi_{\text{M}}). \tag{9.684}$$

Derivamos (9.680), (9.682) respecto de ξ_{M} y calculamos:

$$\frac{\partial(E_{\text{VI}}+G_{\text{VI}})}{\partial\xi_{\text{M}}}=\frac{-2(1-a)}{\sqrt{-a}}\Big[\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{a(r_1-r_0')}{s_1-r_0'a}}-$$

$$-\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{a(r_1-s_0)}{s_1-s_0a}}\Big]=0{,}8007; \tag{9.685}$$

$$\partial F^{\alpha}/\partial\xi_{\text{M}}=0{,}1275;\quad p^{\alpha}=(4/\alpha')\,0{,}1275=0{,}68.$$

Calculemos la derivada $\dot{\bar{F^{\alpha}}}$. Tenemos

$$A_{\text{VI}}=2\int_{s_0}^{r'_0}\frac{r\sqrt{s_1-ra}}{\sqrt{r_1-r}}\,dr; \qquad (9.686)$$

$$D_{\text{VI}} = (a/3)\,A_{\text{VI}} + (2/3)\,s_1 E_{\text{VI}}, \qquad (9.687)$$

donde E_{VI} se determina según (9.680).

A continuación, hallamos:

$$\left.\begin{aligned}&\int_{r_0}^{s_1} ds/\sqrt{s_1-s}=2\sqrt{s_1-r_0};\\ &F_{\text{VI}}=(4/3)\,(r'_0+2r_1)\sqrt{(s_1-r_0)\,(r_1-r'_0)};\\ &\int_{r_0}^{s_1} s\,ds/\sqrt{s_1-s}=(2/3)\,(r_0+2s_1)\sqrt{s_1-r_0};\end{aligned}\right\} \qquad (9.688)$$

$$H_{\text{VI}}=(4/3)\,(r_0+2s_1)\sqrt{(s_1-r_0)\,(r_1-r'_0)}. \qquad (9.689)$$

Así, pues,

$$\dot{\bar{F^{\alpha}}}=[M_{\infty}^2/4\pi\alpha')]\,(A_{\text{VI}}+D_{\text{VI}}+F_{\text{VI}}+H_{\text{VI}}.) \qquad (9.690)$$

Dividamos el intervalo $r'_0 - s_0 = 0{,}6$ en $\bar{r} = 20$ bandas de anchura $h = (r'_0 - s_0)/\bar{r} = 0{,}03$. Al efectuar la integración numérica de (9.686) obtenemos $A_{\text{VI}} = 0{,}866$.

La función $E_{\text{VI}} = 1{,}929$ fue calculada con anterioridad. Contando este valor $D_{\text{VI}} = 1{,}678$. Más adelante calculamos: $F_{\text{VI}} = 2{,}415$; $H_{\text{VI}} = 2{,}281$. Así, pues, $\dot{\bar{F^{\alpha}}} = 1{,}201$.

Determinemos la derivada:

$$\partial\dot{\bar{F^{\alpha}}}/\partial\xi_{\text{M}}=[M_{\infty}^2/(4\pi\alpha')]\,(\partial A_{\text{VI}}/\partial\xi_{\text{M}}+\partial D_{\text{VI}}/\partial\xi_{\text{M}}+\partial F_{\text{VI}}/\partial\xi_{\text{M}}+\partial H_{\text{VI}}/\partial\xi_{\text{M}}). \qquad (9.691)$$

Con el fin de calcùlar la función A_{VI} en el punto con coordenadas $(r_1 - h,\ s_1 - h)$ sustituyamos en (9.686) los valores de r_1; s_1; r_0; r'_0; s_0 por $r_1 - h$; $s_1 - h$; $r_0 - h$; $r'_0 - h$; $s_0 - h$ $(h = 0{,}03)$. Integrando (9.686) hallamos $A_{\text{VI}}\,(r_1 - h;\ s_1 - h) = 0{,}7996$. Como resultado, la derivada $\partial A_{\text{VI}}/\partial\xi_{\text{M}} = (1/h)\,(0{,}866 - 0{,}7996) = 2{,}213$. A continuación hallamos:

$$\partial D_{\text{VI}}/\partial\xi_{\text{M}} = (a/3)\ \partial A_{\text{VI}}/\partial\xi_{\text{M}} + (2/3)\ (E_{\text{VI}} + s_1\ \partial E_{\text{VI}}/\partial\xi_{\text{M}}) = -23{,}59, \qquad (9.692)$$

donde $\partial A_{\text{VI}}/\partial\xi_{\text{M}} = 2{,}213$; $E_{\text{VI}} = 1{,}929$;

$$\frac{\partial F_{\text{VI}}}{\partial\xi_{\text{M}}}=\frac{4}{3a}\left[\frac{1}{2}\,(a-1)\,(r'_0+2r_1)\sqrt{\frac{s_1-r_0}{r_1-r'_0}}+\right.$$
$$\left.+(1+2a)\sqrt{(s_1-r_0)\,(r_1-r'_0)}\right]=22{,}81; \qquad (9.693)$$

$$\frac{\partial H_{\text{VI}}}{\partial\xi_{\text{M}}}=\frac{4}{3}\left[\frac{1}{2a}\,(a-1)\,(r_0+3s_1)\sqrt{\frac{s_1-r_0}{r_1-r'_0}}+\right.$$
$$\left.+3\sqrt{(s_1-r_0)\,(r_1-r'_0)}\right]=25{,}49. \qquad (9.694)$$

Conforme a estos resultados $\partial\dot{\bar{F^{\alpha}}}/\partial\xi_{\text{M}}=4{,}681$; $\dot{\bar{p^{\alpha}}}=18{,}04$.

Zona VII (véase la fig. 9.31). Para el punto A situado en esta zona

$$F^{\alpha}=\frac{1}{2\pi}\Bigg(\underbrace{\int\limits_{s_1-\bar{l}=s_0}^{0}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int\limits_{r/a}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{C_{\text{VII}}}+\underbrace{\int\limits_{0}^{(r_1-\bar{l})/a=r_0'}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int\limits_{ra}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{E_{\text{VII}}}+$$

$$+\underbrace{\int\limits_{r_0'}^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int\limits_{r_1-\bar{l}=r_0}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{G_{\text{VII}}}\Bigg);$$

$$F^{\dot{\bar{\alpha}}}=\frac{M_{\infty}^2}{2\pi\alpha'}\Bigg(\underbrace{\int\limits_{s_0}^{0}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int\limits_{ra}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{J_{\text{VII}}}+\underbrace{\int\limits_{s_0}^{0}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int\limits_{r/a}^{s_1}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{K_{\text{VII}}}+$$

$$+\underbrace{\int\limits_{0}^{r_0'}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int\limits_{ra}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{A_{\text{VII}}}+\underbrace{\int\limits_{0}^{r_0'}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int\limits_{ra}^{s_1}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{D_{\text{VII}}}+$$

$$+\underbrace{\int\limits_{r_0'}^{r_1}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int\limits_{r_0}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{F_{\text{VII}}}+\underbrace{\int\limits_{r_0'}^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int\limits_{r_0}^{s_1}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{H_{\text{VII}}}\Bigg).$$

Calculemos la derivada F^{α}. Hallamos:

$$\int\limits_{r/a}^{s_1} ds/\sqrt{s_1-s}=2\sqrt{s_1-r/a};$$

$$C_{\text{VII}}=2\Big\{\sqrt{(s_1-s_0)(r_1-s_0)}-\sqrt{s_1r_1}+$$

$$+\frac{-r_1/a+s_1}{\sqrt{-1/a}}\Big[\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{r_1-s_0}{a(s_1-s_0/a)}}-\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{r_1}{as_1}}\Big]\Big\};\qquad(9.695)$$

$$\int\limits_{ra}^{s_1} ds/\sqrt{s_1-s}=2\sqrt{s_1-ra};$$

$$E_{\text{VII}}=2\Big\{-\sqrt{(s_1-r_0')(r_1-r_0')}+\sqrt{s_1r_1}-$$

$$-\frac{-r_1a+s_1}{-a}\Big[\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{a(r_1-r_0')}{s_1-r_0'a}}-\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{ar_1}{s_1}}\Big]\Big\};\qquad(9.696)$$

$$\int\limits_{r_0}^{s_1} ds/\sqrt{s_1-s}=2\sqrt{s_1-r_0};$$

$$G_{\text{VII}}=4\sqrt{(s_1-r_0)(r_1-r_0')};\qquad(9.697)$$

$$F^{\alpha}=[1/(2\pi)]\,(C_{\text{VII}}+E_{\text{VII}}+G_{\text{VII}});\qquad(9.698)$$

$$\xi_M = x/(b_0\alpha') = 1{,}133; \quad \zeta_M = z/b_0 = 0; \quad r_1 = \xi_M - \zeta_M = 1{,}133;$$
$$s_1 = \xi_M + \zeta_M = 1{,}133; \quad r_0 = r_1 - \bar{l} = -0{,}0667; \quad r_0' = (r_1 - \bar{l})/a = 0{,}3335;$$
$$s_0 = s_1 - \bar{l} = -0{,}0667; \quad C_{VII} = 0{,}1213; \quad E_{VII} = 0{,}645;$$
$$G_{VII} = 3{,}919; \quad F^{\alpha} = 0{,}738.$$

Derivando (9.695) respecto de ξ_M:

$$\frac{\partial G_{VII}}{\partial \xi_M} = 2\left\{\frac{1-a}{\sqrt{-a}}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{r_1-s_0}{a\,(s_1-s_0/a)}} - \operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{r_1}{as_1}}\right] - \right.$$
$$\left. - \sqrt{\frac{s_1}{r_1}}\right\} = -1{,}622. \qquad (9.699)$$

Partiendo de (9.696) determinamos la derivada de E_{VII} respecto de ξ_M:

$$\frac{\partial E_{VII}}{\partial \xi_M} = 2\left\{\frac{1-a}{a}\sqrt{\frac{s_1-r_0'a}{r_1-r'}} + \sqrt{\frac{s_1}{r}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1-a}{\sqrt{-a}}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{a\,(r_1-r_0')}{s_1-r_0'a}} - \operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{ar_1}{s_1}}\right]\right\} = 13{,}08. \qquad (9.700)$$

Hallamos la función (9.697):

$$\partial G_{VII}/\partial \xi_M = [2\,(a-1)/a]\sqrt{(s_1-r_0)/(r_1-r_0')} = 14{,}7. \qquad (9.701)$$

Como resultado determinamos: $\partial F^{\alpha}/\partial \xi_M = 0{,}00032$; $p^{\alpha} = (4/\alpha')\ 0{,}00032 = 0{,}0017$.

Calculemos la derivada $F^{\dot{\bar{\alpha}}}$. Dividimos la región $O - s_0$ en $\bar{r} = 10$ bandas de anchura $h = 0{,}00667$ y, tomando en consideración que el límite $s_0 = -0{,}0667$, como resultado de la integración numérica, hallamos que $J_{VII} = -0{,}004303$.

La integral [véase (9.669)] $K_{VII} = (1/3a)\ J_{VII} + (2/3)\ s_1 C_{VII} = -0{,}1454$.

Aquí C_{VII} se determina con (9.695). Analicemos la integral A_{VII}. Dividamos el sector de integración r_0'—0 en $\bar{r} = 15$ bandas de anchura $h = r_0'/15 = 0{,}02223$. En correspondencia con esto, para $r_0' = 0{,}3335$ el valor de $A_{VII} = 0{,}1185$.

Calculamos la integral:

$$D_{VII} = (a/3)\ A_{VII} + (2/3)\ s_1\ E_{VII} = 0{,}4794. \qquad (9.702)$$

Examinemos la integral F_{VII} que se calcula con (9.688): $F_{VII} = 3{,}34$.

Según la fórmula (9.689) calculamos $H_{VII} = 2{,}874$, a continuación, hallamos:

$$F^{\dot{\bar{\alpha}}} = [M_\infty^2/(4\pi\alpha')]\,(J_{VII} + K_{VII} + A_{VII} + D_{VII} + F_{VII} + H_{VII}) = 1{,}144. \qquad (9.703)$$

La derivada

$$\frac{\partial F^{\dot{\bar{\alpha}}}}{\partial \xi_M} = \frac{M_\infty^2}{4\pi\alpha'}\left(\frac{\partial J_{VII}}{\partial \xi_M} + \frac{\partial K_{VII}}{\partial \xi_M} + \frac{\partial A_{VII}}{\partial \xi_M} + \frac{\partial D_{VII}}{\partial \xi_M} + \frac{\partial F_{VII}}{\partial \xi_M} + \frac{\partial H_{VII}}{\partial \xi_M}\right). \qquad (9.704)$$

Dividamos la sección de integración en sectores de anchura $h = 0{,}00867$ y, teniendo en cuenta que el límite $s_0 - h = -0{,}07537$ y $s_1 - h = 1{,}125$; $r_1 - h = 1{,}125$, mediante el cálculo numérico, obtenemos $J_{VII}\ (r_1 - h;\ s_1 - h) = -0{,}00691$ y la correspondiente derivada

$$\partial J_{VII}/\partial \xi_M = (1/h)\ (-0{,}004303 + 0{,}006911) = 0{,}1304.$$

Seguidamente, determinamos:

$\partial K_{VII}/\partial\xi_M = (1/3a)\ \partial J_{VII}/\partial\xi_M + (2/3)\ (C_{VII} + s_1\partial C_{VII}/\partial\xi_M) = -1{,}362.$

Dividamos la integral en bandas de anchura $h = 0{,}04335$ y, mediante la integración numérica [para el límite $r_0' = (1{,}133 - h - \bar{l})/a = 5552$; $r_1 - h = s_1 - h = 1{,}09$], hallamos $A_{VII}\ (r_1 - h;\ s_1 - h) = 0{,}2134$. A continuación, determinamos la derivada $\partial A_{VII}/\partial\xi_M = (1/h)\ (0{,}1185-0{,}2031) = -4{,}234$ y hallamos $\partial D_{VII}/\partial\xi_M = (a/3)\ \partial A_{VII}/\partial\xi_M + (2/3)\ (E_{VII} + s_1\partial E_{VII}/\partial\xi_M) = -9{,}732$.

Calculemos las derivadas:

$$\frac{\partial F_{VII}}{\partial\xi_M} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_1-r_0}{r_1-r_0}}\ \frac{a-1}{a}\ (r_0'+2r_1)+\frac{4}{3}\ \frac{1+2a}{a}\sqrt{(s_1-r_0)\ (r_2-r_0')} = 8{,}821;$$

$$\frac{\partial H_{VII}}{\partial\xi_M} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_1-s_0}{r_1-r_0'}}\ \frac{a-1}{a}\ (r_0+2s_1)+4\sqrt{(s_1-s_0)\ (r_1-r_0')} = 14{,}7.$$

Con arreglo a los resultados obtenidos $\partial F^{\dot{\bar{\alpha}}}/\partial\xi = 1{,}38$; $p^{\dot{\bar{\alpha}}} = 2{,}437$.

Zona VIII (véase la fig. 9.31). Para el punto A de esta zona

$$F^{\alpha} = \frac{1}{2\pi}\Big(\underbrace{\int_{r_0''=(r_1-\bar{l})a}^{0}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{r/a}^{r_1-\bar{l}=r_0}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{C_{VIII}}+$$

$$+\underbrace{\int_0^{s_0=s_1-\bar{l}}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{ra}^{r_0}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{E_{VIII}}+\underbrace{\int_{s_0}^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{r_0}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{G_{VIII}}\Big);$$

$$F^{\dot{\bar{\alpha}}} = \frac{M_\infty^2}{4\pi a'}\Big(\underbrace{\int_{r_0''}^{0}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{r/a}^{r_0}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{J_{VIII}}+\underbrace{\int_{r_0''}^{0}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{r/a}^{r_0}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{K_{VIII}}+$$

$$+\underbrace{\int_0^{s_0}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{ra}^{r_0}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{A_{VIII}}+\underbrace{\int_0^{s_0}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{ra}^{r_0}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{D_{VIII}}+\underbrace{\int_{s_0}^{r_1}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{r_0}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{F_{VIII}}+$$

$$+\underbrace{\int_{s_0}^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{r_0}^{s_1}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{H_{VIII}}\Big);$$

$$\int_{r/a}^{r_0} ds/\sqrt{s_1-s} = -2\sqrt{s_1-r_0}+2\sqrt{s_1-r/a};$$

$$C_{VIII} = 4\sqrt{s_1-r_0}\left(\sqrt{r_1}-\sqrt{r_1-r_0''}\right)+2\Big\{\sqrt{(s_1-r_0''/a)\ (r_1-r_0'')}-$$

$$-\sqrt{s_1 r_1}+\frac{-r_1/a+s_1}{\sqrt{-1/a}}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{r_1-r_0''}{a\ (s_1-r_0''/a)}}-\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{r_1}{as_1}}\right]\Big\}; \quad (9.705)$$

$$\int_{ra}^{r_0} ds/\sqrt{s_1-s} = -2\sqrt{s_1-s_0}+2\sqrt{s_1-r/a};$$

$$E_{\text{VIII}} = -4\sqrt{s_1-r_0}\,(-\sqrt{r_1-s_0}+\sqrt{r_1})+2\left\{-\sqrt{(s_1-s_0a)(r_1-s_0)}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{s_1r_1}-\frac{-r_1(a+s_1)}{\sqrt{-a}}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{a(r_1-s_0)}{s_1-s_0a}}-\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{ar_1}{s_1}}\right]\right\}; \quad (9.706)$$

$$\int_{r_0}^{s_1} ds/\sqrt{s_1-s} = 2\sqrt{s_1-s_0};$$

$$G_{\text{VIII}} = 4\sqrt{(s_1-r_0)(r_1-s_0)}. \quad (9.707)$$

Determinamos:

$\xi_M = x/(b_0\alpha') = 1{,}256$; $\zeta_M = z/b_0$; $r_1 = \xi_M - \zeta_M = 1{,}256$;

$s_1 = \xi_M + \zeta_M = 1{,}256$; $r_0 = r_1 - \bar{l} = 0{,}056$; $r_0'' = (r_1 - \bar{l})\,a = -0{,}0112$;

$s_0 = s_1 - \bar{l} = 0{,}056$; $C_{\text{VIII}} = 0{,}00025$; $E_{\text{VIII}} = 0{,}0028$; $G_{\text{VIII}} = 4{,}8$;

$$F^\alpha = [1/(2\pi)]\,(C_{\text{VIII}} + E_{\text{VIII}} + G_{\text{VIII}}) = 0{,}7648.$$

La derivada

$$\partial F^\alpha/\partial\xi_M = [1/(2\pi)]\,(\partial C_{\text{VIII}}/\partial\xi_M + \partial E_{\text{VIII}}/\partial\xi_M + \partial G_{\text{VIII}}/\partial\xi_M). \quad (9.708)$$

Calculamos:

$$\frac{\partial G_{\text{VIII}}}{\partial\xi_M} = 2\sqrt{\frac{s_1-r_0}{r_1}}-2\sqrt{\frac{s_1}{r_1}}+\frac{2(1-a)}{\sqrt{-a}}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{(r_1-r_0)\,a}{a\,(s_1-r_0)}}-\right.$$

$$\left.-\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{r_1}{as_1}}\right] = 0{,}00883; \quad (9.709)$$

$$\frac{\partial E_{\text{VIII}}}{\partial\xi_M} = -2\sqrt{\frac{s_1-r_0}{r_1}}+2\sqrt{\frac{s_1}{r_1}}-\frac{2(1-a)}{\sqrt{-a}}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{a(r_1-s_0)}{(s_1-s_0)\,a}}-\right.$$

$$\left.-\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{ar_1}{s_1}}\right] = 0{,}08972; \quad (9.710)$$

$$\partial G_{\text{VIII}}/\partial\xi_M = 0.$$

Así,pues, $\partial F^\alpha/\partial\xi_M = 0{,}01569$; $p^\alpha = 0{,}017$.

Calculemos la derivada $\dot{F}^{\bar{\alpha}}$. Hallamos:

$$\int_{r/a}^{r_0} ds/\sqrt{s_1-s} = -2\sqrt{s_1-r_0}+2\sqrt{s_1-r/a};$$

$$J_{\text{VIII}} = \underbrace{-2\sqrt{s_1-r_0}\int_{r_0''}^{0}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}}_{J^{(1)}}+\underbrace{2\int_{r_0''}^{0}\frac{r\sqrt{s_1-r/a}}{\sqrt{r_1-r}}\,dr}_{J^{(2)}};$$

$$J^{(1)} = (4/3)\sqrt{s_1-r_0}\,[2r_1\sqrt{r_1}-(r_0''+2r_1)\sqrt{r_1-r_0''}]. \quad (9.711)$$

Dividamos el sector de integración en $\bar{r} = 10$ bandas de anchura $h = 0{,}00112$ y, para el límite $r'_0 = 0{,}0112$, calculemos el valor de $J^{(2)} = -0{,}0001354$. Como el valor de $J^{(1)} = 0{,}0001212$, $J_{\text{VIII}} = J^{(1)} + J^{(2)} = -0{,}0000142$. Determinamos

$$\int_{r/a}^{r_0} s\,ds/\sqrt{s_1-s} = -(2/3)\,[(r_0+2s_1)\sqrt{s_1-r_0}-(r/a+2s_1)\sqrt{s_1-r/a}];$$

$$K_{\text{VIII}} = \underbrace{-\frac{2}{3}\int_{r''_0}^{0}(r_0+2s_1)\sqrt{s_1-r_0}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}}_{K^{(1)}} + \underbrace{\frac{4}{3}s_1\int_{r''_0}^{0}\frac{\sqrt{s_1-r/a}}{\sqrt{r_1-r}}dr}_{K^{(2)}} + \underbrace{\frac{2}{3a}\int_{r''_0}^{0}\frac{r\sqrt{s_1-r/a}}{\sqrt{r_1-r}}dr}_{K^{(3)}};$$

$$K^{(1)} = (4/3)(r_0+2s_1)\sqrt{s_1-r_0}\left(\sqrt{r_1}-\sqrt{r_1-r_0}\right) = -0{,}01872;$$

$$K^{(2)} = \frac{4}{3}s_1\left\{\sqrt{(s_1-r''_0/a)(r_1-r''_0)}-\sqrt{s_1r_1}+(-r_1/a+s_1)/\sqrt{-1/a}\times\right.$$
$$\left.\times[\operatorname{arctg}\sqrt{-(r_1-r''_0)/[a(s_1-r''_0/a)]}-\operatorname{arctg}\sqrt{-r_1/as_1}]\right\} = 0{,}01841;$$

$$K^{(3)} = (1/3a)\,J^{(2)} = 0{,}0002257;\quad K_{\text{VIII}} = 0{,}000026.$$

A continuación, hallamos:

$$\int_{ra}^{r_0} ds/\sqrt{s_1-s} = -2\sqrt{s_1-r_0}+2\sqrt{s_1-ra};$$

$$A_{\text{VIII}} = \underbrace{-2\sqrt{s_1-s_0}\int_0^{s_0}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}}_{A^{(1)}} + \underbrace{2\int_0^{s_0}\frac{r\sqrt{(s_1-r)\,a}}{\sqrt{r_1-r}}dr}_{A^{(2)}};$$

$$A^{(1)} = (4/3)\sqrt{s_1-s_0}\,[(s_0+2r_1)\sqrt{r_1-s_0}-2r_1\sqrt{r_1}] = -0{,}003087.$$

Dividamos el intervalo $s_0 - 0$ en segmentos de anchura $h = 0{,}0056$. Tomando en consideración el valor del límite $s_0 = 0{,}056$, con la integración numérica hallamos $A^{(2)} = 0{,}002875$ y, a continuación, determinamos $A_{\text{VIII}} = -0{,}000212$. Más adelante, tenemos:

$$\int_{ra}^{r_0} s\,ds/\sqrt{s_1-s} = -(2/3)\,[(r_0+2s_1)\sqrt{s_1-s_0}-(ra+2s_1)\sqrt{s_1-ra}];$$

$$D_{\text{VIII}} = \underbrace{-\frac{2}{3}\int_0^{s_1}(r_0+2s_1)\sqrt{s_1-s_0}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}}_{D^{(1)}} + \underbrace{\frac{4}{3}s_1\int_0^{s_0}\frac{\sqrt{s_1-ra}}{\sqrt{r_1-r}}dr}_{D^{(2)}} + \underbrace{\frac{2a}{3}\int_0^{s_0}\frac{r\sqrt{s_1-ra}}{\sqrt{r_1-r}}dr}_{D^{(3)}};$$

$$D^{(1)} = \frac{4}{3}(r_0 + 2s_1)\sqrt{s_1 - s_0}\,(\sqrt{r_1 - s_0} - \sqrt{r_1}) = -0{,}09475;$$

$$D^{(2)} = (4/3)\, s_1 \left\{ -\sqrt{s_1 - s_0 a)(r_1 - s_0)} + \sqrt{s_1 r_1} - \frac{-r_1 a + s_1}{\sqrt{-a}} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\operatorname{arctg} \sqrt{-\frac{a(r_1 - s_0)}{s_1 - s_0 a}} - \operatorname{arctg} \sqrt{-\frac{a r_1}{s_1}} \right] \right\} = 0{,}09498;$$

$$D^{(3)} = \frac{a}{3} A^{(2)} = -0{,}0001916; \quad D_{\mathrm{VIII}} = 0{,}0000383.$$

Determinamos:

$$\int_{r_0}^{s_1} ds/\sqrt{s_1 - s} = 2\sqrt{s_1 - r_0};$$

$$F_{\mathrm{VIII}} = (4/3)\ \sqrt{s_1 - r_0}\,(s_0 + 2r_1)\sqrt{r_1 - s_0} = 4{,}109;$$

$$\int_{r_0}^{s_1} s\, ds/\sqrt{s_1 - s} = (2/3)(r_0 + 2s_1)\sqrt{s_1 - r_0}; \quad H_{\mathrm{VIII}} = (4/3)(r_0 + 2s_1) \times$$

$$\times \sqrt{(s_1 - s_0)(r_1 - s_0)} = 4{,}109$$

y hallamos la derivada $\dot{F^{\alpha}} = 1{,}363$.

Calculamos:

$$\partial \dot{F^{\alpha}}/\partial \xi_M = [M_\infty^2/(4\pi\alpha')]\,(\partial J_{\mathrm{VIII}}/\partial \xi_M + \partial K_{\mathrm{VIII}}/\partial \xi_M + \partial A_{\mathrm{VIII}}/\partial \xi_M +$$
$$+ \partial D_{\mathrm{VIII}}/\partial \xi_M + \partial F_{\mathrm{VIII}}/\partial \xi_M + \partial H_{\mathrm{VIII}}/\partial \xi_M), \quad (9.712)$$

donde

$$\partial J_{\mathrm{VIII}}/\partial \xi_M = \partial J^{(1)}/\partial \xi_M + \partial J^{(2)}/\partial \xi_M. \quad (9.713)$$

En correspondencia con (9.711)

$$dJ^{(1)}/\partial \xi_M = (2/3)\sqrt{s_1 - r_0}\,\{6\sqrt{r_1} - \sqrt{r_1 - r_0''}\,[2(a+2) + (1-a)(r_0'' +$$
$$+ 2r_1)/(r_1 - r_0'')]\} = 0{,}004294.$$

Tomemos el incremento de las coordenadas r_1 y s_1 igual a $h = 0{,}01$ y, para el límite $r_0'' - h = (1{,}256 - 0{,}01 - 1{,}2)\ (-0{,}2) = -0{,}0092$, calculemos la función $J^{(2)}\,(r_1 - h,\ s_1 - h)$, es decir, $J^{(2)} = -0{,}00009165$. Con estos valores de $J^{(2)}$ en los puntos vecinos, hallamos $\partial J^{(2)}/\partial \xi_M = -0{,}00438$.

Así, pues, $\partial J_{\mathrm{VIII}}/\partial \xi_M = -0{,}000086$.

Calculamos la derivada:

$$\partial K_{\mathrm{VIII}}/\partial \xi_M = \partial K^{(1)}/\partial \xi_M + \partial K^{(2)}/\partial \xi_M + \partial K^{(3)}/\partial \xi_M; \quad (9.714)$$

$$\partial K^{(1)}/\partial \xi_M = (2/3]\sqrt{s_1 - r_0}\,\{6\,(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_1 - r_0''}) + (r_0 + 2s_1) \times$$
$$\times [1/\sqrt{r_1} - (1-a)/\sqrt{r_1 - r_0''}]\} = -0{,}3476.$$

$$\partial K^{(2)}/\partial \xi_M = \partial\,(2s_1 C^0_{\mathrm{VIII}}/3)\,\partial \xi_M = (2/3)\,(C^0_{\mathrm{VIII}} + s_1 \partial C^0_{\mathrm{VIII}}/\partial \xi_M);$$

$$\partial C^0_{\mathrm{VIII}}/\partial \xi_M = 2(1-a)\sqrt{\frac{s_1 - r_0''/a}{r_1 - r_0''}} - 2\sqrt{\frac{s_1}{r_1}} + \frac{2(a-1)}{a\sqrt{-1/a}} \times$$

$$\times\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{r_1-r_0''}{a(s_1-r_0)}}-\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{r_1}{as_1}}\right]=0{,}3894;\quad C^0_{\mathrm{VIII}}=0{,}02199;$$

$$\partial K^{(2)}/\partial\xi_M=0{,}3407;$$

$$\partial K^{(3)}/\partial\xi_M=(1/3a)\,\partial J^2/\partial\xi_M=0{,}007035;\quad \partial K_{\mathrm{VIII}}/\partial\xi_M=-0{,}00245;$$

$$\partial A_{\mathrm{VIII}}/\partial\xi_M=\partial A^{(1)}/\partial\xi_M+\partial A^{(2)}/\partial\xi_M;$$

$$\partial A^{(1)}/\partial\xi_M=4\sqrt{s_1-s_0}\,(\sqrt{r_1-s_0}-\sqrt{r_1})=-0{,}1107.$$

Calculamos la función $A^{(2)}((r_1-h,\ s_1-h)$, haciendo $h=0{,}01$ y los valores de $r_1-h=1{,}246$; $s_1-h=1{,}246$; $s_0-h=s_1-h-\bar{l}=0{,}046$. La integración numérica da el valor de $A^{(2)}=0{,}001933$. Teniendo esto en cuenta las correspondientes derivadas

$$\partial A^{(2)}/\partial\xi_M=(1/h)\,(0{,}002875-0{,}001933)=0{,}09421;\quad \partial A_{\mathrm{VIII}}/\partial\xi_M=-0{,}01649.$$

Calculemos:

$$\partial D_{\mathrm{VIII}}/\partial\xi_M=\partial D^{(1)}/\partial\xi_M+\partial D^{(2)}/\partial\xi_M+\partial D^{(3)}/\partial\xi_M; \tag{9.715}$$

$$\partial D^{(1)}/\partial\xi_M=(2/3)\sqrt{s_1-s_0}\,[6\,(\overline{r_1-s_0}-\sqrt{r_1})-(r_0+2s_1)/\sqrt{r_1}]=-1{,}784;$$

$$\partial D^{(2)}/\partial\xi_M=(2/3)\,E^0_{\mathrm{VIII}}+(2/3)\,s_1\partial E^0_{\mathrm{VIII}}/\partial\xi_M;$$

$$E^0_{\mathrm{VIII}}=2\left\{-\sqrt{(s_1-s_0a)\,(r_1-s_0)}+\sqrt{s_1r_1}-\frac{-r_1a+s_1}{\sqrt{-a}}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a(r_1-s_0)}{s_1-s_0a}}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{ar_1}{s_1}}\right]\right\}=-0{,}1134;$$

$$\partial E^0_{\mathrm{VIII}}/\partial\xi_M=2\sqrt{\frac{s_1}{r_1}}+(1-a)\sqrt{\frac{(r_1-s_0)}{s_1-s_0a}}-\frac{2(1-a)}{\sqrt{-a}}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{a(r_1-s_0)}{s_1-s_0a}}-\right.$$

$$\left.-\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{ar_1}{s_1}}\right]=3{,}222;\quad \partial D^{(2)}/\partial\xi_M=2{,}773;$$

$$\partial D^{(3)}/\partial\xi_M=(a/3)\,\partial A^{(2)}/\partial\xi_M=-0{,}006281.$$

Así,pues, $\partial D_{\mathrm{VIII}}/\partial\xi_M=0{,}9827$.
A continuación, hallamos

$$\partial F_{\mathrm{VIII}}/\partial\xi_M=4\sqrt{(s_1-r_0)\,(r_1-s_0)}=4{,}8;$$

$$\partial H_{\mathrm{VIII}}/\partial\xi_M=4\sqrt{(s_1-r_0)\,(r_1-s_0)}=4{,}8;\quad \partial\dot{\bar{F}}^{\alpha}/\partial\xi_M=1{,}741$$

y determinamos la derivada

$$\dot{p}^{\bar{\alpha}}=(4/\alpha')\,[\partial\dot{\bar{F}}^{\alpha}/\partial\xi_M-(\mathrm{M}^2_\infty/\alpha')\,\xi_M\partial F^{\alpha}/\partial\xi_M-F^{\alpha}/\alpha']=3{,}604.$$

9.96. *Zona I*. Las dependencias generales para las funciones F^{α} y $\dot{\bar{F}}^{\alpha}$ en el punto A, situado en esta zona $(\sigma_1+\sigma_2)$ (fig. 9.41), tienen la forma (9.555) y (9.556). Conforme a la fig. 9.41

$$F^{\alpha}=(1/2)\left(\int_{r_B}^{r_F}dr/\sqrt{r_1-r}\int_{s_C}^{s_D}ds/\sqrt{s_1-s}+\int_{r_F}^{r_A}dr/\sqrt{r_1-r}\int_{s_E}^{s_F}ds/\sqrt{s_1-s}\right);$$

$$s_C=-r;\quad s_D=s_A=s_1;\quad s_E'=r_1;\quad r_F=-r_1;\quad r_B=-s_1;$$

$$s_F=s_1;\quad r_A=r_1;\quad r_F=-r_1.$$

De acuerdo con los límites obtenidos

$$F^{\alpha}=\frac{1}{2\pi}\Big(\underbrace{\int_{-s_1}^{-r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{-r}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{A_1}+\underbrace{\int_{-r_1}^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{r_1}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{B_1}\Big).$$

Por analogía, tenemos

$$\dot{\bar{F^{\alpha}}}=\frac{M_{\infty}^2}{4\pi\alpha'}\Big(\underbrace{\int_{-s_1}^{-r_1}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{-r}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{C_{\mathrm{I}}}+\underbrace{\int_{-s_1}^{-r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{-r}^{s_1}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{D_{\mathrm{I}}}+$$

$$+\underbrace{\int_{-r_1}^{r_1}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{r_1}^{-s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{E_{\mathrm{I}}}+\underbrace{\int_{-r_1}^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{r_1}^{s_1}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{H_{\mathrm{I}}}\Big).$$

Determinamos la derivada F^{α}:

$$\int_{-r}^{s_1} ds/\sqrt{s_1-s}=2\sqrt{s_1+r};\quad A_{\mathrm{I}}=2\,[-\sqrt{2r_1(s_1-r_1)}-(r_1+s_1)\times$$

$$\times(\operatorname{arctg}\sqrt{2r_1/(s_1-r_1)}-\pi/2)];\quad \int_{r_1}^{s_1} ds/\sqrt{s_1-s}=2\sqrt{s_1-r_1};\quad B_{\mathrm{I}}=4\sqrt{2r_1(s_1-r_1)};$$

$$F^{\alpha}=(1/\pi)\{\sqrt{2r_1(s_1-r_1)}-(r_1+s_1)\,[\operatorname{arctg}\sqrt{2r_1/(s_1-r_1)}-\pi/2]\}.$$

Efectuamos el cálculo de:

$$\xi_{\mathrm{M}}=x/(b_0\alpha')=0{,}2778;\ \zeta_{\mathrm{M}}=z/b_0=0{,}08333;\ s_1=\xi_{\mathrm{M}}+\zeta_{\mathrm{M}}=0{,}3611;$$

$$r_1=\xi_{\mathrm{M}}-\zeta_{\mathrm{M}}=0{,}1944;\ F^{\alpha}=0{,}1836;$$

$$\partial F^{\alpha}/\partial\xi_{\mathrm{M}}=(2/\pi)\,[\pi/2-\operatorname{arctg}\sqrt{2r_1/(s_1-r_1)}]=0{,}3692; \tag{9.716}$$

$$p^{\alpha}=(4/\alpha')\partial F^{\alpha}/\partial\xi_{\mathrm{M}}=1{,}969.$$

Calculemos la función:

$$\dot{\bar{F^{\alpha}}}=[M_{\infty}^2/(4\pi\alpha')]\,(C_{\mathrm{I}}+D_{\mathrm{I}}+E_{\mathrm{I}}+H_{\mathrm{I}}). \tag{9.717}$$

Hallamos:

$$\int_{-r}^{s_1} ds/\sqrt{s_1-s}=2\sqrt{s_1+r};\ C_{\mathrm{I}}=2\int_{-s_1}^{-r_1}[(r\sqrt{s_1+r})/\sqrt{r_1-r}]\,dr.$$

Dividimos el intervalo de integración $-r_1-(-s_1)=-0{,}1944+0{,}3611=$ $=0{,}1667$ en segmentos de anchura $h=0{,}1667/10=0{,}01667$. Teniendo esto en cuenta $C_{\mathrm{I}}=-0{,}03265$.

Más adelante determinamos:

$$\int_{-r}^{s_1} s\,ds/\sqrt{s_1-s}=(2/3)\,(-r+2s_1)\sqrt{s_1+r};$$

$$D_{\mathrm{I}}=-\frac{2}{3}\int_{-s_1}^{-r_1}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}+\frac{4}{3}s_1\int_{-s_1}^{-r_1}\frac{\sqrt{s_1+r}}{\sqrt{r_1-r}}\,dr;$$

$$D^{(1)}=(4/9)\,[r_1\sqrt{2r_1}-(-s_1+2r_1)\sqrt{r_1+s_1}];\quad D^{(2)}=(2/3)\,s_1A_{\mathrm{I}}.$$

Calculamos: $D^{(1)}=0{,}04469$; $D^{(2)}=(2/3)\ 0{,}3611\ A_{\mathrm{I}}$; $A_{\mathrm{I}}=0{,}1349$; $D^{(2)}=$ $=0{,}03247$; $D_{\mathrm{I}}=0{,}07716$.

Hallemos las integrales E_{I} y H_{I};

$$\int_{r_1}^{s_1} ds/\sqrt{s_1-s}=2\sqrt{s_1-r_1};\quad E_{\mathrm{I}}=(4/3)\,r_1\sqrt{2r_1\,(s_1-r_1)}=0{,}06601;$$

$$\int_{r_1}^{s_1} s\,ds/\sqrt{s_1-s}=(2/3)\,(r_1+2s_1)\sqrt{s_1-r_1};$$

$$H_1=(4/3)\,(r_1+2s_1)\sqrt{2r_1\,(s_1-r_1)}=0{,}3112.$$

Tomando en consideración los datos obtenidos $F^{\dot{\bar{\alpha}}}=0{,}06994$. Calculemos la derivada:

$$\partial F^{\dot{\bar{\alpha}}}/\partial\xi_{\mathrm{M}}=[\mathrm{M}_\infty^2/(4\pi\alpha')]\,(\partial C_{\mathrm{I}}/\partial\xi_{\mathrm{M}}+\partial D_{\mathrm{I}}/\partial\xi_{\mathrm{M}}+\partial E_{\mathrm{I}}/\partial\xi_{\mathrm{M}}+\partial H_{\mathrm{I}}/\partial\xi_{\mathrm{M}}).\quad(9.718)$$

Calculemos el valor de C_{I} en el punto con coordenadas r_1-h; s_1-h para $h=0{,}01$ y dividamos el nuevo intervalo de integración en diez segmentos. Conforme a esto $C_{\mathrm{I}}\ (r_1-h;\ s_1-h)=-0{,}03215$ y la derivada $\partial C_{\mathrm{I}}/\partial\xi_{\mathrm{M}}=(1/h)\times$ $\times(-0{,}03265+0{,}03215)=-0{,}05$.

A continuación, determinamos:

$$\partial D_{\mathrm{I}}/\partial\xi_{\mathrm{M}}=\partial D^{(1)}/\partial\xi_{\mathrm{M}}+\partial D^{(2)}/\partial\xi_{\mathrm{M}};\quad(9.719)$$

$$\partial D^{(1)}/\partial\xi_{\mathrm{M}}=(2/3)(\sqrt{2r_1}-2r_1/\sqrt{r_1+s_1});$$

$$\partial D^{(2)}/\partial\xi_{\mathrm{M}}=\partial\ (2s_1A_{\mathrm{I}}/3)/\partial\xi_{\mathrm{M}}=(2/3)\ (A_{\mathrm{I}}+s_1\partial A_{\mathrm{I}}/\partial\xi_{\mathrm{M}});$$

$$\partial A_{\mathrm{I}}/\partial\xi_{\mathrm{M}}=4\ [-\sqrt{(s_1-r_1)/2\,r_1}+\mathrm{arctg}\sqrt{(s_1-r_1)/2r_1}];$$

donde $\partial D^{(1)}/\partial\xi_{\mathrm{M}}=0{,}06791$; $A_{\mathrm{I}}=0{,}1349$; $\partial A_{\mathrm{I}}/\partial\xi_{\mathrm{M}}=-0{,}2996$; $\partial D^{(2)}/\partial\xi_{\mathrm{M}}=$ $=0{,}0178$; $\partial D_{\mathrm{I}}/\partial\xi_{\mathrm{M}}=0{,}08571$; $\partial E_{\mathrm{I}}/\partial\xi_{\mathrm{M}}=0{,}5092$;

$$\partial H_{\mathrm{I}}/\partial\xi_{\mathrm{M}}=(2/3)\sqrt{2r_1\ (s_1-r_1)}\ (7\ r_1+2s_1)/r_1=1{,}818.$$

Con arreglo a esto, las derivadas: $\partial F^{\dot{\bar{\alpha}}}/\partial\xi_{\mathrm{M}}=0{,}4451$; $p^{\dot{\bar{\alpha}}}=-0{,}07184$.

Zona II. Para ella (fig. 9.41)

$$F^{\alpha}=\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{r_B}^{r_A}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{s_C}^{s_D}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{D_{II}};\quad F^{\dot{\bar{\alpha}}}=\frac{M_{\infty}^2}{4\pi\alpha'}\Bigg(\underbrace{\int_{r_B}^{r_A}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{s_C}^{s_D}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{C_{II}}+$$

$$+\underbrace{\int_{r_B}^{r_A}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{s_C}^{s_D}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{D_{II}}\Bigg);$$

$$s_C=-r;\quad s_D=s_A=s_1;\quad r_B=-s_A=-s_1;\quad r_A=r_1;$$

$$\int_{-r}^{s_1} ds/\sqrt{s_1-s}=2\sqrt{s_1+r};\quad D_{II}=(r_1+s_1)\pi.$$

En virtud de este valor de D_{II}, hallamos

$F^{\alpha}=[1/(2\pi)]D_{II}=\xi_M;\quad \partial F^{\alpha}/\partial\xi_M=1;\quad p^{\alpha}=(4/\alpha')\partial F^{\alpha}/\partial\xi_M=5{,}333.$

Determinamos la función:

$$F^{\dot{\bar{\alpha}}}=\frac{M_{\infty}^2}{\pi\alpha'}\int\int\frac{\xi_M\,d\xi_M\,d\zeta_M}{\sqrt{(\xi_{M1}-\xi_M)^2-(\zeta_{M1}-\zeta_M)^2}}.$$

Introduzcamos las variables $\xi_{M1}-\xi_M=\beta$: $\zeta_{M1}-\zeta_M=\beta\cos\theta$ y obtenemos:

$$F^{\dot{\bar{\alpha}}}=[M_{\infty}^2/(2\alpha')]\,\xi_{M1}^2 \tag{9.720}$$

$$\partial F^{\dot{\bar{\alpha}}}/\xi_M=(M_{\infty}^2/\alpha')\,\partial\xi_{M1}; \tag{9.721}$$

$$p^{\dot{\bar{\alpha}}}=-(4/\alpha'^2)\,\xi_{M1}=-(4/\alpha'^3)\,\xi_M. \tag{9.722}$$

Introduciendo aquí los datos, hallamos $p^{\dot{\bar{\alpha}}}=1{,}975$.

Zona III. Para el punto A en esta zona

$$F^{\alpha}=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{r_B}^{r_F}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{s_C}^{s_D}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}+\int_{r_H}^{r_A}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{s_F}^{s_H}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}\right);$$

$$F^{\dot{\alpha}}=\frac{M_{\infty}^2}{4\pi\alpha'}\left(\int_{r_B}^{r_F}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{s_C}^{s_D}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}+\int_{r_B}^{r_F}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{s_C}^{s_D}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}+\right.$$

$$\left.+\int_{r_H}^{r_A}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{s_F}^{s_H}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}+\int_{r_H}^{r_A}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{s_F}^{s_A}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}\right);$$

$$s_C=-r;\quad s_D=r_1;\quad r_B=-r_1;\quad r_F=s_1-2\bar{l};$$

$$s_F=r_1;\quad s_H=s_A=s_1;\quad r_H=s_1-2\bar{l};\quad r_A=r_1.$$

De acuerdo con los valores de los límites

$$F^{\alpha}=\frac{1}{2\pi}\Bigg(\underbrace{\int\limits_{-r_1}^{s_0=s_1-2\bar{l}}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int\limits_{-r}^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{A_{\mathrm{III}}}+\underbrace{\int\limits_{s_0=s_1-2\bar{l}}^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int\limits_{r_1}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{B_{\mathrm{III}}}\Bigg);$$

$$F^{\dot{\bar{\alpha}}}=\frac{\mathrm{M}_{\infty}^{2}}{4\pi\alpha'}\Bigg(\underbrace{\int\limits_{-r_1}^{s_0}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int\limits_{-r}^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{C_{\mathrm{III}}}+\underbrace{\int\limits_{-r_1}^{s_0}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int\limits_{-r}^{r_1}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{D_{\mathrm{III}}}+$$

$$+\underbrace{\int\limits_{s_0}^{r_1}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int\limits_{r_1}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{E_{\mathrm{III}}}+\underbrace{\int\limits_{s_0}^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int\limits_{r_1}^{s_1}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{H_{\mathrm{III}}}\Bigg).$$

Determinamos la derivada F^{α}:

$$\int\limits_{-r_1}^{r_1}ds/\sqrt{s_1-s}=-2\sqrt{s_1-r_1}+2\sqrt{s_1+r};$$

$$A_{\mathrm{III}}=\underbrace{\int\limits_{-r_1}^{s_0}(-2\sqrt{s_1-r_1})\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}}_{A^{(1)}}+\underbrace{\int\limits_{-r_1}^{s_0}(2\sqrt{s_1+r})\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}}_{A^{(2)}};$$

$$A^{(1)}=4\sqrt{s_1-r_1}(\sqrt{r_1-s_0}-\sqrt{2r_1});$$

$$A^{(2)}=2\{\sqrt{2r_1(s_1-r_1)}-\sqrt{(r_1-s_0)(s_1+s_0)}-(r_1+s_1)\times$$

$$\times\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{r_1-s_0}{s_1+s_0}}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2r_1}{s_1-r_1}}\right]\};$$

$$A_{\mathrm{III}}=2\left\{\sqrt{r_1-s_0}(2\sqrt{s_1-r_1}-\sqrt{s_1+s_0})-\sqrt{2r_1(s_1-r_1)}-\right.$$

$$\left.-(r_1+s_1)\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{r_1-s_0}{s_1+s_0}}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2r_1}{s_1-r_1}}\right]\right\}.$$

Calculamos:

$\xi_{\mathrm{M}}=x/(b_0\alpha')=0{,}6111$; $\zeta_{\mathrm{M}}=z/b_0=0{,}3333$; $s_1=\xi_{\mathrm{M}}+\zeta_{\mathrm{M}}=0{,}9444$;
$r_1=\xi_{\mathrm{M}}-\zeta_{\mathrm{M}}=0{,}2778$; $2\bar{l}=2l/b_0=1{,}0$; $s_0=s_1-2\bar{l}=-0{,}0556$;

$$A_{\mathrm{III}}=0{,}04514.$$

Más adelante hallamos

$$\int\limits_{r_1}^{s_1}ds/\sqrt{s_1-s}=2\sqrt{s_1-r_1};\quad B_{\mathrm{III}}=4\sqrt{(s_1-r_1)(r_1-s_0)}=1{,}886.$$

Así, pues, $F^{\alpha}=0{,}3074$. Calculamos las derivadas $\partial F^{\alpha}/\partial\xi_{\mathrm{M}}$ y p^{α}:

$$\partial A_{\mathrm{III}}/\partial\xi_{\mathrm{M}}=-4\,[\operatorname{arctg}\sqrt{(r_1-s_0)/(s_1+s_0)}-\operatorname{arctg}\sqrt{2r_1/(s_1-r_1)}]=0{,}7615;$$

$$\partial B_{\mathrm{III}}/\partial\xi_{\mathrm{M}}=0;\quad \partial F^{\alpha}/\partial\xi_{\mathrm{M}}=0{,}1212;\quad p^{\alpha}=(4/\alpha')\,\partial F^{\alpha}/\partial\xi_{\mathrm{M}}=0{,}8010.$$

Analicemos las derivadas $\dot{\bar{F^{\alpha}}}$ y $\partial\dot{\bar{F^{\alpha}}}/\partial\xi_M$:

$$\int_{-r}^{r_1} \frac{ds}{\sqrt{s_1-s}} = -2\sqrt{s_1-r_1} + 2\sqrt{s_1+r};$$

$$C_{III} = \underbrace{-2\sqrt{s_1-r_1}\int_{-r_1}^{s_0} \frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}}_{C^{(1)}} + \underbrace{2\int_{-r_1}^{s_0} \frac{r\sqrt{s_1+r}}{\sqrt{r_1-r}}dr}_{C^{(2)}};$$

$$C^{(1)} = (4/3)\sqrt{s_1-r_1}\,[(s_0+2r_1)\sqrt{r_1-s_0} - r_1\sqrt{2r_1}] = 0{,}08887.$$

Dividamos el intervalo $s_0 - (-r_1) = -0{,}0556 + 0{,}2778 = 0{,}2222$ en segmentos de anchura $h = 0{,}02222$ y, realizando la integración numérica, hallamos $C^{(2)} = -0{,}1006$. Conforme a este valor $C_{III} = C^{(1)} + C^{(2)} = -0{,}01173$. Acto seguido determinamos:

$$\int_{-r}^{r_1} \frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}} = \frac{2}{3}[(r_1+2s_1)\sqrt{s_1-r_1} - (-r+2s_1)\sqrt{s_1+r}];$$

$$D_{III} = \underbrace{-\frac{2}{3}(r_1+2s_1)\sqrt{s_1-r_1}\int_{-r_1}^{s_0} \frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}}_{D^{(1)}} \underbrace{-\frac{2}{3}\int_{-r_1}^{s_0} \frac{r\sqrt{s_1+r}\,dr}{\sqrt{r_1-r}}}_{D^{(2)}} +$$

$$+\underbrace{\frac{4}{3}s_1\int_{-r_1}^{s_0} \frac{\sqrt{s_1+r}\,dr}{\sqrt{r_1-r}}}_{D^{(3)}};$$

$$D_{III} = D^{(1)} + D^{(2)} + D^{(3)};$$

$$D^{(1)} = (4/3)(r_1 + 2s_1)\sqrt{s_1-r_1}\,(\sqrt{r_1-s_0} - \sqrt{2r_1}) = -0{,}3963;$$

$$D^{(2)} = -C^{(2)}/3 = 0{,}3353; \quad D^{(3)} = (2/3)s_1A^{(2)}; \quad A^{(2)} = 0{,}5938;$$

$$D^{(3)} = (2/3)s_1A^{(2)} = 0{,}3739; \quad D_{III} = 0{,}01113.$$

A continuación hallamos:

$$\int_{r_1}^{s_1} ds/\sqrt{s_1-s} = 2\sqrt{s_1-r_1}; \quad E_{III} = (4/3)(s_0+2r_1)\sqrt{(r_1-s_0)(s_1-r_1)} = 0{,}2629;$$

$$\int_{r_1}^{s_1} s\,ds/\sqrt{s_1-s} = (2/3)(r_1+2s_1)\sqrt{s_1-r_1};$$

$$H_{III} = (4/3)(r_1+2s_1)\sqrt{(s_1-r_1)(r_1-s_0)} = 1{,}139; \quad \dot{\bar{F^{\alpha}}} = 0{,}2324.$$

Determinamos la derivada:

$$\partial\dot{\bar{F^{\alpha}}}/\partial\xi_M = [M_\infty^2/(4\pi\alpha')](\partial C_{III}/\partial\xi_M + \partial D_{III}/\partial\xi_M + \partial E_{III}/\partial\xi_M + \partial H_{III}/\partial\xi_M). \quad (9.723)$$

Hallamos:

$$\partial C_{III}/\partial\xi_M = \partial C^{(1)}/\partial\xi_M + \partial C^{(2)}/\partial\xi_M; \qquad (9.724)$$

$$\partial C^{(1)}/\partial\xi_M = 2\,[2\sqrt{(s_1-r_1)(r_1-s_1)} - \sqrt{2r_1}] = 0{,}3949.$$

Examinemos el punto A' con coordenadas $s_1 - h$; $r_1 - h$, haciendo $h = 0{,}01$. En virtud de esto $-(r_1 - h) = -(0{,}2778 - 0{,}01) = -0{,}2678$;

$$s_1 - h = 0{,}94444 - 0{,}01 = 0{,}9344; \quad s_0 - h = s_1 - h - 2\bar{l} = -0{,}0656.$$

Dividiendo el nuevo sector de integración en diez segmentos, hallamos el valor numérico de la integral $C^{(2)}(r_1 - h;\ s_1 - h) = -0{,}09194$ y, a continuación, las derivadas:

$$\partial C^{(2)}/\partial\xi_M = (1/h)\,(-0{,}1006 + 0{,}09194) = -0{,}8662; \qquad \partial C_{III}/\partial\xi_M = -0{,}4713.$$

Después determinamos:

$$\partial D_{III}/\partial\xi_M = \partial D^{(1)}/\partial\xi_M + \partial D^{(2)}/\partial\xi_M + \partial D^{(3)}/\partial\xi_M;$$

$$\partial D^{(1)}/\partial\xi_M = (4/3)\sqrt{s_1-r_1}\,[3\,(\sqrt{r_1-s_0} - \sqrt{2r_1}) - (r_1+2s_1)/2r_1] = -4{,}7944;$$

$$\partial D^{(2)}/\partial\xi_M = -(1/3)\,\partial C^{(2)}/\partial\xi_M = 0{,}2887;$$

$$\partial D^{(3)}/\partial\xi_M = (2/3)\,(A^{(2)} + s_1\partial A^{(2)}/\partial\xi_M); \quad A^{(2)} = 0{,}5938;$$

$$\partial A^{(2)}/\partial\xi_M = 4\,\{\sqrt{(s_1-r_1)/2r_1} - [\operatorname{arctg}\sqrt{(r_1-s_0)/(s_1+s_0)} - \\ - \operatorname{arctg}\sqrt{2r_1/(s_1-r_1)}]\} = 5{,}143;$$

$$\partial D^{(3)}/\partial\xi_M = (2/3)\,(0{,}5938 + 0{,}9444\cdot 5{,}143) = 3{,}634; \quad \partial D_{III}/\partial\xi_M = -0{,}8717;$$

$$\partial E_{III}/\partial\xi_M = 4\sqrt{(r_1-s_0)(s_1-r_1)} = 1{,}886;$$

$$\partial H_{III}/\partial\xi_M = 4\sqrt{(s_1-r_1)(r_1-s_0)} = 1{,}886.$$

Las correspondientes derivadas $\partial F^{\dot{\bar{\alpha}}}/\partial\xi_M = 0{,}4029$; $p^{\dot{\bar{\alpha}}} = -0{,}8608$.

Zona IV (fig. 9.41). En esta zona, para el punto A

$$F^{\alpha} = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{r_B}^{r_F}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}} + \int_{s_C}^{s_D}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}} + \int_{r_F}^{r_G}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{s_F}^{s_H}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}} + \right.$$

$$\left. + \int_{r_K}^{r_N}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{s_K}^{s_M}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}\right); \quad \dot{F}^{\alpha} = \frac{M_\infty^2}{4\pi a'}\left(\int_{r_B}^{r_F}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{s_C}^{s_D}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}} + \right.$$

$$+ \int_{r_B}^{r_F}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{s_C}^{s_D}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}} + \int_{r_F}^{r_G}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{s_F}^{s_H}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}} + \int_{r_F}^{r_G}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{s_F}^{s_H}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}} +$$

$$\left. + \int_{r_K}^{r_N}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{s_K}^{s_M}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}} + \int_{r_K}^{r_N}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{s_K}^{s_M}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}\right).$$

$$s_C = -r; \quad s_D = s_1 - 2\bar{l}; \quad r_F = r_1 - 2\bar{l}; \quad r_B = -(s_1 - 2\bar{l});$$

$$s_F = s_1 - 2\bar{l}; \quad r_N = r_A = r_1; \quad s_H = r_1; \quad s_M = s_A = s_1;$$

$$r_G = s_1 - 2\bar{l}; \quad s_K = r_1; \quad r_K = s_1 - 2\bar{l}; \quad r_N = r_A = r_1.$$

Determinamos la derivada:

$$F^{\alpha}=\frac{1}{2\pi}\Bigg(\underbrace{\int\limits_{r'=-(s_1-2\bar{l})}^{r_0=r_1-2\bar{l}}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int\limits_{-r}^{s_0=s_1-2\bar{l}}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{A_{\rm IV}}+$$

$$+\underbrace{\int\limits_{r_0=r_1-2\bar{l}}^{s_0}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int\limits_{s_0}^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{B_{\rm IV}}+\underbrace{\int\limits_{s_0}^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int\limits_{r_1}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{C_{\rm IV}}\Bigg).$$

Hallamos:

$$\int\limits_{-r}^{s_0}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}=-2\sqrt{s_1-s_0}+2\sqrt{s_1+r};$$

$$A_{\rm IV}=\underbrace{-2\sqrt{s_1-s_0}\int\limits_{r'}^{r_0}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}}_{A^{(1)}}+\underbrace{2\int\limits_{r'}^{r_0}\frac{\sqrt{s_1+r}}{\sqrt{r_1-r}}\,dr}_{A^{(2)}};\quad A_{\rm IV}=A^{(1)}+A^{(2)};$$

$$A^{(1)}=4\sqrt{s_1-s_0}\,(\sqrt{r_1-r_0}-\sqrt{r_1-r'});$$

$$A^{(2)}=-2\,(r_1+s_1)\,[\operatorname{arctg}\sqrt{(r_1-r_0)\,(s_1+r_0)}-\operatorname{arctg}\sqrt{(r_1-r')\,(s_1+r')}].$$

Calculamos:

$$\xi_{\rm M}=x/(b_0\alpha')=1{,}111;\quad \zeta_{\rm M}=z/b_0=0{,}3333;\quad s_1=\xi_{\rm M}+\zeta_{\rm M}=1{,}444;$$

$$r_1=\xi_{\rm M}-\zeta_{\rm M}=0{,}7777;\quad r'=-(s_1-2\bar{l})=0{,}4444;\quad r_0=r_1-2\bar{l}=-0{,}2223;$$

$$s_0=s_1-2\bar{l}=0{,}4444;\quad A^{(1)}=-0{,}422;\quad A^{(2)}=0{,}4452;\quad A_{\rm IV}=0{,}023.$$

A continuación, hallamos:

$$\int\limits_{s_0}^{r_1}ds/\sqrt{s_2-s}=-2\sqrt{s_1-r_1}+2\sqrt{s_1-s_0};$$

$$B_{\rm IV}=4\,(\sqrt{s_1-r_1}-\sqrt{2\bar{l}})\,(\sqrt{r_1-s_0}-\sqrt{2\bar{l}})=0{,}3102;$$

$$\int\limits_{r_1}^{s_1}ds/\sqrt{s_1-s}=2\sqrt{s_1-r_1};\quad C_{\rm IV}=4\sqrt{(s_1-r_1)\,(r_1-s_0)}=1{,}885;$$

$$F^{\alpha}=(1/2\pi)\,(A_{\rm IV}+B_{\rm IV}+C_{\rm IV})=0{,}3533. \qquad (9.725)$$

Determinamos:

$$\partial F^{\alpha}/\partial\xi_{\rm M}=[1/(2\pi)]\,(\partial A_{\rm IV}/\partial\xi_{\rm M}+\partial B_{\rm IV}/\partial\xi_{\rm M}+\partial C_{\rm IV}/\partial\xi_{\rm M}); \qquad (9.725')$$

$$\partial A_{\rm IV}/\partial\xi_{\rm M}=\partial A^{(1)}/\partial\xi_{\rm M}+\partial A^{(2)}/\partial\xi_{\rm M};\quad A^{(1)}=4\sqrt{2\bar{l}}\,(\sqrt{2\bar{l}}-\sqrt{r_1+s_1-2\bar{l}});$$

$$\partial A^{(1)}/\partial\xi_{\rm M}=-4\sqrt{2\bar{l}/(r_1+s_1-2\bar{l})}=-3{,}618;$$

$$A^{(2)} = -2(r_1+s_1)\,[\operatorname{arctg}\sqrt{2\bar{l}/(s_1+r_1-2\bar{l})} - \operatorname{arctg}\sqrt{(r_1+s_1-2\bar{l})/(2\bar{l})}];$$

$$\frac{\partial A^{(2)}}{\partial \xi_M} = 4\left[-\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2\bar{l}}{s_1+r_1-2\bar{l}}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{r_1+s_1-2\bar{l}}{2\bar{l}}}\right) + \sqrt{\frac{2\bar{l}}{s_1+r_1-2\bar{l}}}\right] =$$
$$= 4{,}019.$$

$$\partial A_{IV}/\partial\xi_M = 0{,}401; \quad \partial B_{IV}/\partial\xi_M = \partial C_{IV}/\partial\xi_M = 0.$$

Así, pues,

$$\partial F^{\alpha}/\partial\xi_M = 0{,}0638; \quad p^{\alpha} = (4/\alpha')\,\partial F^{\alpha}/\partial\xi_M = 0{,}3403.$$

Determinamos la derivada:

$$\dot{\bar{F}}^{\alpha} = \frac{M_\infty^2}{4\pi\alpha'}\Bigg(\underbrace{\int_{r'}^{r_0}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{-r}^{s_0}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{D_{IV}} + \underbrace{\int_{r'}^{r_0}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{-r}^{s_0}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{E_{IV}} +$$

$$+\underbrace{\int_{r_0}^{s_0}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{s_0}^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{G_{IV}} + \underbrace{\int_{r_0}^{s_0}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{s_0}^{r_1}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{H_{IV}} + \underbrace{\int_{s_0}^{r_1}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{r_1}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{K_{IV}} +$$

$$+\underbrace{\int_{s_0}^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{r_1}^{s_1}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}}_{M_{IV}}\Bigg).$$

Hallamos:

$$\dot{\bar{F}}^{\alpha} = [M_\infty^2/(4\pi\alpha')]\,(D_{IV}+E_{IV}+G_{IV}+H_{IV}+K_{IV}+M_{IV}); \tag{9.726}$$

$$\int_{-r}^{s_0} ds/\sqrt{s_1-s} = -2\sqrt{s_1-s_0} + 2\sqrt{s_1+r};$$

$$D_{IV} = -\underbrace{\int_{r'}^{r_0} 2\sqrt{s_1-s_0}\,\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}}_{D^{(1)}} + \underbrace{2\int_{r'}^{r_0}\frac{r\sqrt{s_1+r}}{\sqrt{r_1-r}}\,dr}_{D^{(2)}}; \quad D_{IV} = D^{(1)} + D^{(2)};$$

$$D^{(1)} = (4/3)\sqrt{2\bar{l}}\,[(r_0+2r_1)\sqrt{2\bar{l}} - (r'+2r_1)\sqrt{r_1-r'}] = 0{,}1399.$$

Para calcular la integral $D^{(2)}$ dividimos el intervalo $r_0 - r' = -0{,}2223 - (-0{,}4444) = 0{,}2221$ en sectores de anchura $h = 0{,}02221$ y, después de efectuar la integración numérica, obtenemos $D^{(2)} = -0{,}1509$.

Al realizar la suma, hallamos $D_{IV} = D^{(1)} + D^{(2)} = -0{,}011$. Después, determinamos:

$$\int_{-r}^{s_0} s\, ds/\sqrt{s_1 - s} = (-2/3)\,[(s_0 + 2s_1)\sqrt{s_1 - s_0} - (-r + 2s_1)\sqrt{s_1 + r}];$$

$$E_{IV} = \underbrace{-\frac{2}{3}(s_0 + 2s_1)\sqrt{s_1 - s_0}\int_{r'}^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{r_1 - r}}}_{E^{(1)}} \underbrace{-\frac{2}{3}\int_{r'}^{r_0} \frac{r\sqrt{s_1 + r}}{\sqrt{r_1 - r}}\, dr}_{E^{(2)}} +$$

$$+ \underbrace{\frac{4}{3} s_1 \int_{r'}^{r_0} \frac{\sqrt{s_1 + r}}{\sqrt{r_1 - r}}\, dr}_{E^{(3)}}; \quad E_{IV} = E^{(1)} + E^{(2)} + E^{(3)};$$

$$E^{(1)} = (4/3)(s_0 + 2s_1)(\sqrt{2l} - \sqrt{r_1 - r'}) = -0{,}4691;$$

$$E^{(2)} = -(1/3)\, D^{(2)} = 0{,}053; \quad E^{(3)} = (2/3)\, s_1 A^{(2)} = 0{,}4286; \quad E_{IV} = 0{,}00991;$$

$$\int_{s_0}^{r_1} ds/\sqrt{s_1 - s} = -2\sqrt{s_1 - r_1} + 2\sqrt{s_1 - s_0};$$

$$G_{IV} = (4/3)(\sqrt{2l} - \sqrt{s_1 - r_1})\,[(s_0 + 2r_1)\sqrt{r_1 - s_0} - (r_0 + 2r_1)\sqrt{2l}\,] = -0{,}043;$$

$$\int_{s_0}^{r_1} ds/\sqrt{s_1 - s} = -2\sqrt{s_1 - r_1} + 2\sqrt{s_1 - s_0};$$

$$H_{IV} = 4\,(\sqrt{s_1 r_1} - \sqrt{2l})\,(\sqrt{r_1 - s_0} - \sqrt{2l}) = 0{,}3108;$$

$$\int_{r_1}^{s_1} ds/\sqrt{s_1 - s} = 2\sqrt{s_1 - r_1};$$

$$K_1 = (4/3)\sqrt{s_1 - r_1}\,(s_0 + 2r_1)\sqrt{r_1 - s_0} = 1{,}257;$$

$$\int_{r_1}^{s_1} s\, ds/\sqrt{s_1 - s} = (2/3)(r_1 + 2s_1)\sqrt{s_1 - r_1};$$

$$M_{IV} = (4/3)(r_1 + 2s_1)\sqrt{(s_1 - r_1)(r_1 - s_0)} = 2{,}305; \quad \dot{\bar{F}}^{\alpha} = 0{,}6315.$$

Calculamos la función:

$$\partial \dot{\bar{F}}^{\alpha} \partial \xi_M = [M_\infty^2/(4\pi\alpha')]\,(\partial D_{IV}/\partial \xi_M + \partial E_{IV}/\partial \xi_M + \partial G_{IV}/\partial \xi_M + \partial H_{IV}/\partial \xi_M + $$
$$+ \partial K_{IV}/\partial \xi_M + \partial M_{IV}/\partial \xi_M); \qquad (9.727)$$

$$\partial D_{IV}/\partial \xi_M = \partial D^{(1)}/\partial \xi_M + \partial D^{(2)}/\partial \xi_M;$$

$$\partial D^{(1)}/\partial \xi_M = (4/3)\sqrt{2l}\,[3\sqrt{2l} - \sqrt{r_1 - r'} + (r' + 2r_1)/\sqrt{r_1 - r'}\,] = 1{,}186.$$

Con el fin de calcular la derivada $\partial D^{(2)}/\partial \xi_M$ examinemos el punto vecino al A con coordenadas $r_1 - h$; $s_1 - h$, en el que calculamos el valor de $D^{(2)}$ $(r_1 - h;\ s_1 - h)$.

Haciendo $h = 0{,}01$, hallamos; $s_1 - h = 1{,}434$; $r_1 - h = 0{,}7677$; $r' - h = -(s_1 - h - 2\bar{l}) = -0{,}434$; $r_0 - h = r_1 - h - 2\bar{l} = -0{,}2323$.

Al efectuar la integración numérica, obtenemos $D^{(2)}(r_1 - h;\ s_1 - h) = -0{,}1372$ y calculamos las correspondientes derivadas:

$$\partial D^{(2)}/\partial\xi_M = (1/h)(-0{,}1509 - 0{,}1372) = 1{,}37;\quad \partial D_{IV}/\partial\xi_M = -0{,}2904.$$

A continuación, determinamos

$$\partial F_{IV}/\partial\xi_M = \partial E^{(1)}/\partial\xi_M + \partial E^{(2)}/\partial\xi_M + \partial E^{(3)}/\partial\xi_M;$$

$$\partial E^{(1)}/\partial\xi_M = (4/3)\,[3\sqrt{2\bar{l}}\,(\sqrt{2\bar{l}} - \sqrt{r_1 - r}) - (s_0 + 2s_1)\sqrt{2\bar{l}/(r_1 - r')}] = -4{,}442;$$

$$\partial E^{(2)}/\partial\xi_M = (-1/3)\partial D^{(2)}/\partial\xi_M = 0{,}4567;\quad \partial E^{(3)}/\partial\xi_M = (2/3)\,(A^{(2)} + s_1\partial A^{(2)}/\partial\xi_M);$$

$$A^{(2)} = 0{,}4452;\ \partial A^{(2)}/\partial\xi_M = 4{,}019;\quad \partial E^{(3)}/\partial\xi_M = 4{,}166;\quad \partial E_{IV}/\partial\xi_M = 0{,}1837;$$

$$\partial G_{IV}/\partial\xi_M = 4\,(\sqrt{2\bar{l}} - \sqrt{s_1 - r_1})\,(\sqrt{r_1 - s_0} - \sqrt{2\bar{l}}) = -0{,}3102;$$

$$\partial H_{IV}/\partial\xi_M = 0;\quad \partial K_{IV}/\partial\xi_M = 4\sqrt{(s_1 - r_1)\,(s_1 - r_0)} = 1{,}885;$$

$$\partial M_{IV}/\partial\xi_M = 4\sqrt{(s_1 - r_1)\,(s_1 - r_0)} = 1{,}885.$$

En correspondencia con los datos obtenidos $\partial F^{\dot{\bar{\alpha}}}/\partial\xi_M = 0{,}5729$; $p^{\dot{\bar{\alpha}}} = -0{,}481$.

9.97. Las dependencias generales para las derivadas de los coeficientes de la fuerza de sustentación serán obtenidas de (9.249)—(9.251).

Introduzcamos las derivadas p^{qj} (de (9.608) y $\dot{p}^{qj}$ de (9.609) en (9.249)—(9.251) tomando en consideración que $\xi = \xi_M\alpha'$ y cambiando el signo delante de estas derivadas por el opuesto (de este modo elegimos el sentido del eje $O\xi$ desde el borde de ataque al de salida).

Teniendo en cuenta que en el borde de ataque ($\xi_M = \xi_M^*$) el potencial de velocidad es nulo y, por lo tanto

$$F^{qj} = \dot{F}^{qj} = 0, \tag{9.728}$$

hallamos las integrales:

$$\int_{\xi_{0M}}^{\xi_M^*} (\partial F^{qj}/\partial\xi_M)\,\partial\xi_M = F^{qj}(\xi_M^*,\ \zeta_M); \tag{9.729}$$

$$\int_{\xi_{0M}}^{\xi_M^*} (\partial F^{qj}/\partial\xi_M)\,\xi_M\,d\xi_M = \xi_M^* F^{qj}(\xi_M^*,\ \zeta_M) - \int_{\xi_{0M}}^{\xi_M^*} F^{qj}\,d\xi_M; \tag{9.730}$$

$$\int_{\xi_{0M}}^{\xi_M^*} (\partial F^{qj}/\partial\xi_M)\,\xi_M^2\,d\xi_M = \xi^{*2} F^{qj}(\xi_M^*,\ \zeta_M) - 2\int_{\xi_{0M}}^{\xi_M^*} F^{qj}\xi_M\,d\xi_M; \tag{9.731}$$

$$\int_{\xi_{0M}}^{\xi_M^*} (\partial F^{qj}/\partial\xi_M)\,\zeta_M\,d\xi_M = \zeta_M F^{qj}(\xi_M^*,\ \zeta_M); \tag{9.732}$$

$$\int_{\xi_{0M}}^{\xi_M^*} (\partial F^{qj}/\partial\xi_M)\,\zeta_M\xi_M\,d\xi_M = \zeta_M\xi_M^* F^{qj}(\xi_M^*,\ \zeta_M) - \zeta_M\int_{\xi_{0M}}^{\xi_M^*} F^{qj}\,d\xi_M. \tag{9.733}$$

Las integrales de las funciones con las derivadas $\partial F^{q_j}/\partial\xi_M$ y $\partial \dot{F}^{q_j}/\partial\xi_M$ son análogas. Después de sustituir las integrales obtenidas, tendremos:

$$c_y^{q_j} = (4b_0^2/S_{\text{ala}}) \int_{-0,5\bar{l}}^{0,5\bar{l}} F^{q_j}(\xi_M, \zeta_M)\, d\zeta_M; \tag{9.734}$$

$$c_y^{\dot{q}_j} = (4b_0^2/S_{\text{ala}}) \left\{ \int_{-0,5\bar{l}}^{0,5\bar{l}} \left[\dot{F}^{q_j}(\xi_M^*, \zeta_M) - \frac{M_\infty^2}{\alpha'} \xi_M^* F^{q_j}(\xi_M^*, \zeta_M) \right] d\zeta_M + \right.$$

$$\left. + \alpha' \int_{-0,5\bar{l}}^{0,5\bar{l}} \int_{\xi_{0M}}^{\xi_M^*} F^{q_j}\, d\xi_M\, d\zeta_M \right\}; \tag{9.735}$$

$$m_z^{q_j} = (4b_\infty^2\alpha'/S_{\text{ala}}) \left[\int_{-0,5\bar{l}}^{0,5\bar{l}} \xi_M^* F^{q_j}(\xi_M^*, \zeta_M)\, d\zeta_M - \int_{-0,5\bar{l}}^{0,5\bar{l}} \int_{\xi_{0M}}^{\xi_M^*} F^{q_j}\, d\xi_M\, d\zeta_M \right]; \tag{9.736}$$

$$m_z^{\dot{q}_j} = (4b_0^2\alpha'/S_{\text{ala}}) \left[\int_{-0,5\bar{l}}^{0,5\bar{l}} \left\{ \xi_M^* \dot{F}^{q_j}(\xi_M^*, \zeta_M) - \int_{\xi_{0M}}^{\xi_M^*} \dot{F}^{q_j}\, d\xi_M - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{M_\infty^2}{\alpha'} \xi_M^{*2} F^{q_j}(\xi_M^*, \zeta_M) \right\} d\zeta_M + \frac{2M_\infty^2 - 1}{\alpha'} \int_{-0,5\bar{l}}^{0,5\bar{l}} \int_{\xi_{0M}}^{\xi_M^*} F^{q_j} \xi_M\, d\xi_M\, d\zeta_M \right]. \tag{9.737}$$

$$(j = 1,\ 3;\ q_j = \alpha,\ \omega_x;\ \dot{q}_j = \dot{\bar{\alpha}},\ \dot{\omega}_x);$$

$$m_x^{\omega_x} = -(4b_0^2/S_{\text{ala}}) \int_{-0,5\bar{l}}^{0,5\bar{l}} F^{\omega_x}(\xi_M^*, \zeta_M)\, \zeta_M\, d\zeta_M; \tag{9.738}$$

$$m_x^{\dot{\omega}_x} = -(4b_0^2/S_{\text{ala}}) \left\{ \int_{-0,5\bar{l}}^{0,5\bar{l}} \left[\dot{F}^{\omega_x}(\xi_M^*, \zeta_M) - \frac{M_\infty^2}{\alpha'} \xi_M^* F^{\omega_x}(\xi_M^*, \zeta_M) \right] \zeta_M\, d\zeta_M + \alpha' \times \right.$$

$$\left. \times \int_{-0,5\bar{l}}^{0,5\bar{l}} \int_{\xi_{0M}}^{\xi_M^*} F^{\omega_x} \zeta_M\, d\xi_M\, d\zeta_M \right\}. \tag{9.739}$$

Pasando a las coordenadas características r, s, suponiendo que las derivadas F^{q_j} y $\dot{F}^{q_j}$ son constantes en las células y sustituyendo las integrales por las sumas, obtenemos las siguientes dependencias para los cálculos numéricos:

$$c_y^{q_j} = (4b_0^2/S_{\text{ala}})\, h \sum_{\bar{r}^*} F^{q_j}(\bar{r}^*, \bar{s}^*); \tag{9.740}$$

$$c_y^{\dot{q}_j} = (4b_0^2/S_{\text{ala}})\, h \left\{ \sum_{\bar{r}^*} \dot{F}^{q_j}(\bar{r}^*, \bar{s}^*) - \frac{M_\infty^2}{\alpha'} \sum_{\bar{r}^*} [0,5(\bar{r}^* + \bar{s}^*)\, h + \xi_{0\,\text{OM}}]\, F^{q_j}(\bar{r}^*, \bar{s}^*) + \right.$$

$$\left. + h\alpha' \sum_{S} \sum F^{q_j}(\bar{r}, \bar{s}) \right\}. \tag{9.741}$$

$$m_z^{q_j} = (4b_0^2\alpha'/S_{\text{ala}})\, h \Big[\sum_{\bar{r}^*} \{[0{,}5\,(\bar{r}^* + \bar{s}^*)\, h + \xi_{0\,\text{OM}}]\, F^{q_j}(\bar{r}^*, \bar{s}^*)\} - $$

$$- h \sum\sum_{S} F^{q_j}(\bar{r}, \bar{s}) \Big]; \qquad (9.742)$$

$$m_z^{\dot{q}_j} = (4b_0^2\alpha'/S_{\text{ala}})\, h \Big\{ \sum_{\bar{r}^*} [0{,}5\,(\bar{r}^* + \bar{s}^*)\, h + \xi_{0\,\text{OM}}]\, F^{\dot{q}_j}(\bar{r}^*, \bar{s}^*) - $$

$$- h \sum\sum_{S} F^{\dot{q}_j}(\bar{r}, \bar{s}) + \frac{(2M_\infty^2 - 1)\, h}{\alpha'} \sum\sum_{S} [0{,}5\,(\bar{r} + \bar{s})\, h + \xi_{0\,\text{OM}}]\, F^{q_j}(\bar{r}, \bar{s}) - $$

$$- \frac{M_\infty^2}{\alpha'} \sum_{\bar{r}^*} [0{,}5\,(\bar{r}^* + \bar{s}^*)\, h + \xi_{0\,\text{OM}}]\, F^{q_j}(\bar{r}^*, \bar{s}^*) \Big\} \qquad (9.743)$$

$$(j = 1, 3;\ q_j = \alpha,\ \omega_z;\ \dot{q}_j = \dot{\bar{\alpha}},\ \dot{\omega}_z);$$

$$m_x^{\omega_x} = -(4b_0^2/S_{\text{ala}})\, h^2 \sum_{\bar{r}^*} 0{,}5\,(\bar{s}^* - \bar{r}^*)\, F^{\omega_x}(\bar{r}^*, \bar{s}^*); \qquad (9.744)$$

$$m_x^{\dot{\omega}_x} = -(4b_0^2/S_{\text{ala}})\, h^2 \Big\{ \sum_{\bar{r}^*} 0{,}5\,(\bar{s}^* - \bar{r}^*)\, F^{\dot{\omega}_x}(\bar{r}^*, \bar{s}^*) - $$

$$- \frac{M_\infty^2}{\alpha'} \sum_{\bar{r}^*} 0{,}5\,(\bar{s}^* - \bar{r}^*)\, [0{,}5\,(\bar{r}^* + \bar{s}^*)\, h + \xi_{0\,\text{OM}}]\, F^{\omega_x}(\bar{r}^*, \bar{s}^*) + $$

$$+ \alpha' h \sum\sum_{S} 0{,}5\,(\bar{s} - \bar{r})\, F^{\omega_x}(\bar{r}, \bar{s}) \Big\}. \qquad (9.745)$$

En las expresiones aducidas el signo $\sum_{\bar{r}^*}$ significa la suma por las células situadas a lo largo del borde de ataque y $\sum\sum_{S}$, la adición doble por todas las células que se encuentran en la superficie de sustentación.

9.98. Para un ala rectangular de envergadura infinita las derivadas p^α, $p^{\dot{\bar{\alpha}}}$, p^{ω_z} y $p^{\dot{\omega}_z}$ no dependen de la coordenada ζ_M, por lo que las fórmulas (9.249) y (9.250) toman la siguiente forma:

$$c_y^\alpha = \int_0^1 p^\alpha\, d\xi;\quad c_y^{\omega_z} = \int_0^1 p^{\omega_z}\, d\xi; \qquad (9.746)$$

$$c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = \int_0^1 p^{\dot{\bar{\alpha}}}\, d\xi;\quad c_y^{\dot{\omega}_z} = \int_0^1 p^{\dot{\omega}_z}\, d\xi; \qquad (9.747)$$

$$m_z^\alpha = -\int_0^1 p^\alpha \xi\, d\xi; \qquad (9.748)$$

$$m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} = -\int_0^1 p^{\dot{\bar{\alpha}}} \xi \, d\xi; \tag{9.749}$$

$$m_z^{\omega_z} = -\int_0^1 p^{\omega_z} \xi \, d\xi; \tag{9.750}$$

$$m_z^{\dot{\omega}_z} = -\int_0^1 p^{\dot{\omega}_z} \xi \, d\xi. \tag{9.751}$$

En el problema 9.93 fueron obtenidas las expresiones para las derivadas que, en las variables $\xi = \xi_M \alpha'$, tienen la siguiente forma:

$$p^{\alpha} = 4/\alpha'; \quad p^{\omega_z} = 4\xi/\alpha'; \quad p^{\dot{\bar{\alpha}}} = -4\xi/\alpha'^3; \quad p^{\dot{\omega}_z} = -2\xi^2/\alpha'. \tag{9.752}$$

Teniendo en cuenta estos valores

$$c_y^{\alpha} = \int_0^1 (4/\alpha') \, d\xi = 4/\alpha' = 2{,}309; \tag{9.753}$$

$$c_y^{\omega_z} = \int_0^1 (4\xi/\alpha') \, d\xi = 2/\alpha' = 1{,}155; \tag{9.754}$$

$$c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = \int_0^1 (-4\xi/\alpha'^3) \, d\xi = -2/\alpha'^3 = -0{,}3849; \tag{9.755}$$

$$c_y^{\dot{\omega}_z} = \int_0^1 (-2\xi^2/\alpha'^3) \, d\xi = -2/(3\alpha'^3) = -0{,}1283; \tag{9.756}$$

$$m_z^{\alpha} = -\int_0^1 (4/\alpha') \, \xi \, d\xi = -2/\alpha' = -1{,}155; \tag{9.757}$$

$$m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} = -\int_0^1 (-4\xi/\alpha'^3) \, \xi \, d\xi = 4/(3\alpha'^3) = 0{,}7698; \tag{9.758}$$

$$m_z^{\omega_z} = -\int_0^1 (4\xi^2/\alpha') \, d\xi = -4/(3\alpha') = -0{,}7698; \tag{9.759}$$

$$m_z^{\dot{\omega}_z} = -\int_0^1 (-2\xi^2/\alpha'^3) \, \xi \, d\xi = 1/(2\alpha'^3) = 0{,}09623. \tag{9.760}$$

Las derivadas $m_x^{\omega_x}$ y $m_x^{\dot{\omega}_x}$ se calculan para un sector del ala de longitud $l = 2b_0 = 8$ m según las fórmulas (9.249) y (9.250). En el problema 9.93 se hallaron $p^{\omega_x} = 4\zeta/\alpha'$; $p^{\dot{\omega}_z} = -4\ \zeta\xi/\alpha'^3$.

En virtud de estos valores, obtenemos:

$$m_x^{\omega_x} = -(2b_0^2/S_{\text{ala}}) \int_0^1 \int_0^1 (4\zeta/\alpha')\, \zeta\, d\zeta\, d\xi = -4/(3\alpha') = -0{,}7698; \qquad (9.761)$$

$$m_x^{\dot{\omega}_x} = -(2b_0^2/S_{\text{ala}}) \int_0^1 \int_0^1 (-4\zeta\xi/\alpha'^3)\, \zeta\, d\zeta\, d\xi = 2/(3\alpha'^3) = 0{,}1283. \qquad (9.762)$$

9.99. Al determinar las derivadas de los coeficientes aerodinámicos de las secciones, nos debemos limitar a la integración de las cargas por cada una de ellas, es decir, en el sector entre el borde de ataque (x_0) y el de salida (x^*). De acuerdo con esto, operando con (9.734), obtenemos para $S_{\text{ala}} = b\,(z)dz = b\,(z)\, b_0 d\zeta_M$

$$c_y'^{q_j} = [4b_0^2/(bb_0\, d\zeta_M)\, d\zeta_M \int_{\xi_{0M}}^{\xi_M^*} \frac{\partial F^{q_j}}{\partial \xi_M} d\xi_M = (4b_0/b)\, F^{q_j}(\xi_M^*,\ \zeta_M). \qquad (9.763)$$

Pasemos en (9.735) — (9.739) a las integrales simples:

$$c_y'^{\dot{q}_j} = \frac{4b_0}{b} \left[F^{\dot{q}_j}(\xi_M^*,\ \zeta_M) - \frac{M_\infty^2}{\alpha} \xi_M^* F^{q_j}(\xi_M^*,\ \zeta_M) + \alpha' \int_{\xi_{0M}}^{\xi_M^*} F^{q_j}\, d\xi_M \right]; \qquad (9.764)$$

$$m_z'^{q_j} = \frac{4b_0^2\alpha'}{b^2} \left[\xi_M^* F^{q_j}(\xi_M^*,\ \zeta_M) - \int_{\xi_{0M}}^{\xi_M^*} F^{q_j}\, d\xi_M \right]; \qquad (9.765)$$

$$m_z'^{\dot{q}_j} = \frac{4b_0^2\alpha'}{b^2} \left[\xi_M^* F^{\dot{q}_j}(\xi_M^*,\ \zeta_M) - \int_{\xi_{0M}}^{\xi_M^*} F^{\dot{q}_j}\, d\xi_M - \frac{M_\infty^2}{\alpha'} \xi_M^{*2} F^{q_j}(\xi_M^*,\ \zeta_M) + \right.$$

$$\left. + \frac{2M_\infty^2 - 1}{\alpha'} \int_{\xi_{0M}}^{\xi_M^*} F^{q_j} \xi_M\, d\xi_M \right] \qquad (9.766)$$

$$(j = 1,\ 3;\ q_j = \alpha,\ \omega_z;\ \dot{q}_j = \dot{\alpha},\ \dot{\omega}_z);$$

$$m_x'^{\omega_x} = -(4b_0^2/b^2)\, \zeta_M F^{\omega_x}(\xi_M^*,\ \zeta_M); \qquad (9.767)$$

$$m_x'^{\dot{\omega}_x} = -\left(\frac{4b_0^2}{b^2}\right) \zeta_M \left[F^{\dot{\omega}_x}(\xi_M^*,\ \zeta_M) - \frac{M_\infty^2}{\alpha'} \xi_M^* F^{\omega_x}(\xi_M^*,\ \zeta_M) + \alpha' \int_{\xi_{0M}}^{\xi_M^*} F^{\omega_x}\, d\xi_M \right].$$

(9.768)

Sustituyendo en estas fórmulas las integrales por las sumas, en coordenadas características obtenemos:

$$c_y'^{q_j} = (4b_0/b)\, F^{q_j}(\bar r^*, \bar s^*); \tag{9.769}$$

$$\dot c_y'^{q_j} = (4b_0/b)\left\{\dot F^{q_j}(\bar r^*, \bar s^*) - (\mathrm{M}_\infty^2/\alpha')\,[0{,}5\,(\bar r^* + \bar s^*)\,h + \xi_{0\,\mathrm{OM}}]\, F^{q_j}(\bar r^*, \bar s^*) + \right.$$
$$\left. + \alpha' h \sum_{\bar r,\, \bar s} F^{q_j}(\bar r, \bar s)\right\}; \tag{9.770}$$

$$m_z'^{q_j} = (4b_0^2\alpha'/b^2)\left\{[0{,}5\,(\bar r^* + \bar s^*)\,h + \xi_{0\,\mathrm{OM}}]\, F^{q_j} - h\sum_{\bar r,\, \bar s} F^{q_j}\right\}; \tag{9.771}$$

$$\dot m_z'^{q_j} = (4b_0^2\alpha'/b^2)\left\{[0{,}5\,(\bar r^* + \bar s^*)\,h + \xi_{0\,\mathrm{OM}}]\, \dot F^{q_j}(\bar r^*, \bar s^*) - \right.$$
$$- h\sum_{\bar r,\, \bar s} \dot F^{q_j}(\bar r, \bar s) - (\mathrm{M}_\infty^2/\alpha')\,[0{,}5\,(\bar r^* + \bar s^*)\,h + \xi_{0\,\mathrm{OM}}]^2 F^{q_j}(\bar r^*, \bar s^*) +$$
$$\left. + [(2\mathrm{M}_\infty^2 - 1)/\alpha']\, h \sum_{\bar r,\, \bar s} [0{,}5\,(\bar r + \bar s)\,h + \xi_{0\,\mathrm{OM}}]\, F^{q_j}(\bar r, \bar s)\right\}; \tag{9.772}$$

$$m_x'^{\omega_x} = -(4b_0^2/b^2)\, h\,[0{,}5\,(\bar s^* - \bar r^*)]\, F^{\omega_x}(\bar r^*, \bar s^*); \tag{9.773}$$

$$\dot m_x'^{\omega_x} = -(4b_0^2/b^2)\, h\,[0{,}5\,(\bar s^* - \bar r^*)]\left\{\dot F^{\omega_x}(\bar r^*, \bar s^*) - (\mathrm{M}_\infty^2/\alpha') \times \right.$$
$$\left. \times [0{,}5\,(\bar r^* + \bar s^*)\,h + \xi_{0\,\mathrm{OM}}]\, F^{\omega_x}(\bar r^*, \bar s^*) + \alpha' h\left[0{,}5\,(\bar s^* - \bar r^*)\sum_{\bar s,\, \bar r} F^{\omega_x}(\bar r, \bar s)\right]\right\}. \tag{9.774}$$

9.100. El esquema del ala, alrededor de la cual circula un flujo supersónico, y la disposición de las secciones se muestran en la fig. 9.42. Para $\mathrm{M}_\infty = 2$ los

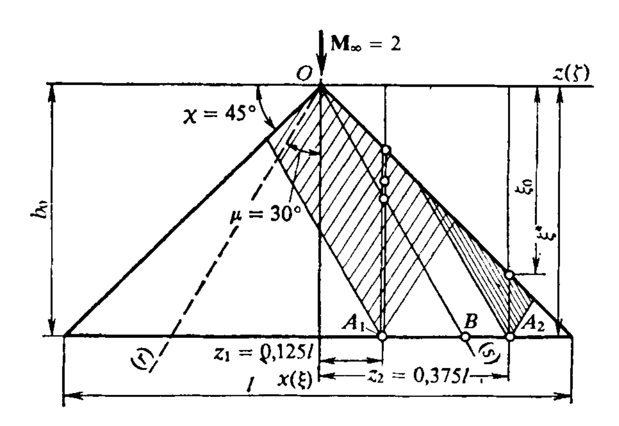


Fig. 9.42. Ala triangular con bordes supersónicos en un flujo inuniforme supersónico

bordes de ataque son supersónicos y las líneas de Mach, trazadas desde el vértice, se encuentran dentro del ala. Estas líneas cruzan la sección con la coordenada $z_1 = 0{,}125\ l$ y se sitúan en los límites de la segunda sección $z_2 = 0{,}375\ l$.

Para el punto A_1 determinamos la función:

$$F^{\alpha}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-ra+s}{\sqrt{-a}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{-ar}{s}}-\frac{-r/a+s}{\sqrt{-1/a}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{-r}{as}}-\frac{\pi}{2}\right)\right]. \quad (9.775)$$

Tomando en consideración que $z_1 = 0{,}125\ l = 1{,}25$ m; $x_1 = b_0 = 5$ m, $\xi_M = x_1/(b_0\alpha') = 0{,}5774$; $\zeta_M = z/b_0 = 0{,}25$; $r = \xi_M - \zeta_M = 0{,}3274$; $s = \xi_M + \zeta_M = 0{,}8274$; $a = (1 - \alpha' \operatorname{ctg} \chi)/(1 + \alpha' \operatorname{ctg}\chi) = -0{,}267$, hallamos $F_1^{\alpha} = 0{,}4095$.

Para el punto A_2 [véase (9.537) y (9.538)]

$$z_2 = 0{,}375\ l = 3{,}75 \text{ m}; \quad x_2 = b_0 = 5 \text{ m}; \quad \xi_M = x_2/(b_0\alpha') = 0{,}5774;$$

$$\zeta_m = z_2/b_0 = 0{,}75; \quad r = \xi_M - \zeta_M = -0{,}1726; \quad s = \xi_M + \zeta_M = 1{,}327;$$

$$F_2^{\alpha} = 0{,}5\,(-r_1/a + s_1)\sqrt{-a} = 0{,}1768. \quad (9.776)$$

Como $(b_0/b)_1 = 1{,}333$; $(b_0/b)_2 = 4$, conforme (9.763), las derivadas reducidas a la cuerda local, $c_{y1}'^{\alpha} = 2{,}184$; $c_{y2}'^{\alpha} = 2{,}828$. Estas derivadas, al calcularlas por la cuerda de raíz, $c_{y1}'^{\alpha} = 2{,}184\ (b/b_0)_1 = 1{,}638$; $c_{y2}'^{\alpha} = 2{,}828\ (b/b_0)_2 = 0{,}707$.

La derivada local $c_y'^{\dot{\bar{\alpha}}}$ se determina con la fórmula (9.764), haciendo en ella $\dot{q}_j = \dot{\bar{\alpha}}$. Para calcular la función $F^{\dot{\bar{\alpha}}}(\xi_M^*, \zeta_M)$ en el punto A_1 con la coordenada $z_1 = 0{,}125l$ empleamos la fórmula (9.619) (véase la solución del problema 9.92):

$$F^{\dot{\bar{\alpha}}} = [M_{\infty}^2/(4\pi\alpha')]\,(A+B+C+D), \quad (9.777)$$

donde

$$A = 2\int_0^{r_1}\left(r\sqrt{s_1 - ra}/\sqrt{r_1 - r}\right)dr; \quad B = 2\int_{s_1 a}^{0}\left[\left(r\sqrt{s_1 - r/a}\right)/\sqrt{r_1 - r}\right]dr;$$

$$C + D = (1/3a)\,B + (a/3)\,A + (4/3)\,s_1\,(G + F);$$

$$G+F = -\frac{r_1/a+s_1}{\sqrt{-1/a}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{r_1}{as_1}}-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{-r_1a+s_1}{\sqrt{-a}}\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{ar_1}{s_1}}.$$

Dividamos el intervalo $r_1 - 0 = 0{,}3274$ en sectores de anchura $h = 0{,}03274$ y, después de realizar la integración numérica, obtenemos $A = 0{,}4834$.

Analicemos el segundo intervalo de integración $0 - s_1 a = 0{,}8274 \cdot 0{,}2679 = 0{,}2217$ que dividimos en segmentos de anchura $h = 0{,}02217$. A continuación, efectuando los cálculos numéricos, hallamos $B = -0{,}03509$.

Más adelante calculamos $G + F = 1{,}286$; $C + D = 1{,}373$; $F^{\dot{\bar{\alpha}}} = 0{,}343$.

Para la determinación numérica de la integral $I = \int_{\xi_{0M}}^{\xi_M^*} F^{\alpha}\, d\xi_M$ dividimos el segmento $\xi_M^* - \xi_{0M} = 0{,}433$ en cinco intervalos de longitud $h = 0{,}433/5 = 0{,}0866$ y calculamos el valor de F^{α} correspondiente al comienzo de cada uno de los intervalos (tabla 9.21).

Tabla 9.21

ξ_M	0,1443 (ξ_{0M})	0,2309	0,3175	0,4042	0,4908	0,5774 (ξ_M^*)
F^{α}	0	0,1061	0,1964	0,2708	0,3412	0,4095
Fórmula	(9.776)		(9.775)			

Con la fórmula del trapecio hallamos $I = 0{,}09693$ y calculamos la derivada para la sección $c_{y1}^{\prime\dot{\alpha}} = -0{,}5932$.

Examinemos la sección $z_2 = 0{,}375\ l$. Para el punto A_2

$$F^{\dot{\alpha}} = \frac{M_\infty^2}{4\pi\alpha'}\left(\int_{s_1 a}^{r_1}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{r/a}^{s}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}}+\int_{s_1 a}^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{r/a}^{s}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}\right)=\frac{M_\infty^2}{4\pi\alpha'}(A+B), \tag{9.778}$$

donde

$$A=2\int_{s_1 a}^{r}\left(r\sqrt{s_1-r/a}/\sqrt{r_1-r}\right)dr;\quad B=(1/3)\left[A/3+2s_1(-r_1/a+s_1)\sqrt{-a}\,\pi\right].$$

Con el fin de calcular A dividamos el intervalo $r_1 - s_1 a = -0{,}1726 + 1{,}327\cdot 0{,}2679 = 0{,}183$ en sectores de anchura $h = 0{,}0183$ y, después de efectuar la integración numérica, obtenemos $A = -0{,}1687$. A continuación calculamos: $B = 0{,}9636$; $F^{\dot{\alpha}} = [2^2/(4\pi)\cdot 1{,}732]\ (-0{,}1687 + 0{,}9636) = 0{,}1462$.

A continuación, hallamos:

$$I=\int_{\xi_{0M}}^{\xi_M^*}F^{\alpha}\,d\xi_M=0{,}5\int_{\xi_{0M}}^{\xi_M^*}(-r/a+s_1)\sqrt{-a}\,d\xi_M=$$

$$=0{,}5\sqrt{-a}\,[0{,}5\,(\xi_M^{*2}-\xi_{0M}^2)\,(1-1/a)+\zeta_M\,(1+1/a)\,(\xi_M^*-\xi_{0M})];$$

$$\xi_{0M}=x_{02}/(b_0\alpha')=0{,}433;\quad \xi_M^*-\xi_{0M}=0{,}1444;\quad \xi_M^*+\xi_{0M}=1{,}01;$$

$I = 0{,}01276$ y calculamos $c_{y2}^{\prime\dot{\alpha}} = -1{,}079$.

Efectuamos el recálculo de estos parámetros para la cuerda de raíz b_0:

$$c_{y1}^{\prime\dot{\alpha}}=-0{,}5332\,(b/b_0)=-0{,}4449;\quad c_{y2}^{\prime\dot{\alpha}}=-1{,}079\,(b/b_0)=-0{,}2698.$$

9.101. En la fig. 9.43 se ofrece el esquema de un ala rectangular y la disposición de las secciones. La primera sección $z_1 = -0{,}45$ m yace por los dos lados de la línea de Mach que sale del punto de discontinuidad del ala, en tanto que la segunda sección $z_2 = -1{,}5$ m se halla tras los límites de dicha línea. Hallamos el ángulo de Mach: $\mathrm{tg}\,\mu_\infty = 1/\alpha' = 0{,}8944$, $\mu_\infty = 41{,}81°$. La función F^{α} en el punto A_1 de la primera sección se determina con (9.548):

$$\xi_M = \xi_M^* = x_1/(b_0\alpha') = 0{,}8944; \quad \zeta_M = z_1/b_0 = -0{,}3;$$
$$r = r^* = \xi_M - \zeta_M = 1{,}194; \quad s = s^* = \xi_M + \zeta_M = 0{,}5944;$$
$$F^\alpha = 0{,}6209.$$

En virtud de (9.763) $c_{y1}'^{\alpha} = (4\, b_0/b)\, F^\alpha = 2{,}484$.

Empleando (9.753), para la segunda sección hallamos $c_{y2}'^{\alpha} = 4/\alpha' = 3{,}578$. Por analogía con (9.550), para el punto A tenemos

$$F^{\dot{\alpha}} = \frac{M_\infty^2}{4\pi\alpha'}\left(\int_{s_1}^{r_1}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{-r}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s_1-s}} + \int_{s_1}^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{r_1-r}}\int_{-r}^{s_1}\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1-s}}\right) = \frac{M_\infty^2}{4\pi\alpha'}(E+B), \tag{9.779}$$

donde $E = 2\int_{s_1}^{r_1}[(r\sqrt{s_1+r})/\sqrt{r_1-r}]\,dr$; $B = -E/3 + C$; $C = (4/3)\,s_1[\sqrt{2(r_1-s_1)\,s_1} + (r_1+s_1)\,\mathrm{arctg}\sqrt{(r_1-s_1)/2s_1}]$ [véanse (9.551) y (9.552)].

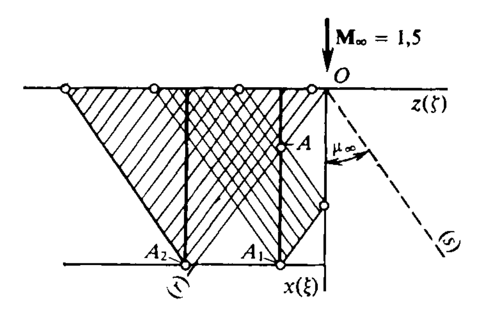


Fig. 9.43. Esquema para determinar las derivadas de la estabilidad de un ala rectangular

Con el fin de determinar E dividimos el intervalo $r_1 - s_1 = 1{,}194 - 0{,}5944 = 0{,}5996$ en sectores de anchura $h = 0{,}05996$ y, con ayuda de la integración numérica, calculamos $E = 3{,}745$.

Después hallamos $C = 1{,}542$; $B = 0{,}2933$; $F^{\dot{\alpha}} = 0{,}647$.

Analizamos la integral

$$G = \int_{\xi_{0M}}^{\xi_M^*} F^\alpha\, d\xi_M = \int_0^{\xi_{MA}} F^\alpha\, d\xi_M + \int_{\xi_{MA}}^{\xi_M^*} F^\alpha\, d\xi_M = G_1 + G_2.$$

Aquí (fig. 9.43) $\xi_{MA} = x_A/(b_0\alpha') = 0{,}3$; $\xi_M^* = 0{,}8944$. De arreglo con (9.540) en el sector $O - \xi_{MA}$ la derivada $F^\alpha = \xi_M$, por lo que $G_1 = \int_0^{0,3}\xi_M\, d\xi_M = 0{,}045$.

La función $G_2 = \int_{0,3}^{0,8944} F^\alpha\, d\xi_M$, donde F^α se determina con (9.549) sustituyendo $\xi_{M1} = \xi_M$, $\zeta_{M1} = \zeta_M$. Efectuando la integración numérica, obtenemos $G_2 = 0{,}2853$.

Así, pues, $G = G_1 + G_2 = 0{,}3303$ y la derivada $c_{y1}'^{\dot{\alpha}} = -0{,}4055$.

Para la segunda sección [véase (9.755)] $c'^{\dot{\bar{\alpha}}}_{y2} = -2/\alpha'^3 = -1,431$.

9.102. El esquema del ala y la disposición de las líneas de Mach, salientes del vértice, se muestran en la fig. 9.42. Para $M_\infty = 2$ los bordes de ataque son supersónicos. Tomando esto en consideración, como resultado de la resolución del problema 9.100, fueron determinados $c'^{\alpha}_y, c'^{\dot{\bar{\alpha}}}_y$ para las dos secciones en la fig. 9.42. Las derivadas completas

$$c^{\alpha}_y = (b_0^2/S_{\text{ala}}) \int_0^{0,5\bar{l}} c'^{\alpha}_y \bar{b}\, d\zeta, \quad c^{\dot{\bar{\alpha}}}_y = (b_0^2/S_{\text{ala}}) \int_0^{0,5\bar{l}} c'^{\dot{\bar{\alpha}}}_y \bar{b}\, d\zeta, \tag{9.780}$$

donde $\bar{b} = b/b_0$; $\bar{l} = l/b_0$; $\zeta = z/b_0$.

Como para el ala $S_{\text{ala}} = b_0 l/2 = b_0 b_0 = b_0^2$, entonces

$$c^{\alpha}_y = 2 \int_0^{0,5\bar{l}} c'^{\alpha}_y \bar{b}\, d\zeta, \quad c'^{\dot{\bar{\alpha}}}_y = 2 \int_0^{0,5\bar{l}} c'^{\dot{\bar{\alpha}}}_y \bar{b} d\zeta. \tag{9.780'}$$

En correspondencia con la fig. 9.42.

$$c^{\alpha}_y = \left(2 \int_0^{\zeta_B} c'^{\alpha}_y \bar{b}\, d\zeta + \int_{\zeta_B}^{0,5\bar{l}} c'^{\alpha}_y \bar{b}\, d\zeta\right) = 2\left(c^{\alpha}_{y1} + c^{\alpha}_{y2}\right);$$

$$\zeta_B = z_B/b_0 = 1/\alpha' = 0,5774; \quad 0,5\bar{l} = 1.$$

En el sector $O - \zeta_B$ la derivada $c'^{\alpha}_y = 4\,(b_0/b)\,F^{\alpha}$, donde F^{α} se calcula con (9.775).

Dividamos el intervalo $\zeta_B - 0 = 0,5774$ en sectores de anchura $h = 0,1155$ y calculemos los valores de F^{α} para cada sector. Conforme estos valores hallamos los correspondientes productos $c'^{\alpha}_y \bar{b}$ y, después de efectuar la integración numérica, obtenemos $c^{\alpha}_{y1} = 0,9196$. En el sector $\zeta_A - \zeta_{A2} = 1 - 0,5774 = 0,4226$ la derivada $c'^{\alpha}_y = 4\,(b_0/b)\,F^{\alpha}$,

$$F^{\alpha} = 0,5\,[\xi_M (1 - 1/a) + \zeta_M (1 + 1/a)]\sqrt{-a};$$

$$c^{\alpha}_{y2} = 4 \cdot 0,5 \sqrt{-a} \int_{0,5774}^{1} F^{\alpha}\, d\zeta_M/(1 - \zeta_M) = 1,196.$$

Así, pues, $c^{\alpha}_y = 4,231$.

Calculemos la derivada $c^{\dot{\bar{\alpha}}}_y$ de un ala triangular:

$$c^{\dot{\bar{\alpha}}}_y = 2 \int_0^1 c'^{\dot{\bar{\alpha}}}_y \bar{b}\, d\zeta = 8 \Bigg[\underbrace{\underbrace{\int_0^1 F^{\dot{\bar{\alpha}}}(\xi^*_M, \zeta_M)\, d\zeta_M}_{c_{y1}} - \frac{M^2_\infty}{\alpha'} \xi^*_M \underbrace{\int_0^1 F^{\alpha}(\xi^*_M, \zeta_M)\, d\zeta_M}_{c_{y2}}}_{J} +$$

$$+ \alpha' \underbrace{\int_0^1 \left(\int_{\xi_{0M}}^{\xi^*_M} (F^{\alpha}\, d\xi_M\right) d\zeta_M}_{c_{y3}} \Bigg].$$

Analicemos la función de la extrapolación $\dot{\bar{F}^{\alpha}} = a\,(1-\zeta_M^2)^2 + b\,(1-\zeta_M^2)$. Esta ecuación satisface las condiciones de acuerdo con las que el valor de $\dot{\bar{F}^{\alpha}} = 0$ corresponde al punto junto al borde lateral agudo (para $\zeta_M = 1$), el valor de $\dot{\bar{F}^{\alpha}}$ es máximo en el centro del ala (para $\zeta_M = 0$) y, con relación a ζ_M la función $\dot{\bar{F}^{\alpha}}$ es par.

Hallemos los coeficientes a y b. En el problema 9.100 fueron determinados $\dot{\bar{F}^{\alpha}} = 0{,}267$ (para $\zeta_M = 0{,}25$) y $\dot{\bar{F}^{\alpha}} = 0{,}1462$ (para $\zeta_M = 0{,}75$). De acuerdo con esto, $0{,}267 = a\,(1-0{,}25^2)^2 + b\,(1-0{,}25^2)$; $0{,}1462 = a\,(1-0{,}75^2)^2 + b\,(1-0{,}75^2)$. Al resolver estas ecuaciones hallamos $a = -0{,}0986$; $b = 0{,}3772$.

De este modo, $c_{y1} = \int_0^1 \dot{\bar{F}^{\alpha}}\,d\zeta_M = 0{,}1989$. Por analogía con la función $\dot{\bar{F}^{\alpha}}$ representemos la derivada $F^{\alpha}(\xi_M^*, \zeta_M)$ y la integral I en forma de F^{α} (o bien I) $= a\,(1-\zeta_M^2)^2 + b\,(1-\zeta_M^2)$. En el problema 9.100 se obtuvieron $F^{\alpha} = 0{,}4095$ (para $\zeta_M = 0{,}25$) y $F^{\alpha} = 0{,}1768$ (para $\zeta_M = 0{,}75$). Por esta razón $0{,}4095 = a\,(1-0{,}25^2)^2 + b\,(1-0{,}25^2)$; $0{,}1768 = a\,(1-0{,}75^2)^2 + b\,(1-0{,}75^2)$. De aquí, $a = 0{,}06559$ y $b = 0{,}3754$. En virtud de estos datos $c_{y2} = \int_0^1 F^{\alpha} d\zeta_M = 0{,}2852$.

En ese mismo problema 9.100 fueron hallados $I = 0{,}09693$ (para $\zeta_M = 0{,}25$) e $I = 0{,}01276$ (para $\zeta_M = 0{,}75$). En correspondencia con estos valores $0{,}09693 = a\,(1-0{,}25^2)^2 + b\,(1-0{,}25^2)$; $0{,}01276 = a\,(1-0{,}75^2)^2 + b\,(1-0{,}75^2)$. La solución de estas ecuaciones proporciona $a = 0{,}1485$; $b = -0{,}03579$.

Así, pues,

$$I = 0{,}1485\,(1-\zeta_M^2)^2 - 0{,}03579\,(1-\zeta_M^2); \quad c_{y3} = \int_0^1 I\,d\zeta_M = 0{,}05532;$$

$$c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = 8\,[c_{y1} - (M_\infty^2/\alpha')\,\xi_M c_{y2} + \alpha' c_{y3}] = -0{,}6848.$$

9.103. El borde de salida del ala triangular es supersónico con cualquier $M_\infty > 1$. Para el número **M** dado, la forma de los bordes de ataque se determina según el ángulo de flecha χ_0. Si con cierto ángulo χ_0 la componente de la velocidad por la normal al borde es mayor que la velocidad del sonido, semejante borde es supersónico; pero si dicha velocidad es menor que la sónica, el borde es subsónico. En el primer caso $\chi_0 < \pi/2 - \mu_\infty$, tg $\chi_0 <$ ctg μ_∞ o bien tg $\chi_0 < \alpha'$; en el segundo, $\chi_0 > \pi/2 - \mu_\infty$, tg $\chi_0 >$ ctg μ_∞ o bien tg $\chi_0 > \alpha'$ ($\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$).

Para el ala triangular λ_{ala} tg $\chi_0 = (l^2/S_{\text{ala}})\,h/(0{,}5) = 4$, por lo que tg $\chi_0 = 4/\lambda_{\text{ala}} = 1{,}6$. Para $M_\infty = 1{,}28$ el parámetro $\alpha' = \sqrt{1{,}28^2 - 1} \approx 0{,}8$.

De este modo, para $M_\infty = 1{,}28$ el borde de ataque es subsónico (tg $\chi_0 > 0{,}8$). Para λ_{ala} tg $\chi_0 = 4$ y $\alpha' \lambda_{\text{ala}} = 2$, de la solución del problema sobre la circula-

ción alrededor de un ala con semejante borde (véase 9.85), tenemos:

$$\alpha' c_y = 2{,}594;\quad \alpha' c_{yA}^{\omega_{zA}} = 1{,}791;\quad \alpha' m_{zA}^{\alpha} = -1{,}297;\quad \alpha' m_{zA}^{\omega_{zA}} = -1{,}281;$$

$$\alpha'^3 c_{yA1}^{\dot{\bar{\alpha}}A} = -1{,}297;\quad \alpha'^3 c_{yA2}^{\dot{\bar{\alpha}}A} = 0{,}4936;\quad \alpha'^3 c_{yA1}^{\dot{\omega}_{zA}} = -0{,}5093;\quad \alpha'^3 c_{yA2}^{\dot{\omega}_{zA}} = 0{,}06;$$

$$\alpha'^3 m_{zA1}^{\dot{\bar{\alpha}}A} = 0{,}8106;\quad \alpha'^3 m_{zA2}^{\dot{\bar{\alpha}}A} = -0{,}3085;\quad \alpha'^3 m_{zA1}^{\dot{\omega}_{zA}} = 0{,}4052;$$

$$\alpha'^3 m_{zA2}^{\dot{\omega}_{zA}} = -0{,}0602;\quad \alpha' m_{x1}^{\omega_{x1}} = -0{,}192;\quad \alpha'^2 (m_{x1}^{\omega_{x1}})_1 = 0{,}063;$$

$$\alpha'^2 (m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}})_2 = -0{,}025,$$

de donde

$$c_y^{\alpha} = (\alpha' c_y^{\alpha})/\alpha' = 3{,}242;\quad c_{yA}^{\omega_{zA}} = (\alpha' c_{yA}^{\omega_{zA}})/\alpha' = 2{,}239;\quad m_{zA}^{\alpha} = (\alpha' m_{zA}^{\alpha})/\alpha' = -1{,}621;$$

$$m_{zA}^{\omega_{zA}} = (\alpha' m_{zA}^{\omega_{zA}})/\alpha' = 1{,}601;\quad m_{x1}^{\omega_{x1}} = (\alpha' m_{x1}^{\omega_{x1}})/\alpha' = -0{,}24;$$

$$c_{yA}^{\dot{\bar{\alpha}}A} = (1/\alpha'^3)\,[(\alpha'^3 c_{yA1}^{\dot{\bar{\alpha}}A}) + \mathbf{M}_\infty^2\,(\alpha'^3 c_{yA2}^{\dot{\alpha}A})] = -0{,}953;$$

$$c_{yA}^{\dot{\omega}_{zA}} = (1/\alpha'^3)\,[(\alpha'^3 c_{yA1}^{\dot{\omega}_{zA}}) + \mathbf{M}_\infty^2\,(\alpha'^3 c_{yA2}^{\dot{\omega}_{zA}})] = -0{,}803;$$

$$m_{zA}^{\dot{\bar{\alpha}}A} = (1/\alpha'^3)\,[(\alpha'^3 m_{zA1}^{\dot{\bar{\alpha}}A}) + \mathbf{M}_\infty^2\,(\alpha'^3 m_{zA2}^{\dot{\bar{\alpha}}A})] = 0{,}596;$$

$$m_{zA}^{\dot{\omega}_{zA}} = (1/\alpha'^3)\,[(\alpha'^3 m_{zA1}^{\dot{\omega}_{zA}}) + \mathbf{M}_\infty^2\,(\alpha'^3 m_{zA2}^{\dot{\omega}_{zA}})] = 0{,}599;$$

$$m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}} = (1/\alpha'^2)\,[\alpha'^2 (m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}})_1 + \mathbf{M}_\infty^2 \alpha'^2 (m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}})_2] = 0{,}034.$$

9.104. La desviación del centro con relación al cual se determinan los parámetros cinemáticos y las derivadas se calcula haciendo uso de la magnitud (fig. 9.44) $x_0 = b_0 - b_A = (1/2)\, b_A$. De aquí, $\xi_0 = x_0/b_0 = 0{,}5$. Para esta posición del centro de gravedad

$$c_y^{\dot{\omega}_z} = c_{yA}^{\dot{\omega}_{zA}} + \xi_0 c_{yA}^{\alpha} = 3{,}86;\quad c_y^{\dot{\omega}_y} = c_{yA}^{\dot{\omega}_{zA}} + \xi_0 c_{yA}^{\dot{\bar{\alpha}}} = -1{,}28;$$

$$m_z^{\alpha} = m_{zA}^{\alpha} - \xi_0 c_{yA}^{\alpha} = -3{,}242;\quad m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} = m_{zA}^{\dot{\bar{\alpha}}A} - \xi_0 c_{yA}^{\dot{\bar{\alpha}}A} = 1{,}072;$$

$$m_z^{\omega_z} = m_{zA}^{\omega_{zA}} + \xi_0\,(m_{zA}^{\alpha} - c_{yA}^{\omega_{zA}}) - \xi_0^2 c_{yA}^{\alpha} = -4{,}342;$$

$$m_z^{\dot{\omega}_z} = m_{zA}^{\dot{\omega}_{zA}} + \xi_0\,(m_{zA}^{\dot{\bar{\alpha}}A} - c_{yA}^{\dot{\omega}_{zA}}) - \xi_0^2 c_{yA}^{\dot{\bar{\alpha}}A} = 1{,}507.$$

Las restantes derivadas quedan invariables.

9.105. Para un ala triangular la razón $b_A/b_0 = 2/3$. De acuerdo con los datos del problema 9.103, con arreglo a dicha razón, las derivadas son iguales a:

$$c_{y0}^{\dot{\bar{\alpha}}} = (b/b_0)\, c_{yA}^{\dot{\bar{\alpha}}A} = -0{,}635;\quad c_{y0}^{\omega_z} = (b_A/b_0)\, c_{yA}^{\omega_{zA}} = 1{,}493;$$

$$c_{y0}^{\dot{\omega}_z} = (b_A/b_0)^2\, c_{yA}^{\omega_{zA}} = -0{,}3569;\quad m_{z0}^{\alpha} = (b_A/b_0)\, m_{zA}^{\alpha} = -1{,}081;$$

$$m_{z0}^{\dot{\bar{\alpha}}} = (b_A/b_0)^2\, m_{zA}^{\dot{\bar{\alpha}}} = 0{,}2649;$$

$$m_{z0}^{\omega_z} = (b_A/b_0)^2\, m_{zA}^{\omega_{zA}} = -0{,}7116;\quad m_{z0}^{\dot{\omega}_z} = (b_A/b_0)^3\, m_{zA}^{\dot{\omega}_{zA}} = 0{,}2662.$$

Las demás derivadas (c_y^α, $m_x^{\omega_x}$, $m_x^{\dot{\omega}_x}$) quedan constantes.

9.106. Empleando $M_\infty = 1,28$ hallamos $\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 0,8$. Para un ala rectangular

$$c_y^\alpha = 4/\alpha' = 5; \quad m_z^\alpha = -2/\alpha' = -2,5; \quad c_y^{\omega_z} = 2/\alpha' = 2,5;$$
$$m_z^{\omega_z} = -4/(3\alpha') = -1,667; \quad m_{x1}^{\omega_{x1}} = -2/(3\alpha') = -0,833;$$

para el ala triangular

$$c_y^\alpha = 4/\alpha' = 5; \quad m_z^\alpha = -8/(3\alpha') = -3,333; \quad c_y^{\omega_z} = 8/(3\alpha') = 3,333;$$
$$m_z^{\omega_z} = -2/\alpha' = -2,5; \quad m_{x1}^{\omega_{x1}} = -1/(3\alpha') = 0,417.$$

Al calcular estas derivadas el origen de coordenadas coincide con el elemento marginal del borde de ataque; por dimensiones características para m_z y ω_z se

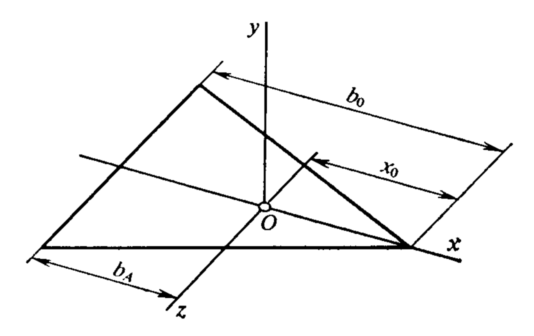


Fig. 9.44. Esquema de disposición de la CAM en el ala

han tomado la cuerda de raíz y para m_{x1} y ω_{x1}, la envergadura l y la semienvergadura 0,5 l, respectivamente. Efectuemos el recálculo de las correspondientes derivadas, obtenidas en el problema 9.103, para la cuerda de raíz del ala triangular (para m_z y ω_z):

$$c_y^{\omega_{z0}} = \partial c_y / \partial [(\Omega_{z0} b / V_\infty) b_0 / b_A] = (\partial c_y / \partial \omega_{zA})(b_A/b_0) = c_y^{\omega_{zA}} (b_A/b_0) = 1,493;$$
$$m_{z0}^\alpha = m_{zA}^\alpha (b_A/b_0) = -1,081; \quad m_{z0}^{\omega_{z0}} = m_{zA}^{\omega_{zA}} (b_A/b_0)^2 = -0,712.$$

Para otro centrado (en el vértice del ala)

$$c_y^{\omega_z} = c_y^{\omega_{z0}} + \xi_0 c_y^\alpha = 2,574\,(3,333); \quad m_z^\alpha = m_{z0}^\alpha - \xi_0 c_y^\alpha = -2,162\,(-3,333);$$
$$m_z^{\omega_z} = m_{z0}^{\omega_{z0}} + \xi_0 (m_{z0}^\alpha - c_y^{\omega_{z0}}) - \xi_0^2 c_y^\alpha = -1,93\,(-2,5).$$

Entre paréntesis, para comparar, se aducen los resultados del cálculo según el método de las cuñas tangentes. Las otras derivadas: $c_y^\alpha = 3,242$ (5,0); $m_{x1}^{\omega_{x1}} = -0,24$ ($-0,417$).

Para comparar, calculemos los valores precisos de las derivadas para el ala rectangular. Como $\eta_{\text{ala}} = 1$; $\lambda_{\text{ala}} \operatorname{tg} \lambda_0 = 0$ y $\alpha' \lambda_{\text{ala}} = 0,8 \cdot 2,5 = 2,0$, de la solución del problema 9.81, tenemos:

$$\alpha' c_y^\alpha = 3; \quad \alpha' c_y^{\omega_{zA}} = 1,667; \quad \alpha' m_{zA}^\alpha = -1,33; \quad \alpha' m_{zA}^{\omega_{zA}} = -1,083;$$
$$\alpha' m_{x1}^{\omega_{x1}} = -0,268,$$

de donde $c_y^\alpha = 3/\alpha' = 3{,}75\,(5{,}0)$; $c_{yA}^{\omega_{zA}} = 2{,}084\,(2{,}5)$; $m_{zA}^\alpha = -1{,}662\,(-2{,}5)$; $m_{x1}^{\omega_{x1}} = -0{,}335\,(-0{,}833)$.

Aquí se dan entre paréntesis las derivadas calculadas según el método de las cuñas tangentes. Para el ala triangular (que en el caso dado tiene borde de ataque subsónico) y para la rectangular, este método proporciona resultados que de los precisos se distinguen notoriamente.

9.107. Consideremos un ala rectangular de envergadura infinita. Para semejante ala con $\alpha'\lambda_{ala} = \infty$

$$\alpha' c_y^\alpha = 4;\quad \alpha' c_{yA}^{\omega_{zA}} = 2;\quad \alpha' m_{zA}^\alpha = -2;\quad \alpha' m_{zA}^{\omega_{zA}} = -1{,}333;\quad \alpha' m_{x1}^{\omega_{x1}} = -0{,}591.$$

De aquí, para $M_\infty = 1{,}28\,(\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 0{,}8)$:

$$c_y^\alpha = 5\,(5);\quad c_{yA}^{\omega_{zA}} = 2{,}5\,(2{,}5);\quad m_{zA}^\alpha = -2{,}5\,(-2{,}5);$$

$$m_{zA}^{\omega_{zA}} = -1{,}667\,(-1{,}667);\quad m_{x1}^{\omega_{x1}} = = 0{,}738\,(-0{,}833).$$

Entre paréntesis se ofrecen los resultados obtenidos según el método de las cuñas tangentes (véase la solución del problema 9.106). Examinemos un ala triangular ($\alpha'\lambda_{ala} = \infty$), para la cual

$$\alpha' c_y^\alpha = 4;\quad \alpha' c_{yA}^{\omega_{zA}} = 2;\quad \alpha' m_{zA}^\alpha = -2;\quad \alpha' m_{zA}^{\omega_{zA}} = -1{,}5;\quad \alpha' m_{x1}^{\omega_{x1}} = -0{,}334,$$

de donde, para $M_\infty = 1{,}28$ ($\alpha' = 0{,}8$):

$$c_y^\alpha = (5)\,5;\quad c_{yA}^{\omega_{zA}} = 2{,}5;\quad m_{zA}^\alpha = -2{,}5;\quad m_{zA}^{\omega_{zA}} = -1{,}875;$$

$$m_{x1}^{\omega_{x1}} = -0{,}417\,(-0{,}417).$$

Realizamos el recálculo de las derivadas para la cuerda de raíz:

$$c_y^{\omega_z} = 2{,}5\,(2/3) = 1{,}667;\quad m_z^\alpha = -2{,}5\,(2/3) = -1{,}667;$$

$$m_z^{\omega_z} = -1{,}875\,(2/3)^2 = -0{,}833.$$

Para otro centro de reducción (en el vértice del ala)

$$c_{y0}^{\omega_z} = c_y^{\omega_z} + \xi_0 c_y^\alpha = 3{,}333\,(3{,}333);\quad m_{z0}^\alpha = m_z^{\omega_z} - \xi_0 c_y^\alpha = -3{,}333\,(-3{,}333);$$

$$m_{z0}^{\omega_z} = m_z^{\omega_z} + \xi_0\,(m_z^\alpha - c_y^{\omega_z}) - \xi_0^2 c_y^\alpha = -2{,}5\,(-2{,}5).$$

Como vemos, para las alas de envergadura infinita el método de las cuñas tangentes coincide, prácticamente, con la solución precisa.

Consideremos un ala triangular ($\lambda_{ala} = 2{,}5$) con un número mayor $M_\infty = 1{,}9$. En tal caso $\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 1{,}615$. Como la $\operatorname{tg}\chi_0 < \alpha'$ ($1{,}6 < 1{,}615$), el borde de ataque será supersónico (véase la solución del problema 9.103). Para $\alpha'\lambda_{ala} = 1{,}615 \cdot 2{,}5 \approx 4$, hallamos:

$$\alpha' c_y^\alpha = 4;\quad \alpha' c_{yA}^{\omega_{zA}} = 2;\quad \alpha' m_{zA}^\alpha = -2;\quad \alpha' m_{zA}^{\omega_{zA}} = -1{,}5;\quad \alpha' m_{x1}^{\omega_{x1}} = -0{,}334.$$

Así, pues, el método de las cuñas tangentes coincide con la solución precisa para un ala con bordes de ataque supersónicos.

9.108. El esquema de un ala delgada se muestra en la fig. 9.45.

Sus bordes de ataque son supersónicos, ya que $\operatorname{tg}\chi_0 < \alpha'$ ($\operatorname{tg}\chi_0 = \operatorname{tg} 60° = 1{,}732$; $\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 1{,}847$). Para el borde de salida $\operatorname{tg}\chi_3 = \operatorname{tg}\chi_0 - (4/\lambda_{ala})(\eta_{ala} - 1)/(\eta_{ala} + 1) = 0{,}573$ ($\chi_3 = 29°48'$). Este valor es menor que α' ($0{,}573 < 1{,}847$), por lo que el borde de salida, lo mismo que el de ataque, es supersónico. Para semejante ala con $\alpha'\lambda_{ala} = 4{,}248$; $\lambda_{ala}\operatorname{tg}\chi_0 = 3{,}984$ y el adelgazamiento $\eta_{ala} = 5$, hallamos:

$$\alpha' c_y^\alpha = 4{,}1;\quad \alpha' c_{yA}^{\omega_{zA}} = 2{,}1;\quad \alpha' m_{zA}^\alpha = -2{,}0;\quad \alpha' m_{zA}^{\omega_{zA}} = -2{,}4;\quad \alpha' m_{x1}^{\omega_{x1}} = -0{,}36;$$

$$\alpha'^3 c_{yA1}^{\dot{\bar{\alpha}}_A} = -2{,}18;\quad \alpha'^3 c_{yA2}^{\dot{\bar{\alpha}}_A} = -0{,}16;\quad \alpha'^3 c_{yA1}^{\dot{\omega}_{zA}} = -0{,}43;\quad \alpha'^3 c_{yA2}^{\dot{\omega}_{zA}} = 0{,}01;$$

$$\alpha'^3 m_{zA1}^{\dot{\bar{\alpha}}_A} = 1{,}55;\quad \alpha'^3 m_{zA2}^{\dot{\bar{\alpha}}_A} = 0{,}41;\quad \alpha'^3 m_{zA1}^{\dot{\omega}_{zA}} = 0{,}65;$$

$$\alpha'^3 m_{zA2}^{\dot{\omega}_{zA}} = 0;\quad \alpha'^2 (m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}})_1 = 0{,}087;\quad \alpha'^2 (m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}})_2 = -0{,}003,$$

de donde $c_y^\alpha = (\alpha' c_y^\alpha)\,\alpha' = 2{,}22$; $c_y^{\omega_{zA}} = 1{,}137$;

$$m_{zA}^\alpha = -1{,}083;\quad m_{zA}^{\omega_{zA}} = -1{,}299;\quad m_{x1}^{\omega_{x1}} = -0{,}195;$$

$$c_{yA}^{\dot{\bar{\alpha}}_A} = (1/\alpha'^3)\,[(\alpha'^3 c_{yA1}^{\dot{\bar{\alpha}}_A}) + M_\infty^2 (\alpha'^3 c_{yA2}^{\dot{\bar{\alpha}}_A})] = -0{,}458;$$

$$c_{yA}^{\dot{\omega}_A} = (1/1{,}847^3)\,(-0{,}43 + 2{,}1^2\cdot 0{,}01) = -0{,}061;$$

$$m_{zA}^{\dot{\bar{\alpha}}_A} = (1/1{,}847^3)\cdot(1{,}55 + 2{,}1^2\cdot 0{,}41) = 0{,}533;$$

$$m_{zA}^{\dot{\omega}_{zA}} = (1/1{,}847^3)\,(0{,}65 + 2{,}1^2\cdot 0) = 0{,}103;$$

$$m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}} = (1/1{,}847^2)\,(0{,}087 - 2{,}1^2\cdot 0{,}003) = 0{,}012.$$

Las derivadas de los coeficientes del momento de cabeceo y los parámetros $\dot{\bar{\alpha}}_A$; ω_{zA} y $\dot{\omega}_{zA}$ obtenidas han sido calculadas por b_A cuerda aerodinámica media (CAM). Efectuemos el recálculo de estas derivadas para la cuerda de raíz (véase el problema 9.104). Como la razón entre las cuerdas $b_A/b_0 = (2/3)\,[1 + 1/\eta_{ala} - (\eta_{ala} + 1)] = 0{,}689$, entonces

$$c_{y0}^{\omega_{zA}} = (b_A/b_0)\, c_y^{\omega_{zA}} = 0{,}783;\quad m_{z0}^\alpha = (b_A/b_0)\, m_{zA}^\alpha = -0{,}746;$$

$$m_{z0}^{\omega_z} = 0{,}689^2\,(-1{,}0299) = -0{,}617;\quad c_{y0}^{\dot{\bar{\alpha}}} = 0{,}689\,(-0{,}458) = -0{,}316;$$

$$c_{y0}^{\dot{\omega}_z} = 0{,}689^2\,(-0{,}061) = -0{,}029;\quad m_{z0}^{\dot{\bar{\alpha}}} = 0{,}689^2\cdot 0{,}0533 = 0{,}025;$$

$$m_{z0}^{\dot{\omega}_z} = 0{,}689^2\cdot 0{,}103 = 0{,}034.$$

Todas estas derivadas se han obtenido para el origen de coordenadas, coincidente con la punta de la CAM. Pero con el fin de realizar su recálculo para otro centro de reducción en el vértice del ala, calculemos su desplazamiento respecto

del centro anterior de coordenadas (fig. 9.45):

$$\xi_0 = x_0/b_0 = (\lambda_{ala}\,\mathrm{tg}\,\chi_0/12)\,(\eta_{ala}+2)/\eta_{ala} = 0{,}465.$$

Empleando las fórmulas aducidas en el problema 9.104, obtenemos:

$$c_y^{\omega_z} = 1{,}815; \quad c_y^{\dot{\omega}_z} = -0{,}176; \quad m_z^{\alpha} = -1{,}778; \quad m_z^{\dot{\alpha}} = 0{,}172;$$

$$m_z^{\omega_z} = -1{,}808; \quad m_z^{\dot{\omega}_z} = 0{,}128.$$

Haciendo uso del método de las cuñas tangentes, hallamos:

$$c_y^{\alpha} = 4/\alpha' = 2{,}166\ (2{,}22); \tag{9.781}$$

$$c_y^{\omega_z} = (4/\alpha')\,\{(\eta_{ala}^2+\eta_{ala}+1)/[3\eta_{ala}(\eta_{ala}+1)] + [(\eta_{ala}+2)/(3\eta_{ala})]\,\lambda_{ala}\,\mathrm{tg}\,\chi_0/4\} = \\ = 1{,}752\,(1{,}815); \tag{9.782}$$

$$m_z^{\alpha} = -c_y^{\omega_z} = -1{,}752\,(-1{,}778); \tag{9.783}$$

$$m_z^{\omega_z} = -(2/3\alpha')\,\{(\eta_{ala}^2+1)/\eta_{ala} + [(\eta_{ala}^2+2\eta_{ala}+3)/\eta_{ala}^2]\,\lambda_{ala}\lambda_0/4 + \\ + [(\eta_{ala}^2+4\eta_{ala}+3)/\eta_{ala}^2]\,(\lambda_{ala}\,\mathrm{tg}\,\chi_0/4)^2\} = -1{,}61\,(-1{,}808); \tag{9.784}$$

$$m_{x1}^{\omega_{x1}} = -(1/3\alpha')\,(\eta_{ala}+3)/(\eta_{ala}+1) = -0{,}241\,(-0{,}195). \tag{9.785}$$

Entre paréntesis se indican los valores obtenidos de acuerdo con la teoría exacta (linealizada).

9.109. La línea de Mach que sale del comienzo del borde lateral (fig. 9.46) y corta en el borde de salida el segmento de longitud $z_\infty = \mathrm{tg}\,\mu_\infty b_0 = b_0/\alpha'$.

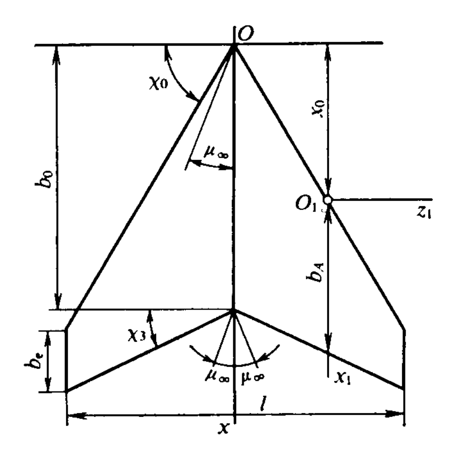


Fig. 9.45. Vista del ala para calcular las derivadas de la estabilidad

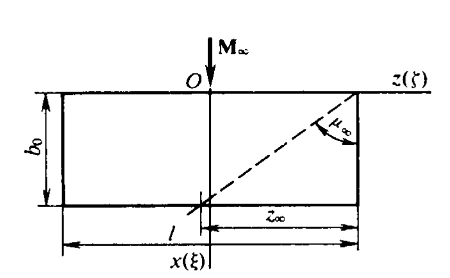


Fig. 9.46. Ala rectangular en un flujo supersónico

Como $\alpha' = \sqrt{1{,}25^2-1} = 0{,}75$ ($\mu_\infty = 53{,}13°$), $z_\infty = b_0/\alpha' = 2{,}667$. Este valor es menor que la envergadura $l = \lambda_{ala}\,b_0 = 5$ m. Para las alas en las que $z_\infty \leqslant$

$\leqslant l\,(\lambda_{ala}\alpha') \geqslant 1$, las derivadas

$$\left.\begin{aligned} &c_y^{\alpha} = 4/\alpha' - (1/\lambda_{ala})\,(2/\alpha'^2); \quad c_y^{\dot\alpha} = -2/\alpha'^3 + (1/\lambda_{ala})\,[2\,(M_\infty^2+1)/3\alpha'^4];\\ &c_y^{\omega_z} = 2/\alpha' - (1/\lambda_{ala})\,(2/3\alpha'^2); \quad c_y^{\dot\omega_z} = -2/(3\alpha'^3) + (1/\lambda_{ala})\,(M_\infty^2+1)/(6\alpha'^4); \end{aligned}\right\} \quad (9.786)$$

$$\left.\begin{aligned} &m_z^{\alpha} = -2\alpha' + (1/\lambda_{ala})\,(4/3\alpha'^2); \quad m_z^{\dot\alpha} = 4/(3\alpha') - (1/\lambda_{ala})\,(M_\infty^2+1)/(2\alpha'^4);\\ &m_z^{\omega_z} = -4/(3\alpha') + (1/\lambda_{ala})\,(1/2\alpha'^2);\\ &m_z^{\dot\omega_z} = 1/(2\alpha'^3) - (1/\lambda_{ala})\,[2\,(M_\infty^2+1)/(15\alpha'^4)]; \end{aligned}\right\} \quad (9.787)$$

$$\left.\begin{aligned} &m_{x1}^{\omega_{x1}} = -2/(3\alpha') + 1/(\lambda_{ala}\alpha'^2) - 1/(3\lambda_{ala}^2\alpha'^3) - 1/(12\lambda_{ala}^3\alpha'^4);\\ &m_{x1}^{\dot\omega_{x1}} = 2/(3\lambda_{ala}\alpha'^3) - 2\,(M_\infty^2+1)/(3\lambda_{ala}^2\alpha'^4) + \\ &+ (2M_\infty^2+1)/(6\lambda_{ala}^3\alpha'^5) + (3M_\infty^2+1)/(30\lambda_{ala}^4\alpha'^6). \end{aligned}\right\} \quad (9.788)$$

Las fórmulas (9.786)—(9.787) corresponden al sistema de coordenadas, cuyo origen coincide con el punto central del borde de ataque (posición del centro de gravedad $x_{c.g} = 0$), mientras que como dimensión característica (a excepción de $m_{x1}^{\omega_{x1}}$, $m_{x1}^{\dot\omega_{x1}}$) se adopta la cuerda b_0. El coeficiente m_{x1} se ha calculado según la envergadura l, en tanto que el parámetro cinemático ω_x se refiere a la semienvergadura $l/2$. Calculamos:

$$c_y^{\alpha} = \underbrace{5{,}333}_{c_\infty} - \underbrace{1{,}422}_{\Delta c} = 3{,}911, \quad c_y^{\dot\alpha} = -\underbrace{4{,}741}_{c_\infty} + \underbrace{2{,}16}_{\Delta c} = -2{,}581;$$

$$c_y^{\omega_z} = \underbrace{2{,}667}_{c_\infty} - \underbrace{0{,}4741}_{\Delta c} = 2{,}193; \quad c_y^{\dot\omega_z} = -\underbrace{1{,}58}_{c_\infty} + \underbrace{0{,}5399}_{\Delta c} = -1{,}04;$$

$$m_z^{\alpha} = -\underbrace{2{,}667}_{c_\infty} + \underbrace{0{,}9482}_{\Delta c} = -1{,}719; \quad m_z^{\dot\alpha} = \underbrace{3{,}16}_{c_\infty} - \underbrace{1{,}62}_{\Delta c} = 1{,}541;$$

$$m_z^{\omega_z} = -\underbrace{1{,}778}_{c_\infty} + \underbrace{0{,}3556}_{\Delta c} = -1{,}422; \quad m_z^{\dot\omega_z} = \underbrace{1{,}185}_{c_\infty} - \underbrace{0{,}4319}_{\Delta c} = 0{,}7533;$$

$$m_{x1}^{\omega_{x1}} = -\underbrace{0{,}8889}_{c_\infty} + \underbrace{0{,}5678}_{\Delta c} = -0{,}3211; \quad m_{x1}^{\dot\omega_{x1}} = \underbrace{0}_{c_\infty} - \underbrace{0{,}06544}_{\Delta c} = -0{,}06544.$$

Aquí, c_∞ corresponde al ala de envergadura infinita y Δc determina el efecto de borde.

9.110. El esquema de un ala triangular inversa, alrededor de la cual circula un flujo con $M_\infty = 1{,}5$, se muestra en la fig. 9.47, *a*. Como vemos los bordes de salida son supersónicos y no influyen sobre la circulación alrededor de toda el ala. Así, pues, en dicha ala no hay efecto de borde, o sea, en ella las cargas son las

mismas que en los correspondientes puntos de un ala rectangular de envergadura infinita (fig. 9.47, *b*). La falta de efecto de borde corresponde a la condición de que $z_\infty \leqslant 0{,}5\ \overline{l}$ (fig. 9.47). Ya que

$$z_\infty = b_0 \operatorname{tg} \mu_\infty = b_0/\alpha'; \quad \alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1}; \quad \lambda_{ala} = l/b_m = 2l/b_0,$$

la condición toma la forma $\lambda_{ala}\ \alpha' \geqslant 4$, es decir, los bordes de salida son supersónicos ($\lambda_{ala}\ \alpha' = 4{,}472$).

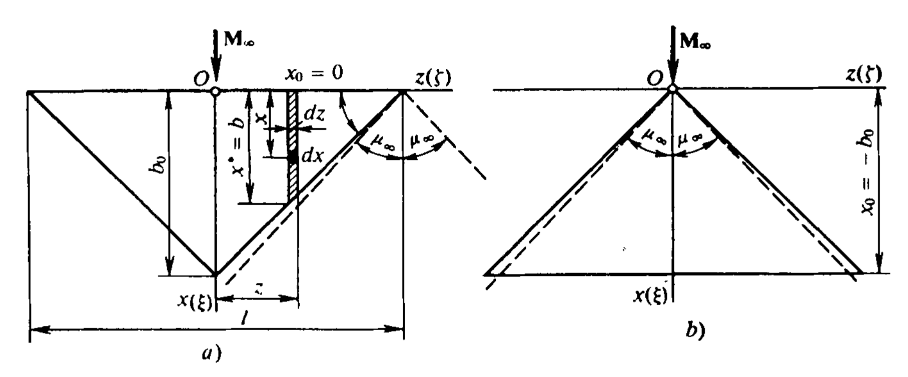


Fig. 9.47. Alas triangulares inversa (*a*) y normal (*b*)

En el problema 9.93 fueron obtenidas las siguientes dependencias para las derivadas:

$$p^{\alpha} = 4/\alpha'; \quad p^{\dot{\bar{\alpha}}} = -4\xi_M/\alpha'^2; \quad p^{\omega_z} = 4\xi_M; \quad p^{\dot{\omega}_z} = -2\xi_M^2/\alpha';$$

$$p^{\omega_x} = -4\zeta_M/\alpha'; \quad p^{\dot{\omega}_x} = -4\zeta_M\xi_M/\alpha'^2, \tag{9.789}$$

donde $\xi_M = \xi/\alpha' = x/(b_0\alpha')$; $\zeta_M = z/b_0$.

La derivada de la fuerza normal que actúa sobre el sector del ala de sección $b = x^* - x_0$ de anchura dz (fig. 9.47)

$$dY^{\alpha} = dz \int_{x_0}^{x^*} p^{\alpha} q_\infty\, dx = q_\infty\, dz \int_0^b (4/\alpha')\, dx.$$

La correspondiente derivada del coeficiente

$$dY^{\alpha}/(dzq_\infty b) = c_y'^{\alpha} = 4/\alpha'. \tag{9.790}$$

Después hallamos

$$dY^{\dot{\bar{\alpha}}}/(dzq_\infty b) = c_y'^{\dot{\bar{\alpha}}} = \int_0^b p^{\dot{\bar{\alpha}}}\, dx = -2b/(\alpha'^3 b_0).$$

Como $b = (0{,}5l - z) \operatorname{tg} \chi = (0{,}5l - z)\,[b_0/(0{,}5l)]$,

$$c_y'^{\dot{\bar{\alpha}}} = -2\,(1 - \bar{z})/\alpha'^3\ [\bar{z} = z/(0{,}5l)]. \tag{9.791}$$

Determinamos las derivadas:

$$dY^{\omega_z}/(dzq_\infty b) = c_y'^{\omega_z} = (1/b)\int_0^b p^{\omega_z}\,dx = 2(1-\bar z)/\alpha'; \qquad (9.792)$$

$$dY^{\dot\omega_z}/(dzq_\infty b) = c_y'^{\dot\omega_z} = (1/b)\int_0^b p^{\dot\omega_z}\,dx = -(2/3\alpha'^3)(1-\bar z)^2; \qquad (9.793)$$

$$dM_z^{\alpha}/(dzq_\infty b^2) = m_z'^{\alpha} = (-1/b^2)\int_0^b p^{\alpha}x\,dx = -2/\alpha'; \qquad (9.794)$$

$$dM_z^{\dot{\bar\alpha}}/(dzq_\infty b^2) = m_z'^{\dot{\bar\alpha}} = (-1/b^2)\int_0^b p^{\dot{\bar\alpha}}x\,dx = (4/3\alpha'^3)(1-\bar z); \qquad (9.795)$$

$$dM^{\omega_z}/(dzq_\infty b^2) = m_z'^{\omega_z} = (-1/b^2)\int_0^b p^{\omega_z}x\,dx = -(4/3\alpha')(1-\bar z); \qquad (9.796)$$

$$dM^{\dot\omega_z}/(dzq_\infty b^2) = m_z'^{\dot\omega_z} = (-1/b^2)\int_0^b p^{\dot\omega_z}x\,dx = (1/2\alpha'^3)(1-\bar z); \qquad (9.797)$$

$$dM^{\omega_x}/(dzq_\infty bz) = m_x'^{\omega_x} = (1/b)\int_0^b p^{\omega_x}z\,dx = \bar z\lambda_{\text{ala}}/\alpha'; \qquad (9.798)$$

$$dM^{\dot\omega_x}/(dzq_\infty bz) = m_x'^{\dot\omega_x} = (1/b)\int_0^b p^{\dot\omega_x}\,dx = -\bar z(1-\bar z)\,\lambda_{\text{ala}}/(2\alpha'^3). \qquad (9.799)$$

Analicemos las derivadas para toda el ala:

$$Y^{\alpha} = 2\int_0^{0,5l} c_y'^{\alpha}q_\infty b\,dz; \quad c_y^{\alpha} = Y^{\alpha}/(q_\infty S_{\text{ala}}) = 4/\alpha'; \qquad (9.800)$$

$$Y^{\dot{\bar\alpha}} = 2\int_0^{0,5l} c_y'^{\dot{\bar\alpha}}q_\infty b\,dz; \quad c_y^{\dot{\bar\alpha}} = Y^{\dot{\bar\alpha}}/(q_\infty S_{\text{ala}}) = -4/(3\alpha'^3); \qquad (9.801)$$

$$Y^{\omega_z} = 2\int_0^{0,5l} c_y'^{\omega_z}q_\infty b\,dz; \quad c_y^{\omega_z} = Y^{\omega_z}/(q_\infty S_{\text{ala}}) = 4/(3\alpha'); \qquad (9.802)$$

$$Y^{\dot\omega_z} = 2\int_0^{0,5l} c_y'^{\dot\omega_z}q_\infty b\,dz; \quad c_y^{\dot\omega_z} = Y^{\dot\omega_z}/(q_\infty S_{\text{ala}}) = -1/(3\alpha'^3); \qquad (9.803)$$

$$M_z^{\alpha} = 2\int_0^{0,5l} m_z'^{\alpha}q_\infty b^2\,dz; \quad m_z^{\alpha} = M_z^{\alpha}/(q_\infty S_{\text{ala}}b_0) = -4/(3\alpha'); \qquad (9.804)$$

$$M_z^{\dot{\bar\alpha}} = 2\int_0^{0,5l} m_z'^{\dot{\bar\alpha}}q_\infty b^2\,dz; \quad m_z^{\dot{\bar\alpha}} = M_z^{\dot{\bar\alpha}}/(q_\infty S_{\text{ala}}b_0) = -2/(3\alpha'^3); \qquad (9.805)$$

$$M_z^{\omega_z} = 2\int_0^{0,5l} m_z'^{\omega_z} q_\infty b^2\,dz; \quad m_z^{\omega_z} = M_z^{\omega_z}/(q_\infty S_{\text{ala}} b_0) = -2/(3\alpha'); \tag{9.806}$$

$$M_z^{\dot{\omega}_z} = 2\int_0^{0,5l} m_z'^{\dot{\omega}_z} q_\infty b^2\,dz; \quad m^{\dot{\omega}_z} = M_z^{\dot{\omega}_z}/(q_\infty S_{\text{ala}} b_0) = 1/(5\alpha'^3); \tag{9.807}$$

$$M_x^{\omega_x} = -2\int_0^{0,5l} m_x'^{\omega_x} \dot{q}_\infty bz\,dz; \quad m_{x1}^{\omega_x} = M_x^{\omega_x}/(q_\infty S_{\text{ala}} l) = -\lambda_{\text{ala}}/(12\alpha'). \tag{9.808}$$

Efectuamos el recálculo de la derivada $m_{x1}^{\omega_x}$ al parámetro ω_{x1} calculado según la semienvergadura 0,5 l:

$$m_{x1}^{\omega_{x1}} = \partial m_{x1}/\partial\omega_{x1} = \partial m_{x1}/\partial\,[(\Omega_x b_0/V_\infty)\,0,5l/b_0] = m_{x1}^{\omega_x} b_0/(0,5l) = -1/(3\alpha').$$

A continuación, hallamos

$$m_x^{\dot{\omega}_x} = -2\int_0^{0,5l} m_x'^{\dot{\omega}_x} q_\infty bz\,dz; \quad m_{x1} = M_x^{\dot{\omega}_x}/(q_\infty S_{\text{ala}} l) = \lambda_{\text{ala}}/(60\alpha'^3). \tag{9.809}$$

Hacemos el recálculo de este coeficiente al parámetro ω_x calculado por la magnitud 0,5l:

$$m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}} = \partial m_{x1}/\partial\,[(\Omega_x b_0^2/V_\infty)\,(0,5l/b_0)^2] = m_{x1}^{\dot{\omega}_x}\,[b_0/(0,5l)] = 4/(15\alpha'^3\lambda_{\text{ala}}). \tag{9.810}$$

Para la sección de raíz $c_y'^{\alpha} = 3,578$; $c_y^{\dot{\alpha}} = -1,431$; $c_y'^{\omega_z} = 1,789$; $c_y'^{\dot{\omega}_z} = -0,4771$; $m_z'^{\alpha} = -1,789$; $m_z'^{\dot{\alpha}} = 0,9541$; $m_z'^{\omega_z} = -1,193$; $m_z'^{\dot{\omega}_z} = 0,3578$; $m_x'^{\omega_x} = m_x'^{\dot{\omega}_x} = 0$.

Para la sección que coincide con la CAM (la coordenada adimensional $\bar{z}_A = 2z_A/l = 1/3$), obtenemos:

$$c_y'^{\alpha} = 3,578; \quad c_y'^{\dot{\alpha}} = -0,9541; \quad c_y'^{\omega_z} = 1,193; \quad c_y'^{\dot{\omega}_z} = -0,212;$$

$$m_z'^{\alpha} = -1,789; \quad m_z'^{\dot{\alpha}} = 0,6361; \quad m_z'^{\omega_z} = -0,7951; \quad m_z'^{\dot{\omega}_z} = 0,159;$$

$$m_x'^{\omega_x} = 1,193; \quad m_x'^{\dot{\omega}_x} = -0,318.$$

Las derivadas para el ala en su total:

$$c_y^{\alpha} = 3,578; \quad c_y^{\dot{\alpha}} = -0,9541; \quad c_y^{\omega_z} = 1,193; \quad c_y^{\dot{\omega}_z} = -0,2385;$$

$$m_z^{\alpha} = -1,193; \quad m_z^{\dot{\alpha}} = 0,4771; \quad m_z^{\omega_z} = -0,5963; \quad m_z^{\dot{\omega}_z} = 0,1431;$$

$$m_{x1}^{\omega_{x1}} = -0,2982; \quad m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}} = 0,04771.$$

9.111. En el problema 9.110 se aducen las dependencias para las derivadas de un ala triangular inversa con bordes de salida supersónicos. Para el ala triangular normal con bordes de ataque supersónicos, es posible obtener las derivadas efectuan-

do el recálculo del ala inversa triangular, empleando las fórmulas que se deducen del teorema de invertibilidad. De acuerdo con éste, *las derivadas del ala normal son las mismas que las de la inversa*;

$$c_{yn}^{\alpha}=c_{yi}^{\alpha};\quad c_{yn}^{\dot{\bar{\alpha}}}=c_{yi}^{\dot{\bar{\alpha}}};\quad c_{yn}^{\omega_z}=m_{zi}^{\alpha};\quad c_{yn}^{\dot{\omega}_z}=m_{zi}^{\dot{\bar{\alpha}}};\tag{9.811}$$

$$m_{zn}^{\alpha}=c_{yi}^{\omega_z};\quad m_{zn}^{\dot{\bar{\alpha}}}=c_{yi}^{\dot{\omega}_z};\quad m_{zn}^{\omega_z}=m_{zi}^{\omega_z};\quad m_{zn}^{\dot{\omega}_z}=m_{zi}^{\dot{\omega}_z};\tag{9.812}$$

$$m_{xn}^{\omega_x}=m_{xi}^{\omega_x};\quad m_{xn}^{\dot{\omega}_x}=m_{xi}^{\dot{\omega}_x}.\tag{9.813}$$

Las derivadas del ala inversa (índice i) se toman con respecto al eje Oz que pasa a lo largo del borde de ataque, mientras que las del ala normal, por el vértice. De este modo, estas derivadas deben ser recalculadas de un eje a otro, tomando la distancia relativa entre ellos $\xi_0=x_0/b_0=-1$ (fig. 9.47). Durante semejante recálculo empleamos los valores de las derivadas del ala inversa triangular, obtenidas en el problema 9.110:

$$\left.\begin{aligned}&c_{yn}^{\alpha}=c_{yi}^{\alpha}=c_{y}^{\alpha}=4/\alpha';\quad c_{yn}^{\dot{\bar{\alpha}}}=c_{yi}^{\dot{\bar{\alpha}}}=c_{y}^{\dot{\bar{\alpha}}}=-4/(3\alpha'^3);\\&c_{yn}^{\omega_z}=m_{zi}^{\alpha}=m_{z}^{\alpha}-\xi_0c_y^{\alpha}=8/(3\alpha');\\&c_{yn}^{\dot{\omega}_z}=m_{zi}^{\dot{\bar{\alpha}}}=m_{z}^{\dot{\bar{\alpha}}}-\xi_0c_y^{\dot{\bar{\alpha}}}=-2/\alpha'^3;\end{aligned}\right\}\tag{9.814}$$

$$\left.\begin{aligned}&m_{zn}^{\alpha}=c_{y}^{\omega_z}+\xi_0c_y^{\alpha}=-8/(3\alpha');\\&m_{zn}^{\dot{\bar{\alpha}}}=c_{yi}^{\dot{\omega}_z}=c_{y}^{\dot{\omega}_z}+\xi_0c_y^{\dot{\bar{\alpha}}}=1/\alpha';\end{aligned}\right\}\tag{9.815}$$

$$m_{zn}^{\omega_z}=m_{zi}^{\omega_z}=m_{z}^{\omega_z}+\xi_0\,(m_z^{\alpha}-c_y^{\omega_z})-\xi_0^2c_y^{\alpha}=-2/\alpha';\tag{9.816}$$

$$m_{zn}^{\dot{\omega}_z}=m_{zi}^{\dot{\omega}_z}=m_{z}^{\dot{\omega}_z}+\xi_0\,(m_z^{\dot{\bar{\alpha}}}-c_y^{\dot{\omega}_z})-\xi_0^2c_y^{\dot{\bar{\alpha}}}=8/(15\alpha'^3);\tag{9.817}$$

$$m_{x1n}^{\omega_{x1}}=m_{x1i}^{\omega_{x1}}=-1/(3\alpha');\tag{9.818}$$

$$m_{x1n}^{\dot{\omega}_{x1}}=m_{x1i}^{\dot{\omega}_{x1}}=4/(15\alpha'^3\lambda_{\text{ala}}).\tag{9.819}$$

Calculamos:

$$c_{yn}^{\alpha}=3{,}578;\quad c_{yn}^{\dot{\bar{\alpha}}}=-0{,}9541;\quad c_{yn}^{\omega_z}=2{,}385;\quad c_{yn}^{\dot{\omega}_z}=-1{,}431;$$

$$m_{zn}^{\alpha}=-2{,}385;\quad m_{zn}^{\dot{\bar{\alpha}}}=0{,}7156;\quad m_{zn}^{\omega_z}=-1{,}789;\quad m_{zn}^{\dot{\omega}_z}=0{,}3817;$$

$$m_{x1n}^{\omega_{x1}}=-0{,}2982;\quad m_{x1n}^{\dot{\omega}_{x1}}=0{,}04771.$$

9.112. Las derivadas de los coeficentes aerodinámicos de las alas en flecha en caso de *muy grandes números de Strouhal* ($\omega\to\infty$) tienen la forma:

$$c_y^{\alpha}=4-\mathrm{M}_\infty;\tag{9.820}$$

$$c_y^{\omega_z}=(1/\mathrm{M}_\infty)\,[(\lambda_{\text{ala}}\operatorname{tg}\chi_0/3)\,(\eta_{\text{ala}}+2)/\eta_{\text{ala}}+\\+(4/3)\,(1+\eta_{\text{ala}}+\eta_{\text{ala}}^2)/(\eta_{\text{ala}}+\eta_{\text{ala}}^2)];\tag{9.821}$$

$$m_z^{\alpha}=-c_y^{\omega_z};\tag{9.822}$$

$$m_z^{\omega_z} = -(2/3M_\infty)\,[\lambda_{ala}^2\,\text{tg}^2\,\chi_0\,(3+4\eta_{ala}+\eta_{ala}^2)/(16\eta_{ala}^2)+$$
$$+\lambda_{ala}\,\text{tg}\,\chi_0\,(3+2\eta_{ala}+\eta_{ala}^2)/(4\eta_{ala}^2)+(\eta_{ala}^2+1)/\eta_{ala}^2]; \qquad (9.823)$$

$$m_{x1}^{\omega_{x1}} = -(3+\eta_{ala})/[3M_\infty\,(1+\eta_{ala})]. \qquad (9.824)$$

Las fórmulas (9.820)—(9.824) se han obtenido para el sistema estándar de ejes de coordenadas con el origen en el borde de la cuerda de raíz (es decir, para la posición del centro de gravedad $x_{c.g} = 0$). El coeficiente m_z, así como el parámetro ω_z, están calculados por la cuerda de raíz. El coeficiente m_{x1} se refiere a la envergadura del ala l, en tanto que ω_{x1}, a la magnitud 0,5 l.

Al carácter supersónico de los bordes de ataque corresponde la condición $\pi/2 - \mu_\infty > \chi_0$, para la cual las líneas de Mach pasan del vértice del ala a su superficie. Esta condición en realidad se cumple: $\text{tg}\,(\pi/2 - \mu_\infty) > \text{tg}\,\chi_0$; $\text{ctg}\,\mu_\infty > \text{tg}\,\chi_0$; $\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} > \text{tg}\,\chi_0$. Aquí $\alpha' = \sqrt{1{,}5^2 - 1} = 1{,}118$, mientras que $\text{tg}\,\chi_0 = 0{,}5$. Para el borde de salida supersónico debe en realidad existir la desigualdad $\pi/2 - \mu_\infty > \chi_3$ (χ_3 es el ángulo entre la línea horizontal y el borde de salida). Tenemos:

$$\text{tg}\,(\pi/2 - \mu_\infty) > \text{tg}\,\chi_3;\ \text{ctg}\,\mu_\infty > \text{tg}\,\chi_3;\ \alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} > \text{tg}\,\chi_3.$$

En el caso que analizamos $\alpha' = 1{,}118$ y $\text{tg}\,\chi_3 = [b_0 - (0{,}5\,l\,\text{tg}\,\chi_0 + b_e)]/(0{,}5\,l) = 0{,}5$.

A continuación determinamos: $S_{ala} = l\,[b_0 - 0{,}25\,l\,(\text{tg}\,\chi_0 + \text{tg}\,\chi_3)]$; $\lambda_{ala} = l^2/S_{ala} = l/[b_0 - 0{,}25\,l\,(\text{tg}\,\chi_0 + \text{tg}\,\chi_3)] = 1{,}714$; $\eta_{ala} = b_0/b_e = 2{,}5$ y hallamos las derivadas $c_y^\alpha = 2{,}667$; $c_y^{\omega_z} = 1{,}313$; $m_z^\alpha = -c_y^{\omega_z} = -1{,}313$; $m_z^{\omega_z} = -0{,}7734$; $m_{x1}^{\omega_{x1}} = -0{,}3434$. Las derivadas aerodinámicas designadas con puntos para $\omega \to \infty$ son nulas.

9.113. En el ala triangular normal los bordes de ataque son supersónicos lo que se desprende de la condición $\pi/2 - \mu_\infty > \text{tg}\,\chi_0$ o bien $\text{ctg}\,\mu_\infty = \alpha' > \text{tg}\,\chi_0$ (en nuestro caso $\alpha' = \sqrt{1{,}5^2 - 1} = 1{,}118$; $\text{tg}\,\chi_0 = 4/\lambda_{ala} = 1$).

Para semejante ala, con $\omega \to \infty$, es posible obtener las derivadas de las correspondientes relaciones (véase la solución del problema 9.112), haciendo en ellas $\eta_{ala} = \infty$; $\lambda_{ala}\,\text{tg}\,\chi_0 = 4$:

$$c_y^\alpha = 4/M_\infty = 2{,}667; \quad c_y^{\omega_z} = 8/(3M_\infty) = 1{,}778; \qquad (9.825)$$

$$m_z^\alpha = -c_y^{\omega_z} = -8/(3M_\infty) = -1{,}778; \quad m_z^{\omega_z} = -1{,}333; \qquad (9.826)$$

$$m_{x1}^{\omega_{x1}} = -1/(3M_\infty) = -0{,}2222. \qquad (9.827)$$

Calculamos las derivadas con relación a los ejes de coordenadas, cuyo origen se encuentra en el borde de ataque del ala; el coeficiente del momento m_z y el parámetro cinemático ω_z se han calculado por la cuerda de raíz b_0. El coeficiente del momento m_{x1} está referido a la envergadura l, en tanto que la variable ω_{x1} se calcula según el valor de 0,5 l.

9.114. El cálculo de las derivadas de un ala triangular delgada se realiza con las relaciones cuya forma se determina de acuerdo con el carácter de los bordes de ataque. Con $M_\infty = 1{,}5$ ellos son subsónicos [el ángulo $\mu_\infty = \text{arcsen}\,(1/M_\infty) = 41{,}8°$ es mayor que la mitad del ángulo en el vértice $\pi/2 - \chi = 30°$].

Con $M_\infty = 2{,}2$ los bordes de ataque son supersónicos, ya que las líneas de Mach trazadas desde el vértice se sitúan dentro de la superficie de sustentación. Analicemos el caso de los bordes subsónicos (el número $M_\infty = 1{,}5$) (fig. 9.48).

Las derivadas estáticas de estabilidad

$$c_y^\alpha = Y^\alpha/(q_\infty S_{\text{ala}}) = \pi\lambda_{\text{ala}}/(2E); \quad m_z^\alpha = 0. \tag{9.828}$$

Aquí, $S_{\text{ala}} = l_{\text{ala}}^2/\lambda_{\text{ala}}$ es el área característica; l_{ala}, la longitud característica (envergadura); E, *la integral elíptica de segundo género por el parámetro* $k = \sqrt{(1-(0{,}25\,\alpha'\lambda_{\text{ala}})^2}$; m_z^α, la derivada que se determina con relación al origen de coordenadas O en el centro de gravedad del área del ala.

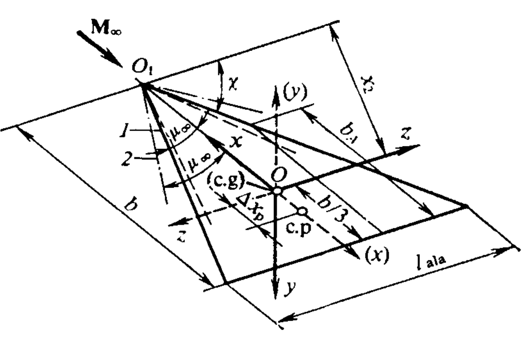


Fig. 9.48. Influjo de fuerza sobre un ala triangular con la circulación no estacionaria: *1* y *2*, líneas de Mach

Como el alargamiento $\lambda_{\text{ala}} = l_{\text{ala}}^2/S_{\text{ala}} = 4/\text{tg}\,\chi = 2{,}309$ y la magnitud $\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 1{,}118$, el parámetro $k = \sqrt{1-(0{,}25\cdot 1{,}118\cdot 2{,}309)^2} = 0{,}7639$. En las tablas de las integrales elípticas, según el ángulo $\alpha = \arcsen 0{,}7639 = 49{,}81°$, hallamos $E = 1{,}307$ y calculamos $c_y^\alpha = 2{,}7774$.

La derivada del coeficiente de amortiguamiento del ala

$$m_x^{\omega_x} = M_x^{\omega_x}/(q_\infty S_{\text{ala}} l_{\text{ala}}) = -\pi\lambda_{\text{ala}} k^2/\{16\,[(1+k^2)\,E-(1-k^2)\,K]\}$$
$$[\omega_x = \Omega_x l_{\text{ala}}/(2V_\infty)], \tag{9.829}$$

donde E y K son *integrales elípticas completas de segundo y primer género*, respectivamente, *con parámetro* $k = \sqrt{1-(0{,}25\,\alpha'\lambda_{\text{ala}})^2} = 0{,}7639$.

En las tablas de las integrales elípticas, según el ángulo $\alpha = \arcsen 0{,}76439 = 49{,}81°$, hallamos $E = 1{,}307$; $K = 1{,}932$ y calculamos $m_x^{\omega_x} = -0{,}3425$.

Las derivadas de amortiguamiento longitudinal:

$$c_y^{\omega_z} = Y^{\omega_z}/(q_\infty S_{\text{ala}}) = (2\pi/3)\,\{3k^2/[2k^2-1)\,E+(1-k^2)\,K]-2/E\} = 0{,}3789; \tag{9.830}$$

$$m_z^{\omega_z} = M_z^{\omega_z}/(q_\infty S_{\text{ala}} l_{\text{ala}}) = -[\pi k^2/(3\lambda_{\text{ala}})]/[(2k^2-1)\,E+(1-k^2)\,K] = -0{,}2586; \tag{9.831}$$

$$c_y^{\dot{\bar\alpha}} = Y^{\dot{\bar\alpha}}/(q_\infty S_{\text{ala}}) = [2\pi/(3\alpha'^2)]\,\{3k^2\,(\alpha'^2+1)/[(2k^2-1)\,E+(1-k^2)\,K]-$$
$$-(2\alpha'^2+3)/E\} = -0{,}5996; \tag{9.832}$$

$$m_z^{\dot{\bar\alpha}} = M_z^{\dot{\bar\alpha}}/(q_\infty S_{\text{ala}} l_{\text{ala}}) = -[\pi/(9\alpha'^2\lambda_{\text{ala}})]\,\{3k^2\,(\alpha'^2+1)/[(2k^2-1)\,E+$$
$$+(1-k^2)\,K]-(2\alpha'^2+3)/E\} = 0{,}04328. \tag{9.833}$$

La derivada del coeficiente del momento de balanceo, condicionada por la guiñada,

$$m_x^{\omega_y} = M_x^{\omega_y}/(q_\infty S_{\text{ala}} l_{\text{ala}}) = \pi\alpha\,(1+9\lambda_{\text{ala}}^2/16)/(9\lambda_{\text{ala}} E) =$$
$$= 0{,}04623\,[\omega_y = \Omega_y l_{\text{ala}}/(2V_\infty)]. \tag{9.834}$$

Analicemos las derivadas debidas al efecto de las fuerzas de Magnus:

$$c_z^{\omega_x} = 4\pi k^3\alpha \{3E[(k^2+1)E-(1-k^2)K]\}^{-1} = 1{,}129; \tag{9.835}$$

$$m_y^{\omega_x} = -2\pi k^3\alpha [\lambda_{\text{ala}}/16 + 1/(9\lambda_{\text{ala}})]\{E[(k^2+1)E - -(1-k^2)K]\}^{-1} = -0{,}3258. \tag{9.836}$$

Llevamos a cabo el recálculo de las derivadas al nuevo centro de rotación O_1 en el vértice, para el que la distancia relativa hasta el punto O será $\bar{x}_2 = x_2/l_{\text{ala}} = (1/3)\ \text{tg}\ \chi = 0{,}5775$.

Calculamos:

$$c_{z1}^{\omega_z} = c_y^{\omega_z} + c_y^{\alpha}\bar{x}_2 = 1{,}98; \quad m_{z1}^{\omega_z} = m_z^{\omega_z} + \bar{x}_2(m_z^{\alpha} - c_y^{\omega_z}) - \bar{x}_2^2 c_y^{\alpha} = -1{,}402;$$

$$m_{z1}^{\dot{\alpha}} = m_z^{\dot{\alpha}} - c_y^{\dot{\alpha}}\bar{x}_2 = 0{,}2663.$$

Las restantes derivadas quedan invariables. Para el nuevo centro de momentos en el vértice (sin cambiar la posición del centro de rotación)

$$m_{z1}^{\alpha} = m_z^{\alpha} - c_y^{\alpha}\bar{x}_2 = -1{,}601; \quad m_{z1}^{\omega_z} = m_z^{\omega_z} - c_y^{\omega_z}\bar{x}_2 = -0{,}4773;$$

$$m_{z1}^{\dot{\alpha}} = m_z^{\dot{\alpha}} - c_y^{\dot{\alpha}}\bar{x}_2 = 0{,}2611; \quad m_{y1}^{\omega_x} = m_y^{\omega_x} - c_y^{\omega_x}\bar{x}_2 = -0{,}9776.$$

Examinemos las derivadas para $\mathrm{M}_\infty = 2{,}2$ (los bordes de ataque del ala son supersónicos): las derivadas estáticas $c_y^{\alpha} = 4/\alpha' = 3{,}578$; $m_z^{\alpha} = 0$; la derivada de amortiguamiento del balanceo $m_x^{\omega_x} = -1/(3\ \alpha') = -2{,}982$; la de amortiguamiento longitudinal $c_y^{\omega_z} = 0$; $m_z^{\omega_z} = -16/(9\ \lambda_{\text{ala}}\alpha'^2) = -0{,}616$; las derivadas respecto de $\dot{\alpha}$ tienen la forma

$$c_y^{\dot{\alpha}} = -16/(3\alpha'^3\lambda_{\text{ala}}) = -1{,}653; \quad m_z^{\dot{\alpha}} = 8/(9\alpha'^3\lambda_{\text{ala}}^2) = 1{,}193.$$

Para los bordes de ataque supersónicos las derivadas de la estabilidad, condicionadas por el efecto de Magnus, son nulas, o sea, $c_z^{\omega_x} = m_y^{\omega_x} = 0$.

9.115. Al calcular las derivadas de la estabilidad se han elegido como dimensiones características el área S_{ala} y la envergadura l_{ala}. Los centros de rotación y de los momentos coinciden con el origen de coordenadas situado a una distancia $x_{\text{s.b}}$ del borde de salida.

Los parámetros

$$\omega_x = \Omega_x l_{\text{ala}}/(2V_\infty); \quad \omega_z = \Omega_z l_{\text{ala}}/(2V_\infty); \quad \omega_y = \Omega_y l_{\text{ala}}/(2V_\infty);$$

$$\dot{\alpha} = (d\alpha/dt)\ \lambda_{\text{ala}}/(2V_\infty); \quad \dot{\beta} = (d\beta/dt)\ \lambda_{\text{ala}}/(2V_\infty); \quad \dot{\omega}_z = \dot{\Omega}_z\lambda_{\text{ala}}^2/2V_\infty);$$

$$\dot{\omega}_x = \dot{\Omega}_x\lambda_{\text{ala}}^2/(2V_\infty); \quad \dot{\omega}_y = \dot{\Omega}_y\lambda_{\text{ala}}^2/(2V_\infty).$$

Para la configuración simétrica de la superficie de sustentación las derivadas estáticas:

$$c_y^{\alpha} = -2\bar{A}_{22}; \quad c_y^{\beta} = -4\omega_x B_{11}; \quad c_z^{\alpha} = 4\omega_x B_{22}; \quad c_z^{\beta} = -2\bar{A}_{11}; \tag{9.837}$$

$$m_x^{\alpha} = 2\beta(B_{11} - B_{22}) + 4\omega_y(C_{11} - C_{22}); \quad m_x^{\beta} = 2\alpha(B_{11} - B_{22}) - 4\omega_z(C_{11} - C_{22}); \tag{9.838}$$

$$m_y^{\beta} = -2(B_{11} + \bar{A}_{11}\bar{x}_{\text{s.b}}); \quad m_z^{\alpha} = 2(B_{22} + \bar{A}_{22}\bar{x}_{\text{s.b}}); \quad m_z^{\beta} = 4\omega_x C_{11}; \tag{9.839}$$

$$m_y^{\alpha} = 4\omega_x C_{22}; \tag{9.840}$$

derivadas de rotación

$$c^{\omega_x} = 4\beta B_{11} - 8\omega_y C_{11};\quad c_y^{\omega_y} = -8\omega_x C_{11};\quad c_y^{\omega_z} = 4\bar{A}_{22}\bar{x}_{s.b};\qquad (9.841)$$

$$c_z^{\omega_x} = 4\alpha B_{22} - 8\omega_z C_{22};\quad c_z^{\omega_y} = -4\bar{A}_{11}\bar{x}_{s.b};$$

$$c_z^{\omega_z} = -8\omega_x C_{22};\quad m_x^{\omega_x} = -4\bar{A}_{33};\qquad (9.842)$$

$$m_x^{\omega_y} = 4(C_{11} - C_{22}) - 8\omega_z (D_{11} - D_{22});$$

$$m_x^{\omega_z} = -4\beta (C_{11} - C_{22}) - 8\omega_y (D_{11} - D_{22});\qquad (9.843)$$

$$m_y^{\omega_x} = 4\alpha C_{22} - 8\omega_z D_{22};\quad m_y^{\omega_y} = -4(\bar{A}_{11}\bar{x}_{s.b}^2 + C_{11});\quad m_y^{\omega_z} = -8\omega_x D_{22};\qquad (9.844)$$

$$m_x^{\omega_z} = 4\beta C_{11} + 8\omega_y D_{11};\quad m_z^{\omega_y} = 8\omega_x D_{11};\quad m_z^{\omega_z} = -4(\bar{A}_{22}\bar{x}_{s.b}^2 + C_{22});\qquad (9.845)$$

derivadas de las aceleraciones:

$$c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = -4B_{22};\quad c_y^{\dot{\omega}_z} = 4C_{22};\quad c_z^{\dot{\bar{\beta}}} = -4B_{11};\quad c_z^{\dot{\omega}_y} = -4C_{11};\qquad (9.846)$$

$$c_y^{\dot{\bar{\beta}}} = c_y^{\dot{\omega}_y} = c_y^{\dot{\omega}_x} = c_z^{\dot{\bar{\alpha}}} = c_z^{\dot{\omega}_z} = c_z^{\dot{\omega}_x} = 0;\qquad (9.846')$$

$$m_x^{\dot{\omega}_x} = -4B_{33};\quad m_y^{\dot{\bar{\beta}}} = -4C_{11};\qquad (9.847)$$

$$m_y^{\dot{\omega}_y} = -4D_{11};\quad m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} = 4C_{22};\qquad (9.848)$$

$$m_z^{\dot{\omega}_z} = -4D_{22};\qquad (9.849)$$

$$m_x^{\dot{\bar{\alpha}}} = m_x^{\dot{\bar{\beta}}} = m_x^{\dot{\omega}_y} = m_x^{\dot{\omega}_z} = m_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = m_y^{\dot{\omega}_x} = m_y^{\dot{\omega}_z} = m_z^{\dot{\bar{\beta}}} = m_z^{\dot{\omega}_x} = m_z^{\dot{\omega}_y} = 0.\qquad (9.850)$$

Como vemos las derivadas se determinan con los parámetros adimensionales

$$B_{ii} = \int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}_1} A_{ii}\, d\bar{x};\quad C_{ii} = \int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}_1} A_{ii}\bar{x}\, d\bar{x};\quad D_{ii} = \int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}_1} A_{ii}\bar{x}^2\, d\bar{x}\quad (ii = 11;\ 22),\qquad (9.851)$$

donde $\bar{x} = x/l_{ala}$; $\bar{x}_{s.b} = x_{s.b}/l_{ala}$; $\bar{x}_1 = x_1/b_{ala}$ (fig. 9.48).

Los parámetros A_{ii} son *los coeficientes de las masas asociadas* (adicionales) ligadas con las correspondientes variables dimensionales λ_{ii} por las relaciones

$$A_{11} = \lambda_{11}/(\rho_\infty S_{ala});\quad A_{22} = \lambda_{22}/(\rho_\infty S_{ala});\quad A_{33} = \lambda_{33}/(\rho_\infty l_{ala}^2 S_{ala}).\qquad (9.852)$$

Para una superficie de sustentación plana

$$\lambda_{11} = 0;\quad \lambda_{22} = \pi\rho_\infty s^2;\quad \lambda_{33} = (1/8)\,\pi\rho_\infty s^4,\qquad (9.853)$$

$$A_{11} = 0;\quad A_{22} = \pi s^2/S_{ala};\quad A_{33} = (1/8)\,\pi s^4/(l_{ala}^2 S_{ala}).\qquad (9.854)$$

Conforme a la fig. 9.48

$$s = (l_{ala}/2)\,(x_1 - x)/b;\quad S_{ala} = b\, l_{ala}/2;\quad A_{22} = 4\pi\ \mathrm{tg}^{-3}\chi\ (\bar{x}_1 - \bar{x})^2$$

$$A_{33} = 0{,}5\ \pi\ \mathrm{tg}^{-5}\chi\ (\bar{x}_1 - \bar{x})^4.$$

Según estos parámetros hallamos

$$B_{11}=C_{11}=D_{11}=0;\quad B_{22}=\int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}_1} 4\pi\,\mathrm{tg}^{-3}\chi\,(\bar{x}_1-\bar{x})^2\,d\bar{x}=\pi/6;$$

$$B_{33}=\int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}_1}(\pi/2)\,\mathrm{tg}^{-5}\chi\,(\bar{x}_1-\bar{x})^4\,d\bar{x}=\pi/320;$$

$$C_{22}=\int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}_1}4\pi\,\mathrm{tg}^{-3}\chi\,(\bar{x}_1-\bar{x})^2\,\bar{x}\,d\bar{x}=(\pi/\lambda_{ala})\,[(1/3)\,(1+x_{s.b}/b)-1/4];$$

$$D_{22}=\int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}_1}4\pi\,\mathrm{tg}^{-3}\chi\,(\bar{x}_1-\bar{x})^2\,d\bar{x}=(\pi/\lambda_{ala}^2)\,[2/5-(1+x_{s.b}/b)+(2/3)\,(1+x_{s.b}/b)^2];$$

$$\bar{A}_{11}=0;\quad \bar{A}_{22}=\pi\lambda_{ala}/4;\quad A_{33}=\pi\lambda_{ala}/128.$$

Tomamos el origen de coordenadas (centro de rotación) en el centro de gravedad del área del ala, es decir, $x_{s.b}=(1/3)\,b$. Entonces, $C_{22}=-\pi/(36\,\lambda_{ala})$; $D_{22}=4\pi/(135\,\lambda_{ala}^2)$.

En virtud de los valores obtenidos de los parámetros B_{ii}, C_{ii}, D_{ii}, $\bar{A}_{ii}$ y el alargamiento del ala $\lambda_{ala}=2{,}309$, hallamos:

las derivadas estáticas de estabilidad

$$c_y^{\alpha}=-\pi\lambda_{ala}/2=-3{,}625\,(2{,}774);\quad c_z^{\alpha}=2{,}093\omega_x;\quad c_z^{\beta}=c_y^{\beta}=0;$$

$$m_x^{\alpha}=-1{,}047\beta+0{,}1511\omega_y;\quad m_x^{\beta}=-1{,}047\alpha-0{,}1511\omega_z;$$

$$m_y^{\alpha}=-0{,}1511\omega_x;\quad m_y^{\beta}=m_z^{\alpha}=m_z^{\beta}=0;$$

las derivadas de rotación

$$c_y^{\omega_z}=-2{,}093\,(-0{,}3789);\quad c_z^{\omega_x}=2{,}093\alpha+0{,}3022\omega_z;\quad c_z^{\omega_z}=0{,}3022\omega_x;$$

$$c_y^{\omega_x}=c_y^{\omega_y}=c_z^{\omega_y}=0;\quad m_z^{\alpha}=0\,(0);\quad m_x^{\omega_x}=-0{,}2266\,(-0{,}3425);$$

$$m_x^{\omega_y}=0{,}1511\alpha+0{,}1396\omega_z\,(0{,}4623\alpha);\quad m_x^{\omega_z}=-0{,}511\beta+0{,}1396\omega_y;$$

$$m_y^{\omega_x}=-0{,}1511\alpha-0{,}1396\omega_z;\quad m_y^{\omega_z}=-0{,}1396\omega_x;\quad m_y^{\omega_y}=0;$$

$$m_z^{\omega_z}=-0{,}4533\,(-0{,}2586);\quad m_z^{\omega_x}=m_z^{\omega_y}=0;$$

las derivadas de las aceleraciones

$$c_y^{\dot{\alpha}}=-2{,}093\,(0{,}5996);\quad c_y^{\dot{\omega}_z}=-0{,}1511;\quad m_x^{\dot{\omega}_x}=-0{,}03925;$$

$$m_z^{\dot{\alpha}}=-0{,}1511\,(0{,}04328);\quad m_z^{\dot{\omega}_z}=-0{,}0698.$$

Las restantes derivadas de las aceleraciones son nulas. Para comparar, entre paréntesis se presentan los valores de las derivadas obtenidos de acuerdo con la teoría linealizada supersónica cuando los bordes de ataque son subsónicos (véase

la solución del problema 9.114). Con ello, el signo de las derivadas de los coeficientes c_y, en comparación con el problema 9.114, ha cambiado por el opuesto, ya que en el problema que consideramos el eje y está dirigido en sentido contrario.

9.116. De la relación $(\Delta x_p/l_{ala})_\alpha = -m_z^\alpha/c_y^\alpha = 0$ se desprende que el centro de presión de las fuerzas, ligado con el ángulo α, está situado en el centro de gravedad del área del ala. De esta forma, el ala triangular es neutral con relación a la estabilidad estática longitudinal.

La distancia relativa entre el centro de gravedad del área del ala y el centro de presión, ligado con ω_z, es igual a

$$(\Delta x_p/l_{ala})_{\omega_z} = -m_z^{\omega_z}/c_y^{\omega_z} = -1/(2\lambda_{ala}) = -0{,}2166.$$

Por analogía calculamos las coordenadas de los centros de presión ligados con $\dot{\omega}_z$ y $\dot{\alpha}$:

$$(\Delta x_p/l_{ala})_{\dot{\omega}_z} = -m_z^{\dot{\omega}_z}/c_y^{\dot{\omega}_z} = -16/(15\lambda_{ala}^2) = -0{,}462;$$

$$(\Delta x_p/l_{ala})_{\dot{\alpha}} = -m_z^{\dot{\alpha}}/c_y^{\dot{\alpha}} = -1/(6\lambda_{ala}) = -0{,}07218.$$

En correspondencia con los resultados obtenidos, los centros de presión, ligados con ω_z, $\dot{\omega}_z$ y $\dot{\alpha}$, se sitúan tras el centro de gravedad, lo que indica la aparición del efecto estabilizante (*amortiguamiento longitudinal*) cuando el ala gira alrededor del eje transversal, así como variaciones en el tiempo de Ω_z y α.

Analicemos los resultados de la teoría linealizada supersónica (véase la solución del problema 9.114). En el caso de bordes de ataque subsónicos ($M_\infty = 1{,}5$) tenemos $(\Delta x_{ala}/l_{ala})_\alpha = m_z^\alpha/c_y^\alpha = 0$. Igual valor, coincidente con la teoría de los cuerpos delgados, también tenemos para los bordes supersónicos ($M_\infty = 2{,}2$). A continuación, para $M_\infty = 1{,}5$ (bordes subsónicos), hallamos $(\Delta x_p/l_{ala})_{\omega_z} = -m_z^{\omega_z}/c_y^{\omega_z} = 0{,}6825$; para $M_\infty = 2{,}2$ (bordes supersónicos)

$$(\Delta x_p/l_{ala})_{\omega_z} = -m_z^{\omega_z}/c_y^{\omega_z} = \infty.$$

Así, pues, con los bordes de ataque subsónicos el centro de presión se sitúa tras el centro de gravedad, lo que corresponde a la teoría de los cuerpos delgados [el valor de $(\Delta x_p/l_{ala})_{\omega_z} = 0{,}6825$ es positivo debido a que el eje x está dirigido en el sentido hacia el borde de salida]. Con ello, el número M_∞ influye sobre el aumento del efecto estabilizante, ya que el centro de presión se halla a gran distancia del centro de gravedad. Cuando los bordes son supersónicos, el centro de presión se desplaza a una distancia infinita tras el ala. Todo esto indica que el efecto estabilizante está presente con cualesquiera valores de M_∞ y λ_{ala} y disposición arbitraria del centro de rotación.

Con arreglo a las fórmulas de la teoría linealizada (9.832) y (9.833) el centro de presión, ligado con la derivada $\dot{\alpha}$, es igual a $(\Delta x_p/l_{ala})_{\dot{\alpha}} = -m_z^{\dot{\alpha}}/c_y^{\dot{\alpha}} = 1/(6\lambda_{ala})$. Este resultado indica que, como en la teoría de los cuerpos delgados, el centro de presión ocupa una posición invariable tras el centro de gravedad durante el movimiento ligado con $\dot{\alpha}$. Con esto, si $c_y^{\dot{\alpha}}$ es una magnitud positiva, la derivada ejerce efecto de amortiguamiento. Pero en el caso que examinamos (véase la solución del

problema 9.114) la derivada $c_y^{\dot{\bar{\alpha}}}$ es negativa ($c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = -0{,}5996$) y la variable $m_z^{\dot{\bar{\alpha}}}$ tiene el signo opuesto ($m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} = 0{,}04328$). Por consiguiente, con la posición asignada del centro de presión no surge amortiguamiento.

Semejante fenómeno se observa en todas las alas triangulares con bordes supersónicos. En las alas con bordes subsónicos los valores positivos de $c_y^{\dot{\bar{\alpha}}}$ y, por lo tanto, el efecto estabilizante se observan en caso de muy pequeños valores de los parámetros $\alpha'\lambda_{\text{a la}}$; al aumentar dichos valores puede aparecer la inestabilización.

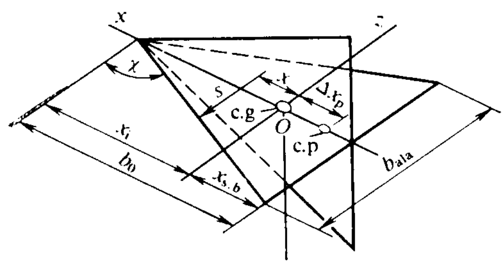


Fig. 9.49. Disposición de los ejes de coordenadas en el ala

9.117. El esquema de un ala cruciforme triangular y el sistema de ejes de coordenadas se muestran en la fig. 9.49. En calidad de características se han tomado el área de las dos semialas y la envergadura del ala l_{ala}; el origen de coordenadas (centro de rotación) se encuentra a cierta distancia $x_{\text{s.b}}$ del borde de salida del ala.

Las expresiones generales para las derivadas de la estabilidad se han aducido en la solución del problema 9.115. Para calcular B_{ii}, C_{ii}, D_{ii} hay que hacer uso de los coeficientes (9.852), los que, a su vez, son determinados según los parámetros dimensionales para el ala cruciforme

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = \pi\rho_\infty s^2; \quad \lambda_{33} = 2\rho_\infty s^4/\pi \tag{9.855}$$

en forma de $A_{11} = A_{22} = \pi s^2/S_{\text{a la}}$; $A_{33} = 2\,s^4/(\pi l_{\text{a la}}^2 S_{\text{ala}})$.

En virtud de la fig. 9.49

$$s = (l_{\text{a la}}/2)\,(x_1 - x)/b; \qquad S_{\text{a la}} = b\,l_{\text{a la}}/2; \qquad A_{11} = A_{22} = 4\pi\ \text{tg}^{-3}\chi\ (\bar{x}_1 - \bar{x})^2;$$

$$A_{33} = (8\ \text{tg}^{-5}\chi/\pi)\,(\bar{x}_1 - \bar{x})^4; \quad B_{11} = B_{22} = \pi/6; \quad B_{33} = 1/(20\,\pi);$$

$$C_{11} = C_{22} = (\pi/\lambda_{\text{a la}})\,[(1/3)\,(1 + x_{\text{s.b}}/b) - 1/4)];$$

$$D_{11} = D_{22} = (\pi/\lambda_{\text{a la}}^2)\,[2/5 - (1 + x_{\text{s.b}}/b) + (2/3)\,(1 + x_{\text{s.b}}/b)^2];$$

$$\bar{A}_{11} = \bar{A}_{22} = \pi\lambda_{\text{a la}}/4; \quad \bar{A}_{33} = \lambda_{\text{a la}}/(8\pi).$$

Situemos el origen de coordenadas (eje de rotación) en el centro de gravedad del área de las semialas. En tal caso, para $x_{\text{s.b}}/b = 1/3$ tenemos $C_{22} = -\pi/(36\ \lambda_{\text{a la}})$; $D_{22} = 4\pi/(135\ \lambda_{\text{a la}}^2)$.

Tomando en consideración los resultados obtenidos, determinamos:

las derivadas estáticas de estabilidad

$$c_y^\alpha = -\pi\lambda_{\text{ala}}/2 = -3{,}625; \quad c_y^\beta = -2{,}093\omega_x; \quad c_z^\alpha = 2{,}093\omega_x;$$

$$c_z^\beta = -\pi\lambda_{\text{ala}}/2 = -3{,}625; \quad m_y^\alpha = -[\pi/(9\lambda_{\text{ala}})]_{\omega_x} = -0{,}1511\omega_x;$$

$$m_z^\beta = -[\pi/(9\lambda_{\text{ala}})]_{\omega_x} = -0{,}1511\omega_x; \quad m_x^\alpha = m_x^\beta = m_y^\beta = m_z^\alpha;$$

las derivadas de rotación

$$c_y^{\omega_x} = -(2\pi/3)\,\beta + [2\pi/(9\lambda_{ala})]\,\omega_y = 2{,}093\beta + 0{,}3022\omega_y;$$

$$c_y^{\omega_y} = [2\pi/(9\lambda_{ala})]\omega_x = 0{,}3022\omega_x; \quad c_y^{\omega_z} = -2{,}093;$$

$$c_z^{\omega_x} = (2\pi/3)\,\alpha + (2\pi/9\lambda_{ala})\,\omega_z = 2{,}093\alpha + 0{,}3022\omega_z; \quad c_z^{\omega_y} = 2{,}093;$$

$$c_z^{\omega_z} = [2\pi/(9\lambda_{ala})]\,\omega_x = 0{,}3022\omega_x; \quad m_x^{\omega_x} = -\lambda_{ala}/(2\pi) = -0{,}3677;$$

$$m_y^{\omega_x} = -[\pi/(9\lambda_{ala})]\,\alpha - [32\pi/(135\lambda_{ala}^2)]\omega_z = -0{,}1511\alpha - 0{,}1396\omega_z;$$

$$m_y^{\omega_y} = -\pi/(3\lambda_{ala}) = -0{,}4533; \quad m_y^{\omega_z} = -[32/(135\lambda_{ala}^2)]\omega_x = -0{,}1396\omega_x;$$

$$m_z^{\omega_x} = -[\pi/(9\lambda_{ala})]\,\beta + [32\pi/(135\lambda_{ala}^2)]\omega_y = -0{,}1511\beta + 0{,}1396\omega_y;$$

$$m_z^{\omega_y} = [32\pi/(135\lambda_{ala}^2)]\omega_x = 0{,}1396\omega_x; \quad m_z^{\omega_z} = -\pi/(3\lambda_{ala}) = -0{,}4533;$$

$$m_x^{\omega_y} = m_x^{\omega_z} = 0;$$

las derivadas de las aceleraciones

$$c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = c_z^{\dot{\bar{\beta}}} = -2{,}093; \quad c_y^{\dot{\omega}_z} = -c_z^{\dot{\omega}_y} = -\pi/(9\lambda_{ala}) = -0{,}1511;$$

$$c_y^{\dot{\bar{\beta}}} = c_y^{\dot{\omega}_x} = c_y^{\dot{\omega}_y} = c_z^{\dot{\bar{\alpha}}} = c_z^{\dot{\omega}_x} = c_z^{\dot{\omega}_z} = 0; \quad m_x^{\dot{\omega}_x} = -0{,}06369;$$

$$m_x^{\dot{\bar{\alpha}}} = m_x^{\dot{\bar{\beta}}} = m_x^{\dot{\omega}_y} = m_x^{\dot{\omega}_z} = 0; \; m_z^{\dot{\omega}_z} = -16\pi/(135\lambda_{ala}^2) = -0{,}0698;$$

$$m_y^{\dot{\bar{\beta}}} = \pi/(9\lambda_{ala}) = 0{,}1511; \quad m_y^{\dot{\omega}_y} = -0{,}069; \quad m_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = m_y^{\dot{\omega}_x} = m_y^{\dot{\omega}_z} = 0.$$

9.118. Haciendo uso de la solución del problema 9.117 calculemos las segundas derivadas

$$c_y^{\beta\omega_x} = -c_z^{\alpha\omega_x} = -2{,}093; \quad m_y^{\alpha\omega_x} = m_z^{\beta\omega_x} = -0{,}1511.$$

Las derivadas de $\alpha\omega_x$ y $\beta\omega_x$ están relacionadas con el efecto de Magnus que consiste en el surgimiento de fuerzas y momentos durante la rotación alrededor del eje longitudinal de un ala en movimiento bajo ángulo de ataque o deslizamiento.

La fuerza de Magnus, condicionada por la derivada $c_y^{\beta\omega_x}$, está aplicada sobre un punto la distancia desde el cual hasta el centro de rotación se determina con el coeficiente de presión

$$(\Delta\bar{x}_p)_{\beta\omega_x} = (\Delta x_p/l_{ala})_{\beta\omega_x} = -m_z^{\beta\omega_x}/c_y^{\beta\omega_x} = -0{,}07219.$$

Con arreglo a este valor, el punto de aplicación de la fuerza de Magnus se encuentra tras el centro de gravedad del área del ala, distanciado de él a

$$(\Delta\bar{x}_p)_{\beta\omega_x} = -0{,}07219\ l_{ala} = -0{,}07219\ b\ (2/\mathrm{tg}\ \chi) = -0{,}08336\ b.$$

Igual valor obtenemos para la fuerza lateral de Magnus condicionada por la derivada $\alpha\omega_x$

$$(\Delta\bar{x}_p)_{\alpha\omega_x} = (\Delta x_p/l_{ala})_{\alpha\omega_x} = m_y^{\alpha\omega_x}/c_z^{\alpha\omega_x} = -0{,}07219 l_{ala} = -0{,}08336 b.$$

Por $\omega_x \omega_z$ (o bien $\omega_x \omega_y$) hallamos las derivadas

$$c_y^{\omega_x \omega_y} = c_z^{\omega_x \omega_z} = 0{,}3022; \quad -m_y^{\omega_x \omega_z} = m_z^{\omega_x \omega_y} = 0{,}1396.$$

Estas derivadas están condicionadas por las fuerzas y momentos que surgen al girar el ala alrededor de dos ejes los que, en tales condiciones, se comportan como un giróscopo. Tales fuerzas y momentos (y las correspondientes derivadas) llevan el nombre de *giroscópicos*.

El coeficiente del centro de presión ligado con la derivada giroscópica

$$(\Delta \bar{x}_{\text{p}})_{\omega_x \omega_y} = -m_z^{\omega_x \omega_y} / c_y^{\omega_x \omega_y} = -0{,}4619.$$

De acuerdo con este resultado el centro de presión de la fuerza giroscópica está situado tras el centro de gravedad del área del ala a una distancia

$$(\Delta \bar{x}_{\text{p}})_{\omega_x \omega_y} = -0{,}4619 l_{\text{ala}} = -0{,}533b.$$

Para la fuerza giroscópica lateral

$$(\Delta \bar{x}_{\text{p}})_{\omega_x \omega_z} = m_y^{\omega_x \omega_z} / c_z^{\omega_x \omega_z} = -0{,}4619;$$

$$(\Delta \bar{x}_{\text{p}})_{\omega_x \omega_z} = -0{,}4619 l_{\text{ala}} = -0{,}533b.$$

Así, pues, en el caso que analizamos el efecto de las fuerzas giroscópicas, el correspondiente centro de presión se halla tras el centro de gravedad del área del ala, lo que certifica la aparición del efecto estabilizante.

Capítulo 10

Sólidos de revolución en el flujo supersónico

Algunos vehículos volantes (p. ej., el cohete, el proyectil de artillería) o bien los elementos estructurales pueden tener la forma de un sólido de revolución. Las investigaciones de la circulación alrededor de tales sólidos constituyen el contenido de una de las importantes partes de la aerodinámica moderna. Más adelante, se estudia un extenso círculo de problemas relacionados con el cálculo de las características aerodinámicas de los sólidos de revolución de distinta forma (conos).

Los sólidos de revolución cónicos son los que encuentran mayor difusión. El problema de la circulación supersónica alrededor de un cono puntiagudo ocupa singular puesto en la aerodinámica de los sólidos de revolución. Su solución tiene gran importancia práctica, ya que ofrece la posibilidad de calcular no sólo la circulación alrededor de los sólidos cónicos, sino también se emplea para determinar los parámetros del gas en el borde de ataque cónico, que son las condiciones iniciales para el cálculo del flujo supersónico alrededor de los sólidos de revolución puntiagudos con generatriz curvilínea.

Junto con las soluciones exactas se ha elaborado una serie de soluciones aproximadas que permiten calcular de forma simplificada la circulación alrededor de un cono y determinar sus características aerodinámicas.

Parte de los problemas y preguntas, considerados en este capítulo, se refieren a *los métodos numéricos* de investigación de los flujos supersónicos de gas alrededor del cono tanto cuando las capacidades caloríficas son constantes, como cuando hay transformaciones físico-químicas que hacen variar a dichas capacidades.

En la actualidad hay muchos materiales en forma de tablas y gráficas con las cuales es posible determinar los parámetros del gas alrededor de los sólidos cónicos puntiagudos sin emplear cálculos laboriosos. Muchos vehículos volantes que vuelan a muy grandes velocidades y que sufren intenso calentamiento aerodinámico, tienen la nariz obtusa. Al cálculo de las características aerodinámicas de semejantes aparatos está dedicada una serie de preguntas y problemas, parte de los cuales está relacionada con el empleo de la teoría del *remanso newtoniano*, ampliamente difundida.

El cálculo de la circulación uniforme alrededor de los vehículos volantes en forma de un sólido de revolución delgado puntiagudo se puede efectuar mediante la linealización del problema. Los correspondientes procedimientos de cálculo basados en el método de las fuentes y los dipolos dan la posibilidad de calcular los parámetros del flujo en la superficie de un sólido de revolución delgado puntiagudo, así como sus coeficientes aerodinámicos tanto durante la circulación axisimétrica, como con el movimiento bajo cierto ángulo de ataque (de pequeño valor).

Gran parte de las preguntas y problemas de este capítulo se refieren a la aerodinámica inestable de sólidos de revolución. Con ello, las soluciones linealizadas se apoyan en los conceptos de fuentes (sumideros) y dipolos inestables (no estacionarios). También se aduce información relacionada con la determinación de las características aerodinámicas inestables de los sólidos de revolución según la teoría aerodinámica de los cuerpos delgados, así como en virtud del método de masas asociadas. Una serie de problemas se dedica al cálculo de las características aerodinámicas de sólidos de revolución de grosor arbitrario durante su rotación uniforme alrededor del eje transversal y movimiento de avance a una velocidad supersónica muy grande.

Problemas y preguntas

10.1. ¿Qué flujos supersónicos son cónicos en cuanto a su carácter?

10.2. En la fig. 10.1 está representada una curva en forma de manzana (cordiforme) que es el lugar geométrico de los extremos de los vectores velocidad V_{cono} de un flujo cónico directamente en el cono sometido a la circulación. En ella también se muestran las hodógrafas de la velocidad *1*, *2*, *3* que son los lugares geométricos de los extremos de los vectores velocidad en la región perturbada del flujo, entre la superficie alrededor de la cual transcurre la circulación y las ondas de choque para tres conos con ángulos en el vértice $\beta_{cono\ 1}$, $\beta_{cono\ 2}$, $\beta_{cono\ 3}$. Después de analizar la figura indiquen las singularidades características de los tres flujos.

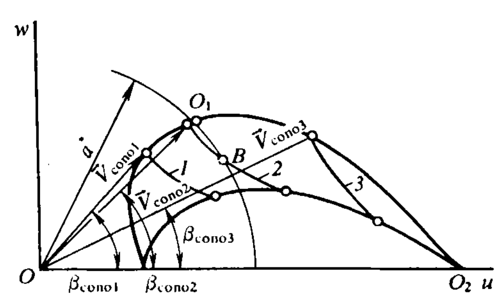


Fig. 10.1. Curva cordiforme y polar de choque

10.3. ¿Qué es al ángulo crítico del cono?

10.4. ¿Cuál de los ángulos críticos es mayor: para el cono o la cuña?

10.5. Determínese el ángulo de semiabertura del cono β_{cono} y los parámetros del aire que circula alrededor de un cono si sabemos que la onda de choque está inclinada hacia el vector velocidad del flujo incidente bajo un ángulo $\theta_{ch} = 30°$. La velocidad del flujo incidente $V_\infty = 1700$ m/s ($M_\infty = 5$), la presión del medio circundante $p_\infty = 10^5$ Pa.

10.6. En la fig. 10.2 se ofrece la onda de choque frontal *OA* delante del cono *OBC*. En el sector delantero la onda tiene una generatriz rectilínea, pero a partir del punto *A* ella se curva de modo notorio. Expliquen qué condiciona semejante forma de la onda de choque.

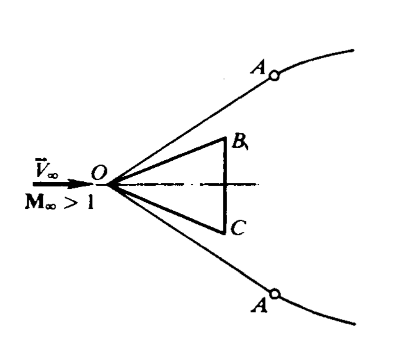


Fig. 10.2. Cono redondo en un flujo supersónico

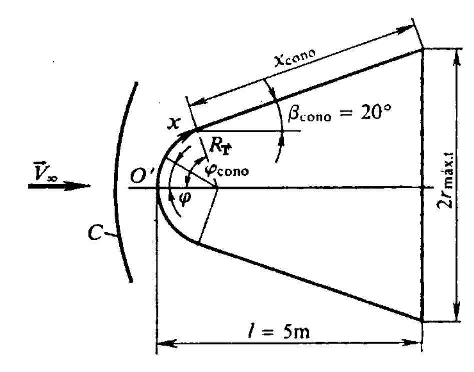


Fig. 10.3. Onda de choque delante de un cono romo

10.7. ¿Cómo varía el ángulo θ_{ch} de inclinación de la onda de choque delante de un cono puntiagudo al aumentar el número M_∞ de vuelo?

10.8. ¿Cómo varían el grado de disociación, la presión y la temperatura de un gas en la superficie de un cono al aumentar su ángulo β_{cono} (la velocidad de vuelo es constante)?

10.9. Calcúlese la circulación alrededor de un cono puntiagudo y hállese también el correspondiente ángulo β_{cono} a condición de que $M_\infty = 20$, el ángulo de la onda de choque delante del cono $\theta_{ch} = 50°$ y los parámetros del flujo incidente corresponden a la altura de vuelo $H = 5$ km.

10.10. ¿Qué sucede con el ángulo de inclinación de la onda de choque, que surge delante de un cono puntiagudo en vuelo, si él se aleja de la Tierra a velocidad hipersónica con número M_∞ de valor constante?

10.11. ¿Cómo varía el coeficiente de resistencia de ondas de choque c_{xch} de un cono puntiagudo en función del número M_∞ de vuelo, si el ángulo de ataque $\alpha = 0$?

10.12. Determínese la posición del centro de presión de un cono puntiagudo de altura x_{cono} si él se mueve a velocidad supersónica bajo un pequeño ángulo de ataque.

10.13. ¿Qué obliga a emplear narices obtusas en los vehículos volantes que vuelan a grandes velocidades supersónicas?

10.14. Muestren cómo varía con la altura, siendo M_∞ = const, el coeficiente de resistencia de ondas de choque c_{xch} de una semiesfera suponiendo que las capacidades caloríficas son constantes, así como en condiciones reales.

10.15. Una esfera de radio $R_T = 2$ m se mueve a velocidad supersónica, correspondiente al número $M_\infty = 15$, en la atmósfera terrestre a una altura $H = 15$ km. Calcúlese la separación y la forma de la onda de choque delante de la superficie aerodinámica.

10.16. Hállese el gradiente de velocidad en el entorno del punto de remanso total, así como la distribución de la velocidad por la superficie esférica de la nariz de un vehículo volante en movimiento en el aire a una altura $H = 30$ km y una velocidad $V_\infty = 4000$ m/s. El radio de la esfera $R_T = 2$ m.

10.17. Calcúlese el coeficiente de la resistencia de onda de choque, el gradiente de la velocidad y ésta en la superficie de un cono redondeado en esfera, en movimiento por la atmósfera de la Tierra a una altura $H = 10$ km y velocidad $V_\infty = 500$ m/s. La forma y las dimensiones del cono se muestran en la fig. 10.3; el radio de la nariz esférica $R_T = 2$ m.

10.18. Durante la circulación en equilibrio alrededor de una superficie obtusa crece la presión del flujo incidente. ¿Cómo varía la separación de la onda de choque en un gas con capacidades caloríficas constantes, así como en un gas disociado?

10.19. En el punto de remanso total en la superficie obtusa de la nariz de un vehículo volante se ha establecido la temperatura de equilibrio. Tras dicho punto el flujo de gas a lo largo de la nariz está desequilibrado. Relátese acerca del carácter de la variación de la temperatura en tal flujo y compárese con el correspondiente valor en el caso de disociación de equilibrio.

10.20. ¿Cómo varía la separación de la onda de choque de la superficie aerodinámica de una esfera si tomamos en consideración la radiación de calor por un gas que se encuentra entre la onda y la superficie del sólido en el entorno del punto de remanso total?

10.21. En la fig. 10.4 se muestra el carácter de la distribución de la presión excesiva (las curvas *1* y *2*) por la superficie de un sólido de revolución. Indiquen las principales singularidades del flujo del líquido que circula a su alrededor que condicionan la diferencia en dicha distribución. Explíquese la interpretación física del cambio de la presión en semejante caso.

10.22. Con el método de las características se ha calculado la distribución de la presión por un sólido de revolución alrededor del cual circula un gas ideal (no viscoso) (curvas *1* y *2* en la fig. 10.5). Explíquese la diferencia en la distribución

de la presión, caracterizada por las curvas, e indíquense las velocidades del flujo supersónico para las que esa diferencia es notoria.

10.23. ¿En qué consiste la linealización de las ecuaciones de movimiento de un gas alrededor de sólidos de revolución delgados?

10.24. En forma general escriban la expresión para el potencial de velocidad de un flujo linealizado que circula alrededor de un sólido de revolución delgado bajo un pequeño ángulo de ataque.

10.25. ¿En qué consiste la esencia del método de las fuentes, que se aplica para resolver el problema de la circulación de un flujo supersónico alrededor de un sólido de revolución delgado?

10.26. El movimiento de un vehículo volante en forma de un sólido de revolución delgado transcurre a creciente velocidad supersónica. ¿Es posible utilizar los métodos linealizados de cálculo para todas las velocidades?

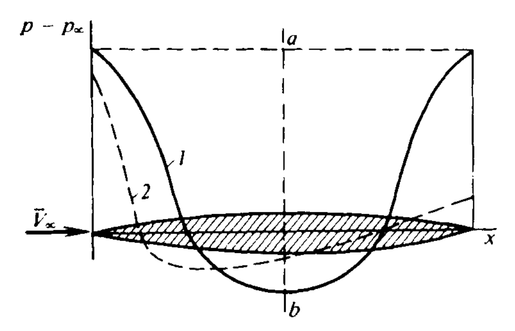


Fig. 10.4. Distribución de la presión por la superficie de un sólido de revolución

Fig. 10.5. Presión en un sólido de revolución calculada según el método de características

10.27. Hállense la distribución del coeficiente de presión y la correspondiente resistencia de onda de choque de un sólido de revolución delgado puntiagudo, alrededor del cual circula un flujo linealizado supersónico con número $M_\infty = 2$

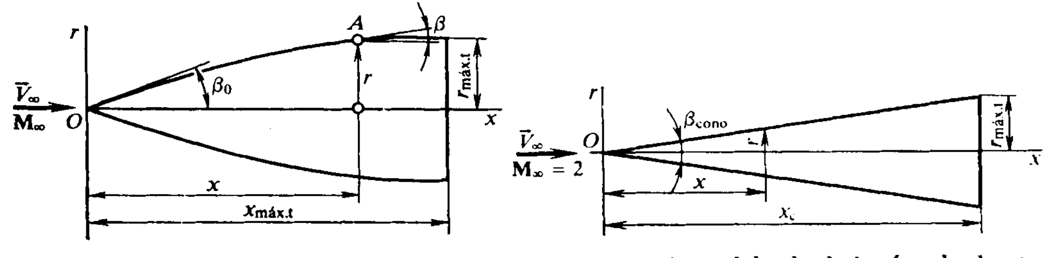


Fig. 10.6. Sólido de revolución con generatriz parabólica

Fig. 10.7. Cono delgado bajo ángulo de ataque $\alpha = 0$: ($r_{\text{máx t}} = 0,5$; $x_{\text{cono}} = 10$)

bajo el ángulo de ataque $\alpha = 0$. La forma del sólido se ofrece en la fig. 10.6. La ecuación de la generatriz es: $r = x\,(r_{\text{máx.t}}/x_{\text{máx.t}})\,(2 - x/x_{\text{máx.t}})$, donde $r_{\text{máx.t}} = 0,5$; $x_{\text{máx.t}} = 10$.

10.28. Determínense el coeficiente y la fuerza de resistencia de onda de choque que actúa sobre un cono delgado, durante su movimiento a velocidad supersónica ($M_\infty = 2$) cerca de la superficie terrestre. Las dimensiones del cono se muestran en la fig. 10.7.

10.29. Calcúlense la fuerza normal y el momento con relación al eje transversal que pasa por el eje O, así como los coeficientes aerodinámicos que a ellos les corresponden para el sólido de revolución delgado representado en la fig. 10.6 (véase, asimismo, el problema 10.27). El movimiento transcurre cerca de la superficie terrestre bajo un pequeño ángulo de ataque $\alpha = 0{,}1$ y a velocidad supersónica ($\mathbf{M}_\infty = 2$).

10.30. Para el cono delgado de la fig. 10.7 calcúlense las fuerzas aerodinámicas y el momento de cabeceo con relación al eje que pasa por el borde, así como los correspondientes coeficientes a condición de que el ángulo de ataque $\alpha = 0{,}1$, el número $\mathbf{M}_\infty = 2$ y el movimiento del cono transcurra cerca de la superficie de la Tierra.

10.31. Calcúlense los coeficientes de la resistencia de onda de choque, de la fuerza de sustentación, del momento de cabeceo y del centro de presión para un cono con ángulo $\beta_{cono} = 20°$ y longitud de la generatriz $l = 5$ m en movimiento bajo un ángulo de ataque $\alpha = 10°$ a una altura $H = 10$ km. El número $\mathbf{M}_\infty = 2{,}84$. En virtud de los coeficientes aerodinámicos hallados calcúlense también las correspondientes fuerzas y el momento.

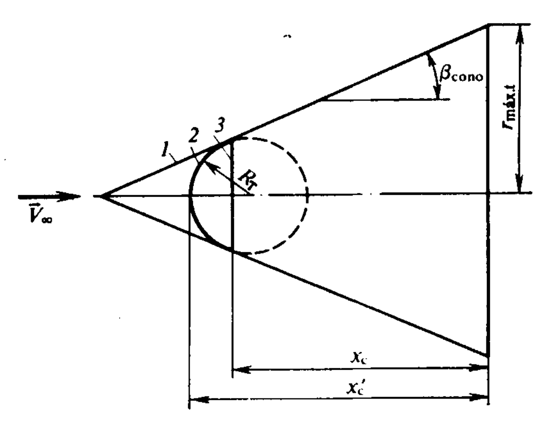


Fig. 10.8. Sólidos cónicos:
1, agudo; *2*, con obtuse esférico; *3*, con cara plana ($\beta_{cono} = 25°$; $R_T = 2$ m; $x_c' = 10$ m; $x_c = 8{,}8$ m; $r_{máx\,t} = 5{,}6$ m)

10.32. Calcúlense el ángulo β_{cono} de un cono y los parámetros del flujo en su superficie si sabemos que al ángulo de inclinación de la onda de choque adherida $\theta_{ch} = 21{,}5°$. El cono se mueve a velocidad $V_\infty = 8000$ m/s y la altura $H = 30$ km.

10.33. Compárense los coeficientes de la resistencia de onda de choque de un cono puntiagudo, así como de los conos que tienen obtusidades esférica y plana (fig. 10.8), en movimiento a la velocidad que corresponde al número $\mathbf{M}_\infty = 4$.

10.34. Compárese la resistencia de onda de choque de un cono y de un sólido de revolución parabólico que tienen igual alargamiento y área de la sección máxima transversal. Analícese la circulación axisimétrica linealizada e hipersónica de un gas con un índice de la adiabata $k = c_p/c_v = 1{,}4$. La ecuación de la generatriz del sólido parabólico es: $\bar{r} = \bar{x}(2 - \bar{x})$ ($\bar{r} = r/r_{máx.t}$; $\bar{x} = x/x_{máx.t}$; $r_{máx.t} = 2$; $x_{máx.t} = 8$).

10.35. Calcúlese el ángulo θ_{ch} de inclinación de una onda de choque delante de un cono puntiagudo con un ángulo de semiapertura $\beta_{cono} = 10°$ para $\mathbf{M}_\infty = 10$ y ∞.

10.36. Determínese el valor aproximado del coeficiente de presión en un cono puntiagudo para el número $\mathbf{M}_\infty = 20$, tomando en consideración la disociación, la mitad del ángulo en el vértice $\beta_{cono} = 45°$ y la altura de vuelo $H = 5$ km.

10.37. En un flujo de gas con número $\mathbf{M}_\infty > 1$ se encuentran una cuña y un cono en cuyas superficies son iguales las velocidades supersónicas ($V_{cuña} = V_{cono}$). Compárense entre sí los ángulos de la cuña $\beta_{cuña}$ y del cono β_{cono}, así como los correspondientes valores de las presiones $p_{cuña}$, p_{cono}, las densidades $\rho_{cuña}$, ρ_{cono} y las temperaturas $T_{cuña}$, T_{cono}.

10.38. Un sólido de revolución con generatriz prefijada por la ecuación $\bar{r} = \bar{x} + 0{,}2\ \bar{x}^2$ ($\bar{r} = r/r_{\text{máx.t}}$; $\bar{x} = x/x_{\text{máx.t}}$) se encuentra en un flujo supersónico con número $\mathbf{M}_\infty = 10$. Hallen la distribución del coeficiente de presión por su superficie a condición de que $r_{\text{máx.t}} = 1$, $x_{\text{máx.t}} = 5$.

10.39. El elemento de cola de un sólido de revolución, destinado a vuelos a velocidades supersónicas, en ciertos casos representa un sector del cuerpo que se estrecha. ¿Con qué fin se elige tal forma y qué efectos aerodinámicos ella condiciona?

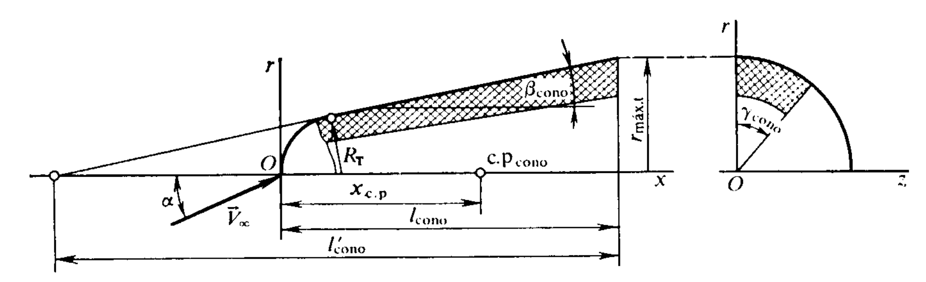


Fig. 10.9. Esquema de la circulación hipersónica alrededor de un cono obtuso (la zona de sombra aerodinámica viene rayada)

10.40. Analícese el esquema de disposición de ondas de choque y ondas de perturbación débiles, así como el carácter de la distribución del coeficiente de presión alrededor de un sólido de revolución con nariz cónica sometida a la circulación sin ángulo de ataque de un flujo supersónico a condición de que la mitad del ángulo del cono en su vértice sea menor que el crítico.

10.41. Determínese el valor de los coeficientes aerodinámicos (de las fuerzas longitudinal c_{xp} y normal c_{yp}, del momento de cabeceo m_{zp} y del centro de presión

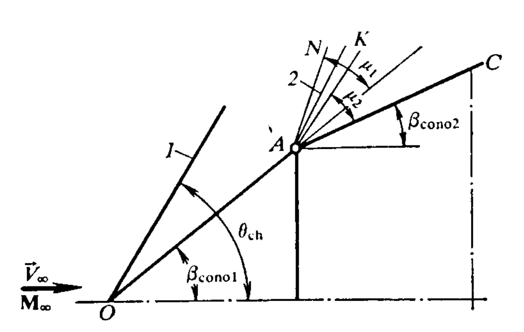


Fig. 10.10. Sólido de revolución con generatriz quebrada:

1, onda de choque; *2*, línea de perturbaciones débiles

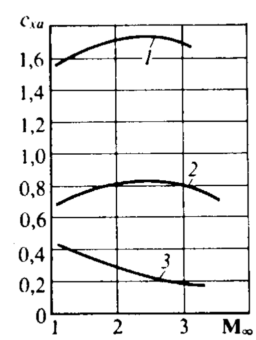


Fig. 10.11. Datos experimentales sobre la resistencia de los sólidos de revolución

c_p) de un sólido cónico, con obtuse esférico de la nariz, en movimiento a velocidad hipersónica, bajo los ángulos de ataque $\alpha = 0$, 10 y 20 °. La forma y las dimensiones del cono obtuso se muestran en la fig. 10.9. El ángulo del cono $\beta_{\text{cono}} = 15$ ° y el radio adimensional de la nariz esférica $\bar{R}_T = R_T/r_{\text{máx.t}} = 0{,}5$.

10.42. Un sólido de revolución puntiagudo, constituido por dos superficies cónicas con ángulos de inclinación $\beta_{\text{cono}} = 40$ ° y $\beta_{\text{cono}} = 25$ ° (fig. 10.10), está

sometido en sentido axial a la circulación de un flujo supersónico con número $M_\infty = 3$. Determínense los valores aproximados de los coeficientes de presión en el cono anterior, así como en la superficie cónica de cola junto al punto A de discontinuidad de contorno; el ángulo de la onda de choque θ_{ch}; la posición de las líneas de débiles perturbaciones que limitan la región de expansión del flujo supersónico en el entorno del punto A.

10.43. Muéstrese que un flujo supersónico perturbado de gas junto a un cono puntiagudo, sometido a la circulación de una corriente incidente uniforme supersónica, es irrotacional (isentrópico), mientras que en la superficie del sólido de revolución con generatriz arbitraria, rotacional (no isentrópico).

10.44. En la fig. 10.11 se muestran las curvas experimentales de la variación de la resistencia al avance de sólidos de revolución obtuso *1* y puntiagudos *2* y *3*, para el ángulo de ataque $\alpha = 0$. ¿Qué forma tienen las narices de dichos sólidos?

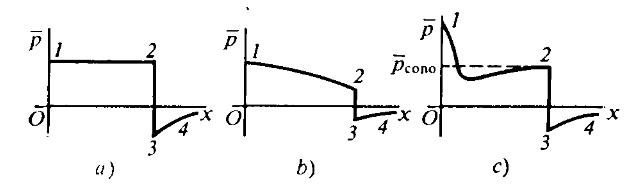


Fig. 10.12. Presión sobre la superficie de tres sólidos de revolución diferentes

¿Cómo varían los valores c_{x_a} de ellos para cierto ángulo de ataque $\alpha \neq 0$? ¿Es igual la influencia del ángulo de ataque sobre la resistencia de sólidos con diverso grado de agudeza?

10.45. En la fig. 10.12 se muestra la distribución del coeficiente de presión junto a tres sólidos de revolución (a, b, c) alrededor de los cuales circulan flujos supersónicos de gas bajo un ángulo de ataque $\alpha = 0$. De acuerdo con dicha distribución de la presión caractericen la correspondiente forma de las narices de cada uno de dichos sólidos.

10.46. El potencial de velocidad de una fuente (sumidero) puntual supersónica inuniforme de intensidad unitaria se determina por la expresión

$$\varphi_1 = \frac{\exp\left[ip\left(t - \frac{M_\infty x}{a_\infty \alpha'^2}\right)\right] \cos\left[\left(\frac{p}{a_\infty \alpha'^2}\right)(x^2 - \alpha'^2 r^2)^{1/2}\right]}{(x^2 - \alpha'^2 r^2)^{1/2}} \qquad (10.1)$$

donde t es el tiempo de acción de la fuente, p, la frecuencia de las oscilaciones; a_∞, la velocidad del sonido en el aire; $\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$ (M_∞ es el número de Mach del flujo incidente); x, r, las coordenadas del punto A en el que se calcula el potencial φ_1 de la fuente situada en el punto B en el eje de un sólido de revolución delgado (fig. 10.13). Empleando (10.1) hallen la dependencia para el potencial φ_2 de los dipolos de distribución continua que son de por sí el potencial adicional de la circulación no axisimétrica inuniforme alrededor de un sólido de revolución delgado.

10.47. Escríbanse las condiciones de frontera empleadas para hallar la distribución de los dipolos a lo largo del eje de un sólido de revolución alrededor del cual circula un flujo inuniforme supersónico. Analicen las condiciones de frontera durante la circulación alrededor de un cono delgado y un sólido de revolución puntiagudo con generatriz parabólica (fig. 10.14).

10.48. Hállese la distribución de los dipolos [función $m(\varepsilon)$] en un cuerpo cilíndrico con nariz puntiaguda y generatriz parabólica. El cuerpo está en movimiento con $M_\infty = 2$ bajo cierto ángulo de ataque α y al mismo tiempo gira a una velocidad angular Ω_z alrededor del eje transversal que pasa por el centro de masas. La longitud del sólido $x_c = 8$ m, de la nariz $x_{máx.t} = 5$ m, distancia desde la nariz hasta el centro de masas $x_m = 6$ m; radio del cuerpo $r_{máx.t} = r_{s.b} = 0{,}5$ m.

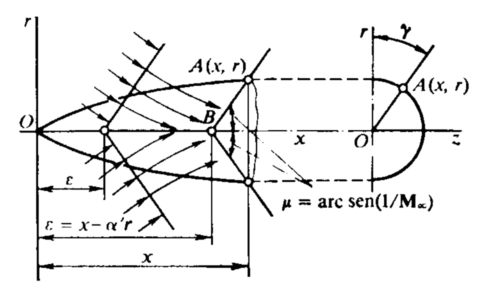


Fig. 10.13. Carácter del efecto de las fuentes ubicadas en el eje del sólido de revolución

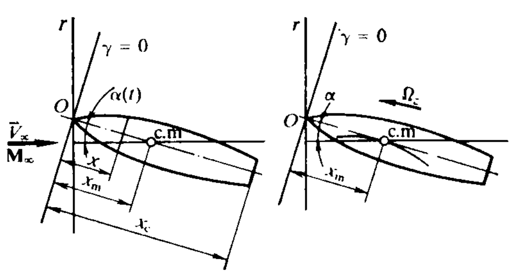


Fig. 10.14. Sólido que efectúa oscilaciones armónicas y rotación

10.49. En la teoría de la circulación linealizada inuniforme alrededor de sólidos de revolución delgados puntiagudos a velocidades supersónicas, se han obtenido las siguientes relaciones para las derivadas del potencial de velocidad:

$$\varphi_{2x} = \partial\varphi_2/\partial x = \alpha' \cos\gamma \exp(ipt)\left[\int_0^{\mathrm{arch}\,u} \dot{m}(x-\alpha' r \operatorname{ch} z)\operatorname{ch} z\,dz - {}\right.$$

$$\left. - iM_\infty p^* \int_0^{\mathrm{arch}\,u} \dot{m}(x-\alpha' r \operatorname{ch} z)dz\right]; \quad (10.2)$$

$$\varphi_{2t} = \alpha' ip \cos\gamma \exp(ipt)\left[\int_0^{\mathrm{arch}\,u} m(x-\alpha' r \operatorname{ch} z)\operatorname{ch} z\,dz - {}\right.$$

$$\left. - iM_\infty p^* \int_0^{\mathrm{arch}\,u} m(x-\alpha' r\, ch\, z)\,dz\right], \quad (10.3)$$

donde $\exp(ipt) = \alpha/\alpha_0$ es una función exponencial; p, frecuencia de las oscilaciones; $p^* = M_\infty pr/(\alpha' V_\infty)$, número de Strouhal reducido; $\dot{m}(x - \alpha' r\mathrm{chz}) = \dot{f}(x - \alpha' \mathrm{chz})$, cierta función que caracteriza la distribución de las fuentes ($\dot{f} = df/d\varepsilon$; $\varepsilon = (x - \alpha' r\mathrm{chz})$; $\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$, la función del número M_∞; $u = x/(\alpha' r)$, un parámetro dependiente de las coordenadas del punto y de la función del número de Mach; γ, el ángulo meridional (coordenada angular del punto en la superficie del sólido en la sección que analizamos).

Según los valores de φ_{2x} y φ_{2t} hallen los coeficientes de presión para los casos de oscilaciones armónicas del sólido respecto del eje transversal que pasa por el centro de masas y la rotación del sólido alrededor de ese mismo eje. Calculen las derivadas de los coeficientes de presión respecto de α, $\dot{\alpha}$ y ω_z.

10.50. Hállense las dependencias para calcular las derivadas $\bar{p}^{\alpha}$, $\bar{p}^{\dot{\alpha}}$ y $\bar{p}^{\omega_z}$ en lo que atañe al caso de la circulación alrededor de un cono delgado y un sólido de re-

volución con generatriz parabólica, cuya ecuación es $\bar{r} = \bar{x}\,(2 - \bar{x})$, donde $\bar{r} = r/r_{\text{máx.t}}$, $\bar{x} = x/x_{\text{máx.t}}$. Calculen los valores numéricos de las derivadas del coeficiente de presión para $M_\infty = 2$ junto a las secciones máxima transversal y la de base del sólido de revolución. El alargamiento de la nariz del sólido $\lambda_{\text{máx.t}} = x_{\text{máx.t}}/(2\,r_{\text{máx.t}}) = 5$; el radio de la sección máxima transversal $r_{\text{máx.t}} = 0{,}5$; estrechamiento de la base $\bar{S}_{\text{s.b}} = S_{\text{s.b}}/S_{\text{máx.t}} = 0{,}651$; distancia desde el centro de masas hasta la nariz puntiaguda $x_m = 5$ m (fig. 10.15).

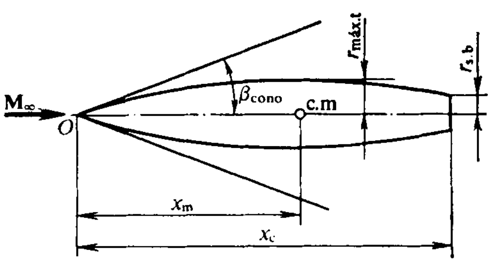


Fig. 10.15. Esquema de un sólido parabólico de revolución inscrito en un cono

10.51. Calcúlese la distribución de los dipolos y las derivadas del coeficiente de presión $\bar{p}_2^{\alpha}$ y $\bar{p}_2^{\omega_z}$ en los sectores cilíndrico y de la cola cónico de un cuerpo con nariz cónica en movimiento con $M_\infty = 2$ bajo cierto ángulo de ataque α y que gira alrededor del sentido longitudinal a velocidad angular Ω_z. El alargamiento del cuerpo $\lambda_c = x_c/(2r_{\text{máx.t}}) = 8$; del cono de la nariz $\lambda_{\text{máx.t}} = x_{\text{máx.t}}/(2\,r_{\text{máx.t}}) = 5$; la longitud del sector cilíndrico $\Delta x_{\text{cil}} = 2$ m; el radio de la sección máxima transversal $r_{\text{máx.t}} = 0{,}5$ m; la distancia desde la nariz hasta el centro de rotación $x_m = 5$ m; el estrechamiento de la sección de base $\bar{S}_{\text{s.b}} = S_{\text{s.b}}/S_{\text{máx.t}} = 0{,}49$.

10.52. Considérese el problema del cálculo de los dipolos y las correspondientes derivadas $\bar{p}_2^{\alpha}$ y $\bar{p}_2^{\omega_z}$ en el sector cilíndrico de un cuerpo cuya nariz tiene generatriz curvilínea. El cuerpo está en movimiento de avance (número $M_\infty = 2$), y, simultáneamente, gira en sentido longitudinal, a cierta velocidad angular $\Omega_z = \text{const}$,

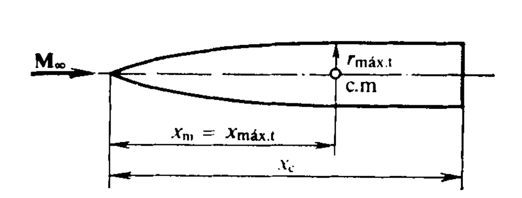


Fig. 10.16. Cilindro con nariz curvilínea (parabólica)

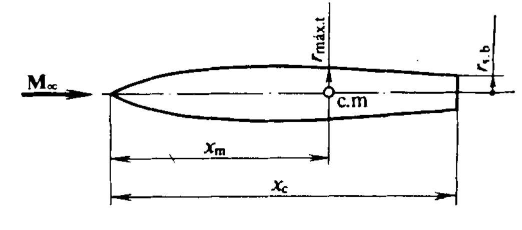


Fig. 10.17. Esquema de un sólido con generatriz parabólica

alrededor del centro de masas distanciado de la nariz a $x_m = 5$. La longitud del cuerpo $x_c = 7$ m; el radio de la sección máxima transversal $r_{\text{máx.t}} = 0{,}5$ m; el alargamiento de la nariz $\lambda_{\text{máx.t}} = x_{\text{máx.t}}/(2\,r_{\text{máx.t}}) = 5$ (fig. 10.16).

10.53. Calcúlese la derivada $\dot{\bar{p}}_2^{\alpha}$ con $M_\infty = 2$ en el punto de un cilindro cerca del lugar donde hace contacto con la nariz parabólica. Las dimensiones del cuerpo se dan en el problema 10.52 (fig. 10.16).

10.54. Empleando las relaciones obtenidas en la teoría linealizada de la circulación supersónica alrededor de sólidos de revolución delgados, calculen las derivadas aerodinámicas para $M_\infty = 2$ de un cono delgado puntiagudo con ecuación de la generatriz (véase la fig. 10.15) $\bar{r} = \bar{x}\,(2 - \bar{x})$, donde $\bar{r} = r/r_{\text{máx.t}}$, $\bar{x} = x/x_{\text{máx.t}}$. El alargamiento de la nariz del cuerpo $\lambda_{\text{máx.t}} = x_{\text{máx.t}}/(2\,r_{\text{máx.t}}) =$

$= 5$; el radio de la sección máxima transversal $r_{\text{máx.t}} = 0{,}5$ m; el estrechamiento de la sección de base $\bar{S}_{\text{s.b}} = S_{\text{s.b}}/S_{\text{máx.t}} = 0{,}651$; la distancia desde la nariz hasta el centro de masas $x_m = 5$ m.

10.55. Determínense, para $M_\infty = 2$, las derivadas c_y^α, $c_y^{\omega_z}$, $c_y^{\dot{\bar{\alpha}}}$, m_z^α $m_z^{\omega_z}$ y $m_z^{\dot{\bar{\alpha}}}$ para un cuerpo cilíndrico con sectores cónicos de nariz y de cola. Las dimensiones del cuerpo se dan en el problema 10.51. Hagan uso de las dependencias para los dipolos, con las que éstos se determinan como funciones de las derivadas de las áreas de las secciones del cuerpo a lo largo.

10.56. Determínense con $M_\infty = 2$ las derivadas de la estabilidad, de un cono de longitud $x_c = 5$ m con la mitad del ángulo en el vértice $\beta_{\text{cono}} = 0{,}1$. El centro de rotación se encuentra en la base del cono ($x_m = 5$ m); los parámetros cinemáticos $\bar{\omega}_z$ y $\dot{\bar{\alpha}}$, así como el coeficiente del momento de cabeceo deben ser calculados respecto de la longitud $x_m = 5$ m $[\bar{\omega}_z = \Omega_z x_m/V_\infty;\ \dot{\bar{\alpha}} = (d\alpha/dt)\, x_m/V_\infty;\ m_z = M_z/(q_\infty S_{\text{máx.t}} x_c)]$. Hallen los coeficientes del centro de presión según el ángulo de ataque α, así como también los valores de $\bar{\omega}_z$ y $\dot{\bar{\alpha}}$.

10.57. Determínense, para $M_\infty = 2$, las derivadas de la estabilidad de un sólido de revolución con generatriz parabólica (fig. 10.17): $\bar{r} = \bar{x}\,(2 - \bar{x})$ ($\bar{r} = r/r_{\text{máx.t}}$; $\bar{x} = x/x_{\text{máx.t}}$). La longitud total del sólido es $x_c = 8$ m; la coordenada del centro de rotación $x_m = 5$ m; el radio de la sección máxima transversal, $r_{\text{máx.t}} = 0{,}5$ m; el estrechamiento de la sección de base, $\bar{S}_{\text{s.b}} = S_{\text{s.b}}/S_{\text{máx.t}} = 0{,}41$.

10.58. Hállense las dependencias para las derivadas de los coeficientes c_y y m_z, según α, $\dot{\bar{\alpha}}$, $\bar{\omega}_z$, correspondientes a la teoría aerodinámica de los sólidos de revolución delgados.

10.59. Haciendo uso de las relaciones obtenidas en aerodinámica de sólidos delgados determinen las derivadas c_y^α, $c_y^{\dot{\bar{\alpha}}}$, $c_y^{\omega_z}$, m_z^α, $m_z^{\dot{\bar{\alpha}}}$, $m_z^{\omega_z}$ y $m_z^{\dot{\omega}_z}$ de un sólido de revolución con generatriz parabólica, descrita por la ecuación $r = [x/(2\ \lambda_{\text{máx.t}})] \times \times (2 - x/x_{\text{max.t}})$, donde $\lambda_{\text{máx.t}} = x_{\text{máx.t}}/(2\ r_{\text{máx.t}})$ es el alargamiento de la nariz; $x_{\text{máx.t}}$, su longitud (véase la fig. 10.15). El alargamiento del sólido de revolución prefijado $\lambda_c = x_c/(2\ r_{\text{máx.t}}) = 8$; el estrechamiento de la sección de base $\bar{S}_{\text{s.b}} = S_{\text{s.b}}/S_{\text{máx.t}} = 0{,}41$; la longitud $x_c = 8$ m; la coordenada del centro de masas, contada desde la nariz, $x_m = 5$.

10.60. Determínense las derivadas aerodinámicas de un cono que es la superficie tangente a la nariz puntiaguda de un sólido de revolución (véase la fig. 10.15). Con ello, utilicen las relaciones de la teoría aerodinámica del sólido delgado, así como las dependencias, obtenidas como resultado de la solución del problema linealizado de la circulación supersónica inuniforme (el número $M_\infty = 2$, la distancia desde la nariz del cono hasta el centro de masas $x_c = 5$ m).

10.61. Empleando las relaciones obtenidas en la teoría aerodinámica de sólidos delgados, determinen las derivadas de los coeficientes aerodinámicos para dos sólidos de revolución con colas cilíndricas. En uno de dichos sólidos la nariz es cónica (*a*), en el otro, parabólica (*b*) con la ecuación de la generatriz $\bar{r} = (x/x_{\text{máx.t}})\ (2 - x/x)$ (fig. 10.18). La longitud de la nariz $x_{\text{máx.t}} = 5$ m; el radio de la sección máxima transversal $r_{\text{máx.t}} = 0{,}5$ m; la longitud del sólido $x_c = 10$ m; la distancia desde la nariz hasta el centro de masas $x_m = 6$ m.

10.62. Determínense para un cono delgado y un sólido de revolución puntiagudo, inscrito en él (véase la fig. 10.15), las coordenadas de los centros de presión, co-

mo puntos en los que se aplican las fuerzas no estacionarias que corresponden a las derivadas c_y^{α}, $c_y^{\dot{\alpha}}$ y $c_y^{\omega_z}$.

10.63. Haciendo uso del método de las masas asociadas obtengan las dependencias para las derivadas de los coeficientes aerodinámicos de un sólido de revolución delgado. Hallen los valores de dichas derivadas para un cono circular y calculen los correspondientes centros de presión.

10.64. Determínese el coeficiente de presión, así como la derivada $\bar{p}^{\omega_z}$ ($\omega_z = \Omega_z x_c / V_\infty$) en un cono que está en movimiento de avance a gran velocidad (hipersónica) $V_\infty = 3$ km/s bajo pequeño ángulo de ataque $\alpha = 0{,}1$ y que, simultáneamente, gira a una velocidad angular $\Omega_z = 5$ 1/s alrededor de un punto alejado de la punta a $x_m = 5$ m. La longitud del cono $x_c = 5$ m; la mitad de ángulo en el vértice $\beta_{cono} = 0{,}1$. Calculen, asimismo, los coeficientes aerodinámicos y las correspondientes derivadas rotacionales.

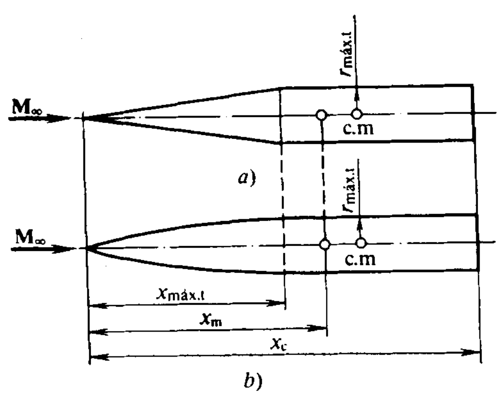


Fig. 10.18. Sólido de revolución con nariz cónica (*a*) y parabólica (*b*)

10.65. Calcúlense las características aerodinámicas de un sólido de revolución puntiagudo con generatriz curvilínea en movimiento de avance bajo un ángulo de ataque $\alpha = 0{,}1$, a velocidad de $V_\infty = 3000$ m/s y en giro a velocidad angular $\Omega_z = 5$ 1/s. El sólido de revolución de longitud $x_c = x_{máx.t} = 5$ m y radio $r_{máx.t} = r_{s.b} = 0{,}5$ m tiene una generatriz prefijada por la ecuación $\bar{r} = \bar{x} \times (2 - \bar{x})$ ($\bar{r} = r/r_{máx.t}$; $\bar{x} = x/x_{máx.t}$). La distancia desde la nariz puntiaguda hasta el centro de rotación $x_m = 4$ m.

10.66. Haciendo uso de la teoría de remanso newtoniano calculen los coeficientes aerodinámicos de un cono con obtuse esférico en movimiento de avance bajo el ángulo de ataque $\alpha = 15°$ a velocidad $V_\infty = 3000$ m/s y que, simultáneamente, gira a velocidad angular $\Omega_z = 10$ 1/s. El grado de obtusidad del cono $\bar{R}_T = R_T/r_{máx.t} = 0{,}5$; el radio de la sección de base $r_{máx.t} = 1{,}0$ m; el ángulo en el vértice $\beta_{cono} = 15°$; la distancia desde la nariz hasta el centro de rotación $x_m = 2$ *m*.

Solución de los problemas y respuestas a las preguntas

10.1. Analicemos el carácter de la circulación de un flujo supersónico, bajo el ángulo de ataque $\alpha = 0$, alrededor de un cono puntiagudo con la mitad del ángulo en el vértice β_{cono}. En semejante caso, delante del cono surge una onda de choque en forma de una superficie cónica con el correspondiente ángulo θ_{ch} (fig. 10.19). El flujo supersónico que se forma entre las superficies del cono y de la onda es de carácter cónico. Esto significa que sus parámetros (densidad ρ, temperatura T, presión p y velocidad V) quedan constantes a lo largo de las líneas trazadas desde el vértice del cono (incluidas las que coinciden con la superficie del cono y la onda de choque).

Los parámetros que consideramos varían al pasar de una recta OA', situada bajo el ángulo θ, a otra OA'' con ángulo θ''. Por lo tanto, cualquiera de los paráme-

tros es función del ángulo θ, por lo que las derivadas parciales

$$\partial P/\partial\theta \neq 0, \qquad (10.4)$$

donde P es cualquier parámetro (ρ, T, p, V) del gas.

Sin embargo, a lo largo de las rectas OA no se observa la variación de los parámetros, debido a lo cual cualquier derivada parcial de los parámetros del gas respecto a la coordenada r (fig. 10.19) es igual a cero, es decir,

$$\partial P/\partial r = 0. \qquad (10.5)$$

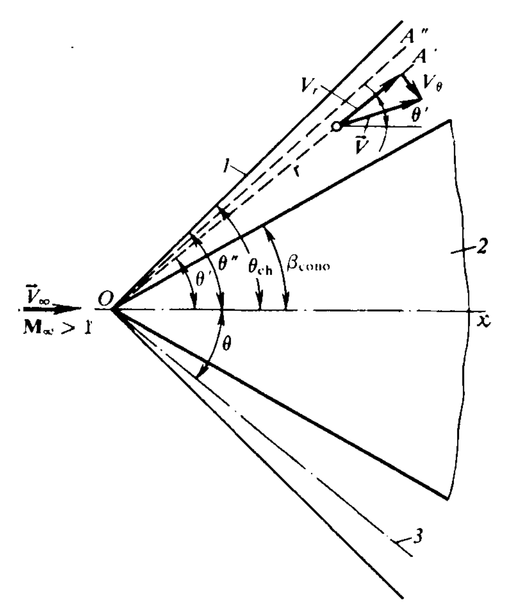


Fig. 10.19. Esquema de circulación alrededor de un cono agudo:

1, onda de choque; *2*, cono; *3*, superficie intermedia cónica

10.2. En la fig. 10.1 se muestra que el arco de radio a * (velocidad crítica) cruza la hodógrafa de la velocidad *2* por cierto punto B. Esto significa que las velocidades determinadas por el sector de la hodógrafa que yace dentro de la región, limitada por el radio a *, son subsónicas, mientras que las que se determinan por el sector de la hodógrafa que yace fuera de esa región, supersónicas. En la región que linda con la onda de choque el flujo es supersónico, en tanto que junto a la superficie del cono con ángulo $\beta_{cono\ 2}$, subsónica. Para un ángulo aún mayor del cono $\beta_{cono\ 1} > \beta_{cono\ 2}$ la hodógrafa de la velocidad *1* se sitúa más a la izquierda del arco de radio a^* y, por consiguiente, el flujo perturbado es por completo subsónico. La hodógrafa *3* determina totalmente el flujo supersónico en la región perturbada junto al cono de ángulo $\beta_{cono\ 3}$.

Las investigaciones experimentales muestran que el flujo cónico, correspondiente a la velocidad constante supersónica en el cono, sólo se conserva hasta que en su superficie se alcance la velocidad del sonido. Así, pues, para los cálculos prácticos sólo se puede hacer uso del sector O_1O_2 de la curva cordiforme.

10.3. Recibe el nombre de *crítico* un ángulo tal del cono $\beta_{cono\ crít}$ con el aumento del cual la onda de choque se separa de la punta del cono *2* (fig. 10.20. *b*) y se

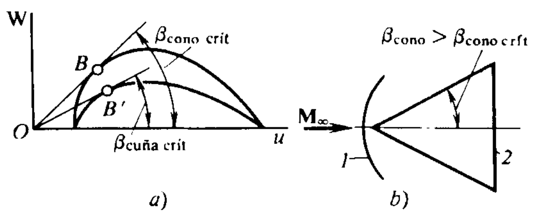


Fig. 10.20. Determinación del ángulo crítico del cono

convierte en la onda de choque curvilínea separada *1*. El ángulo crítico, con las condiciones prefijadas de la circulación (presión p_∞, densidad ρ_∞, índice adiabático $k = c_p/c_v$), es sólo función de la velocidad V_∞ del flujo incidente (correspon-

dientemente del número $M_\infty = V_\infty/a_\infty$ o bien de la velocidad relativa $\lambda_\infty = V_\infty/a^*$). Es posible calcular β_{cono} trazando desde el origen de coordenadas O la tangente OB a la curva en forma de manzana como se muestra en la fig. 10.20, *a*. Si el ángulo real del cono es mayor que el crítico, entonces con ayuda de esta curva, formalmente, no se puede investigar la circulación alrededor del cono.

Conforme a los datos experimentales la onda de choque se separa del vértice con ángulos β_{cono} algo mayores que los que se determinan por la teoría precisa de la circulación alrededor de un cono (de un orden de fracciones centésimas de radián).

10.4. Es sabido que la curva cordiforme, que permite determinar por vía gráfica los parámetros del flujo en la región perturbada entre la onda de choque

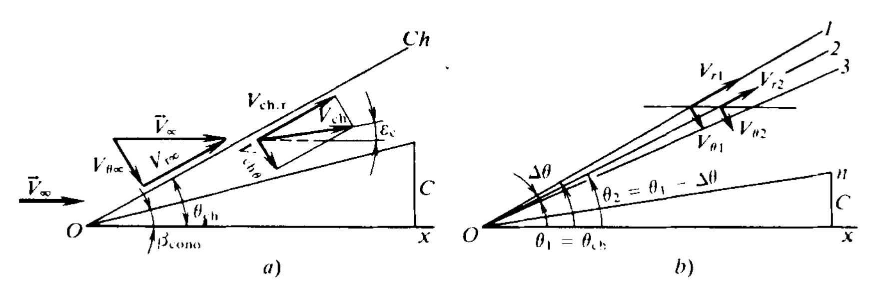


Fig. 10.21. Esquemas para calcular los parámetros del flujo alrededor de un cono agudo: *a*, triángulo de velocidades; *b*, esquema de cálculo; C, cono; Ch, onda de choque

y el cono, se dispone con relación a la polar de choque en la forma representada en la fig. 10.20. Los puntos que yacen en la polar de choque determinan las velocidades del flujo inmediatamente tras la onda de choque.

Los ángulos críticos para el cono $\beta_{cono\ crít}$ y para la cuña $\beta_{cuña\ crít}$ se hallan trazando tangentes, correspondientemente, a la curva cordiforme y a la polar. En la fig. 10.20, *a* vemos que $\beta_{cono\ crít} > \beta_{cuña\ crít}$, es decir, para el número M_∞ prefijado el ángulo crítico del cono es mucho mayor que el respectivo ángulo de la cuña. Esto halla su explicación en que el flujo alrededor del cono tiene carácter espacial, lo que asegura al gas la posibilidad de una variación más uniforme del sentido del flujo en comparación con la cuña. El análisis nos muestra que la velocidad del gas en el cono es mayor que en la cuña para un mismo ángulo.

10.5. El problema de la circulación de un flujo con número $M_\infty = 5$ alrededor de un cono va a ser resuelto suponiendo que los calores específicos quedan constantes al pasar el gas por la onda de choque. El esquema del flujo se muestra en la fig. 10.21, *a*.

Determinemos la componente longitudinal de la velocidad tras la onda de choque, referida a la velocidad máxima $V_{máx}$:

$$V_{r\infty}/V_{máx} = \tilde{V}_{r\infty} = \tilde{V}_{ch\,r} = \tilde{V}_\infty \cos\theta_{ch}. \qquad (10.6)$$

Tomando en consideración que $a_\infty^2 = (V_{máx}^2 - V_\infty^2)(k-1)/2$ y que la magnitud adimensional correspondiente a este valor

$$\tilde{V}_\infty = V_\infty/V_{máx} = \{[2/(k-1)]/M_\infty^2 + 1\}^{-1/2} = 0{,}912,$$

hallamos $\tilde{V}_{ch\,r} = \tilde{V}_\infty \cos\theta_{ch} = 0{,}79$.

Para mayor comodidad de los posteriores cálculos adoptemos la anotación $\theta_{ch} = \theta_1$, después de lo cual hallamos la componente normal de la velocidad tras

la onda de choque:

$$\tilde{V}_{ch\,\theta} = \tilde{V}_{\theta 1} = \frac{1}{\tilde{V}_\infty \operatorname{sen} \theta_1} \left(-\tilde{a}^{*2} + \frac{k-1}{k+1} \tilde{V}_{r_1}^2 \right). \quad (10.7)$$

Aquí

$$\tilde{a}^{*2} = [2/(k+1) + \mathrm{M}_\infty^2 (k-1)/(k+1)]/[2/(k-1) + \mathrm{M}_\infty^2] = 0{,}166.$$

Así, pues, $\tilde{V}_{\theta_1} = -0{,}136$.

Dividamos la región del flujo entre la onda de choque y el cono en sectores con ayuda de rectas (rayos) que salen del punto O (fig. 10.21, *b*) y calculemos, sucesivamente, los parámetros del gas en cada una de las rectas, comenzando por la generatriz de la onda de choque. Con ello, el valor de paso $\Delta\theta$ se elige igual a 0,5 °. Como $\Delta\theta$ se traza cada vez en sentido inverso a la lectura de θ, el signo de $\Delta\theta$ es negativo. Designemos todos los rayos 1, 2, 3, . . ., con la particularidad de que la generatriz de la onda de choque es el rayo *1* (fig. 10.21, *b*). Para el rayo *2* el ángulo $\theta_2 = \theta_1 - |\Delta\theta| = 29{,}5°$. La componente radial de la velocidad en este rayo $\tilde{V}_{r2} = \tilde{V}_{r1} + \tilde{V}_{\theta 1}\Delta\theta = 0{,}7912$.

La correspondiente componente normal de la velocidad

$$\tilde{V}_{\theta 2} = \tilde{V}_{\theta 1} + (d\tilde{V}_\theta/d\theta)_1 \Delta\theta, \quad (10.8)$$

donde

$$(d\tilde{V}_\theta/d\theta)_1 = [-\tilde{V}_{\theta 1} \operatorname{ctg} \theta_1 + \tilde{V}_{r1} (\tilde{V}_{\theta 1}^2/\tilde{a}_1^2 - 2)]/(1 - \tilde{V}_{\theta 1}^2/\tilde{a}_1^2)^{-1}. \quad (10.9)$$

Hallamos $\tilde{a}_1^2 = a_1^2/V_{\text{máx}}^2 = [(k-1)/2][1 - (\tilde{V}_{r1}^2 + \tilde{V}_{\theta 1}^2)] = 0{,}0707$; $(d\tilde{V}_\theta/d\theta)_1 = -1{,}54$.

Por consiguiente, $\tilde{V}_{\theta_2} = -0{,}136 + (-1{,}54)(-0{,}0087) = -0{,}1226$.

Ahora determinemos la velocidad en el rayo *3* para el que $\theta_3 = \theta_1 - 2|\Delta\theta| = 29$ °; $\tilde{V}_{r3} = \tilde{V}_{r2} + \tilde{V}_{\theta_2}\Delta\theta = 0{,}7923$; $\tilde{V}_{\theta_3} = -0{,}1225 + (d\tilde{V}/d\theta)_2\Delta\theta$.

Por analogía se realizan los cálculos para el resto de las rectas (rayos). Los resultados de éstos se ofrecen en la tabla 10.1.

Tabla 10.1

Número del rayo	$\theta = \theta_{ch} + n\Delta\theta$	$\tilde{V}_r$	$\tilde{V}_\theta$	$\tilde{a}^2$	$d\tilde{V}_\theta/d\theta$
1	30	0,7900	−0,1360	0,0707	−1,54
...	...	...	...	...	...
11	25	0,7968	−0,0065	0,0740	−1,58
12	24,5	0,7969	0,0065	—	—

De la tabla 10.1 se desprende que en cierto lugar entre los rayos *11* y *12* la velocidad $V_\theta = 0$. Esto sólo puede ocurrir en la superficie sólida del cono que buscamos, que está distanciada del rayo *11* a un ángulo $\Delta\theta_n = (-\tilde{V}_{\theta 11})/(d\tilde{V}_\theta/d\theta)_{11} = -(-0{,}0065)/(-1{,}58) = -0{,}00411 = -0{,}24$ °.

Así, pues, $\beta_{cono} = \theta_1 - \Sigma|\Delta\theta| = 30° - 5{,}24° = 24°36'$.

Hallemos el coeficiente de presión en el cono:

$$\bar{p}_{\text{cono}} = (p_{\text{cono}} - p_\infty)/q_\infty =$$
$$= [2/(k\mathrm{M}_\infty^2)]\{(p_0'/p_0)[(1-\tilde{V}_{\text{cono}}^2)/(1-\tilde{V}_\infty^2)]^{k/(k-1)} - 1\}, \quad (10.10)$$

donde $p_0'/p_0 = 0{,}5$ es la razón de las presiones de remanso tras y delante de la onda de choque determinada para $\theta_{\text{ch}} = 30°$ y $\mathrm{M}_\infty = 5$. Calculamos: $\bar{p}_{\text{cono}} = 0{,}366$.

Calculamos las correspondientes densidad y temperatura del gas:

$$\rho_{\text{cono}}/\rho_\infty = (p_0'/p_0)[(1-V_{\text{cono}}^2)/(1-V_\infty^2)]^{1/(k-1)} = 3{,}38;$$

$$T_{\text{cono}}/T_\infty = (1-\tilde{V}_{\text{cono}}^2)[1+(k-1)\mathrm{M}_\infty^2/2] = 2{,}17.$$

Como sabemos, para un cono puntiagudo el coeficiente de la resistencia de onda de choque es igual al coeficiente de presión, es decir, a $c_{x\,\text{ch}} = \bar{p}_{\text{cono}}$. Por esta razón, la resistencia de onda de choque

$$X_{\text{ch}} = c_{x\,\text{ch}} q_\infty S_{\text{máx. t}} = 0{,}5k\pi\bar{p}_{\text{cono}}\mathrm{M}_\infty^2 p_\infty r_{\text{máx. t}}^2. \quad (10.11)$$

Tomando la altura del cono igual a 5 m obtenemos $X_{\text{ch}} = 104{,}1\cdot10^5$ N.

10.6. Durante la circulación de un flujo supersónico alrededor de un cono puntiagudo delante de él surge una onda de choque. La generatriz de ésta es la línea

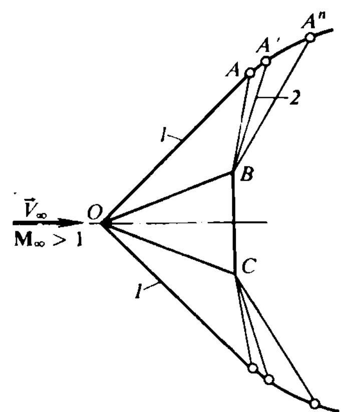


Fig. 10.22. Esquema de circulación alrededor de un cono:
1, ondas de choque; *2*, líneas de Mach

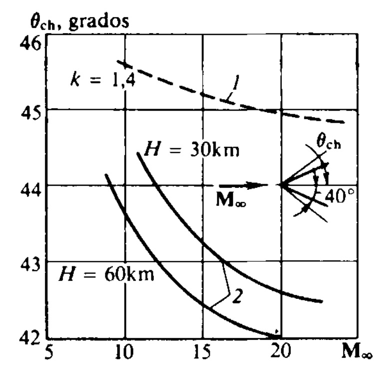


Fig. 10.23. Variación del ángulo de la onda de choque delante del cono

recta OA (fig. 10.22). Si el cono fuese de longitud infinita la onda de choque continuaría tras el punto A, asimismo, en forma de una recta. Pero las dimensiones finitas del cono son la causa de la curvatura de la onda a partir del punto A. Esto se produce debido a que los puntos angulares B y C del cono (con mayor precisión, cada punto yacente en la circunferencia de la base del cono) son fuentes de pequeñas perturbaciones que, al propagarse por el flujo cónico, alcanzan la onda de choque en los puntos A, A', . . ., A^n. Dentro del ángulo limitado por las líneas límites de las perturbaciones BA y BA^n el flujo supersónico se ensancha. Las perturbaciones que salen de los puntos B y C y que, por su carácter son ondas de enrarecimiento, entran en interacción con la onda de choque reduciendo su intensidad y favoreciendo a su curvatura. Ésta comienza en el punto A, donde sobre la onda de choque incide la primera línea BA de débiles perturbaciones.

10.7. El ángulo de inclinación de la onda de choque θ_{ch} delante de un cono puntiagudo disminuye al aumentar el número $\mathbf{M}_\infty$ de vuelo, lo que se muestra en la fig. 10.23 donde según los resultados de los cálculos de la circulación alrededor de un cono puntiagudo con ángulo $\beta_{cono} = 40°$, se han construido las gráficas de las dependencias $\theta_{ch} = \theta_{ch}(\mathbf{M}_\infty)$ sin tener en cuenta la disociación (*1*) ($k = 1{,}4$) y tomándola en consideración (*2*). Semejante carácter de la variación del ángulo de la onda de choque a cuenta de la disociación, está condicionada por la compresión adicional del gas junto a la superficie sometida a la circulación al aumentar la velocidad de vuelo.

10.8. Al aumentar el ángulo del cono β_{cono} también crece el ángulo de la onda de choque θ_{ch}, lo que provoca un calentamiento más intensivo del gas alrededor del cono y la elevación en él de la presión p_{cono} y la temperatura T_{cono}. El resultado del calentamiento del gas es el aumento de su grado de disociación. Este proceso transcurre con absorción de calor, lo que provoca la reducción de la temperatura T_{cono} en la superficie del cono en comparación con la que habría en el gas si en él no transcurrieran transformaciones físico-químicas. Los cálculos también muestran que la presión p_{cono} en la superficie, calculada teniendo en cuenta la disociación, poco se distingue de la presión calculada sin tomarla en consideración.

10.9. Los parámetros del gas en el cono se calculan con las condiciones prefijadas del flujo no perturbado supersónico, teniendo en cuenta las transfomaciones físico-químicas. En las tablas de la atmósfera normal a una altura $H = 5$ km hallamos los parámetros del aire: $\rho_\infty = \rho_1 = 0{,}7365$ kg/m³; $p_\infty = p_1 = 0{,}5405 \cdot 10^5$ Pa; $T_\infty = T_1 = 255{,}6$ K; $a_\infty = a_1 = 320{,}5$ m/s; $\mu_m = \mu_{m1} = 28{,}97$ kg/mol.

La velocidad del sonido $a_1 = 320{,}5$ m/s y el número $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_\infty = 20$ corresponden a la velocidad de vuelo $V_1 = \mathbf{M}_1 a_1 = 6410$ m/s. La entalpía del aire $i_1 = c_{p1}T_1 = 0{,}26 \cdot 10^6$ m²/s².

Por regla, el cálculo de la circulación alrededor de una superficie cónica comienza determinando los parámetros del gas tras la onda de choque oblicua de acuerdo con los conocidos $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_\infty$ y θ_{ch} (véase el cap. 4).

Con la primera aproximación suponemos que el valor de $\Delta\bar{V}_n = (V_{\theta\infty} - V_{ch\infty})/V_{\theta\infty} = (V_{n1} - V_{n2})/V_{n1} = 0{,}9$ y obtenemos $p_2 = p_1(1 + k_1\Delta\bar{V}_n\mathbf{M}_1^2 \times \text{sen}^2\theta_{ch}) = 160{,}38 \cdot 10^5$ Pa; $i_2 = i_1 + (V_1^2/2)\,\text{sen}^2\,\theta_{ch}\Delta\bar{V}_n(2 - \Delta\bar{V}_n) = 12{,}19 \times 10^6$ m²/s². Conociendo i_2 y p_2, según el diagrama $p - i$, hallamos $T_2 = 6650$ K y con las dependencias $\mu_m = f(p, T)$ para las temperaturas altas calculamos $\mu_{m2} = 24{,}6$ kg/mol. A continuación, hallamos los valores de $A = (k_1\mathbf{M}_1^2\,\text{sen}^2\theta_{ch} - 1)/(2k_1\mathbf{M}_1^2\,\text{sen}^2\theta_{ch}) = 0{,}4985$; $B = [1/(k_1\mathbf{M}_1^2\,\text{sen}^2\,\theta_{ch})]\,[(T_2/T_1)\,(\mu_{m1}/\mu_{m2}) - 1] = 0{,}097$ y, partiendo de ellos, determinamos $\Delta\bar{V}_n$ en la segunda aproximación: $\Delta\bar{V}_n = A + \sqrt{A^2 - B} = 0{,}888$.

Como los valores de $\Delta\bar{V}_n$ en la primera aproximación (0,9) y en la segunda (0,888) no coinciden calculamos, adicionalmente, la tercera aproximación suponiendo que $\Delta\bar{V}_n = 0{,}888$. Realizamos el cálculo: $p_2 = 158{,}25 \cdot 10^5$ Pa; $i_2 = 12{,}16 \cdot 10^6$ m²/s².

Con arreglo a los valores hallados de p_2 e i_2, mediante el diagrama $p - i$ y la dependencia $\mu_m = f(p, T)$, hallamos $T_2 = 6675$ K y $\mu_{m2} = 24{,}6$ kg/mol.

Después de calcular los correspondientes valores de $A = 0{,}4985$ y $B = 0{,}0971$, en la tercera aproximación obtenemos $\Delta\bar{V}_n = 0{,}888$, lo que coincide con el resultado de la segunda aproximación. Esto significa que este valor ha sido determinado correctamente. Ahora, haciendo uso de los diagramas y dependencias para las funciones de dinámica de los gases del aire a grandes velocidades y altas tempera-

turas, podemos determinar todos los parámetros del gas tras la onda de choque: $p_2 = 158{,}25 \cdot 10^5$ Pa; $i_2 = 12{,}16 \cdot 10^6$ m²/s²; $T_2 = 6675$ K; $\mu_{m2} = 24{,}6$ kg/mol; $S_2 = 10{,}4 \cdot 10^3$ m²/(s²·K); $a_2 = 1640$ m/s.

Determinemos aproximadamente la región del flujo perturbado, es decir, el ángulo entre las generatrices de la onda de choque y del cono, para lo cual empleamos los resultados del cálculo de la circulación de un flujo no disociado alrededor del cono. De la conocida dependencia para el cono en un flujo supersónico $\theta_{ch} = f(\beta_{cono}, M_\infty)$ hallamos el valor aproximado de $\theta_{ch} - \beta_{cono} = 5$ °. Con ello, tomamos en consideración que el valor real de $\theta_{ch} - \beta_{cono}$, debido a la disociación, es todavía menor. Con rectas (rayos) que salen del vértice, dividamos la región que examinamos en diez intervalos con paso $\Delta\theta = 0{,}5$ °. Designemos cada uno de los rayos con un número considerando que la generatriz de la onda de choque es el primero. Así, pues los parámetros en la onda de choque tienen ahora el índice 1 en lugar del 2 como fue adoptado más arriba (véase la fig. 10.21), es decir, $p_1 = p_2 = 158{,}25 \cdot 10^5$ Pa; $i_1 = i_2 = 12{,}16 \cdot 10^6$ m²/s²; $T_1 = T_2 = 6675$ K; $\mu_{m1} = \mu_{m2} = 24{,}6$ kg/mol. $S_1 = S_2 = 10{,}4 \cdot 10^3$ m²/(s²·K); $a_1 = a_2 = 1640$ m/s.

Los parámetros en el segundo rayo tienen el índice 2, en el tercero, 3, etc. Los parámetros en el rayo correspondiente a la generatriz del cono reciben la anotación con el índice «cono».

En el primer rayo tenemos $\bar{V}_{r1} = V_{r1}/V_\infty = \cos\theta_1 = \cos\theta_{ch} = 0{,}6428$; $\bar{V}_{\theta 1} = -V_{\theta 1}/V_\infty = -(1 - \Delta\bar{V}_n)\ \text{sen}\ \theta_{ch} = -0{,}0858$.

La determinación de los parámetros del gas en el rayo *2* se efectúa de la siguiente forma. La componente radial de la velocidad es aquí (véase la fig. 10.21) $\bar{V}_{r2} = \bar{V}_{r1} + \bar{V}_{\theta 1}\Delta\theta = 0{,}6435$.

La componente normal de la velocidad se calcula por las fórmulas (10.8) y (10.9) en las que todas las velocidades serán referidas no a $V_{\text{máx}}$, sino que a V_∞. P. ej., en lugar de $\tilde{V}_{\theta 2} = V_{\theta 2}/V_{\text{máx}}$ hacemos $\bar{V}_{\theta 2} = V_{\theta 2}/V_\infty$, etc. Teniendo esto en cuenta, $(d\bar{V}_\theta/d\theta)_1 = -1{,}29$ y $\bar{V}_{\theta 2} = -0{,}074$.

La correspondiente entalpía $i_2 = i_1 + (V_1^2/2)\,[(\bar{V}_{r1}^2 + \bar{V}_{\theta 1}^2) - (\bar{V}_{r2}^2 + \bar{V}_{\theta 2}^2)] = 12{,}17 \cdot 10^6$ m²/s².

Considerando que el flujo en la región perturbada es isentrópico, en virtud de $S_2 = S_1$ e i_2 y con ayuda de las dependencias $a = f(S, i)$ para el aire disociado, hallamos la velocidad del sonido $a_2 = 1650$ m/s y la magnitud adimensional $\bar{a}_2^2 = a_2^2/V_\infty^2 = 0{,}066$. De acuerdo con (10.9) $(d\bar{V}_\theta/d\theta)_2 = -1{,}27$.

Con arreglo a los parámetros del gas en el rayo *2* podemos calcular los correspondientes parámetros en el rayo *3*. Por analogía, se efectúan los cálculos de otras superficies cónicas (tabla 10.2).

Tabla 10.2

NN° de los rayos	θ	$\bar{V}_r$	$\bar{V}_\theta$	$\frac{d\bar{V}_\theta}{d\theta}$	$i \cdot 10^{-6}$, m²/s²	$S \cdot 10^{-3}$, m²/(s²·K)	a, m/s
1	50°	0,6428	−0,0858	−1,290	12,16	10,4	1640
...	...	...	...	...	...	...	...
8	46,5°	0,6455	−0,0042	−1,287	12,23	10,4	1682
9	46°	0,6456	0,0071	—	—	—	—

De la tabla 10.2 se deduce que el valor de $\bar{V}_\theta$ en el rayo *9* varía el signo por el opuesto. Esto indica que el incremento del ángulo $|\Delta\theta|$ es en el último inter-

valo menor que el elegido (o sea, menor que 0,5°). De acuerdo con la fórmula de interpolación este valor de $\Delta\theta_{n-1} = -\bar{V}_{\theta 8}(d\bar{V}_\theta/d\theta)_8^{-1} = -0{,}0032$ ($-11'$).

El correspondiente ángulo del cono $\beta_{cono} = \theta_1 - 7 \mid \Delta\theta \mid - 11' = 46{,}31°$, en tanto que la velocidad en él $\bar{V}_{cono} = \bar{V}_{r\ cono} = \bar{V}_{r8} + \bar{V}_{\theta 8}\Delta\theta_{n-1} = 0{,}6456$.

La entalpía del gas $i_{cono} = i_{ch} + (\bar{V}_{ch}^2 - \bar{V}_{cono}^2)\, V_\infty^2/2 = 12{,}23\cdot 10^6$ m²/s². Conociendo i_{cono} y S_{cono}, con ayuda del diagrama para el aire disociado, hallamos $p_{cono} = 167{,}26\cdot 10^5$ Pa; $T_{cono} = 6700$ K; $\rho_{cono} = 6{,}16$ kg/m³, así como el coeficiente de presión en el cono $\bar{p}_{cono} = 2\,(p_{cono} - p_\infty)/(k_1 M_\infty^2 p_\infty) = 1{,}102$.

Para un cono de altura de 5 m la resistencia de onda de choque $X_{ch} = 143{,}86 \times \times 10^6$ N.

10.10. El ángulo de inclinación de la onda de choque disminuye con la altura. Esto puede explicarse del modo siguiente. Cuando el cono vuela a velocidad hipersónica, debido al elevado calentamiento del gas tras la onda de choque se produce la disociación. Este proceso también depende de la presión que con la altura disminuye. Ya sabemos que la reducción de la presión conduce al aumento del grado de disociación del aire, lo que a la vez hace que el ángulo de la onda de choque θ_{ch} decrezca. Acerca del carácter de la disminución podemos juzgar por las gráficas (fig. 10.23), en las que con líneas gruesas están representadas las curvas obtenidas tomando en consideración la disociación.

10.11. El coeficiente de la resistencia de onda de choque de un cono puntiagudo disminuye con el aumento del número M_∞ de vuelo. El carácter de dicha disminución refleja la dependencia aproximada obtenida manejando los datos de la teoría precisa:

$$c_{x\ ch} = \bar{p}_{cono} = (p_{cono} - p_\infty)/q_\infty = (0{,}0016 + 0{,}002\ M_\infty^{-2})\,(\beta_{cono}^\circ)^{1,7}. \quad (10.12)$$

Pero hay que tener en cuenta que con el aumento del número M_∞^{-2} la resistencia de onda de choque del cono crece a pesar de la disminución de $c_{x\ ch}$. Esto se desprende de la expresión (10.11) de acuerdo con la cual

$$X_{ch} = c_{x\ ch} q_\infty S_{máx.\ t} = 0{,}7 p_\infty M_\infty^2\,(0{,}0016 + 0{,}002 M_\infty^{-2})\,(\beta_{cono}^\circ)^{1,7}\, S_{máx.\ t}.$$

10.12. El coeficiente del centro de presión de un sólido de revolución $c_p = x_p/x_{cono}$ puede calcularse si conocemos el momento de cabeceo M_z y la fuerza normal Y que actúa sobre dicho sólido. En aquellos casos cuando el ángulo de ataque es pequeño, mientras que el alargamiento del sólido y la velocidad de su vuelo son comparativamente pequeños, es posible despreciar la influencia sobre M_z e Y de las fuerzas de rozamiento y considerar que el momento y la fuerza normal son el resultado de la acción tan sólo de las fuerzas de presión, es decir, $M_z = M_{zp}$ e $Y = Y_p$. En tal caso, para calcular el valor de c_p hemos de hacer uso de la fórmula

$$c_p = -\frac{m_{zp}}{c_{yp}} = \frac{\int_0^1 \bar{r}\tilde{x}d\tilde{x} \int_0^\pi \bar{p}\cos\gamma\, d\gamma + (2\lambda_{cono})^{-1} \int_0^1 \bar{r}^2 \operatorname{tg}\beta\, d\tilde{x} \int_0^\pi \bar{p}\cos\gamma\, d\gamma}{\int_0^1 \bar{r}\, d\tilde{x} \int_0^\pi \bar{p}\cos\gamma\, d\gamma}.$$

Aquí $\bar{r} = r/r_{máx.t}$; $\tilde{x} = x/x_{cono}$; $\bar{p} = (p - p_\infty)/q_\infty$ es el coeficiente de presión; γ, el ángulo meridional; $\lambda_{cono} = x_{cono}/(2\,r_{máx.t})$, el alargamiento del sólido de revolución; β, el ángulo entre el eje longitudinal del sólido de revolución y la tangente a la generatriz de dicho cuerpo en el punto dado.

Como el movimiento en la región perturbada alrededor del cono, situado bajo el ángulo de ataque, tiene la propiedad de un flujo cónico de acuerdo con la cual el coeficiente de presión $\bar{p}$ en la superficie del cono sólo depende de la coordenada γ, la expresión aducida puede presentarse en la forma

$$c_p = \left(2\lambda_{\text{cono}} \int_0^1 \bar{r}\tilde{x}\, d\tilde{x} + \int_0^1 \bar{r}^2 \operatorname{tg}\beta\, d\tilde{x}\right) \Big/ \left(2\lambda_{\text{cono}} \int_0^1 \bar{r}\, d\tilde{x}\right). \qquad (10.13)$$

Para el cono (fig. 10.24) $\bar{r} = \tilde{x}$; $x_c = x_{\text{máx.t}}$; $\lambda_c = 1/(2 \operatorname{tg} \beta_{\text{cono}})$. Por ello, después de integrar

$$c_p = (2/3)\,(1 + \operatorname{tg}^2 \beta_{\text{cono}}). \qquad (10.14)$$

Como vemos con el engrosamiento del cono (aumento del ángulo β_{cono}) el centro de presión se desplaza hacia la cola. Esto se explica porque crecen las fuerzas debidas a la presión que actúan en ella (ya que aumenta la superficie de la cola) y se hace considerable el momento estabilizante de estas fuerzas.

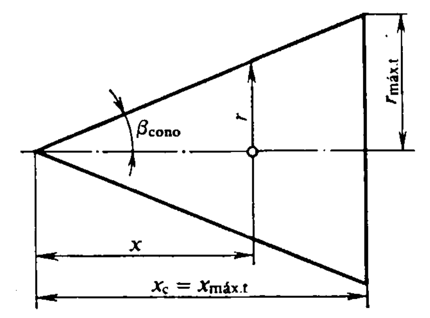


Fig. 10.24. Cono agudo ($\bar{r} = r/r_{\text{máx.t}}$, $\tilde{x} = x/x_{\text{cono}}$)

10.13. Una propiedad de los sólidos obtusos, que condiciona su empleo y es importante para la práctica, consiste en que durante su movimiento en la atmósfera a velocidades muy grandes, ellos se calientan (y, por lo tanto, se destruyen por recalentamiento) en menor grado que los sólidos puntiagudos.

El esquema del flujo alrededor de un sólido cónico obtuso se muestra en la fig. 10.25. Delante del sólido *1* se forma una onda de choque separada *2* de intensidad variable en diversos puntos de su superficie. La indicada intensidad es la mayor en el entorno del punto O de remanso total. Podemos considerar que aquí la onda es una onda recta de choque. El paso de las partículas de gas por tal fuerte onda de

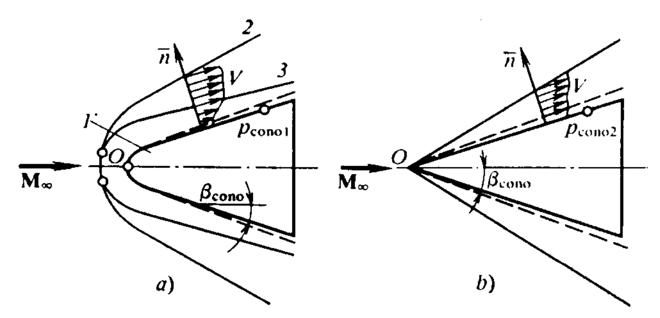


Fig. 10.25. Circulación alrededor de un cono obtuso (*a*) y otro agudo (*b*)

choque se acompaña de notorias pérdidas de la presión total y el aumento de la entropía. Como resultado, se crea la impresión de que la superficie del sólido se cubre de la capa *3* de cierto grosor, en la que el gas posee elevada entropía. En esta capa, llamada de alta entropía, con las demás condiciones iguales, la velocidad del gas es menor que en la superficie de un cono puntiagudo, donde no hay tan intensa onda de choque y el gas se remansa más lentamente (fig. 10.25).

La capa límite (su límite exterior se muestra en la fig. 10.25 con líneas de trazos) es, por regla, mucho más delgada que la capa de alta entropía y la velocidad en el límite exteorior de la capa límite es menor para el sólido obtuso que alrededor del puntiagudo. Semejante disminución de la velocidad es una de las causas del decrecimiento del calentamiento aerodinámico del sólido obtuso. Esto se desprende de la fórmula para el flujo térmico específico transmitido por un gas a la pared sólida $q_{\text{cono}} = \alpha (T_r - T_{\text{par}})$, donde α es el coeficiente de emisión térmica dependiente de la velocidad de movimiento del gas V_δ en el límite exterior de la capa límite, de la densidad en ella y de una serie de otros parámetros; T_r y T_{par}, la temperatura de recuperación y de la pared, respectivamente.

Como muestran las investigaciones, en forma general $\alpha = f(\rho_\delta, V_\delta)$. Así, pues, la disminución de la velocidad en el límite exterior de la capa límite reduce la cantidad de calor que llega del gas a la superficie del sólido de revolución. Si analizamos la influencia de la densidad ρ_δ sobre el coeficiente de emisión térmica ha de tenerse en cuenta que su valor en diversos sectores del cono obtuso puede ser mayor que en el puntiagudo, pero tal aumento no tiene notable significado en la variación de la emisión térmica.

La singularidad de la circulación alrededor de un sólido obtuso también consiste en que por el efecto de la obtusidad varía el carácter del flujo en la capa límite. Debido a la disminución de los números de Reynolds que se calculan según la velocidad en la capa de alta entropía, la capa límite laminar se convierte en turbulenta mucho más abajo en dirección del flujo, es decir, la extensión de la capa laminar crece. Esto favorece a la reducción del rozamiento y, como consecuencia de esto, a la disminución de los flujos térmicos hacia la pared.

El crecimiento de la entropía condiciona el aumento (en comparación con un cono puntiagudo) de la temperatura en el límite exterior de la capa límite, lo que contribuye a cierta elevación del flujo térmico hacia la pared. No obstante, al elegir de modo correspondiente el grado y la forma de la obtusidad, el efecto sumario consiste en la disminución de los flujos térmicos del gas hacia la pared.

La resistencia de onda de choque de un sólido obtuso, por regla, crece en comparación con la de uno puntiagudo.

10.14. El coeficiente de la resistencia de onda de choque de una semiesfera se determina con cierta aproximación mediante la dependencia

$$c_{x\text{ch}} = 0{,}5\, \bar{p}_0, \tag{10.15}$$

donde $\bar{p}_0$ es el coeficiente de presión en el punto de remanso total.

Cuando las capacidades caloríficas del gas son constantes el valor de $\bar{p}_0$ no varía con el aumento de la altura siendo constante $\mathbf{M}_\infty$, ya que él sólo depende del número $\mathbf{M}_\infty$ y se determina por la dependencia

$$\bar{p}_0 = \frac{2}{k\mathbf{M}_\infty^2} \left\{ \frac{k-1}{k+1} \left[\frac{(k+1)^2}{2(k-1)} \right]^{\frac{k}{k-1}} \frac{\mathbf{M}_\infty^2}{[2k/(k-1) - 1/\mathbf{M}_\infty^2]^{\frac{k}{k-1}}} - 1 \right\}. \tag{10.16}$$

El valor límite de $\bar{p}_0$ se observa con un valor infinitamente grande de $\mathbf{M}_\infty$ y es igual a $\bar{p}_{0\,\text{lim}} = 1{,}83$ (para $k = 1{,}4$). Si consideramos el caso de disociación, entonces, como sabemos, a cuenta de la caída de la presión atmosférica con el aumento de la altura el grado de dicha disociación crece. A su vez, esto provoca cierta elevación de la presión correspondiente al aumento del coeficiente $\bar{p}_0$ y, como consecuencia, el incremento de $c_{x\,\text{ch}}$. P. ej., a una altura de 10 km en una

esfera en movimiento a una velocidad correspondiente al número $\mathbf{M}_\infty = 16{,}7$, el valor real de $\bar{p}_0 = 2{,}03$, es decir, él sobrepasa el valor de $\bar{p}_0 = 1{,}83$ sin contar la disociación. Por consiguiente, el coeficiente de resistencia de onda de choque será mayor en el correspondiente valor.

10.15. Para una altura $H = 15$ km hallemos en las tablas para la atmósfera normal los parámetros del aire: $p_\infty = 12112$ Pa; $\rho_\infty = 0{,}1948$ kg/m³; $T_\infty = 216{,}7$ K; $a_\infty = 295{,}1$ m/s. Con estos parámetros y el número $\mathbf{M}_\infty = 15$ calculemos la razón de las densidades $\bar{\rho} = \rho_\infty/\rho_2$, para la onda recta de choque. Con la primera aproximación suponemos que el valor de $\Delta\bar{V} = (V_\infty - V_2)/V_\infty = 0{,}9$, lo que corresponde a la densidad relativa $\rho_2/\rho_\infty = (1 - \Delta\bar{V})^{-1} = (1 - 0{,}9)^{-1} = 10$.

A continuación, hallamos la presión tras la onda de choque (véase la solución del problema 10.9) $p_2 = 12112\ (1 + 1{,}4 \cdot 15^2 \cdot 0{,}9) = 34{,}45 \cdot 10^5$ Pa, así como calculamos la entalpía i_2 teniendo en cuenta que su valor en el flujo incidente $i_\infty = c_{p_\infty} T_\infty = 0{,}2171 \cdot 10^6$ m²/s². Entonces $i_2 = 0{,}2171 \cdot 10^6 + (295{,}1 \cdot 15)^2 0{,}9 \times (2 - 0{,}9)/2 = 9{,}92 \cdot 10^6$ m²/s².

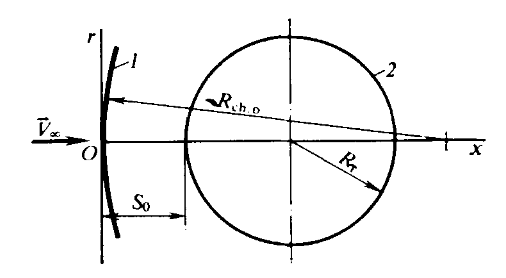


Fig. 10.26. Onda de choque (*1*) delante de la esfera (*2*)

Según p_2 e i_2, con ayuda del diagrama $i - S$ y las dependencias $\mu_m = f\,(p, T)$, determinamos la temperatura del gas tras la onda de choque $T_2 = 5180$ K y calculamos la masa media molar $\mu_{m2} = 25{,}1$ kg/mol. Seguidamente, con la ecuación de estado se halla la correspondiente densidad: $\rho_2 = p_2\mu_{m2}/(R_0 T_2) = 1{,}97$ kg/m³.

Así, pues, $\Delta\bar{V} = 1 - \rho_\infty/\rho_2 = 0{,}901$. La diferencia entre el valor de $\Delta\bar{V}$, prefijada con la primera aproximación (0,9), y el valor obtenido (0,901) es muy pequeña, por lo que adoptamos $\bar{\rho} = \rho_\infty/\rho_2 = 0{,}099$. De acuerdo con esto, el valor relativo de la separación de la onda de choque

$$\tilde{S}_0 = S_0/R_{ch.o} = \bar{\rho}\,(1 - \bar{\rho})^{-2}\,[1 - (2\bar{\rho} - \bar{\rho}^2)^{1/2}] = 0{,}0593, \qquad (10.17)$$

donde $R_{ch.o}$ es el radio de su curvatura (en la fig. 10.26).

Después de determinar la razón de los radios de curvatura de la onda de choque y de la esfera $\bar{R}_{ch.o} = R_{ch.o}/R_T = 1/(1 - \tilde{S}_0)^{2,5} = 1{,}16$ hallamos $R_{ch.o} = R_T\tilde{R}_{ch.o} = 2{,}32$ m y la distancia desde la onda hasta la esfera $S_0 = \tilde{S}_0 R_{ch.o} = 0{,}138$ m.

Para determinar la forma de la onda de choque hagamos uso de la ecuación $(x + a)^2/a^2 - r^2/b^2 = 1$ conforme a la cual la generatriz de la onda se representa en forma de una hipérbola con semiejes a y b. La longitud de estos: $a = R_{ch.o} \times (\mathbf{M}_\infty^2 - 1) = 519{,}7$ m; $b = R_{ch.o}\sqrt{\mathbf{M}_\infty^2 - 1} = 34{,}7$ m. Por consiguiente, $r = \pm 34{,}7\sqrt{(x + 519{,}7)^2/519{,}7^2 - 1}$ m. Conociendo la separación S_0, partiendo de esta ecuación es posible construir la onda de choque alrededor de la esfera (fig. 10.27).

10.16. Para la altura $H = 30$ km, en las tablas de la atmósfera normal hallamos los parámetros del aire: $p_\infty = 1197$ Pa; $\rho_\infty = 1{,}841 \cdot 10^{-2}$ kg/m³; $T_\infty = 226{,}5$ K; $\mu_{m\infty} = 28{,}97$ kg/mol; $a_\infty = 304{,}8$ m/s.

Calculamos los parámetros del aire inmediatamente tras la parte recta de la onda de choque (fig. 10.28). Con la primera aproximación tomamos $\Delta\bar{V} = 0{,}9$ lo que corresponde a la razón de las densidades $\bar{\rho} = \rho_2/\rho_\infty = (1 - \Delta\bar{V})^{-1} = 10$. Después, hallamos la presión tras la onda de choque (véase la solución del problema 10.9): $p_2 = 2{,}61 \cdot 10^5$ Pa y la correspondiente entalpía: $i_2 = 8{,}15 \cdot 10^6$ m²/s².

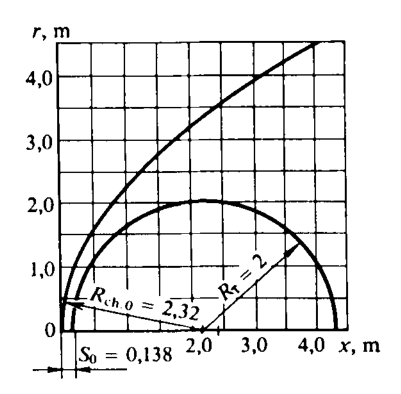


Fig. 10.27. Onda de choque delante de una esfera

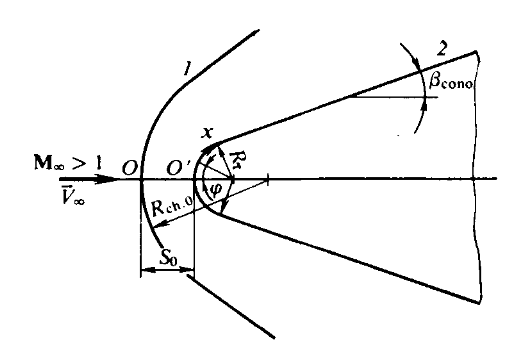


Fig. 10.28. Onda de choque (*1*) delante de un cono obtuso (*2*)

Partiendo de estos valores en el diagrama de funciones del aire a grandes velocidades y altas temperaturas, hallamos $\rho_2 = 0{,}1841$ kg/m³; $T_2 = 4250$ K; $S_2 = 11020$ m²/(s²·K).

Comprobamos la validez de la elección del valor $\Delta\bar{V} = 0{,}9$, es decir, $\Delta\bar{V} = 1 - \rho_\infty/\rho_2 = 0{,}9$. Vemos que el valor de $\Delta\bar{V}$ prefijado y el obtenido coinciden. Por lo tanto, los parámetros tras la onda de choque se han calculado correctamente.

Delante del punto de remanso total el desprendimiento relativo de la onda de choque $\bar{S}_0 = S_0/R_T = 0{,}52\,[\bar{\rho}/(1 - \bar{\rho})]^{0{,}86} = 0{,}057$, así como la razón

$$S_0/R_{ch.o} = \tilde{S}_0 = -(\bar{S}_0^2/2)\left(1 - \sqrt{1 + 4/\bar{S}_0^2}\right) = 0{,}0538.$$

El gradiente de velocidad en el entorno del punto de remanso total (punto O' en la fig. 10.28)

$$\tilde{\lambda} = (\partial V_x/\partial x)_{\substack{x=0\\y=0}} = (V_\infty/R_T)\sqrt{(2\bar{\rho} - \bar{\rho}^2)(1 - \tilde{S}_0)} = 843 \text{ 1/s.} \tag{10.18}$$

La velocidad en el entorno de dicho punto

$$V_x = \tilde{\lambda} R_T \varphi/57{,}3, \tag{10.19}$$

donde φ es el ángulo polar (fig. 10.28).

10.17. Para la altura $H = 10$ km, en las tablas de la atmósfera normal hallamos: $p_\infty = 0{,}265 \cdot 10^5$ Pa; $\rho_\infty = 0{,}4135$ kg/m³; $T_\infty = 223{,}2$ K; $a_\infty = 299{,}5$ m/s. Sabemos que $c_{p_\infty} = 1002$ m²/s². Según estos datos y el número $M_\infty = V_\infty/a_\infty = 16{,}7$ calculamos los parámetros del aire inmediatamente tras la parte recta de la onda de choque, así como en el punto de remanso total en el borde esférico (véase la solución del problema 10.16).

Suponiendo en la primera aproximación que $\Delta\overline{V} = 0{,}9$, obtenemos: $p_2 = 93{,}4 \cdot 10^5$ Pa; $i_2 = 12{,}4 \cdot 10^6$ m²/s². A continuación, por el diagrama $i - p$, hallamos: $T_2 = 6650$ K; $S_2 = 10640$ m²/(s²·K); $\rho_2 = 4{,}2$ kg/m³. En correspondencia con estos datos $\Delta\overline{V} = 1 - \rho_\infty/\rho_2 = 0{,}9015 \approx 0{,}9$. Como vemos, este valor coincide con el prefijado y, por lo tanto, los parámetros del gas tras la onda de choque recta pueden considerarse determinados.

Calculemos los parámetros del aire en el punto de remanso total en el borde esférico, considerando que tras la onda de choque el flujo es isentrópico. En dicho punto la entalpía $i_0' = i_\infty + 0{,}5V_\infty^2 = 12{,}75 \cdot 10^6$ m²/s².

Con ayuda del diagrama $i - p$, partiendo de i_0' y $S_0' = S_2$, determinamos: $\rho_0' = 4{,}6$ kg/m³; $p_0' = 110 \cdot 10^5$ Pa; $T_0' = 6700$ K. El correspondiente coeficiente de presión $\overline{p}_0 = [2/(k_1\mathrm{M}_\infty^2)]\,(p_0'/p_\infty - 1) = 2{,}1$. En el punto arbitrario de la superficie aerodinámica $\overline{p} = \overline{p}_0 \cos^2\varphi = 2{,}1\cos^2\varphi$. En particular, en el extremo del sector esférico (véase la fig. 10.3), donde $\varphi = \varphi_{\text{cono}} = \pi/2 - \beta_{\text{cono}} = 90° - 20° = 70°$, el coeficiente $\overline{p} = \overline{p}_{\text{cono}} = 0{,}246$. Con cierta aproximación podemos adoptar que a este valor es igual el coeficiente de presión en toda la superficie cónica.

Determinemos el gradiente de velocidad en el punto de remanso total: $\tilde{\lambda} = (\partial V_x/\partial x)_{\substack{x=0\\y=0}} = (1/R_{\mathrm{T}})\sqrt{2\,(p_0' - p_\infty)\,\rho_0'} = 10{,}9 \cdot 10^2$ 1/s, así como la velocidad en el punto del borde esférico tomado al azar: $V_x = \tilde{\lambda}_x = \tilde{\lambda} R_{\mathrm{T}}\varphi/57{,}3 = 0{,}405 \times 10^2\varphi$. En el extremo de este borde (en los puntos de transición de la superficie esférica a la cónica) $V_{\text{cono}} = 40{,}5 \cdot 70 = 2840$ m/s.

Determinemos la resistencia de onda de choque de un cono con borde obtuso. El correspondiente valor aproximado del coeficiente aerodinámico

$$c_{x\,\mathrm{ch}} = X_{\mathrm{ch}}/(q_\infty S_{\text{máx. t}}) = \overline{p}_0\,[(R_{\mathrm{T}}^2/r_{\text{máx. t}}^2)\cos^2\beta_{\text{cono}}\,(1 - \cos^2\beta_{\text{cono}}/2) + (x_c/r_{\text{máx. t}}^2)\,\mathrm{sen}^3\,\beta_{\text{cono}}\,(2r_{\text{máx. t}} - x_c\,\mathrm{sen}\,\beta_{\text{cono}})]. \qquad (10.20)$$

Aquí $x_c = (1/\cos\beta_{\text{cono}})\,[l - R_{\mathrm{T}}\,(1 - \mathrm{sen}\,\beta_{\text{cono}})] = 3{,}91$ m; $r_{\text{máx.t}} = R_{\mathrm{T}} \times \cos\beta_{\text{cono}} + x_c\,\mathrm{sen}\,\beta_{\text{cono}} = 3{,}21$ m.

En virtud de esto el coeficiente $c_{x\mathrm{ch}} = 0{,}58$, en tanto que la fuerza de la resistencia de ondas de choque

$$X_{\mathrm{ch}} = 0{,}5 c_{x\mathrm{ch}} k_1 p_\infty \mathrm{M}_\infty^2\,\pi r_{\text{máx.t}}^2 = 9{,}71 \cdot 10^7 \text{ N}.$$

10.18. Si suponemos que entre la onda de choque y la superficie del sólido no transcurren reacciones químicas y el gas no varía su composición, en comparación con las condiciones existentes antes de la onda, la elevación de la presión no se reflejará de ningún modo en el valor del desprendimiento. La disociación que surge en condiciones reales provoca la bajada de la temperatura y condiciona el aumento de la densidad, la compresión adicional del gas y, como consecuencia, el acercamiento del frente delantero de la onda de choque a la superficie aerodinámica.

En la fig. 10.29 se muestra la variación del valor relativo del desprendimiento $\overline{S}_0 = S_0/R_{\mathrm{T}}$ delante de la esfera de radio $R_{\mathrm{T}} = 4 \cdot 10^{-2}$ m, sometida a la circulación del oxígeno con $p_\infty = 2{,}63 \cdot 10^3$ Pa y $T_\infty = 293$ K en los casos de capacidades caloríficas constantes (*2*) y de disociación en equilibrio total (*1*).

10.19. El gas en movimiento desde el punto A de remanso total por la superficie de obtusidad (fig. 10.30) sufre intensa expansión y, por consiguiente, enfria-

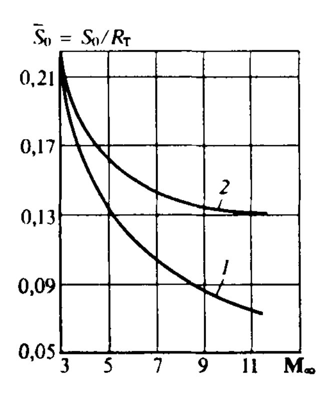


Fig. 10.29. Separación de la onda de choque respecto de la esfera:
1, disociación en equilibrio; *2*, capacidades caloríficas constantes

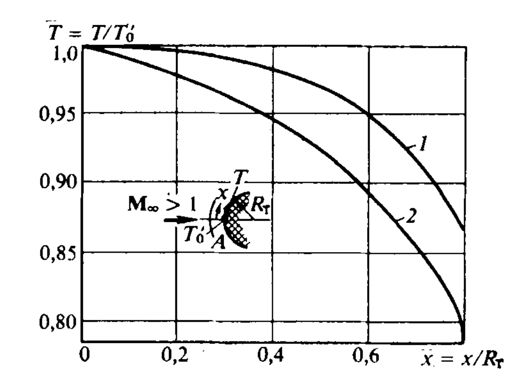


Fig. 10.30. Temperatura en la nariz cónica en caso de la disociación en equilibrio (*1*) y en desequilibrio (*2*)

miento. Esto acarrea la disminución del grado de disociación. El proceso de recombinación, que transcurre en este caso, se acompaña del desprendimiento de calor y del correspondiente calentamiento del gas en enfriamiento. Es evidente que tal calentamiento tendrá lugar con mayor intensidad en el caso de un flujo totalmente en equilibrio que con la disociación desequilibrada. Las curvas en la fig. 10.30, obtenidas por medio de cálculos para la esfera de radio $R_T = 10$ mm, alrededor de la cual circula un flujo de oxígeno con $M_\infty = 10$, $p_\infty = 10^3$ Pa y $T_\infty = 290$ K, nos muestran que la subida de la temperatura, a cuenta de la recombinación, alcanza el 8 % a cierta distancia del punto de remanso total.

10.20. A grandes velocidades de circulación ($M_\infty > 10$) el gas tras la onda de choque se calienta hasta temperaturas muy altas. P. ej., tras una onda de choque recta, a una velocidad de vuelo correspondiente a $M_\infty = 15$, la temperatura detrás de la onda, si no se toma en consideración la disociación, es 45 veces más alta que la del medio circundante; con esa misma velocidad de vuelo, pero considerando la disociación, sólo es mayor 24 veces. Esto significa que en los casos que analizamos, si tomamos la temperatura del medio circundante igual a 290 K, tras la onda de choque recta sus valores serán 13 000 y 7 000 K, respectivamente. Los procesos de transporte de energía en forma de radiación como muestran los cálculos, también pueden influir de forma notoria sobre los parámetros del gas tras la onda de choque. La radiación del gas condiciona una considerable disminución de la temperatura y, como consecuencia, el aumento de la densidad en la capa de choque y en la superficie del sólido alrededor del cual transcurre la circulación. Semejante aumento de la densidad, en particular notable cerca de los puntos de remanso total, conduce a la disminución del desprendimiento de la onda de choque.

10.21. La curva *1* en la fig. 10.4 que caracteriza la distribución de la presión por la superficie del sólido de revolución, corresponde a la circulación del flujo incompresible ($M_\infty = 0$) de un fluido ideal alrededor de dicho sólido. La forma simétrica de esta curva respecto del eje vertical *ab* nos indica esto. Es fácil advertir que la resistencia al avance del sólido es nula, ya que las fuerzas de presión que actúan sobre el sector de ataque de la superficie se equilibran por iguales fuerzas que surgen en la cola y están dirigidas en sentido inverso. La curva *2* corresponde a la circulación de un fluido real viscoso alrededor de ese mismo sólido. Con esto, ya que la presión excesiva sobre la parte de ataque de la superficie es

menor, es evidente que, asimismo, la velocidad $\overline{V}_\infty$ del flujo incidente es menor que en el primer caso.

La variación de la ley de distribución de la presión se explica por la aparición (fig. 10.31) de la capa límite en la superficie sometida a la circulación. Semejante capa ejerce su efecto en el flujo exterior separándolo de dicha superficie. Surge un fenómeno relacionado con el aparente engrosamiento del sólido sometido a la circulación a un valor igual al grosor de la expulsión δ^*. Por esta causa, el flujo incompresible aumenta su velocidad en comparación con la circulación de un medio ideal alrededor de ese mismo sólido. Semejante aumento de la velocidad conduce a la disminución de la presión.

10.22. La diferencia en la distribución de la presión se explica a causa de que la curva *2* (véase la fig. 10.5) está calculada teniendo en cuenta el carácter vorticial del movimiento del gas tras la onda de choque encorvada. El proceso de formación del movimiento vorticial puede explicarse del modo siguiente. Las débiles ondas de perturbación *1* (fig. 10.32), formadas en la superficie del sólido, alcanzan el frente de la onda de choque *2*, se ponen en interacción con ella en el punto *A* y curvan su generatriz (convencionalmente, en la figura se representa sólo la onda *1* de las perturbaciones débiles). Como en la onda de choque curvilínea la intensidad en diferentes puntos no es la misma, se produce la variación del carácter del movimiento del gas: en lugar de potencial (irrotacional) se convierte en vorticial (rotacional). Esto acarrea el aumento de la resistencia aerodinámica, ya que para la formación de un torbellino se consume irreversiblemente una parte adicional de la energía cinética del flujo.

Las investigaciones muestran que debe tomarse en consideración el carácter vorticial del flujo de un gas a velocidades bastante altas, tales a las que corresponden los valores del parámetro $K_1 = M_\infty/\lambda_{\text{máx.t}} > 1{,}5$, donde $\lambda_{\text{máx.t}} = x_{\text{máx.t}}/(2r_{\text{máx.t}})$.

10.23. La linealización de las ecuaciones de movimiento de un gas alrededor de sólidos de revolución delgados, en movimiento bajo pequeños ángulos de ataque, consiste en reducir las ecuaciones diferenciales no lineales y que no tienen soluciones generales, a la forma lineal para la que hay solución general. Tal simplificación de las ecuaciones es posible al suponer que los parámetros del flujo perturbado alrededor de sólidos delgados poco se diferencian de sus correspondientes valores en un flujo no perturbado, es decir, para las componentes de la velocidad en coordenadas cilíndricas obtenemos: $V_x = V_\infty + V'_x$; $V_r = V'_r$; $V_\gamma = V'_\gamma$ y para la

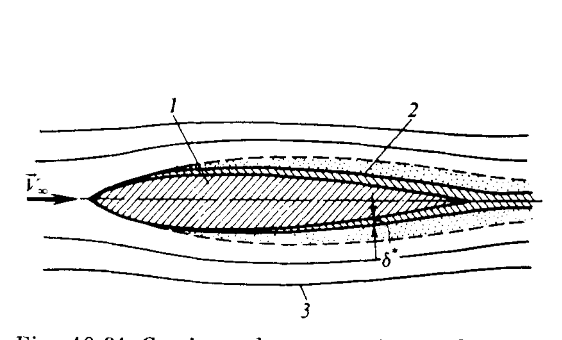


Fig. 10.31. Corriente de un gas viscoso alrededor de un sólido de revolución:
1, sólido de revolución; *2*, capa límite; *3*, flujo libre

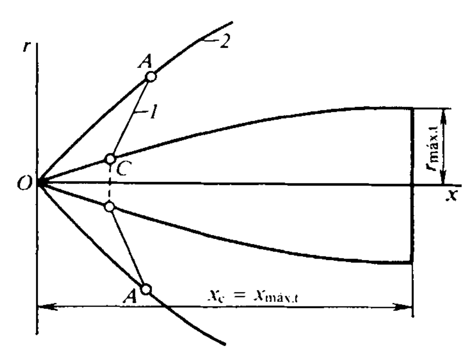


Fig. 10.32. Curvatura de la onda de choque debido al efecto de perturbaciones débiles

presión, densidad y velocidad del sonido tenemos: $p = p_\infty + p'$; $\rho = \rho_\infty + \rho'$; $a = a_\infty + a'$. Aquí, V_∞, p_∞, ρ_∞, a_∞ son los parámetros del flujo no perturbado; V'_x, V'_r, V'_γ, p', ρ', a', las componentes adicionales de los correspondientes parámetros condicionadas por el carácter perturbado del flujo.

Los valores de estas componentes han de ser tales que las siguientes desigualdades sean justas $V'_x \ll V_\infty$, $V'_r \ll V_\infty$, $V'_\gamma \ll V_\infty$, $p' \ll p_\infty$, $\rho' \ll \rho_\infty$, $a' \ll a_\infty$.

Una condición análoga debe también satisfacer el potencial adicional φ' en la expresión para su valor total $\varphi = \varphi_\infty + \varphi'$, o sea, $\varphi' \ll \varphi_\infty$. A semejantes condiciones la ecuación no lineal para el potencial de velocidad

$$(V_x^2 - a^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + (V_r^2 - a^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}(V_\gamma^2 - a^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial \gamma^2} + 2V_xV_r\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial r} + \frac{2}{r}V_xV_\gamma\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial\gamma} + \frac{2}{r}V_rV_\gamma\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial\gamma} - \frac{V_r(a^2+V_\gamma^2)}{r} = 0 \qquad (10.21)$$

se linealiza y toma la forma

$$(1 - \mathrm{M}_\infty^2)\,\partial^2\varphi'/\partial x^2 + \partial^2\varphi'/\partial r^2 + (1/r)\,\partial^2\varphi'/\partial\gamma^2 + (1/r)\,\partial\varphi'/\partial r = 0. \qquad (10.22)$$

La ecuación (10.22) es lineal con relación a la función buscada φ' y constituye la base teórica de aerodinámica de los flujos estacionarios débilmente perturbados

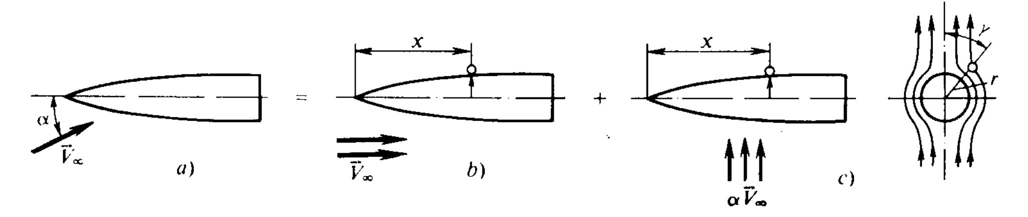


Fig. 10.33. Sólido delgado de revolución en un flujo linealizado:
a, flujo sumario no axisimétrico; *b*, componentes del flujo axisimétrico; *c*, flujo adicional transversal

(linealizados) alrededor de sólidos de revolución delgados. Para ella se han hallado soluciones generales que permiten calcular la velocidad y la presión alrededor de sólidos de revolución delgados (incluidos los que están en movimiento bajo pequeño ángulo de ataque).

10.24. El potencial de velocidad en el caso de la circulación linealizada alrededor de un sólido de revolución delgado se presenta en la forma $\varphi = \varphi_\infty + \varphi'$, donde φ' es el potencial adicional de velocidad de un flujo perturbado linealizado (potencial de perturbación); φ_∞ es el potencial de velocidad del flujo no perturbado. El valor de φ' se puede representar en forma de una suma (fig. 10.33):

$$\varphi' = \varphi'_1 + \varphi'_2, \qquad (10.23)$$

donde $\varphi'_1(x, r)$ es una función que representa el potencial adicional de las velocidades de un flujo perturbado axisimétrico y $\varphi'_2(x, r, \gamma)$, una componente adicional del potencial perturbado condicionada por la circulación transversal. Así, pues,

$$\varphi = \varphi_\infty + \varphi'_1(x, r) + \varphi'_2(x, r, \gamma). \qquad (10.24)$$

En la teoría de los flujos linealizados φ'_1 y φ'_2 se consideran funciones que, siendo las soluciones de las ecuaciones de movimiento, determinan flujos independientes entre sí.

10.25. La esencia del método de las fuentes consiste en la sustitución del sólido sometido a la circulación por un sistema de fuentes y sumideros distribuidos de manera constante a lo largo del eje longitudinal. La ley de distribución de éstos debe ser tal que como resultado de la superposición de un flujo no perturbado sobre la corriente de las fuentes, una de las líneas de corriente del flujo sumario coincida con la generatriz del sólido de revolución. En tal caso los parámetros de la corriente son los mismos que al circular alrededor de un sólido de revolución real.

10.26. Las investigaciones muestran que el empleo de los métodos linealizados de cálculo de la circulación alrededor de los sólidos de revolución proporcionan resultados satisfactorios si el parámetro de similitud $\mathbf{K}_1 = \mathbf{M}_\infty/\lambda_{\text{máx.t}} < 1$. Así, pues, si el número $\mathbf{M}_\infty$ aumenta puede llegar tal momento cuando para el sólido de revolución prefijado con cierto alargamiento $\lambda_{\text{máx.t}}$ resulta imposible aplicar dicho método, ya que en el flujo aparecerán no perturbaciones débiles, como está previsto en la teoría de los flujos linealizados, sino fuertes (ondas de choque).

10.27. El coeficiente de presión en cierto punto A (x, r) de la generatriz de un sólido de revolución delgado (véase la fig. 10.6) se determina por la dependencia

$$\bar{p} = (1/\lambda^2_{\text{máx}})\,(2i^0_x - 6\bar{x}i^1_x/u + 3\bar{x}^2 i^2_x/u^2) - \beta^2. \qquad (10.25)$$

De acuerdo con el planteamiento del problema, aquí $\lambda_{\text{máx.t}} = x_{\text{máx.t}}/(2r_{\text{máx.t}}) = 10$; $\beta = dr/dx = (1 - x/x_{\text{máx.t}})/\lambda_{\text{máx.t}} = (1 - x/10)/10$ y la función $u = x/(r\alpha') = x/(r\sqrt{\mathbf{M}^2_\infty - 1}) = 0{,}578x/r$. Tomando en consideración que $r = x\,(2 - x/x_{\text{máx.t}})/(2\lambda_{\text{máx.t}}) = (2 - x/10)\,x/20$, hallamos $u = 11{,}56/(2 - x/10)$. En el caso particular cuando $x = 0$ (punta del cono) el valor de esta función $u = u_{\text{cono}} = 11{,}56/2 = 5{,}78$, mientras que en la sección de base, donde $x = 10$, el valor de $u = u_{\text{s.b}} = 11{,}56$.

Elijamos una serie de valores de u en el intervalo $5{,}78 \leqslant u \leqslant 11{,}56$ y determinemos para cada uno de ellos, según las correspondientes fórmulas de la teoría linealizada de la circulación supersónica de sólidos delgados, los valores de i^0_x, i^1_x, i^2_x y, a continuación, determinemos los valores de $\bar{x} = x/x_{\text{máx.t}} = x/10$ empleando la ecuación $\bar{x} = x/10 = 2 - 11{,}56/u$. Simultáneamente hallamos la variable adimensional $\bar{r}^2 = r^2/r^2_{\text{máx.t}}$ haciendo uso de la ecuación $\bar{r}^2 = \bar{x}^2\,(2 - \bar{x})^2$, así como determinamos los cuadrados de los ángulos $\beta^2 = (1/100)\,(1 - x/10)^2$.

Los resultados se aducen en la tabla 10.3.

Tabla 10.3

u	i^0_x	i^1_x	i^2_x	$\bar{x}$	β^2	$\bar{p}$	$\bar{r}^2$
6,0	2,478	8,953	37,21	0,073	0,0086	0,0346	0,0197
...	...	...	...	...	...	...	...
10,6	3,052	21,80	176,70	0,909	0,0001	−0,0123	0,9833
11,56	3,140	24,77	221,30	1,000	0,0000	−0,0161	1,0000

Empleando la dependencia (10.25) hallamos $\bar{p}$ (véase la tabla 10.3) y, a continuación, calculamos el coeficiente de resistencia de ondas de choque $c_{x\,\text{ch}} = \int_0^1 \bar{p}\, d\bar{r}^2$. El valor de este coeficiente, obtenido mediante la integración numérica, $c_{x\,\text{ch}} = 0{,}0118$.

La correspondiente fuerza de resistencia para el vuelo cerca de la superficie terrestre [véase (10.11)] $X_{ch} = 0,5kc_{x\ ch}p_\infty M_\infty^2 \pi r_{máx.t}^2 = 26,3 \cdot 10^2$ N.

10.28. El coeficiente de resistencia de ondas de choque de un cono puntiagudo delgado

$$c_{x\,ch} = \beta_{cono}^2 [2 \ln (u_{cono} + \sqrt{u_{cono}^2 - 1}) - 1], \tag{10.26}$$

donde $u_{cono} = 1/(\alpha'\beta_{cono}) = 1/[\sqrt{M_\infty^2 - 1}\,(r_{máx.t}/x_c)] = 11,55$.

Así, pues, $c_{x\ ch} = 0,01328$. La correspondiente fuerza de resistencia [véase (10.11)] $X_{ch} = 0,5kc_{x\ ch}p_\infty M_\infty^2 \pi r_{máx.t}^2 = 2959$ N.

10.29. En virtud de la teoría linealizada de la circulación el coeficiente de la fuerza normal de un sólido de revolución delgado

$$c_y = (4\alpha'\alpha/\lambda_{máx.t}) \int_0^1 \bar{r}\,(2i_r^0 - 6\bar{x}i_r^1/u + 3\bar{x}^2 i_r^2/u^2)\,d\bar{x}. \tag{10.27}$$

Aquí, $\lambda_{máx.t} = x_{máx.t}/(2r_{máx.t}) = 10$; $\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 1,73$; $u = x/(\alpha' r) = x/\{1,73\,[r_{máx.t}\,x\,(2 - x/x_{máx.t})/x_{máx.t})]\} = 11,56/(2 - x/10)$.

Las funciones i_r^0, i_r^1, i_r^2 se hallan empleando las correspondientes fórmulas de la teoría linealizada de la circulación supersónica alrededor de sólidos delgados en función del parámetro u. Para la punta del sólido ($x = 0$) este parámetro $u = u_{cono} = 5,78$, en tanto que para la sección de base ($x = 10$) el valor de $u = u_p = 11,56$. Las funciones halladas para los valores de u, situadas en el intervalo $5,78 \leqslant u \leqslant 11,56$, se ofrecen en la tabla 10.4.

Tabla 10.4

u	i_r^0	i_r^1	i_r^2	$\bar{x}$	$\bar{r}$	$\bar{c}$	$\bar{c}_1$
5,78	—	—	—	—	0	0	0
6,00	5,916	16,51	60,07	0,075	0,114	0,106	0,0020
...	...	...	...	...	...	...	...
11,00	10,93	58,68	415,0	0,950	0,998	0,0539	0,0128
11,56	11,52	65,03	485,0	1,000	1,000	0,0097	0,0024

En la tabla 10.4 se aducen también las coordenadas relativas $\bar{x} = x/x_{máx.t}$ halladas con la ecuación $\bar{x} = 2\,[1 - \lambda_{máx.t}/(\alpha' u)]$ y los correspondientes radios adimensionales $\bar{r} = \bar{x}\,(2 - \bar{x})$. Según estos datos se han calculado las funciones

$$\bar{c} = (4\alpha'\alpha\bar{r}/\lambda_{máx.t})\,(2i_r^0 - 6\bar{x}i_r^1/u + 3\bar{x}^2 i_r^2/u^2) \tag{10.28}$$

a condición de que $4\alpha'\alpha/\lambda_{máx.t} = 0,0692$.

Empleando los valores de la función $\bar{c}$ dados en la tabla 10.4, mediante la integración numérica hallamos el coeficiente de la fuerza normal $c_y = \int_0^1 \bar{c}\,d\bar{x} = 0,211$.

El correspondiente coeficiente del momento, determinado con relación al eje transversal que pasa por la punta, se calcula para un sólido de revolución delgado por la fórmula

$$m_z = -(\alpha'\alpha/\lambda_{máx.t}) \int_0^1 \bar{x}\bar{r}\,(2i_r^0 - 6\bar{x}i_r^1/u + 3\bar{x}^2 i_r^2/u^2)\,d\bar{x}. \tag{10.29}$$

Introduciendo la anotación

$$\bar{c}_1 = (\alpha'\alpha/\lambda_{\text{máx.t}})\,\bar{x}\bar{r}\,(2i_r^0 - 6\bar{x}i_r^1/u + 3\bar{x}^2 i_r^2/u^2), \qquad (10.30)$$

obtenemos

$$m_z = -\int_0^1 \bar{c}_1\,d\bar{x}. \qquad (10.31)$$

Los valores calculados de $\bar{c}_1$ se muestran en la tabla 10.4. Empleándolos y efectuando la integración numérica hallamos $m_z = -0{,}0242$. A los coeficientes aerodinámicos obtenidos corresponden la fuerza normal $Y = 0{,}5c_y kp_\infty \mathrm{M}_\infty^2 \pi r_{\text{máx.t}}^2 = 4{,}7\cdot10^4$ N y el momento $M_z = 0{,}5m_z kp_\infty \mathrm{M}_\infty^2 \pi r_{\text{máx.t}}^2 x_{\text{máx.t}} = -5{,}39\cdot10^4$ N·m.

Según los valores hallados de m_z y c_y determinamos el coeficiente del centro de presión: $c_p = -m_z/c_y = 0{,}1146$.

10.30. El coeficiente de la fuerza longitudinal aerodinámica de un cono delgado en movimiento bajo un pequeño ángulo de ataque se calcula por la fórmula

$$c_x = \beta_{\text{cono}}^2\,[2\ln(u_{\text{cono}} + \sqrt{u_{\text{cono}}^2 - 1}) - 1] - \alpha^2. \qquad (10.32)$$

Aquí $\alpha = 0{,}1$; $\beta_{\text{cono}} = r_{\text{máx.t}}/x_{\text{máx.t}} = 0{,}05$; $u_{\text{cono}} = 1/(\alpha'\beta_{\text{cono}}) = x_{\text{máx.t}}/(r_{\text{máx.t}}\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}) = 11{,}55$.

Según estos valores determinamos $c_x = 0{,}0032$. El coeficiente de la fuerza normal

$$c_y = 2\alpha'\alpha\beta_{\text{cono}}\sqrt{u_{\text{cono}}^2 - 1} = 0{,}199. \qquad (10.33)$$

Pasando a las coordenadas ligadas a la trayectoria calculamos los coeficientes de resistencia al avance y la fuerza de sustentación (sin tomar en consideración el rozamiento y la resistencia de base): $c_{x_a} = c_y\alpha + c_x = 0{,}0231$; $c_{y_a} = c_y - c_x\alpha = 0{,}198$.

La resistencia al avance y la fuerza de sustentación: $X_a = 0{,}5c_{x_a} kp_\infty M_\infty^2 \times \pi r_{\text{máx.t}}^2 = 5170$ N; $Y_a = 0{,}5c_{y_a} kp_\infty \mathrm{M}_\infty^2 \pi r_{\text{máx.t}}^2 = 441\cdot10^2$ N.

El coeficiente del centro de presión del cono $c_p = (2/3)\,(1 + \beta_{\text{cono}}^2) = 0{,}668$. El coeficiente del momento (con relación al eje transversal, que pasa por el vértice) $m_z = -c_p c_y = -0{,}1322$.

El correspondiente momento $M_z = 0{,}5m_z kp_\infty \mathrm{M}_\infty^2 \pi r_{\text{máx.t}}^2 x_c = -2945 \times 10^2$ N·m.

10.31. Resolvemos el problema empleando las tablas de Z. Kopal. Las fórmulas (que sólo toman en consideración la distribución de la presión) para calcular los coeficientes aerodinámicos con ayuda de dichas tablas, tienen la forma

$$c_{x\,\text{ch}} = (8/\pi)\,K_D + \alpha^2\,\{(K_{D_2} - \tilde{K})\,[8K_D/\pi + 2/(k\mathrm{M}_\infty^2)] + 1/(k\mathrm{M}_\infty^2)\}; \qquad (10.34)$$

$$c_{y_a} = \alpha\,(K_N - K_D)\,8/\pi; \qquad (10.35)$$

$$m_z = [2\alpha/(3k\mathrm{M}_\infty^2)]\,(p_{\text{cono}}^0/p_\infty)\,(\eta_{\text{cono}}/p_{\text{cono}}^0)\,\mathrm{ctg}\,\beta_{\text{cono}}\,(1 + \mathrm{tg}^2\,\beta_{\text{cono}}); \qquad (10.36)$$

$$c_p = m_z/c_y = (2/3)\,(1 + \mathrm{tg}^2\,\beta_{\text{cono}}). \qquad (10.37)$$

Aquí K_D, K_{D_2}, K_N son coeficientes determinados en las tablas de Z. Kopal; $\tilde{K} = k\tilde{V}_{\text{cono}}^0 x_c d/[2(\tilde{a}_{\text{cono}}^0)^2\,(k-1)]$; $\tilde{V}_{\text{cono}}^0 = V_{\text{cono}}^0/V_{\text{máx}}$; $\tilde{a}_{\text{cono}}^0 = a_{\text{cono}}^0/V_{\text{máx}}$, las funciones que se calculan correspondientemente por las velocidades del flujo V_{cono}^0 y del sonido a_{cono}^0 en el cono sometido a circulación bajo el ángulo de ataque

$\alpha = 0$; $(\tilde{a}^0_{cono})^2 = kRT_\infty(1 - \tilde{V}^{02}_{cono})[1 + (k-1)M^2_\infty/2]$; $p^0_{cono}/p_\infty = \bar{p}_{cono}q_\infty/$ $/p_\infty + 1$, las razones entre la presión p^0_{cono} en la superficie del cono y la presión p_∞ en el flujo incidente (la magnitud p_{cono} puede determinarse por las dependencias $\bar{p}_{cono} = f(M_\infty, \beta_{cono})$); η_{cono}/p^0_{cono}, una función determinada en las tablas de la circulación supersónica alrededor de un cono bajo cierto ángulo de ataque; el supraíndice «0» significa que el parámetro (p^0_{cono}, V^0_{cono} y otros) se ha calculado para la circulación axisimétrica alrededor del cono.

Hallemos en las tablas todas las variables necesarias: $K_D = 0{,}1133$; $K_{D_2} = 2{,}82$; $K_N = 0{,}6596$; $\tilde{V}^0_{cono} = 0{,}70$; $x_c = -0{,}3305$; $d = 0{,}2092$; $\eta_{cono}/p^0_{cono} = 2{,}5291$. Calculamos $(\tilde{a}^0_{cono})^2 = 0{,}102$; $\tilde{K} = -0{,}83$; $p^0_{cono}/p_\infty = \bar{p}_{cono}kM^2_\infty/2 + 1 = 2{,}5244$.

Determinamos los coeficientes aerodinámicos del cono: $c_{x\,ch} = 0{,}343$; $c_{y_a} = 0{,}2429$; $m_z = 0{,}205$; $c_p = 0{,}755$.

10.32. Los parámetros del gas en el cono a las condiciones dadas se calculan por el método aproximado. Para una altura de $H = 30$ km, en las tablas de la atmósfera normal hallamos los parámetros del aire; $p_\infty = p_1 = 1196$ Pa; $\rho_\infty = \rho_1 = 0{,}0184$ kg/m³; $T_\infty = T_1 = 226{,}5$K; $a_\infty = a_1 = 301{,}7$ m/s. Determinamos el número $M_1 = V_1/a_1 = 26{,}5$.

Para el caso de la circulación de un gas alrededor de un cono a velocidades muy altas de vuelo, al calcular los ángulos β_{cono} (o bien θ_{ch}), la dependencia

$$1/[M_\infty(\theta_{ch} - \beta_{cono}) = 2(k+1)M_\infty\theta_{ch}/[2 + (k-1)M^2_\infty\theta_{ch}], \qquad (10.38)$$

ofrece resultados suficientemente buenos y con ella calculamos

$$\beta_{cono} = \theta_{ch} - [2 + (k-1)M^2_\infty\theta^2_{ch}]/[2(k+1)M^2_\infty\theta_{ch}] = 0{,}344 \quad (19.51°).$$

La presión en el cono se calcula por la dependencia

$$p_{cono} = p_1\,\{[2k/(k+1)](K_0^2 - 1) + (K_0 - K_1)^2\,kK_0^2\,(k+1)/[2 + (k-1)K_0^2] + 1\},$$

donde $K_0 = M_\infty\theta_{ch}$, $K_1 = M_\infty\beta_{cono}$.

Como $K_0 = 26{,}5\cdot 0{,}3752 = 9{,}9420$ y $K_1 = 26{,}5\cdot 0{,}3423 = 9{,}07$, $p_{cono} = 144{,}5\cdot 10^3$ Pa.

El coeficiente de presión $\bar{p}_{cono} = [2/(kM^2_\infty)](p_{cono}/p_\infty - 1) = 0{,}244$. Para el cono puntiagudo $c_{x\,ch} = \bar{p}_{cono} = 0{,}244$.

10.33. Para resolver el problema planteado hagamos uso de las dependencias aproximadas.

Para el cono puntiagudo

$$c_{x\,ch} = \bar{p}_{cono} = 2\cdot 10^{-3}(0{,}8 + M_\infty^{-2})\,\beta^{1,7}_{cono} = 0{,}411. \qquad (10.39)$$

Para el cono con obtuse esférico

$$c_{x\,ch} = c_{x\,ch\,esf} + c_{x\,ch\,cono} = \bar{p}_0\,[R^2_T/r^2_{máx.\,t})\cos^2\beta_{cono}(1 - \cos^2\beta_{cono}/2) + (x'_{cono}/r^2_{máx.\,t})\,\mathrm{sen}^3\beta_{cono}(2r_{máx.\,t} - x_c\,\mathrm{sen}\,\beta_{cono})]. \qquad (10.40)$$

Aquí $c_{x\,ch\,esf}$ y $c_{x\,ch\,cono}$ son los coeficientes de resistencia de ondas de choque del obtuse esférico y del cono truncado, respectivamente; $\bar{p}_0 = (p'_0 - p_\infty)/$ $/q_\infty$, el coeficiente de presión en el punto de ataque del sólido donde el flujo está

por completo en remanso. Este coeficiente

$$\bar{p}_0=\frac{2}{k\mathrm{M}_1^2}\left\{\frac{k-1}{k+1}\left[\frac{(k+1)^2}{2(k-1)}\right]^{k/(k-1)}\mathrm{M}_1^2\left(\frac{2k}{k-1}-\frac{1}{\mathrm{M}_1^2}\right)^{-k/(k-1)}-1\right\}. \quad (10.41)$$

Realicemos los cálculos: $\bar{p}_0 = 1{,}75$; $c_{x\ \mathrm{ch}} = 0{,}804$.

El coeficiente de resistencia de ondas de choque de un cono que tiene obtuse plano, puede calcularse de modo aproximado por la misma dependencia (10.40), en la que en lugar del coeficiente de resistencia de ondas de choque $c_{x\ \mathrm{ch\ esf}}$ del obtuse esférico ha de tomarse la variable $c_{x\ \mathrm{ch\ pl}}$ (coeficiente de resistencia de ondas de choque en forma de cara plana). Para el cono de cara plana, como resultado de la indicada sustitución, obtenemos

$$c_{x\,\mathrm{ch}}=c_{x\,\mathrm{ch\,pl}}+c_{x\,\mathrm{ch\,cono}}=$$
$$=\bar{p}_0\left[0{,}915+(x_c/r^2_{\mathrm{máx.t}})\operatorname{sen}^3\beta_{\mathrm{cono}}(2r_{\mathrm{máx.t}}-\right.$$
$$\left.-x_c\operatorname{sen}\beta_{\mathrm{cono}})\right]=1{,}882.$$

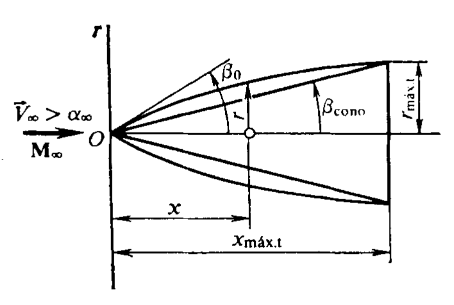


Fig. 10.34. Esquema de narices cónica y parabólica

10.34. De acuerdo con las dimensiones prefijadas (fig. 10.34) construyamos sólidos de revolución parabólico y cónico. Calculemos: el ángulo del cono $\beta_{\mathrm{cono}} = \operatorname{arctg}(r_{\mathrm{máx.t}}/x_{\mathrm{máx.t}}) = 14{,}03°$; el alargamiento de los sólidos de revolución $\lambda_{\mathrm{máx.t}} = x_{\mathrm{máx.t}}/(2r_{\mathrm{máx.t}}) = 2$; el ángulo de aguzadura del sólido de revolución parabólico $\beta_0 = \operatorname{arctg}(d\bar{r}/d\bar{x})\,|_{x=0} = \operatorname{arctg}(1/\lambda_{\mathrm{máx.t}}) = 26{,}5°$.

Analicemos la resolución linealizada. La comparación de los resultados de semejante resolución con los datos experimentales muestra que es conveniente realizarla si el alargamiento de los sólidos $\lambda_{\mathrm{máx.t}} \geqslant 2$ y el número $\mathrm{M}_\infty \geqslant 1{,}5$.

Para la circulación linealizada axisimétrica alrededor de un sólido de revolución delgado es justa la fórmula para el coeficiente de resistencia de ondas de choque

$$c_{x\,\mathrm{ch}}=2\int_0^{\tilde{x}_c}\left[(1/\pi)\int_0^{\mathrm{arch}\,u}S''(x-\alpha' r\,\mathrm{ch}\,z)\,dz-\beta^2\right]\bar{r}\beta\,d\tilde{x}, \quad (10.42)$$

donde $S'' = d^2S(\varepsilon)/d\varepsilon^2$ es la segunda derivada del área S de la sección transversal del sólido por la coordenada ε; $\alpha' = \sqrt{\mathrm{M}_\infty^2-1}$; $z = \mathrm{arch}\,[(x-\varepsilon)/(\alpha' r)]$; $\varepsilon = x - \alpha' r$; β, el ángulo entre la tangente a la generatriz en el punto dado y el eje longitudinal del sólido; $\tilde{x}_c = x/r_{\mathrm{máx.t}}$.

Después de la integración (10.42) puede representarse en forma general:

$$c_{x\,\mathrm{ch}}=\beta_0^2 D(u_0), \quad (10.43)$$

donde $u_0 = 1/(\alpha'\beta_0) = \lambda_{\mathrm{máx.t}}/\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2-1}$ [si $\mathrm{M}_\infty \gg 1$, $u_0 \approx 1/(\beta_0\mathrm{M}_\infty) = \mathrm{M}_\infty/\lambda_{\mathrm{máx.t}}$]; $D(u_0)$, cierta función del parámetro u_0 que depende de la forma de la generatriz del sólido de revolución y del número M_∞.

Determinamos la resistencia de la nariz cónica para $\mathrm{M}_\infty = 2$. De (10.43) obtenemos

$$c_{x\,\mathrm{ch\,cono}}=\beta^2_{\mathrm{cono}}D(u_0)=\beta_{\mathrm{cono}}\left[2\ln\left(u_{\mathrm{cono}}+\sqrt{u^2_{\mathrm{cono}}-1}\right)-1\right], \quad (10.44)$$

donde $u_{\mathrm{cono}} = x/(\alpha' r) = 1/(\alpha'\beta_{\mathrm{cono}})$ es el parámetro u para el cono.

Por lo tanto, $c_{x\ \mathrm{ch\ cono}} = 0{,}12$.

Para la nariz parabólica

$$c_{x\ \mathrm{ch\ par}} = \beta_0^2 (2/3) \ln [2/(\mathrm{M}_\infty \beta_0) + 1/18] = 0{,}122.$$

Analicemos las velocidades hipersónicas. Empleemos las dependencias para el coeficiente de la resistencia de ondas de choque que toma en consideración las singularidades del movimiento de sólidos axisimétricos con tales velocidades. Para un cono puntiagudo

$$\mathrm{M}_\infty^2 c_{x\ \mathrm{ch\ cono}} = 2{,}091 K_1^2 (1 + 0{,}143 K_1^{-3/2}), \tag{10.45}$$

donde $K_1 = \mathrm{M}_\infty \beta_{\mathrm{cono}}$.

Haciendo $\mathrm{M}_\infty = 10$, obtenemos $c_{x\ \mathrm{ch\ cono}} = 0{,}125$.

Para la nariz parabólica

$$c_{x\ \mathrm{ch\ par}} \beta_0^{-2} = 0{,}697 + 0{,}213 K_1^{-3/2}. \tag{10.46}$$

De aquí $c_{x\ \mathrm{ch\ par}} = 0{,}697\beta_0^2 + 0{,}213\beta_0^2 (\mathrm{M}_\infty \beta_0)^{-3/2} = 0{,}152$.

A muy altas velocidades supersónicas, los coeficientes aerodinámicos de los sólidos de revolución también se pueden calcular por la teoría newtoniana de remanso. En correspondencia con ella el coeficiente de resistencia de ondas de choque de la nariz del sólido, en movimiento bajo un ángulo de ataque $\alpha = 0$,

$$c_{x\ \mathrm{ch}} = (2\bar{p}^0/\mathrm{sen}^2 \beta_0) \int_0^1 \mathrm{sen}^2 \beta \bar{r}\, d\bar{r}, \tag{10.47}$$

donde $\bar{p}^0$ es el coeficiente de presión en la punta cónica; $\bar{r} = r/r_{\text{máx.t}}$.

Determinamos los coeficientes de resistencia de ondas de choque transformando (10.47), teniendo en cuenta la forma de la nariz. Para el cono

$$c_{x\ \mathrm{ch}} = \bar{p}^0 = 2(k+1)(k+7)\beta_{\mathrm{cono}}^2/(k+3)^2 = 0{,}122. \tag{10.48}$$

Para la nariz parabólica $c_{x\mathrm{ch}} = 0{,}667\beta_0^2 = 0{,}141$.

Hay que indicar que en este problema se emplean fórmulas aproximadas, con lo que se explica la «dispersión» de los valores obtenidos.

10.35. A velocidades hipersónicas la onda de choque se acerca casi por completo a la superficie del cono en movimiento. La diferencia de los ángulos $\theta_{\mathrm{ch}} - \beta$ es, en tal caso, muy pequeña. En la región entre la onda de choque y la superficie del cono que es aquí la componente radial de la velocidad V_r (véase la fig. 10.1) se puede representar, aproximadamente, en cualquier punto en forma del desarrollo

$$V_r = a + b(\theta_{\mathrm{ch}} - \beta_{\mathrm{con}}) + c(\theta_{\mathrm{ch}} - \beta_{\mathrm{cono}})^2 + \ldots. \tag{10.49}$$

Los coeficientes de este polinomio se determinan basándose en las condiciones de frontera de la superficie del cono, es decir, $V_r = V_{\mathrm{cono}}$. Como resultado tenemos $a = V_{\mathrm{cono}}$; $b = 0$; $c = -V_{\mathrm{cono}}$, o sea, $V_r = V_{\mathrm{cono}} - (\theta - \beta_{\mathrm{cono}})^2 V_{\mathrm{cono}}$. Empleando las condiciones de frontera en la superficie de la onda de choque $V_{r\ \mathrm{ch}} = V_\infty \cos \theta_{\mathrm{ch}}$ y $V_\theta = V_\infty \,\mathrm{sen}\, \theta_{\mathrm{ch}}$, así como la dependencia para calcular la razón de las densidades antes y después de la onda de choque

$$\rho_2/\rho_1 = [(k+1)/(k-1)]/\{1 + 2/[(k-1)(\mathrm{M}_\infty^2 \,\mathrm{sen}^2\, \theta_{\mathrm{ch}})]\},$$

después de fáciles transformaciones, obtenemos

$$\theta_{\mathrm{ch}} - \beta_{\mathrm{cono}} = 0{,}5\, \{(k-1)/(k+1) + [2/(k+1)]/(\mathrm{M}_\infty^2 \,\mathrm{sen}^2\, \theta_{\mathrm{ch}})\}\, \mathrm{sen}\, \theta_{\mathrm{ch}}. \tag{10.50}$$

Para los conos delgados sen $\theta_{ch} \approx \theta_{ch}$ y, por consiguiente,

$$\theta_{ch} - \beta_{cono} = 0{,}5\ \{(k-1)/(k+1) + [2/(k+1)]/(M_\infty^2\theta_{ch}^2)\}\ \theta_{ch}. \qquad (10.51)$$

De (10.51) se desprende que

$$\theta_{ch} = \beta_{cono}\,(k+1)/(k+3) + \sqrt{\beta_{cono}^2\,[(k+1)/(k+3)] + 2/[(k+3)\,M_\infty^2]}. \qquad (10.52)$$

Calculemos el ángulo de la onda de choque para $M_\infty = 10$: $\theta_{ch} = 0{,}212$ (16,1°). Si $M_\infty \to \infty$, con (10.52) hallamos

$$\theta_{ch} = 2\,(k+1)\,\beta_{cono}/(3+k) = 0{,}1910\ (10{,}5°). \qquad (10.53)$$

10.36. En las tablas de la atmósfera normal para una altitud $H = 5$ km, hallamos: $p_\infty = p_1 = 0{,}54 \cdot 10^5$ Pa; $\rho_\infty = \rho_1 = 0{,}7364$ kg/m³; $T_\infty = T_1 = 255{,}7$ K; $a_\infty = a_1 = 320{,}5$ m/s. El ángulo de la onda de choque adherida se determina utilizando la fórmula para la circulación hipersónica alrededor de un cono

$$\operatorname{tg}\theta_{ch} = 2\operatorname{tg}\beta_{cono}\,[(1-\bar\rho/2)\,(1+\sqrt{1-2\bar\rho\operatorname{tg}^2\beta_{cono}/(1-\bar\rho/2)^2}]^{-1}, \qquad (10.54)$$

donde $\bar\rho = \rho_\infty/\rho_{ch} = \rho_1/\rho_2$ es la razón de las densidades del gas antes y después de la onda de choque.

La entalpía y la presión tras la onda de choque

$$i_2 = i_1 + (1-\bar\rho^2)\,V_{n1}^2/2; \qquad p_2 = p_1\,[1 + k_1 V_{n1}^2\,(1-\bar\rho)/a_1^2].$$

Hallamos la solución por vía de las aproximaciones sucesivas. Como primera aproximación tomamos $\bar\rho = 0{,}108$ y, empleando (10.54), calculamos para este valor $\operatorname{tg}\theta_{ch} = 1{,}1298$; $\theta_{ch} = 48{,}48°$. Tomando en consideración que $V_{n1} = V_\infty \operatorname{sen}\theta_{ch}$ e $i_1 = c_p T_1$, la entalpía $i_2 = 1{,}165 \cdot 10^7$ m²/s² y la presión, $p_2 = 15{,}18 \cdot 10^6$ Pa.

En el diagrama $i - p$ determinamos la densidad tras la onda de choque $\rho_2 = 6{,}59$ kg/m³. A este valor corresponde $\bar\rho = 0{,}7364/6{,}59 = 0{,}111$.

Como resultado de la segunda aproximación hallamos el nuevo valor del ángulo de la onda de choque $\theta_{ch} = 48{,}52°$. La diferencia de los valores del ángulo de la onda de choque en la primera y segunda aproximaciones constituye un total de ~0,1 %, por lo que tomamos $\theta_{ch} = 48{,}52°$.

El coeficiente de presión en el cono

$$\bar p_{cono} = 2\operatorname{sen}^2\beta_{cono}\,[(1-0{,}25\bar\rho)\cos^2(\theta_{ch}-\beta_{cono})]^{-1} = 1{,}032. \qquad (10.55)$$

10.37. Para resolver el problema hagamos uso de la polar de choque y la curva cordiforme construidas a cierta escala para el número $M_\infty = 2{,}22$ y que están representadas en la fig. 10.35. Elijamos el valor de la velocidad V_{cono} en la superficie del cono. De la figura se desprende que para $V_{cono} = V_{cuña}$ el ángulo de la cuña $\beta_{cuña}$ es menor que el del cono β_{cono}. La onda de choque delante de la cuña tiene mayor ángulo de inclinación que delante del cono, es decir, $\theta_{ch.cuña} > \theta_{ch.cono}$.

Debido a la mayor intensidad de la onda delante de la cuña la presión de remanso detrás de ella $p_{0\,cuña}$ es menor que tras la onda de choque cónica $p_{0\,cono}$, o sea, $p_{0\,cuña} < p_{0\,cono}$. De la expresión para la presión

$$p_{cuña} = p'_{0\,cuña}\,(1 - V_{cuña}^2/V_{máx}^2)^{k/(k-1)}; \qquad (10.56)$$

$$p_{cono} = p'_{0\,cono}\,(1 - V_{cono}^2/V_{máx}^2)^{k/(k-1)} \qquad (10.57)$$

y de la condición de igualdad de las velocidades $V_{\text{cuña}} = V_{\text{cono}}$ obtenemos que los valores entre paréntesis son iguales entre sí y, por lo tanto, la presión en la cuña es menor que en el cono: $p_{\text{cuña}} < p_{\text{cono}}$.

Como con esto la temperatura de remanso tras las ondas de choque es la misma ($T'_{0\,\text{cuña}} = T'_{0\,\text{cono}}$), en correspondencia con las expresiones

$$T_{\text{cuña}} = T'_{0\,\text{cuña}}(1 - V^2_{\text{cuña}}/V^2_{\text{máx}}); \tag{10.58}$$

$$T_{\text{cono}} = T'_{0\,\text{cono}}(1 - V^2_{\text{cono}}/V^2_{\text{máx}}), \tag{10.59}$$

en las que $V_{\text{cuña}} = V_{\text{cono}}$ y las temperaturas en la cuña y el cono son iguales: $T_{\text{cuña}} = T_{\text{cono}}$.

La relación entre las densidades puede determinarse partiendo de las ecuaciones de estado representándolas en la forma $\rho_{\text{cuña}}/\rho_{\text{cono}} = p_{\text{cuña}}T_{\text{cono}}/(p_{\text{cono}}T_{\text{cuña}})$. Como aquí $T_{\text{cono}} = T_{\text{cuña}}$, $\rho_{\text{cuña}}/\rho_{\text{cono}} = p_{\text{cuña}}/p_{\text{cono}}$; por consiguiente, cuando $p_{\text{cuña}} < p_{\text{cono}}$, tendremos $\rho_{\text{cuña}} < \rho_{\text{cono}}$.

Así, pues, con la igualdad de las velocidades en la superficie correspondientes a la cuña y al cono $p_{\text{cuña}} < p_{\text{cono}}$; $T_{\text{cuña}} = T_{\text{cono}}$; $\rho_{\text{cuña}} < \rho_{\text{cono}}$; $\beta_{\text{cuña}} < \beta_{\text{cono}}$.

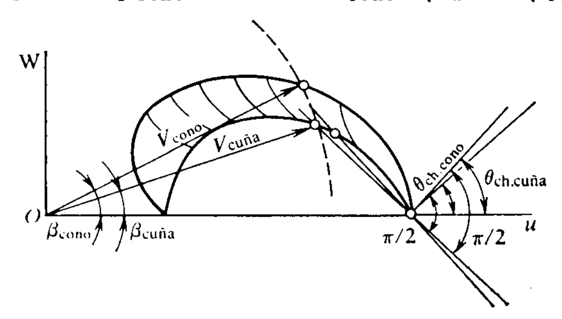


Fig. 10.35. Polar de choque y curva cordiforme

10.38. Al elegir la fórmula de cálculo para el coeficiente de presión, determinemos el carácter de la generatriz del sólido de revolución prefijado. De la ecuación $\bar{r} = \bar{x} + 0{,}2\bar{x}^2$ se deduce que la segunda derivada $\bar{r}'' = 0{,}4$, es decir, $\bar{r}'' > 0$. Esto indica que la curva está dirigida con la concavidad hacia arriba. En virtud de esto, así como teniendo en cuenta el carácter hipersónico de la circulación, para calcular el coeficiente de presión hacemos uso de la fórmula de Buzeman

$$\bar{p} = (\bar{p}_0/\text{sen}^2\,\beta_0)\left\{\text{sen}^2\,\beta - [1/(2\pi rR)]\int_0^S \cos\beta\, dS\right\}, \tag{10.59'}$$

donde β_0 es el ángulo de inclinación de la generatriz junto a la punta del sólido; $\bar{p}_0$, el coeficiente de presión sobre el cono con ángulo β_0; R, el radio de curvatura de la generatriz; S, el área de la sección transversal del sólido de revolución; β, el ángulo de inclinación de la tangente a la generatriz en un punto cualquiera.

Hallamos:

$$\text{tg}\,\beta = dr/dx = r_{\text{máx.t}}/x_{\text{máx.t}} + 0{,}4\,(r_{\text{máx.t}}/x_{\text{máx.t}})\,\bar{x}; \tag{10.60}$$

por consiguiente, $\text{tg}\,\beta_0 = |\,dr/dx\,|_{x=0} = 0{,}2$.

Para el sólido de revolución que investigamos el valor máximo del ángulo local $\beta = \text{arctg}\,(0{,}2 + 0{,}4\cdot 0{,}2\cdot 1) = 15{,}66°$. Con cierta aproximación vamos a considerar que dicho sólido es delgado y tomamos $\text{sen}\,\beta = \beta$; $\cos\beta = 1$.

Así, pues, la expresión (10.59′) se transforma a la forma

$$\bar{p} = (\bar{p}_0/\beta_0^2)\,[\beta^2 - S/(2\pi r R)]. \qquad (10.61)$$

Como el radio de curvatura $R = -(d^2r/dx^2)^{-1}$ y $S = \pi r^2$

$$\bar{p} = (\bar{p}_0/\beta_0^2)\,[\beta^2 + (r/2)\,(d^2r/dx^2)]. \qquad (10.62)$$

El coeficiente de presión $\bar{p}_0$ se calcula empleando la ecuación

$$\bar{p}_0 = (2{,}091K_1^2/\mathrm{M}^2)\,(1 + 0{,}143K_1^{-3/2}). \qquad (10.63)$$

Introduciendo aquí $K_1 = \mathrm{M}_\infty\beta_0 = 2$, obtenemos $\bar{p}_0 = 0{,}0879$. La segunda derivada $d^2r/dx^2 = 0{,}4r^2_{\text{máx.t}}/x^2_{\text{máx.t}} = 0{,}016$.

Por lo tanto, el coeficiente local de presión $\bar{p} = 2{,}1975\,[\beta^2 + 0{,}008\,(\bar{x} + 0{,}2\bar{x}^2)]$.

En el caso particular, para $\bar{x} = 1$ (en el extremo de la generatriz), $\bar{p} = 0{,}1934$.

10.39. El valor de la resistencia de base de un sólido de revolución $X_{\text{s.b}} = c_{x\ \text{s.b}}\,q_\infty S_{\text{máx.t}}$. Aquí $c_{x\ \text{s.b}} = \bar{p}_{\text{s.b}} S_{\text{s.b}}/S_{\text{máx.t}}$; $\bar{p}_{\text{s.b}} = (p_{\text{s.b}} - p)/q_\infty$. En un sólido con la cola (popa) puntiaguda ($S_{\text{s.b}} = 0$) no hay resistencia de base. Pero

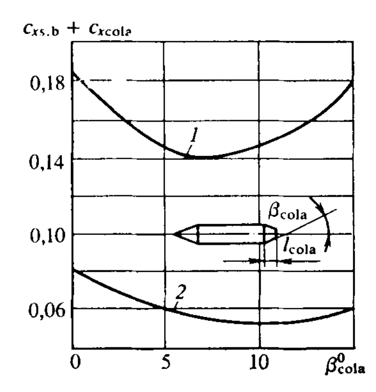


Fig. 10.36. Componentes de la resistencia de la cola de un cono sometido a circulación:
1, capa límite laminar; *2*, capa límite turbulenta

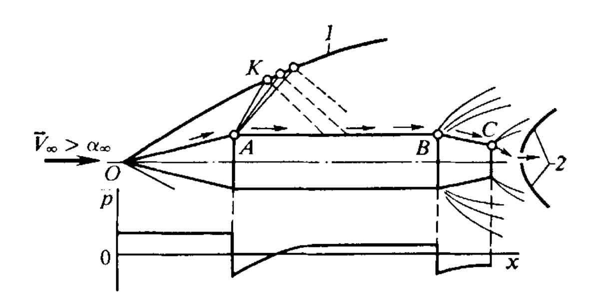


Fig. 10.37. Distribución de la presión sobre el sólido de revolución:
ondas de choque frontal (*1*) y de cola (*2*)

en semejante sólido el estrechamiento de la cola se acompaña de la reducción de la presión en la superficie de ésta, lo que conduce al aumento de la resistencia total. Así, pues, la disminución de la resistencia, provocada al descender la resistencia de base, se compensa con el crecimiento de la resistencia de la cola. Es evidente que existe un valor tal del ángulo de conicidad de la cola al que corresponde el mínimo de la resistencia sumaria: $X_{\text{s.b}} + X_{\text{cola}} = (c_{x\ \text{s.p}} + c_{x\ \text{cola}})\ q_\infty S_{\text{máx.t}}$.

Los resultados de la investigación experimental de la variación del valor de $c_{x\ \text{s.b}} + c_{x\ \text{cola}}$ se aducen en la fig. 10.36. Con la longitud fijada l_{cola} de la cola el aumento del ángulo β_{cola} al principio reduce la resistencia sumaria, pero empezando por cierto valor ($\beta \approx 7°$ para la capa límite laminar en la superficie lateral del sólido y $\beta \approx 9°$, para la turbulenta) de nuevo la aumenta.

10.40. Analicemos el esquema de la circulación de un flujo de gas no viscoso supersónico alrededor de un sólido de revolución (fig. 10.37). Delante de semejante sólido surge una onda de choque (adherida) cónica de nariz que se extiende hasta el lugar de intersección (punto K) con la onda rectilínea de débiles perturbaciones

(característica), que sale del punto A de conjugación del cono con el cilindro. Tras el punto K, debido a la interacción con otras ondas salientes de ese mismo punto A (o de su entorno), la onda de choque comienza a curvarse. Las líneas de perturbaciones, al reflejarse de la onda de choque, alcanzan la parte cilíndrica del cuerpo. El resultado de todo esto es la nivelación de la presión en la superficie del sólido hasta el valor p_∞ en el flujo incidente.

Del punto B, en el lugar de conjugación del cilindro con el cono de cola, también salen líneas de débiles perturbaciones en las que el flujo se expande, lo que conduce a la disminución brusca del coeficiente $\bar{p}$. La corriente de gas del punto B al C (a lo largo de la superficie cónica) va acompañada de la compresión, su valor $\bar{p}$ comienza a crecer hasta el punto C, inclusive.

Después de sufrir expansión adicional y giro en el punto C, el gas, de nuevo, comienza a moverse a lo largo del eje longitudinal, a causa de lo cual surge la onda de choque curvilínea de cola *2*.

10.41. Para resover este problema empleamos las correspondientes dependencias obtenidas según el método de Newton. El coeficiente de fuerza axial (de resistencia de ondas de choque)

$$c_{xp} = 2\,\mathrm{sen}^2\,\beta_{\mathrm{cono}} + \mathrm{sen}^2\,\alpha\,(1 - 3\,\mathrm{sen}^2\,\beta_{\mathrm{cono}}) + \bar{R}_{\mathrm{T}}^2 \cos^4 \beta_{\mathrm{cono}} \times (2 - 3\,\mathrm{sen}^2\,\alpha)/2; \qquad (10.64)$$

el coeficiente de la fuerza normal

$$c_{yp} = \cos^2 \beta_{\mathrm{cono}}\,\mathrm{sen}\,2\alpha\,[1 - (\bar{R}_{\mathrm{T}}^2/2)\cos^2 \beta_{\mathrm{cono}}]; \qquad (10.65)$$

el coeficiente del momento de cabeceo

$$m_{zp} = -\frac{1}{\bar{l}}\cos^2 \beta_{\mathrm{cono}}\,\mathrm{sen}\,2\alpha \left[\frac{2}{3\cos^2 \beta_{\mathrm{cono}}} - (1 - \bar{l}) + \bar{R}_{\mathrm{T}}^3 \frac{\cos^3 \beta_{\mathrm{cono}}}{6}(2 - 3\,\mathrm{sen}\,\beta_{\mathrm{cono}})\right]. \qquad (10.66)$$

Aquí, $\bar{l} = l_{\mathrm{cono}}/l'_{\mathrm{cono}}$ (véase la fig. 10.9) se calcula con ayuda de la relación

$$\bar{l} = 1 - \bar{R}_{\mathrm{T}}\,(1 - \mathrm{sen}\,\beta_{\mathrm{cono}})/\cos \beta_{\mathrm{cono}} = 0{,}6163. \qquad (10.67)$$

El coeficiente del centro de presión

$$c_{\mathrm{p}} = \frac{2/(3\cos^2 \beta_{\mathrm{cono}}) - (1 - \bar{l}) + \bar{R}_{\mathrm{T}}^3 (\cos^3 \beta_{\mathrm{cono}}/6)(2 - 3\,\mathrm{sen}\,\beta_{\mathrm{cono}})}{\bar{l}\,[1 - (\bar{R}_{\mathrm{T}}^2/2)\cos^2 \beta_{\mathrm{cono}}]}. \qquad (10.68)$$

Las dependencias (10.64) — (10.68) sirven para calcular la circulación alrededor de un cono cuando en su superficie no hay zona sombreada, es decir, $\alpha \leqslant \beta_{\mathrm{cono}}$. Si $\alpha > \beta_{\mathrm{cono}}$, en la superficie del cono se forma tal zona (véase la fig. 10.9), lo que ha de tomarse en consideración al realizar los correspondientes cálculos. Entonces, el coeficiente de la fuerza longitudinal

$$c_{xp} = c_1 + \bar{R}_{\mathrm{T}}^2\,\Delta c_1. \qquad (10.69)$$

donde c_1 es el coeficiente de la fuerza longitudinal del cono no romo (no obtuso):

$$c_1 = (1 - \gamma_{\mathrm{cono}}/\pi)\,[2\,\mathrm{sen}^2\,\beta_{\mathrm{cono}} + \mathrm{sen}^2\,\alpha\,(1 - 3\,\mathrm{sen}^2\,\beta_{\mathrm{cono}})] + (3/4)(\mathrm{sen}\,\gamma_{\mathrm{cono}}/\pi)\,\mathrm{sen}\,2\alpha\,\mathrm{sen}\,2\beta_{\mathrm{cono}}; \qquad (10.70)$$

Δc_1 es el parámetro que determina la componente adicional del coeficiente de la fuerza longitudinal debido a la influencia de la obtusidad:

$$\Delta c_1 = (1/2) \cos^4 \beta_{cono} (1 - \gamma_{cono}/\pi) (2 - 3 \operatorname{sen}^2 \alpha) - \\ - [(\cos \alpha/2)] [1 + (2/\pi) \operatorname{arctg} (\operatorname{ctg} \gamma_{cono}/\cos \alpha)] - \\ - [1/(8\pi)] \operatorname{sen} \gamma_{cono} \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen} 2\beta_{cono} (2 + 3 \cos^2 \beta_{cono}); \quad (10.71)$$

γ_{cono} es el ángulo que determina las dimensiones de la zona sombreada y que se calcula mediante la igualdad $\cos \gamma_{cono} = \operatorname{tg} \beta_{cono}/\operatorname{tg} \alpha$, de donde

$$\gamma_{cono} = \arccos (\operatorname{tg} \beta_{cono}/\operatorname{tg} \alpha). \quad (10.72)$$

El coeficiente de la fuerza normal

$$c_{yp} = c_2 - \bar{R}_T^2 \Delta c_2, \quad (10.73)$$

donde c_2 es el coeficiente de la fuerza normal del cono puntiagudo:

$$c_2 = \cos^2 \beta_{cono} \operatorname{sen} 2\alpha [(1 - \gamma_{cono}/\pi) + (1/3\pi) \times \\ \times \operatorname{sen} \gamma_{cono} (\operatorname{tg} \beta_{cono} \operatorname{ctg} \alpha + 2 \operatorname{ctg} \beta_{cono} \operatorname{tg} \alpha)]; \quad (10.74)$$

Δc_2 es un parámetro que determina la variación del coeficiente de la fuerza normal debido a la influencia de la punta esférica:

$$\Delta c_2 = c_2 \cos^2 \beta_{cono} + c_3, \quad (10.75)$$

donde

$$c_3 = -(1/2) \cos^4 \beta_{cono} \operatorname{sen} 2\alpha (1 - \gamma_{cono}/\pi) - \\ - [(\operatorname{sen} \alpha)/2] [1 - (2/\pi) \operatorname{arctg} (\operatorname{ctg} \gamma_{cono})/\cos \alpha)] + \\ + (1/6) (\operatorname{sen} \gamma_{cono}/\pi) \operatorname{sen} 2 \beta_{cono} [5 \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta_{cono} \times \\ \times (1 - 3 \operatorname{sen}^2 \alpha)]. \quad (10.76)$$

El coeficiente del momento de cabeceo

$$m_{zp} = -(2/3) \operatorname{sen} 2\alpha/\bar{l} + [(1 - \bar{l})/\bar{l}] c_2 - \bar{R}_T^3 c_4. \quad (10.77)$$

Aquí

$$c_4 = (1/3) (\cos \beta_{cono}/\bar{l}) (1 - 3 \operatorname{sen} \beta_{cono}) c_2 - [(\operatorname{tg} \beta_{cono})/\bar{l}] c_3. \quad (10.78)$$

Calculemos los coeficientes aerodinámicos con ángulo de ataque $\alpha = 0$. En el caso de la circulación axisimétrica los coeficientes de las fuerzas normal y de sustentación y del momento de cabeceo son nulos. El coeficiente de resistencia de ondas de choque de (10.64) $c_{xp} = 0{,}3519$.

Analicemos el ángulo de ataque $\alpha = 10°$ (no hay zona sombreada). El coeficiente de resistencia de ondas de choque $c_{xp} = 0{,}3632$. Partiendo de (10.65) calculamos el coeficiente de la fuerza normal $c_{yp} = 0{,}2819$; el coeficiente del momento de cabeceo $m_{zp} = -0{,}1832$.

Con los valores de c_{yp} y m_{zp} hallamos el coeficiente del centro de presión: $c_p = -m_{zp}/c_{yp} = 0{,}6499$.

Con el ángulo de ataque $\alpha = 20°$ en la superficie del sólido surge una zona sombreada cuyos límites se determinan por el ángulo $\gamma_{cono} = \arccos (\operatorname{tg} 15°/\operatorname{tg} 20°) = 42{,}67°$.

Determinamos el coeficiente de resistencia de ondas de choque:

$$c_{xp} = c_1 + \bar{R}_T^2 \Delta c_1 = 0{,}3574.$$

Calculamos el coeficiente de la fuerza normal según (10.73) — (10.76):

$$c_{yp} = c_2 - \bar{R}_T^2 \, \Delta c_2 = c_2 - \bar{R}_T^2 \, (c_2 \cos^2 \beta_{cono} + c_3).$$

Calculamos: $c_2 = 0{,}6065$; $c_3 = -0{,}2798$; $\Delta c_2 = 0{,}2860$. Por consiguiente, $c_{yp} = 0{,}5350$.

El coeficiente del momento de cabeceo se determina con (10.77). Primero hallamos $c_4 = 0{,}1925$ y, a continuación, calculamos $m_{zp} = -0{,}34$.

El correspondiente coeficiente del centro de presión $c_p = -m_z/c_{yp} = 0{,}6360$.

10.42. Analicemos la circulación alrededor del cono anterior. El coeficiente de presión en él

$$\bar{p}_{cono} = (0{,}0016 + 0{,}002 M_\infty^{-2}) \, (\beta^0_{cono})^{1{,}7}. \qquad (10.79)$$

El ángulo de inclinación de la onda de choque junto al cono se determina por la fórmula aproximada

$$\operatorname{sen} \theta_{cn} = \{1 - \cos \beta_{cono} + [1 + M_\infty^2 \operatorname{sen}^2 \beta_{cono\ 1} \, (k + 1)/2]^{1/2}\} \, M_\infty^{-1}. \qquad (10.80)$$

El correspondiente número $M_{cono\ 1}$ en el cono se calcula con ayuda de las expresiones

$$M_{cono\ 1} = V_{cono\ 1}/a_{cono\ 1} = V_{cono\ 1}/(kRT_{cono\ 1})^{1/2}; \quad M_\infty = V_\infty/(kRT_\infty)^{1/2} \qquad (10.81)$$

con ayuda de las cuales hallamos

$$M_{cono} = M_\infty \, (V_{cono\ 1}/V_\infty) \, (T_\infty/T_{cono\ 1})^{1/2}. \qquad (10.82)$$

La corriente de expansión en el entorno del punto A de deflexión de la generatriz está limitada por dos líneas de débiles perturbaciones inclinadas con relación a las generatrices OA y AC de los conos bajo los respectivos ángulos

$$\mu_1 = \operatorname{arcsen} \, (1/M_{cono\ 1}); \qquad (10.83)$$

$$\mu_2 = \operatorname{arcsen} \, (1/M_{cono\ 2}). \qquad (10.84)$$

Calculamos los parámetros de la circulación alrededor del cono anterior:

$$\bar{p}_{cono\ 1} = (0{,}0016 + 0{,}002 \cdot 3^{-2}) \, (40°)^{1{,}7} = 0{,}964;$$

$$\operatorname{sen} \theta_{ch} = \{1 - 0{,}7660 + [1 + 3^2 \cdot 0{,}6428^2 \, (1{,}4 + 1)/2]^{1/2}\} \, 3^{-1} = 0{,}857;$$

$$\theta_{ch} = 59{,}02°.$$

Determinaremos el número $M_{cono\ 1}$ empleando el diagrama de las funciones gasodinámicas a altas velocidades y temperaturas del flujo de aire: $M_{cono\ 1} = 3 \cdot 0{,}645 \cdot 0{,}48^{1/2} = 1{,}34$. El ángulo de inclinación de las líneas de débiles perturbaciones AN $\mu_1 = \operatorname{arcsen} \, (1/1{,}34) = 48{,}27°$.

Calculemos la circulación alrededor del segundo cono con ángulo de la generatriz $\beta_{cono} = 25°$ (véase la fig. 10.10). La circulación en torno del sector de este cono en el entorno del punto A de la deflexión de la generatriz se determina con las mismas leyes que en el flujo plano. De acuerdo con esto, para calcular el número $M_{cono\ 2}$ en el cono de cola inmediatamente tras dicho punto, pueden emplearse las dependencias obtenidas para el flujo de Prandtl — Meyer:

$$\omega_{cono\ 2} = \omega_{cono\ 1} + (\beta_{cono\ 1} - \beta_{cono\ 2}). \qquad (10.85)$$

En las tablas del flujo isoentrópico supersónico, según el valor de $M_{cono\ 1} = 1{,}34$ hallamos el ángulo $\omega_{cono\ 1} = 7{,}57°$. Entonces, $\omega_{cono\ 2} = 7{,}57 +$

$+ (40° - 25°) = 22,57°$. En las tablas indicadas, partiendo del valor hallado de $\omega_{\text{cono } 2}$ determinamos el número $M_{\text{cono } 2} = 1,87$.

Calculemos el coeficiente de presión:

$$\bar{p}_{\text{cono } 2} = \frac{2(p_{\text{cono } 2} - p_\infty)}{k M_\infty^2 p_\infty} = \frac{2}{k M_\infty^2}\left(\frac{p_{\text{cono } 2}}{p_\infty} - 1\right) =$$

$$= \frac{2}{k M_\infty^2}\left[\frac{p_0'}{p_0}\,\frac{[1 + M_\infty^2 (k-1)/2]^{k/(k-1)}}{(1 + M_{\text{cono } 2}^2 (k-1)/2)^{k/(k-1)}} - 1\right] = 0,2699. \qquad (10.86)$$

El ángulo de inclinación de las líneas de débiles perturbaciones AK $\mu_2 = \arcsin(1/1,87) = 32,33°$.

10.43. Según el planteamiento del problema un cono y un sólido de revolución están sometidos a la circulación de un flujo uniforme incidente supersónico. Por consiguiente, la entalpía de remanso i_0 para cada una de las líneas de corriente es la misma, por lo que la derivada $di_0/dn = 0$ (donde n es la normal a la línea de corriente). Tomando en consideración que el gas realiza trabajo externo y no absorbe energía, el valor de i_0 será constante a lo largo de cada una de las líneas de corriente l, es decir, la derivada

$$di_0/dl = 0. \qquad (10.87)$$

Para efectuar el análisis del carácter del flujo consideremos el movimiento bidimensional de un gas. Para ello hagamos uso de las ecuaciones de movimiento en la forma de Euler:

$$V_x\, \partial V_x/\partial x + V_y\, \partial V_x/\partial y = -(1/\rho)\, \partial p/\partial x; \qquad (10.88)$$

$$V_x\, \partial V_y/\partial x + V_y\, \partial V_y/\partial_y = -(1/\rho)\, \partial p/\partial y. \qquad (10.89)$$

Añadiendo a (10.88) $V_y\, \partial V_y/\partial x$ y restando de (10.89) $V_x\, \partial V_x/\partial_y$, obtenemos

$$0,5\, \partial V^2/\partial x - 2V_y \omega_z = -(1/\rho)\, \partial p/\partial x; \qquad (10.90)$$

$$0,5\, \partial V^2/\partial y + 2V_x \omega_z = -(1/\rho)\, \partial p/\partial y, \qquad (10.91)$$

donde $\omega_z = 0,5\, (\partial V_y/\partial x - \partial V_x/\partial y)$ (vórtice); $V^2 = V_x^2 + V_y^2$.

Las ecuaciones (10.90) y (10.91) pueden, asimismo, presentarse en la forma

$$-(1/\rho)\, dp = (1/2)\, dV^2 - 2\omega_z\, (V_y\, dx - V_x\, dy). \qquad (10.92)$$

Como $V_y = -(1/\rho)\, (\partial\psi/\partial x)$ y $V_x = (1/\rho)\, (\partial\psi/\partial y)$,

$$dp/\rho + dV^2/2 = -2\omega_z\, d\psi. \qquad (10.93)$$

De acuerdo con el primer principio de la termodinámica $dp/\rho = di - T\, dS$. Teniendo en cuenta que $i_0 = i + V^2/2$, obtenemos $di_0 - T\, dS = -2\omega_z\, d\psi$.

Refiriendo esta ecuación al sentido que coincide con la normal a la línea de corriente y tomando en consideración que para toda la región de la corriente $i_0 = \text{const}$, hallamos

$$T\, (dS/dn) = 2\omega_z\, d\psi/dn. \qquad (10.94)$$

Si se analiza un flujo con onda de choque, a lo largo de la correspondiente línea de corriente la entropía S crece:

$$S_2 = S_1 - R \ln\, (p_0'/p_0). \qquad (10.95)$$

Aquí S_1 es la entropía antes de la onda de choque; p_0' y p_0, la presión de remanso después y antes de ésta, respectivamente.

Sabemos que con la circulación supersónica de un cono, la onda de choque delante de él tiene también forma de cono. Con ello, aunque la presión de remanso

p_0' disminuye en comparación con p_0, ella será igual para todas las líneas de flujo (corriente). En todas ellas la entropía será la misma, es decir, $\partial S/\partial n = 0$. Así, pues, tras la onda de choque el flujo es isentrópico (o bien irrotacional) [conforme a (10.94) el vórtice $\omega_z = 0$].

Durante la circulación alrededor de un sólido de revolución, delante del cual surge una onda de choque curvilínea, el carácter del flujo es otro. Debido a que a lo largo de la onda el ángulo de su inclinación es diferente, son distintos los valores de p_0' y de la entropía S_2 para las correspondientes líneas de flujo. Por consiguiente, $dS/dn \neq 0$, y, por lo tanto, el vórtice, asimismo, $\omega_z \neq 0$. De este modo, el flujo tras la onda de choque curvilínea es rotacional (no isentrópico).

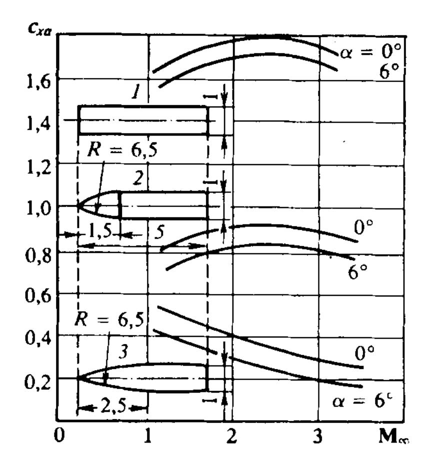


Fig. 10.38. Curvas de la resistencia al avance de los sólidos de revolución

10.44. Las curvas experimentales en la fig. 10.11, han sido obtenidas al investigar los sólidos de revolución mostrados en la fig. 10.38. Estos sólidos se distinguen entre sí por ser diferente la forma de la sección de nariz. La mayor resistencia al avance la ejerce el sólido *1* con obtuse plano, la menor, el sólido *3* con nariz que uniformemente pasa al cuerpo cilíndrico. Se observa diverso carácter de variación de la forma de la curva $c_{xa} = f(M_\infty)$: para los cuerpos *1*, *2* la convexidad de la curva está dirigida hacia arriba, en tanto que para el *3*, hacia abajo. Es asimismo característico el brusco crecimiento de la resistencia al avance para un cuerpo con cara plana (unas 3 . . . 8 veces en función del número M_∞).

Señalemos que hasta valores del ángulo de ataque de 15 . . . 20° la resistencia al avance varía en dependencia de dicho ángulo α según la ley de los cuadrados, con la particularidad de que el efecto que causa α sobre distintos sólidos se manifiesta de diferente forma, lo que se confirma con los resultados experimentales (fig. 10.38). Al analizar esos resultados podemos llegar a la conclusión de que si los cambios absolutos del coeficiente de resistencia al avance son casi iguales para los tres sólidos (aunque en cierto grado crecen a medida que aumenta el aguzado), los incrementos relativos son considerablemente mayores en los sólidos de revolución puntiagudos. P. ej., para el número $M_\infty = 2$ con ángulo de ataque $\alpha = 6°$ dichos incrementos son aproximadamente los mismos para los sólidos *2* y *3* e iguales a 0,1. Pero el incremento relativo del coeficiente de resistencia al avance para el sólido *2*, menos puntiagudo, constituye cerca del 10 %, mientras que para el sólido *3*, más puntiagudo, es 2,5 veces mayor. Si examinamos el cuerpo cilíndrico *1* con cara obtusa, entonces aproximadamente, con igual variación absoluta de c_{xa} el incremento relativo de la resistencia constituye el ~5 %.

10.45. El análisis del carácter de la distribución del coeficiente de presión $\bar{p} = (p - p_\infty)/q_\infty$ permite, en rasgos generales, establecer la forma de las secciones de nariz de los correspondientes sólidos de revolución. Estudiemos la fig. 10.12, *a*. El diagrama rectangular de la distribución de $\bar{p}$ en el sector *1...2* indica que la superficie sometida a la circulación es un cono puntiagudo (fig. 10.39, *a*). La onda de choque está adherida a su vértice y también tiene forma cónica. La brusca caída de la presión en el sector *2...3* transcurre en la zona de expansión del flujo

en la región AKC de conjugación de los elementos cónicos y cilíndricos del sólido (fig. 10.39, *a*). En cierto grado, el flujo de gas en esta región es semejante al flujo plano de Prandtl — Meyer. En la superficie cilíndrica se observa el restablecimiento gradual de la presión hasta la atmosférica (sector *3...4* de la curva de la fig. 10.39, *a*).

Conforme a los datos de la fig. 10.12, *b* la parte de ataque del vehículo volante (en forma de un sólido de revolución) es una superficie curvilínea puntiaguda (fig. 10.39, *b*). En el flujo que aumenta su velocidad al moverse a lo largo de semejante superficie (sector OK) la presión desciende (curva *1...2* en la fig. 10.39, *b*). Como la transición de la sección de nariz a la cilíndrica se realiza con discontinuidad en el punto K, aquí se observa una brusca caída del coeficiente de presión (sector *2...3*).

La distribución de dicho coeficiente mostrada en la fig. 10.12, *c* corresponde a la circulación alrededor de un sólido de revolución con sección de nariz obtusa (fig. 10.39, *c*). A lo largo de la superficie obtusa esférica el coeficiente de presión

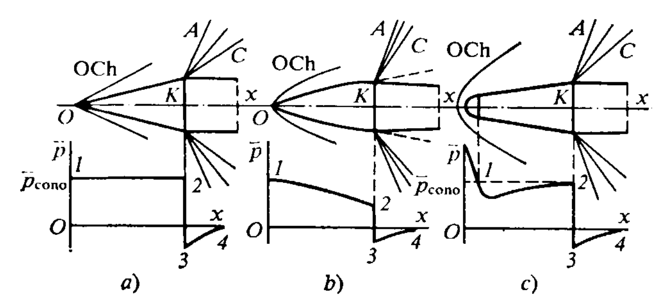


Fig. 10.39. Distribución de la presión a lo largo de sólidos de revolución:
Och, onda de choque; $\bar{p}_{cono}$, coeficiente de presión en un cono agudo

disminuye bruscamente. En el entorno de la conjugación de la punta esférica con el cono transcurre la posterior disminución del mencionado coeficiente. Su valor mínimo se alcanza a una distancia del punto O igual, aproximadamente, a cinco radios de la esférica. A continuación, el coeficiente de presión se nivela lentamente hasta el valor $\bar{p}_{cono}$ en el cono puntiagudo y de nuevo baja bruscamente en el punto K (lugar de conjugación con el cilindro).

10.46. De acuerdo con la expresión aducida el potencial φ_1 depende de la distancia entre la fuente, situada en el origen de coordenadas y el punto de intersección del eje x con la línea de Mach, trazada por el punto prefijado A (x, r). En tal caso, cuando la fuente se encuentra en el punto con la coordenada $x = \varepsilon$, en lugar de x hay que tomar $x - \varepsilon$. Si con esto la intensidad de la fuente se diferencia de la unitaria y se determina por cierta función $f(\varepsilon)$,

$$\varphi_1 = \frac{f(\varepsilon)\exp(ipt)\exp\left[-\frac{ipM_\infty(x-\varepsilon)}{a_\infty\alpha'^2}\right]\cos\left\{\frac{p}{a_\infty\alpha'^2}[(x-\varepsilon)^2-\alpha'^2r^2]^{1/2}\right\}}{[(x-\varepsilon)^2-\alpha'^2r^2]^{1/2}}. \quad (10.96)$$

Sea que las fuentes de intensidad variable $f(\varepsilon)$ están distribuidas ininterrumpidamente a lo largo del eje x. Con ello, la velocidad en todo punto A (x, r) se determina por aquellas perturbaciones que parten de las fuentes situadas hacia arriba en dirección del flujo y sólo se propagan en el *interior de los conos de Mach* con los vértices en las fuentes. Así, pues, el efecto de las fuentes se manifiesta en

el intervalo $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = x - \alpha' r$ (véase la fig. 10.13). Con arreglo a esto

$$\varphi_1 = \exp(ipt) \int_0^{x-\alpha' r} \frac{f(\varepsilon) \exp\left[\frac{-ipM_\infty}{a_\infty \alpha'^2}(x-\varepsilon)\right] \cos\left\{\frac{p}{a_\infty \alpha'^2}[(x-\varepsilon)^2 - \alpha'^2 r^2]^{1/2}\right\} d\varepsilon}{[(x-\varepsilon)^2 - \alpha'^2 r^2]^{1/2}}, \tag{10.97}$$

donde el signo «—» [véase (10.96)] está incluido en el valor de $f(\varepsilon)$.

Para determinar el potencial φ_2 de los dipolos distribuidos ininterrumpidamente, hagamos uso de la fórmula

$$\varphi_2 = -(\partial \varphi_1 / \partial r) \cos \gamma, \tag{10.98}$$

donde γ es el ángulo meridional (véase la fig. 10.13).

Para transformar (10.97) introduzcamos la variable z en correspondencia con la ecuación $\varepsilon = x - \alpha' r \operatorname{ch} z$ de la que obtenemos

$$z = \operatorname{arsh}[(x-\varepsilon)/(\alpha' r)], \quad x - \varepsilon = \alpha' r \operatorname{ch} z,$$

$$d\varepsilon = -\alpha' r \operatorname{sh} z \, dz = -\sqrt{(x-\varepsilon)^2 - \alpha'^2 r^2 \, dz}.$$

Obtenemos la ecuación (10.97) en la forma

$$\varphi_1 = \exp(ipt) \int_0^{\operatorname{arch}(x/\alpha' r)} f(x - \alpha' r \operatorname{ch} z) \exp\left(-\frac{ipM_\infty r}{a_\infty \alpha'} \operatorname{ch} z\right) \cos\left(\frac{pr}{a_\infty \alpha'} \operatorname{sh} z\right) dz.$$

Derivemos esta función respecto de r. Para pequeños valores del número reducido de Strouhal $p^* = M_\infty pr/(\alpha' V_\infty)$, que se alcanzan a frecuencias menores que $p = a_\infty \alpha' / x_{\text{cono}}$, se ha obtenido la derivada

$$\partial \varphi_1 / \partial r = \exp(ipt) \int_0^{\operatorname{arch}[x/(\alpha' r)]} [-\alpha' f(x - \alpha' r \operatorname{ch} z) \operatorname{ch} z + iM_\infty \alpha' p^* \dot{f}(x - \alpha' r \operatorname{ch} z)] \, dz. \tag{10.99}$$

En correspondencia con esto

$$\varphi_2 = -(\partial \varphi_1 / \partial r) \cos \gamma = \alpha' \exp(ipt) \times$$

$$\times \left[\int_0^{\operatorname{arch} u} \dot{f}(x - \alpha' r \operatorname{ch} z) \operatorname{ch} z - iM_\infty p^* \int_0^{\operatorname{arch} u} \dot{f}(x - \alpha' r \operatorname{ch} z) \, dz\right] \cos \gamma, \tag{10.100}$$

donde $u = x/(\alpha' r)$.

10.47. En el problema 10.46 hemos obtenido la expresión (10.100) para el potencial adicional φ_2 durante la circulación supersónica en torno de un cuerpo delgado que efectúa vibraciones o gira alrededor del eje transversal.

Las condiciones de frontera necesarias para determinar la función $f(\varepsilon)$, que entra en dicha expresión, en cada caso concreto de movimiento inuniforme son las condiciones de la circulación adherida de acuerdo con las cuales las componentes de la velocidad normales a la superficie son nulas. Esto significa que el potencial perturbado ejercido por un dipolo inuniforme debe ser tal que en la superficie del sólido desaparezca la componente normal de la velocidad del flujo perturbado, es decir, que

$$\partial \varphi_2 / \partial r = -w(x, t) \cos \gamma, \tag{10.101}$$

donde $w(x, t)$ es la componente no perturbada de la velocidad normal al eje del sólido.

Si el ángulo de ataque varía como la función armónica $\alpha = \alpha_0 \exp(ipt)$ (α_0 es la amplitud), entonces

$$w(x, t) = [V_\infty + ip(x - x_m)]\,\alpha_0 \exp(ipt). \quad (10.102)$$

Aquí, x_m es la coordenada del centro de masas (véase la fig. 10.14).

Introduzcamos la anotación $\dot{f}(\varepsilon) = m(\varepsilon)$ y derivemos respecto de r (10.100):

$$\partial\varphi_2/\partial r = \alpha' \exp(ipt) \cos\gamma \Big[-\alpha' \int_0^{\operatorname{arch} u} \dot{m}(x - \alpha' r \operatorname{ch} z) \operatorname{ch}^2 z\, dz -$$

$$- (iM_\infty^2 p/\alpha' V_\infty) \int_0^{\operatorname{arch} u} m(x - \alpha' r \operatorname{ch} z)\, dz + (iM_\infty^2 pr/V_\infty) \int_0^{\operatorname{arch} u} \dot{m}(x - \alpha' r \operatorname{ch} z) \operatorname{ch} z\, dz \Big], \quad (10.103)$$

donde $m(x - \alpha' r\operatorname{ch} z) = \dot{f}(x - \alpha' r \operatorname{ch} z) = df/d(x - \alpha' r \operatorname{ch} z)$.

Transformando esta expresión en la variable $\varepsilon = x - \alpha' r \operatorname{ch} z$ y pasando al límite con $r \to 0$:

$$-(\partial\varphi_2/\partial r)\, r^2 = \exp(ipt) \cos\gamma \int_0^x \dot{f}(\varepsilon)\, d\varepsilon,$$

de donde

$$\partial\varphi_2/\partial r = -[\pi f(x)/S(x)] \exp(ipt) \cos\gamma,$$

donde $f(x) = S(x)\, \alpha_0 [V_\infty + ip(x - x_m)]/\pi$.

En correspondencia con esto

$$\left.\begin{aligned} m(\varepsilon) &= \dot{f}(\varepsilon) = S'(\varepsilon)\, \alpha_0 [V_\infty + ip(\varepsilon - x_m)]/\pi + S(\varepsilon)\, ip\alpha_0/\pi; \\ \dot{m}(\varepsilon) &= \ddot{f}(\varepsilon) = S''(\varepsilon)\, \alpha_0 [V_\infty + ip(\varepsilon - x_m)]/\pi + 2S'(\varepsilon)\, ip\alpha_0/\pi. \end{aligned}\right\} \quad (10.104)$$

Analicemos la rotación con $\Omega_z = \text{const}$ (véase la fig. 10.14). En este caso

$$w(x) = \alpha_0 V_\infty + \Omega_z (x - x_m);$$

$$\partial\varphi_2/\partial r = -[\alpha_0 V_\infty + \Omega_z (x - x_m)] \cos\gamma.$$

Como la rotación es uniforme ($p = 0$) la componente normal de la velocidad

$$\partial\varphi_2/\partial r = -\alpha'^2 \cos\gamma \int_0^{\operatorname{arch} u} \dot{m}(x - \alpha' r \operatorname{ch} z) \operatorname{ch}^2 r\, dz =$$

$$= -\alpha'^2 \cos\gamma \int_{x-\alpha' r}^{0} \dot{m}(\varepsilon) \frac{(x-\varepsilon)^2}{(\alpha' r)^2} \frac{-d\varepsilon}{\alpha' r \sqrt{(x-\varepsilon)^2/(\alpha' r)^2 - 1}} \,.$$

Pasando al límite con $r \to 0$ obtenemos una expresión de la que se deduce que $\partial\varphi_2/\partial r = -\pi f(x) \cos\gamma/S(x)$. De acuerdo con esto

$$\left.\begin{aligned} f(\varepsilon) &= S(\varepsilon)\, [\alpha_0 V_\infty + \Omega_z (\varepsilon - x_m)]/\pi; \\ \dot{m}(\varepsilon) &= \ddot{f}(\varepsilon) = S''(\varepsilon)\, [\alpha_0 V_\infty + \Omega_z (\varepsilon - x_m)]/\pi + 2S'(\varepsilon)\, \Omega_z/\pi. \end{aligned}\right\} \quad (10.105)$$

Para un cono delgado (véase la fig. 10.7):

$$S(\varepsilon) = \pi r^2 = \pi\varepsilon^2 \operatorname{tg}^2 \beta_{\text{cono}}; \quad S'(\varepsilon) = 2\pi\varepsilon \operatorname{tg}^2 \beta_{\text{cono}};$$

$$S''(\varepsilon) = 2\pi \operatorname{tg}^2 \beta_{\text{cono}}.$$

En el caso de *oscilaciones armónicas*

$$m(\varepsilon) = \alpha_0 \varepsilon \operatorname{tg}^2 \beta_{\text{cono}} \{2 [\bar{V}_\infty + ip(\varepsilon - x_m)] + \varepsilon ip\};$$
$$\dot{m}(\varepsilon) = 2 \operatorname{tg}^2 \beta_{\text{cono}} \alpha_0 \{[V_\infty + ip(\varepsilon - x_m)] + 2\varepsilon ip\}.$$

Para la *rotación longitudinal*

$$\dot{m}(\varepsilon) = 2 \operatorname{tg}^2 \beta_{\text{cono}} [(\alpha V_\infty + \Omega_z(\varepsilon - x_m)] + 2\varepsilon\Omega_z). \qquad (10.106)$$

Analicemos un cono puntiagudo con generatriz parabólica, cuya ecuación (véase la fig. 10.14) $r = (r_{\text{máx.t}}/x_{\text{máx.t}})(2 - x/x_{\text{máx.t}})\, x$, para el cual

$$S(\varepsilon) = \pi r^2 = \pi (r_{\text{máx. t}}/x_{\text{máx. t}})^2 \varepsilon^2 (2 - \varepsilon/x_{\text{máx. t}})^2;$$
$$S'(\varepsilon) = 4 (r_{\text{máx. t}}/x_{\text{máx. t}})^2 (2\varepsilon - 3\varepsilon^2/x_{\text{máx. t}} + \varepsilon^3/x^2_{\text{máx. t}});$$
$$S''(\varepsilon) = 4\pi (r_{\text{máx. t}}/x_{\text{máx. t}})^2 (2 - 6\varepsilon/x_{\text{máx. t}} + 3\varepsilon^2/x^2_{\text{máx. t}}).$$

Para las oscilaciones orgánicas

$$m(\varepsilon) = (r_{\text{máx. t}}/x_{\text{máx. t}})^2 \alpha_0 \{4 (2\varepsilon - 3\varepsilon^2/x_{\text{máx. t}} + \varepsilon^3/x^2_{\text{máx. t}}) [V_\infty + ip(\varepsilon - x_m)] + $$
$$+ (4\varepsilon^2 - 4\varepsilon^3/x_{\text{máx. t}} + x^4/x^2_{\text{máx. t}})\, ip\};$$

$$\dot{m}(\varepsilon) = 4 (r_{\text{máx. t}}/x_{\text{máx. t}})^2 \alpha_0 \{(2 - 6\varepsilon/x_{\text{máx. t}} + 3\varepsilon^2/x^2_{\text{máx. t}}) [V_\infty + ip(\varepsilon - x_m)] +$$
$$+ 2 (2\varepsilon - 3\varepsilon^2/x_{\text{máx. t}} + \varepsilon^3/x^2_{\text{máx. t}})\, ip\}.$$

Para la rotación longitudinal

$$\dot{m}(\varepsilon) = 4 (r_{\text{máx.t}}/x_{\text{máx.t}})^2 \{(2 - 6\varepsilon/x_{\text{máx.t}} + 3\varepsilon^2/x^2_{\text{máx.t}}) [\alpha_0 V_\infty + \Omega_z(\varepsilon - x_m)] +$$
$$+ 2 (2\varepsilon - 3\varepsilon^2/x_{\text{máx.t}} + \varepsilon^3/x^2_{\text{máx.t}})\, \Omega_z\}. \qquad (10.107)$$

10.48. En la fig. 10.16 se muestra el esquema de un cuerpo cilíndrico con sección de nariz que tiene generatriz curvilínea. La ecuación de la generatriz $r = (r_{\text{máx.t}}/x_{\text{máx.t}})(2 - x/x_{\text{máx.t}})\, x$. Examinemos el movimiento uniforme bajo ángulo de ataque $\alpha = \text{const}$ y hallemos la función de los dipolos $\dot{m}(\varepsilon)$ para un cono delgado haciendo uso de la condición de frontera

$$\alpha V_\infty = \alpha'^2 \int_0^{\operatorname{arch} u} \dot{m}(x - \alpha' r \operatorname{ch} z) \operatorname{ch}^2 z\, dz. \qquad (10.108)$$

De la solución del problema 10.47 se desprende [véase (10.105)] que con $\Omega_z = 0$ la derivada $\dot{m}(\varepsilon) \approx S''(\varepsilon)\, \alpha V_\infty/\pi$. De aquí sigue que cuando el sólido es cónico, para el que $S''(\varepsilon) = d^2(\pi r^2)/d\varepsilon^2 = 2 \operatorname{tg}^2 \beta_{\text{cono}}$, la función $\dot{m}(\varepsilon) = \text{const}$. Tomando esto en consideración, es posible precisar su valor empleando para ello (10.96):

$$\dot{m}(\varepsilon) = (2\alpha V_\infty/\alpha'^2) \left\{[x/(\alpha' r)] \sqrt{[x/(\alpha' r)]^2 - 1} + \operatorname{arch}[x/(\alpha' r)]\right\}^{-1} \quad (u = x/\alpha' r). \quad (10.109)$$

Esta dependencia se refiere al caso cuando el dipolo está situado en el vértice del cono (fig. 10.40) para el cual $\varepsilon = 0$. Si el dipolo se encontrara en un punto arbitrario con coordenada $\varepsilon = \varepsilon_{\text{cono}}$, entonces

$$\dot{m}_{\text{cono}} = (2\alpha V_\infty/\alpha'^2) \left[\frac{x - \varepsilon_{\text{cono}}}{\alpha' r} \sqrt{\left(\frac{x - \varepsilon_{\text{cono}}}{\alpha' r}\right)^2 - 1} + \operatorname{arch}\left(\frac{x - \varepsilon_{\text{cono}}}{\alpha' r}\right)\right]^{-1}. \quad (10.110)$$

Conforme a la condición de circulación adherida

$$\partial\varphi_2/\partial r = -\alpha V_\infty \cos\gamma. \qquad (10.111)$$

Sumando para todas $\varepsilon_{\text{cono}} < x - \alpha' r$, obtenemos

$$\partial\varphi_2/\partial r = -(1/2)\,\alpha'^2 \cos\gamma \sum_{k=1}^{n} \dot{m}_k \left[\frac{x-\varepsilon_{\text{cono}}}{\alpha' r}\sqrt{\left(\frac{x-\varepsilon_{\text{cono}}}{\alpha' r}\right)^2 - 1} + \operatorname{arch}\left(\frac{x-\varepsilon_{\text{cono}}}{\alpha' r}\right)\right].$$

Empleando la condición de la circulación adherida es posible calcular la derivada $\dot{m}_{\text{cono}}$ que determina la *intensidad de los dipolos*. Con arreglo a esta condición

$$\alpha V_\infty = 0{,}5\alpha'^2 \sum_{k=1}^{i} \dot{m}_k \left[\frac{x_i-\varepsilon_{\text{cono}}}{\alpha' r_i}\sqrt{\left(\frac{x_i-\varepsilon_{\text{cono}}}{\alpha' r_i}\right)^2 - 1} + \operatorname{arch}\left(\frac{x_i-\varepsilon_{\text{cono}}}{\alpha' r_i}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\alpha'^2 \left[\dot{m}_1 \left\{\left[\frac{x_i-\varepsilon_1}{\alpha' r_i}\sqrt{\left(\frac{x_i-\varepsilon_1}{\alpha' r_i}\right)^2 - 1} + \operatorname{arch}\left(\frac{x_i-\varepsilon_1}{\alpha' r_i}\right)\right] - \left[\frac{x_i-\varepsilon_2}{\alpha' r_i}\sqrt{\left(\frac{x_i-\varepsilon_2}{\alpha' r_i}\right)^2 - 1} + \operatorname{arch}\left(\frac{x_i-\varepsilon_2}{\alpha' r_i}\right)\right]\right\} + \dot{m}_2 \left\{\left[\frac{x_i-\varepsilon_2}{\alpha' r_i}\sqrt{\left(\frac{x_i-\varepsilon_2}{\alpha' r_i}\right)^2 - 1} + \operatorname{arch}\left(\frac{x_i-\varepsilon_2}{\alpha' r_i}\right)\right] - \left[\frac{x_i-\varepsilon_3}{\alpha' r_i}\sqrt{\left(\frac{x_1-\varepsilon_3}{\alpha' r_i}\right)^2 - 1} + \operatorname{arch}\left(\frac{x_i-\varepsilon_3}{\alpha' r_i}\right)\right]\right\} + \ldots\right]. \quad (10.112)$$

Elijamos en la generatriz del sólido de revolución prefijado una serie suficientemente densa de puntos x_i, r_i, $(x_1, r_1;\ x_2, r_2;\ \ldots)$ y determinemos las coordenadas

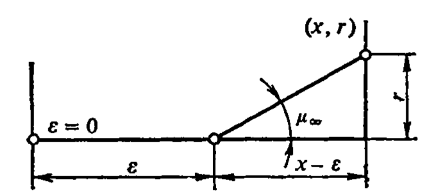


Fig. 10.40. Carácter de la influencia de los dipolos

Fig. 10.41. Esquema de la influencia de los dipolos sobre la circulación alrededor de un sólido de revolución

de los puntos $\varepsilon_{\text{cono}}$ ($\varepsilon_1 = 0$; $\varepsilon_2 = x_1 - r_1\alpha'$; $\varepsilon_3 = x_2 - r_2\alpha'$; . . .), yacentes en la intersección con el eje de las correspondientes líneas de Mach (fig. 10.41).

Analicemos el punto x_1, r_1 en el sector adyacente a la punta. Suponiendo que él es cónico escribamos la condición

$$2\alpha V_\infty/\alpha'^2 = \dot{m}_1 \left[\frac{x_1}{\alpha' r_1}\sqrt{\left(\frac{x_1}{\alpha' r_1}\right)^2 - 1} + \operatorname{arch}\left(\frac{x_1}{\alpha' r_1}\right)\right]$$

de la cual hallamos la función $\dot{m}_1$ para la punta cónica con ángulo $\beta_0 = r_1/x_1$.

Para el punto (x_2, r_2)

$$2\alpha V_\infty/\alpha'^2 = \dot{m}_1 \left[\frac{x_2}{\alpha' r_2}\sqrt{\left(\frac{x_2}{\alpha' r_2}\right)^2 - 1} + \operatorname{arch}\left(\frac{x_2}{\alpha' r_2}\right)\right] + \dot{m}_2 \left[\frac{x_2-\varepsilon_2}{\alpha' r_2}\sqrt{\left(\frac{x_2-\varepsilon_2}{\alpha' r_2}\right)^2 - 1} + \operatorname{arch}\left(\frac{x_2-\varepsilon_2}{\alpha' r_2}\right)\right].$$

Conociendo $\dot{m}_1$ de esta ecuación determinamos en el segundo sector el dipolo m_2, etc.

Analicemos el sector cilíndrico. En su comienzo $(x_N = x_i = x_{\text{máx.t}} + h,$ $r_i = r_{\text{máx.t}})$, para el punto N (fig. 10.41) tenemos

$$2\alpha V_\infty/\alpha'^2 = \dot{m}_1\left[\frac{x_i}{\alpha' r_i}\sqrt{\left(\frac{x_i}{\alpha' r_i}\right)-1}+\operatorname{arch}\left(\frac{x_i}{\alpha' r_i}\right)\right]+$$
$$+\dot{m}_2\left[\frac{x_i-\varepsilon_2}{\alpha' r_i}\sqrt{\left(\frac{x_i-\varepsilon_2}{\alpha' r_i}\right)^2-1}+\operatorname{arch}\left(\frac{x_i-\varepsilon_2}{\alpha' r_i}\right)\right]+$$
$$+\dot{m}_3\left[\frac{x_i-\varepsilon_3}{\alpha' r_i}\sqrt{\left(\frac{x_i-\varepsilon_3}{\alpha' r_i}\right)^2-1}+\operatorname{arch}\left(\frac{x_i-\varepsilon_3}{\alpha' r_i}\right)\right]+\ldots$$
$$\ldots+\dot{m}_k\left[\frac{x_i-\varepsilon_{\text{cono}}}{\alpha' r_i}\sqrt{\left(\frac{x_i-\varepsilon_{\text{cono}}}{\alpha' r_i}\right)^2-1}+\operatorname{arch}\left(\frac{x_i-\varepsilon_{\text{cono}}}{\alpha' r_i}\right)\right].$$

Aquí es incógnita la variable $\dot{m}_k$ que se determina de acuerdo con los resultados de la resolución del sistema de ecuaciones $\dot{m}_1$, $\dot{m}_2$, $\dot{m}_3$, ... Dividamos el cono de longitud $x_c = 8$ m en 16 sectores de dimensión $h = 8/16 = 0{,}5$ m y para cada uno de ellos calculamos $\dot{m}_k$. Los radios corrientes en el sector curvilíneo $r_i = (r_{\text{máx.t}}/x_{\text{máx.t}})\, x_i\, (2 - x_i/x_{\text{máx.t}}) = 0{,}2x_i\,(1 - 0{,}1x_i)$.

El parámetro $\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 1{,}732$. En el primer sector (cónico) $\beta_0 = r_1/x_1 = 1/\lambda_{\text{máx.t}} = 2r_{\text{máx.t}}/x_{\text{máx.t}} = 0{,}2$. El valor de $2\alpha V_\infty/\alpha'^2$ se incluye en el del dipolo, es decir, $\dot{\bar{m}} = \dot{m}_1/(2\alpha V_\infty/\alpha'^2)$. A continuación, calculamos

$$1 = \dot{\bar{m}}_1\left\{\frac{x_1}{\alpha' r_1}\sqrt{\left(\frac{x_1}{\alpha' r_1}\right)^2-1}+\ln\left[\frac{x_1}{\alpha' r_1}+\sqrt{\left(\frac{x_1}{\alpha' r_1}\right)^2-1}\right]\right\}=$$
$$=10{,}496\bar{m}_1\ (\dot{\bar{m}}_1 = 0{,}0953);$$
$$1 = \dot{\bar{m}}\left\{\frac{x_2-\varepsilon_1}{\alpha' r_2}\sqrt{\left(\frac{x_2-\varepsilon_1}{\alpha' r_2}\right)^2-1}+\ln\left[\frac{x_2-\varepsilon_1}{\alpha' r_2}+\sqrt{\left(\frac{x_2-\varepsilon_1}{\alpha' r_2}\right)^2-1}\right]\right\}+$$
$$+\dot{\bar{m}}_2\left\{\frac{x_2-\varepsilon_2}{\alpha' r_2}\sqrt{\left(\frac{x_2-\varepsilon_2}{\alpha' r_2}\right)^2-1}+\ln\left[\frac{x_2-\varepsilon_2}{\alpha' r_2}+\sqrt{\left(\frac{x_2-\varepsilon_2}{\alpha' r_2}\right)^2-1}\right]\right\};$$
$$\varepsilon_1 = 0;\quad \varepsilon_2 = x_1 - \alpha' r_1 = 0{,}3355;$$
$$1 = 1{,}043 + \dot{\bar{m}}_2 5{,}212\ (\dot{\bar{m}}_2 = -0{,}00825).$$

Efectuamos cálculos análogos $\dot{\bar{m}} = \dot{m}\alpha'^2/(2\alpha V_\infty)$ para los demás puntos x_i elegidos.

Hallamos los valores de $\bar{p}_2^\alpha$ en los correspondientes puntos. El potencial adicional

$$\varphi_2 = \alpha' \cos\gamma \int_0^{\operatorname{arch} u} m\,(x-\alpha' r \operatorname{ch} z)\operatorname{ch} z\,dz, \qquad (10.113)$$

y la correspondiente derivada

$$\partial\varphi_2/\partial x = \alpha' \cos\gamma \int_0^{\operatorname{arch} u} \dot{m}\,(x-\alpha' r \operatorname{ch} z)\operatorname{ch} z\,dz \qquad (10.114)$$

y el coeficiente de presión

$$\bar{p}_2 = -2\,(\partial\varphi_2/\partial x)/V_\infty = -2\,(\alpha' \cos\gamma/V_\infty) \int_0^{\operatorname{arch} u} \dot{m}\,(x-\alpha' r \operatorname{ch} z) \operatorname{ch} z\, dz. \qquad (10.115)$$

Sustituyendo aquí $\dot{m} = \dot{\bar{m}}\,(\alpha V_\infty/\alpha'^2)$ y representando la integral en forma de sumas, obtenemos

$$\bar{p}_2 = -(4\alpha/\alpha') \cos\gamma \sum_{k=1}^{i} \dot{\bar{m}} \sqrt{[(x_i-\varepsilon_{\text{cono}})/(\alpha' r_i)]^2-1}, \qquad (10.116)$$

de donde

$$\bar{p}_2^\alpha = -(4\cos\gamma/\alpha') \sum_{k=1}^{i} \dot{\bar{m}} \sqrt{[(x_i-\varepsilon_{\text{cono}})/(\alpha' r_i)]^2-1}. \qquad (10.116')$$

Calculamos

$$x_1 = 0{,}5 \text{ m} \rightarrow p_1 = -\bar{p}_2^\alpha/(4\cos\gamma) = 0{,}2735; \quad x_2 = 1{,}0 \text{ m} \rightarrow p_2 = 0{,}275.$$

De modo análogo calculamos $p_i\,(x_i)$ para el resto de los puntos del cuerpo. Cada uno de estos valores determina la derivada $\bar{p}_2^\alpha$ para el sector del sólido de revolución que se considera. P. ej., para la punta cónica $\bar{p}_2^\alpha = -p_1\,(4\cos\gamma/\alpha') = -0{,}6316 \cos\gamma$.

Examinemos el caso de la rotación de un cuerpo a velocidad angular Ω_z. La *condición de circulación adherida* en el punto x_1, r_1 durante el movimiento bajo ángulo de ataque y simultánea rotación tiene la forma

$$\alpha V_\infty + \Omega_z\,(x_i - x_{\text{m}}) =$$

$$= 0{,}5\alpha'^2 \sum_{k=1}^{i} \dot{m}_k \left[\frac{x_i-\varepsilon_{\text{cono}}}{\alpha' r_i} \sqrt{\left(\frac{x_i-\varepsilon_{\text{cono}}}{\alpha' r_i}\right)^2 - 1} + \operatorname{arch}\left(\frac{x_i-\varepsilon_{\text{cono}}}{\alpha' r_i}\right)\right]. \qquad (10.117)$$

Teniendo en cuenta sólo el movimiento de rotación, obtenemos

$$(x_i - x_{\text{m}})/x_{\text{c}} = \sum_{k=1}^{i} \dot{\bar{m}}_k \left[\frac{x_i-\varepsilon_{\text{cono}}}{\alpha' r_i} \sqrt{\left(\frac{x_i-\varepsilon_{\text{cono}}}{\alpha' r_i}\right)^2 - 1} + \operatorname{arch}\left(\frac{x_i-\varepsilon_{\text{cono}}}{\alpha' r_i}\right)\right],$$

donde $\dot{\bar{m}}_k = \dot{m}\,(0{,}5\alpha'^2)/(\Omega_z x_{\text{c}})$.

Calculamos para distintas x_i los valores de $(x_i - x_{\text{m}})/x_{\text{c}} = (x_i - 6)/8$ y efectuamos el cálculo $\dot{\bar{m}}_k$ para los puntos x_i elegidos tomando en consideración los datos obtenidos en el caso $\Omega_z = 0$:

$$x_i = x_1 = 0{,}5 \text{ m}; \quad -0{,}6875 = 10{,}496\dot{\bar{m}}_1\,(\dot{\bar{m}}_1 = -0{,}0655);$$

$$x_2 = 1 \text{ m}; \quad -0{,}625 = -0{,}768 + 5{,}212\dot{\bar{m}}_2\,(\dot{\bar{m}}_2 = 0{,}0274).$$

De forma análoga hallamos $\dot{\bar{m}}_i(x_i)$ para otros puntos de la sección de nariz curvilínea. Calculemos varias derivadas

$$\bar{p}_2 = -2(\varphi_{2x}/V_\infty) = -2(\alpha'\cos\gamma/V_\infty)\sum_{k=1}^{i}\dot{m}_k\sqrt{\left(\frac{x_i-\varepsilon_{\text{cono}}}{\alpha' r_i}\right)^2-1} =$$

$$= -2\alpha'\cos\gamma\,(\Omega_z x_c/0{,}5\alpha'^2 V_\infty)\sum_{k=1}^{i}\dot{\bar{m}}_k\sqrt{\left(\frac{x_i-\varepsilon_{\text{cono}}}{\alpha' r_i}\right)^2-1}; \qquad (10.118)$$

$$\bar{p}_2^{\omega_z} = -\frac{4\cos\gamma}{\alpha'}\sum_{k=1}^{i}\dot{\bar{m}}_k\sqrt{\left(\frac{x_i-\varepsilon_{\text{cono}}}{\alpha' r_i}\right)^2-1}\;(\omega_z=\Omega_z/x_c/V_\infty). \qquad (10.118')$$

En particular para los puntos $x_1 = 0{,}5$ m (punta cónica)

$$\bar{p}_2^{\omega_z} = -(4/1{,}732)\cos\gamma\,(-0{,}0655)\sqrt{\left(\frac{0{,}5}{1{,}732\cdot 0{,}095}\right)^2-1} = 0{,}4341\cos\gamma.$$

10.49. El coeficiente de presión se determina de acuerdo con

$$\bar{p}_2 = -2\,(\varphi_{2x}/V_\infty + \varphi_{2t}/V_\infty^2). \qquad (10.119)$$

Considerando las oscilaciones armónicas del sólido con relación al eje transversal que pasa por el centro de masas, hacemos uso de las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} m(\varepsilon) &= S'(\varepsilon)\,\alpha_0\,[V_\infty + ip(\varepsilon - x_m)]/\pi + S(\varepsilon)\,ip\alpha_0/\pi;\\ \dot{m}(\varepsilon) &= dm/d\varepsilon = S''(\varepsilon)\,\alpha_0\,[V_\infty + ip(\varepsilon - x_m)]/\pi + 2S'(\varepsilon)\,ip\alpha_0/\pi. \end{aligned}\right\} \qquad (10.120)$$

donde $S'(\varepsilon) = dS/d\varepsilon$; $S''(\varepsilon) = d^2S/d\varepsilon^2$.

Tomando en consideración que $\varepsilon = x - \alpha' r\text{chz}$, ponemos $m(\varepsilon) = m(x - \alpha' r\text{chz})$, $\dot{m}(\varepsilon) = \dot{m}(x - \alpha' r\text{chz})$ en las fórmulas para φ_{2x} y φ_{2t} [véase (10.97), (10.98)].

Realizamos las transformaciones teniendo en cuenta que $\alpha = \alpha_0\exp(ipt)$, $\dot{\alpha} = d\alpha/dt = \alpha_0\,ip\,\exp(ipt)$ y que la frecuencia de las oscilaciones es pequeña ($p\to 0$):

$$\varphi_{2x} = \frac{\alpha'\cos\gamma}{\pi}V_\infty\left[\Omega_3\left(\alpha - \frac{\dot{\alpha}x_m}{V_\infty}\right) + \frac{\dot{\alpha}x_c}{V_\infty}(\Omega_4 + 2\Omega_1) - \frac{M_\infty^2 r\dot{\alpha}}{V_\infty\alpha'}\Omega_2\right]; \qquad (10.121)$$

$$\varphi_{2t} = (\alpha'\cos\gamma V_\infty/\pi)\,\dot{\alpha}x_c\Omega_1, \qquad (10.122)$$

donde

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= (1/x_c)\int_0^{\text{arch}\,u} S'(x-\alpha' r\,\text{ch}\,z)\,\text{ch}\,z\,dz;\\ \Omega_2 &= \int_0^{\text{arch}\,u} S''(x-\alpha' r\,\text{ch}\,z)\,dz;\\ \Omega_3 &= \int_0^{\text{arch}\,u} S''(x-\alpha' r\,\text{ch}\,z)\,\text{ch}\,z\,dz;\\ \Omega_4 &= (1/x_c)\int_0^{\text{arch}\,u} S''(x-\alpha' r\,\text{ch}\,z)(x-\alpha' r\,\text{ch}\,z)\,\text{ch}\,z\,dz. \end{aligned}\right\} \qquad (10.123)$$

El coeficiente de presión

$$\bar{p}_2 = 2(\varphi_{2x}/V_\infty + \varphi_{2t}/V_\infty^2) = -(2\alpha' \cos\gamma/\pi) \times \times [\Omega_3(\alpha - \bar{\dot{\alpha}}\bar{x}_m) + \bar{\dot{\alpha}}(\Omega_4 + 3\Omega_1) - \bar{\dot{\alpha}}M_\infty^2\tilde{r}\Omega_2/\alpha'], \quad (10.124)$$

donde $\bar{\dot{\alpha}} = \dot{\alpha}x_c/V_\infty$; $\bar{x}_m = x_m/x_c$; $\tilde{r} = r/x_c$.

Para el caso de rotación alrededor del eje transversal a velocidad angular Ω_z la derivada

$$\dot{m}(\varepsilon) = dm/d\varepsilon = [S''(\varepsilon)/\pi][\alpha V_\infty + \Omega_z(\varepsilon - x_m)] + [2S'(\varepsilon)/\pi]\Omega_z. \quad (10.125)$$

Introducimos esta expresión en la fórmula

$$\varphi_{2x} = \alpha' \cos\gamma \int\limits_0^{\operatorname{arch} u} \dot{m}(x - \alpha' r \operatorname{ch} z) \operatorname{ch} z\, dz$$

y pasando a la variable $\varepsilon = x - \alpha' r \operatorname{ch} z$, hallamos

$$\varphi_{2x} = \alpha' \cos\gamma\, (\alpha V_\infty \Omega_3/\pi + \Omega_z x_c \Omega_4/\pi - \Omega_z x_m \Omega_3/\pi + 2\Omega_z x_c \Omega_1/\pi).$$

El correspondiente coeficiente de presión

$$\bar{p}_2 = -2\varphi_{2x}/V_\infty = -(2\alpha' \cos\gamma/\pi)[\Omega_3(\alpha - \omega_z \bar{x}_m) + \omega_z(\Omega_4 + 2\Omega_1)], \quad (10.126)$$

donde $\omega_z = \Omega_z x_c/V_\infty$; $\bar{x}_m = x_m/x_c$.

Calculamos las derivadas:

$$\left.\begin{aligned} \bar{p}_2^{\alpha} &= -2\alpha' \cos\gamma\Omega_3/\pi; \\ \bar{p}_2^{\dot{\alpha}} &= -(2\alpha' \cos\gamma/\pi)(-\Omega_3\bar{x}_m + \Omega_4 + 3\Omega_1 - M_\infty^2\tilde{r}\Omega_2/\alpha'); \\ \bar{p}_2^{\omega_z} &= -(2\alpha' \cos\gamma/\pi)(-\Omega_3\bar{x}_m + \Omega_4 + 2\Omega_1). \end{aligned}\right\} \quad (10.127)$$

10.50. Conforme a la ecuación de la generatriz $r/r_{\text{máx.t}} = (x/x_{\text{máx.t}}) \times (2 - x/x_{\text{máx.t}})$ el área de la sección transversal

$$S(\varepsilon) = \pi r^2 = [\pi/(4\lambda_{\text{máx. t}}^2)](4\varepsilon^2 - 4\varepsilon^3/x_{\text{máx. t}} + \varepsilon^4/x_{\text{máx. t}}^2),$$

mientras que la primera y segunda derivadas

$$\left.\begin{aligned} S'(\varepsilon) &= dS/d\varepsilon = (\pi/\lambda_{\text{máx. t}}^2)(2\varepsilon - 3\varepsilon^2/x_{\text{máx. t}} + \varepsilon^3/x_{\text{máx. t}}^2); \\ S''(\varepsilon) &= d^2S/d\varepsilon^2 = (\pi/\lambda_{\text{máx. t}}^2)(2 - 6\varepsilon/x_{\text{máx. t}} + 3\varepsilon^2/x_{\text{máx. t}}^2). \end{aligned}\right\} \quad (10.128)$$

Así, pues, [véase (10.123)]

$$\Omega_1 = [\pi/(\bar{x}_c\lambda_{\text{máx. t}}^2)][2\bar{x}i_r^1/u - 3\bar{x}^2 i_r^2/u^2 + \bar{x}^3 i_r^3/u^3], \quad (10.128')$$

donde $u = x/(\alpha' r)$; $\bar{x} = x/x_{\text{máx, t}}$; $\bar{x}_c = x_c/x_{\text{máx. t}}$;

$$\left.\begin{aligned} & i_r^1 = uI_1 - I_2; \quad i_r^2 = u^2 I_1 - 2uI_2 + I_3; \\ & i_r^3 = u^3 I_1 - 3u^2 I_2 + 3uI_3 - I_4; \\ & I_n = \int\limits_0^{\operatorname{arch} u} (\operatorname{ch} z)^n dz \quad (n = 1, 2, 3, 4). \end{aligned}\right\} \quad (10.129)$$

A continuación, hallamos

$$\Omega_2 = (\pi/\lambda^2_{\text{máx. t}})\,[2i^0_x - 6\bar{x}i^1_x/u + 3\bar{x}^2 i^2_x/u^2], \tag{10.129'}$$

donde

$$\left.\begin{aligned} & i^0_x = I_0; \quad i^1_x = uI_0 - I_1; \quad i^2_x = u^2 I_0 - 2uI_1 + I_2; \\ & I_0 = \int\limits_0^{\text{arch}\,u} (\text{ch}\,z)^0\,dz = \text{arch}\,u; \end{aligned}\right\} \tag{10.130}$$

$$\Omega_3 = (\pi/\lambda^2_{\text{máx. t}})\,[2i^0_r - 6i^1_r\bar{x}/u + 3i^2_r\bar{x}^2/u^2], \tag{10.130'}$$

donde

$$i^0_r = I_1; \quad i^1_r = uI_1 - I_2; \quad i^2_r = u^2 I_1 - 2uI_2 + I_3; \tag{10.131}$$

$$\Omega_4 = [\pi/(\bar{x}_c\lambda^2_{\text{máx. t}})]\,[2i^1_r\bar{x}/u - 6i^2_r\bar{x}^2/u^2 + 3i^3_r\bar{x}^3/u^3]. \tag{10.131'}$$

El valor de las integrales I_n:

$$\left.\begin{aligned} & I_0 = \int\limits_0^{\text{arch}\,u} (\text{ch}\,z)^0\,dz = \text{arch}\,u; \quad I_1 = \int\limits_0^{\text{arch}\,u} (\text{ch}\,z)^1\,dz = \sqrt{u^2 - 1}; \\ & I_2 = \int\limits_0^{\text{arch}\,u} (\text{ch}\,z)^2\,dz = (1/2)\sqrt{u^2-1}\,u + (1/2)\,\text{arch}\,u; \\ & I_3 = \int\limits_0^{\text{arch}\,u} (\text{ch}\,z)^3\,dz = (1/3)\sqrt{u^2-1}\,(u^2+2); \\ & I_4 = \int\limits_0^{\text{arch}\,u} (\text{ch}\,z)^4\,dz = (1/4)\sqrt{u^2-1}\,u\,(u^2+3/2) + (3/8)\,\text{arch}\,u. \end{aligned}\right\} \tag{10.131''}$$

Los valores de i^k_n ($k = 0, 1, 2, 3$; $n = x, r$) pueden calcularse de antemano en las funciones u y conformarse en una tabla.

Las dependencias obtenidas para Ω_n ($n = 1, 2, 3, 4$) determinan en forma más concreta las derivadas $\bar{p}^{\alpha}_2$, $\bar{p}^{\dot{\alpha}}_2$, $\bar{p}^{\omega_z}_2$ (10.127) para el sólido de revolución con generatriz parabólica. De estas dependencias podemos pasar a las expresiones para la punta «cónica» a condición del paso límite de r, $x \to 0$, al que corresponden los valores de $\lambda_{\text{máx.t}} = 1/\beta_{\text{cono}}$, $u = u_{\text{cono}} = (x/\alpha' r)_{r\to 0} = 1/(\alpha'\beta_{\text{cono}})$, así como $\Omega_1 = 0$; $\Omega_2 = (\pi\beta^2_{\text{cono}})2i^0_x = 2\pi\,\text{arch}\,u_{\text{cono}}\beta^2_{\text{cono}}$; $\Omega_3 = (\pi\beta^2_{\text{cono}})\,2i^0_r = 2\pi\sqrt{u^2_{\text{cono}} - 1}\beta^2_{\text{cono}}$; $\Omega_4 = 0$.

Así, pues,

$$\left.\begin{aligned} & \bar{p}^{\alpha}_2 = -4\beta^2_{\text{cono}}\alpha'\cos\gamma\sqrt{u^2_{\text{cono}} - 1}; \\ & \bar{p}^{\dot{\alpha}}_2 = 4\beta^2_{\text{cono}}\alpha'\cos\gamma\bar{x}_m\sqrt{u^2_{\text{cono}} - 1}; \\ & \bar{p}^{\omega_z}_2 = 4\beta^2_{\text{cono}}\alpha'\cos\gamma\bar{x}_m\sqrt{u^2_{\text{cono}} - 1}. \end{aligned}\right\} \tag{10.132}$$

Calculemos algunas derivadas $\overline{p}_2$. Primero calculamos las funciones u para las secciones máxima transversal y de base:

$$u_{\text{máx. t}} = x_{\text{máx. t}}/(\alpha' r_{\text{máx. t}}) = 5{,}774; \quad u_{\text{s. b}} = x_c/(\alpha' r_{\text{s. b}}); \quad \overline{S}_{\text{s. b}} = r^2_{\text{s. b}}/r^2_{\text{máx. t}} = 0{,}651;$$

$$r_{\text{s. b}} = 0{,}8068 r_{\text{máx. t}}; \quad \overline{r} = \overline{x}(2-\overline{x}); \quad \overline{x} = 1 + \sqrt{1-\overline{r}};$$

$$\overline{x}_c = x_c/x_{\text{máx. t}} = 1{,}4395; \quad x_c = 1{,}4395 x_{\text{máx. t}} = 7{,}198 \text{ m};$$

$$u_{\text{s. b}} = 1{,}4395 x_{\text{máx. t}}/(1{,}732 \cdot 0{,}8068 r_{\text{máx. t}}) = 10{,}3.$$

Para la comodidad de los cálculos analizamos la sección junto a las secciones máxima transversal y de base, para las cuales tomaremos, respectivamente, $u'_{\text{máx.t}} = 5{,}6$ y $u'_{\text{s.b}} = 10{,}2$. Con estos valores, para $u = u'_{\text{máx.t}} = 5{,}6$ hallamos:

$$i_x^0 = 2{,}408; \quad i_x^1 = 7{,}976; \quad i_x^2 = 30{,}44; \quad i_r^0 = 5{,}510; \quad i_r^1 = 14{,}22; \quad i_r^2 = 47{,}78;$$
$$i_r^3 = 177{,}9;$$

para $u = u'_{\text{s. b}} = 10{,}2$:

$$i_x^0 = 3{,}014; \quad i_x^1 = 20{,}59; \quad i_x^2 = 159{,}7; \quad i_r^0 = 10{,}15; \quad i_r^1 = 50{,}26; \quad i_r^2 = 328;$$
$$i_r^3 = 2389{,}8$$

y calculamos:

$$r = x\,(r_{\text{máx. t}}/x_{\text{máx. t}})\,(2 - x/x_{\text{máx. t}}); \quad r\alpha'/x = \alpha'\,[2r_{\text{máx. t}}/(2x_{\text{máx. t}})]\,(2 - x/x_{\text{máx. t}});$$

$$1/[u'_{\text{máx. t}}\alpha'/(2\lambda_{\text{máx. t}})] = 2 - x'_{\text{máx. t}}/x_{\text{máx. t}}; \quad \overline{x}'_{\text{máx. t}} = x'_{\text{máx. t}}/x_{\text{máx. t}} = 0{,}969;$$

$$\overline{x}'_{\text{s. b}} = x'_{\text{s. b}}/x'_{\text{máx. t}} = 1{,}434; \quad \overline{r}'_{\text{máx. t}} = 0{,}999\,(r'_{\text{máx. t}} = 0{,}999 r_{\text{máx. t}} = 0{,}4995 \text{ m});$$

$$\overline{r}'_{\text{s. b}} = 0{,}8116\,(r'_{\text{s. b}} = 0{,}8116 r_{\text{máx. t}} = 0{,}4058 \text{ m}).$$

Para el entorno de la sección máxima transversal

$$\Omega_1 = 0{,}1353; \quad \Omega_2 = 0{,}09181; \quad \Omega_3 = 1{,}325; \quad \Omega_4 = -0{,}07835;$$

$$\overline{p}_2^{\alpha} = -1{,}462\cos\gamma; \quad \overline{p}_2^{\dot{\alpha}} = 0{,}4917\cos\gamma; \quad \overline{p}_2^{\omega_z} = 0{,}08033\cos\gamma.$$

Para la sección próxima a la sección de base

$$\Omega_1 = 0{,}1152; \quad \Omega_2 = -0{,}2326; \quad \Omega_3 = -0{,}3199; \quad \Omega_4 = -0{,}4227;$$

$$\overline{p}_2^{\alpha} = 0{,}3529\cos\gamma; \quad \overline{p}_2^{\dot{\alpha}} = -0{,}1935\cos\gamma; \quad \overline{p}_2^{\omega_z} = -0{,}033\cos\gamma.$$

10.51. Analicemos en el cuerpo prefijado (fig. 10.42) el punto ($x = x_2$, $r = r_2 = r_{\text{máx.t}}$) cerca del comienzo del sector cilíndrico, para el que la condición de circulación adherida

$$\alpha V_\infty + \Omega_z(x - x_m) = \alpha'^2 \int\limits_{\text{arch}\,[(x_2-\varepsilon_3)/(\alpha' r_2)]}^{\text{arch}\,[(x_2-\varepsilon_1)/(\alpha' r_2)]} \dot{m}\,(x - \alpha' r \operatorname{ch} z)\operatorname{ch}^2 z\,dz. \tag{10.133}$$

Calculemos esta integral para dos intervalos $\varepsilon_3 - \varepsilon_2$ y $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$, considerando que para cada uno de ellos $\dot{m}$ es constante.

Como $\varepsilon_1 = 0$ y $\varepsilon_3 = x_2 - \alpha' r_2$ (fig. 10.42),

$$\alpha V_\infty + \Omega_z(x - x_m) = \alpha'^2\left(\dot{m}_2 \int\limits_0^{\text{arch}\,\overline{u}_2} \operatorname{ch}^2 z\,dz + \int\limits_{\text{arch}\,\overline{u}_2}^{\text{arch}\,u_2} \dot{m}\operatorname{ch}^2 z\,dz\right),$$

donde $\bar{u}_2 = (x_2 - \varepsilon_2)/(\alpha' r_2) = [x_2 - (x_1 - \alpha' r_1)]/(\alpha' r_2)$; $u_2 = x_2/(\alpha' r_2)$;

$$\int_0^{\operatorname{arch} \bar{u}_2} \operatorname{ch}^2 z\, dz = (1/2)\left(\bar{u}_2 \sqrt{\bar{u}_2^2 - 1} + \operatorname{arch} \bar{u}_2\right) = I_2(\bar{u}_2).$$

Examinemos por separado los *movimientos de avance y de rotación* para los que, respectivamente,

$$\alpha V_\infty = \alpha'^2 \left[\dot{m}_{2\alpha} I_2(\bar{u}_2) + \int_{\operatorname{arch} \bar{u}_2}^{\operatorname{arch} u_2} \dot{m}_\alpha \operatorname{ch}^2 z\, dz\right]; \qquad (10.134)$$

$$\Omega_z (x - x_m) = \alpha'^2 \left[\dot{m}_{2\Omega} I_2(\bar{u}_2) + \underbrace{\int_{\operatorname{arch} \bar{u}_2}^{\operatorname{arch} u_2} \dot{m}_\Omega \operatorname{ch}^2 z\, dz}_{U_2}\right]. \qquad (10.135)$$

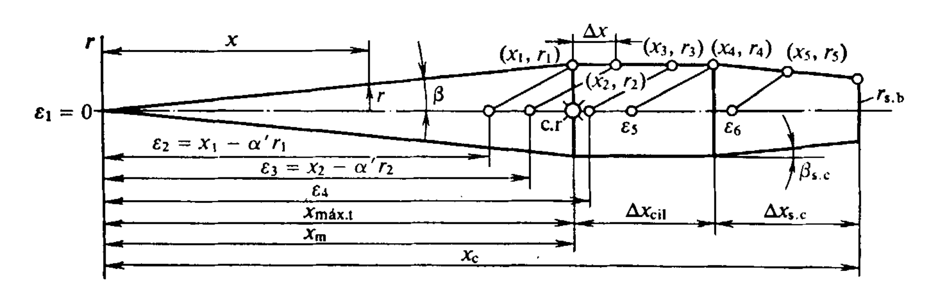


Fig. 10.42. Sólido cilíndrico con nariz y cola cónicas

Según la teoría aerodinámica del sólido delgado en el cono

$$\dot{m}_\alpha = \alpha V_\infty S''(\varepsilon)/\pi = [d^2/(\pi r^2)/d\varepsilon^2]\, \alpha V_\infty/\pi = 2\beta_{\text{cono}}^2 \alpha V_\infty,$$

lo que, después de ponerlo en (10.134), nos proporciona

$$\alpha V_\infty = \alpha'^2 \{\dot{m}_{2\alpha} I_2(\bar{u}_2) + 2\beta_{\text{cono}}^2 \alpha V_\infty [I_2(u_2) - I_2(\bar{u}_2)]\}. \qquad (10.136)$$

Esta ecuación puede ser precisada en cierto grado:

$$\alpha V_\infty = \alpha'^2 \{\dot{m}_{2\alpha} I_2(u_2) - 2\beta_{\text{cono}}^2 \alpha V_\infty a [I_2(u_2) - I_2(\bar{u}_2)]\},$$

donde $a = \dot{m}_\alpha/(2\beta_{\text{cono}}^2 \alpha V_\infty) = 1/[2\beta_{\text{cono}}^2 \alpha'^2 I_2(u_{\text{cono}})]$.

De aquí, introduciendo el valor de $\bar{\dot{m}}_{2\alpha(\alpha)} = \dot{m}_{2\alpha(\alpha)} \alpha'^2/(\alpha V_\infty)$, obtenemos el dipolo en el sector inicial del cilindro

$$\bar{\dot{m}}_{2\alpha} = \{1 - 2\beta_{\text{cono}}^2 \alpha'^2 a [I_2(u_2) - I_2(\bar{u}_2)]\}/I_2(\bar{u}_2).$$

Analicemos la derivada del coeficiente de presión:

$$\bar{p}_2^\alpha = -[2\varphi_{2x}/(V_\infty\alpha)] = -(2/\alpha')\cos\gamma\,\{\dot{\bar{m}}_{2\alpha} I_1(\bar{u}_2) + 2\beta_{\text{cono}}^2\alpha'^2 a\,[I_1(u_2) - I_1(\bar{u}_2)]\}, \quad (10.137)$$

donde $I_1 = \int_0^{\operatorname{arch} u} \operatorname{ch} z\,dz = \sqrt{u_2 - 1}$.

Para la punta cónica

$$\bar{p}_2^\alpha = -(2/\alpha')\,2\beta_{\text{cono}}^2\alpha'^2 I_1 \cos\gamma \quad [u_1 = x_1/\alpha' r_1) = 1/(\alpha'\beta_{\text{cono}})].$$

Tomando en consideración el valor de $I_1\ (u_1) \approx 1/(\alpha'\beta_{\text{cono}})$ la derivada

$$\bar{p}_2^\alpha = -4\beta_{\text{cono}} a \cos\gamma. \quad (10.138)$$

Para el punto $(x_2;\ r_2)$ tomamos la desviación $\Delta x = 0{,}1$ m. Al realizar los cálculos numéricos, en el entorno de la conjugación del cono con el cilindro se debe elegir una serie más densa de puntos. Hallamos:

$$\alpha = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 1{,}732; \quad x_{\text{máx. t}} = 2r_{\text{máx. t}}\lambda_{\text{máx. t}} = 5 \text{ m};$$

$$\varepsilon_2 = x_1 - \alpha' r_1 = 4{,}134 \text{ m}; \quad x_2 = x_1 + \Delta x = 5{,}1 \text{ m};$$

$$\bar{u}_2 = (x_2 - \varepsilon_2)/(\alpha' r_2) = 1{,}115; \quad u_2 = x_2/(\alpha' r_2) = 5{,}889;$$

$$u_{\text{cono}} = 1/(\alpha'\beta_{\text{cono}}) = 5{,}774; \quad \beta_{\text{cono}} = r_{\text{máx. t}}/x_{\text{máx. t}} = 0{,}1;$$

$$I_2(u_2) = 18{,}31; \quad I_2(\bar{u}_2) = 0{,}5125; \quad I_1(\bar{u}_2) = 0{,}4932;$$

$$I_2(u_{\text{cono}}) = 17{,}638; \quad a = 0{,}945; \quad \dot{\bar{m}}_{2\alpha} = -0{,}01768; \quad \bar{p}_2^\alpha = -0{,}3375\cos\gamma.$$

Para comparar, en la punta cónica hallamos:

$$\dot{\bar{m}}_{2\alpha} = [\alpha'^2/(\alpha_0 V_\infty)]\,(\alpha_0 V_\infty)/[\alpha'^2 I_2(u_{\text{cono}})] = 0{,}05667;$$

$$\bar{p}_2^\alpha = -4\beta_{\text{cono}} a \cos\gamma = -0{,}378\cos\gamma.$$

De acuerdo con la teoría aerodinámica del sólido delgado, en el sector cilíndrico $\dot{m}_\alpha = \alpha_0 V_\infty S''(\varepsilon)/\pi = 0$. Tomando en (10.137) $\dot{\bar{m}}_{2\alpha} = 0$, obtenemos $\bar{p}_2^\alpha = -0{,}3474\cos\gamma$. En el caso dado se ha tomado en consideración el efecto de las fuentes, situadas sólo en el cono, sobre el punto $(x_2;\ r_2)$.

Examinemos el segundo punto en el cilindro con coordenadas $x_3 = x_2 + 2\,\Delta x = 5{,}2$ m; $r_3 = 0{,}5$ m (fig. 10.42). Para este punto

$$\alpha V_\infty = \alpha'^2 \Big(\underbrace{\dot{m}_{3\alpha} \int_0^{\operatorname{arch}\bar{u}_3} \operatorname{ch}^2 z\,dz}_{I_2(\bar{u}_3)} + \underbrace{\dot{m}_{2\alpha} \int_{\operatorname{arch}\bar{u}_3}^{\operatorname{arch}\bar{u}_2} \operatorname{ch}^2 z\,dz}_{I_2(\bar{u}_2) - I_2(\bar{u}_3)} + \underbrace{2\beta_{\text{cono}}^2 \alpha V_\infty \int_{\operatorname{arch}\bar{u}_2}^{\operatorname{arch} u_3} \operatorname{ch}^2 z\,dz}_{I_2(u_3) - I_2(\bar{u}_2)}\Big),$$

donde $\bar{u}_2 = (x_3 - \varepsilon_2)/(\alpha' r_3) = [x_3 - (x_1 - \alpha' r_1)]/(\alpha' r_3)$;

$$\bar{u}_3 = (x_3 - \varepsilon_3)/(\alpha' r_3) = [x_3 - (x_2 - \alpha' r_2)]/(\alpha' r_3); \quad u_3 = x_3/(\alpha' r_3)$$

$$I_2(u_3) = (1/2)\left(u_3\sqrt{u_3^2 - 1} + \operatorname{arch} u_3\right); \quad I_2(\bar{u}_3) = (1/2)\left(\bar{u}_3\sqrt{\bar{u}_3^2 - 1} + \operatorname{arch}\bar{u}_3\right);$$

$$I_2(\bar{u}_2) = (1/2)\left(\bar{u}_2\sqrt{\bar{u}_2^2 - 1} + \operatorname{arch} u_2\right).$$

Introduciendo las anotaciones $\bar{\dot{m}}_{2\alpha}=\dot{m}_{2\alpha}\alpha'^2/(\alpha V_\infty)$, $\bar{\dot{m}}_{3\alpha}=\dot{m}_{3\alpha}\alpha'^2/(\alpha V_\infty)$, hallamos el dipolo en el segundo sector del cilindro

$$\bar{\dot{m}}_{3\alpha}=\{1-\bar{\dot{m}}_{2\alpha}[I_2(\bar{u}_2)-I_2(\bar{u}_3)]-2\beta^2_{\text{cono}}\alpha'^2a[I_2(u_3)-I_2(\bar{u}_2)]\}/I_2(\bar{u}_3)$$

y la correspondiente derivada:

$$\bar{p}^\alpha_2=-2\varphi_{2x}/(V_\infty\alpha)=-(2/\alpha')\cos\gamma\{\bar{\dot{m}}_{3\alpha}I_1(\bar{u}_3)+\bar{\dot{m}}_{2\alpha}[I_1(\bar{u}_2)-I_1(\bar{u}_3)]+$$
$$+2\beta^2_{\text{cono}}\alpha'^2a[I_1(u_3)-I_1(\bar{u}_2)]\}, \qquad (10.139)$$

donde $I_1(\bar{u}_3)=\sqrt{\bar{u}_3^2-1}$; $I_1(u_3)=\sqrt{u_3^2-1}$; $I(\bar{u}_2)=\sqrt{\bar{u}_2^2-1}$.

Calculamos:

$$\varepsilon_3=x_2-\alpha'r_2=4{,}234;\quad \bar{u}_3=(x_3-\varepsilon_3)/(\alpha'r_3)=1{,}115;$$
$$\bar{u}_2=(x_3-\varepsilon_2)/(\alpha'r_3)=1{,}231;\quad u_3=x_3/(\alpha'r_3)=6{,}005;$$
$$I_2(u_3)=19{,}02;\quad I_2(\bar{u}_3)=0.512;\quad I_2(\bar{u}_2)=0{,}7755;\quad I_1(u_3)=5{,}921;$$
$$I_1(\bar{u}_3)=0{,}493;\quad I_1(\bar{u}_2)=0{,}7179;\quad \bar{\dot{m}}_{3\alpha}=-0{,}0581;\quad \bar{p}^\alpha_2=-0{,}303\cos\gamma.$$

Determinemos la derivada $\bar{p}^\alpha_2$ en el punto que analizamos sin tener en cuenta la influencia de los dipolos en el cilindro. Haciendo $\dot{m}_{2\alpha}=\dot{m}_{3\alpha}=0$ e introduciendo la corrección a de (10.139), obtenemos

$$\bar{p}^\alpha_2=-4\alpha'\beta^2_{\text{cono}}a\cos\gamma[I_1(u_3)-I_1(\bar{u}_2)]=-0{,}3406\cos\gamma.$$

Examinemos un punto en la parte media de la cola cónica (fig. 10.42): $x_5=x_{\text{máx.t}}+\Delta x_{\text{c}11}+0{,}5\,\Delta x_{\text{s.c}}=7{,}5$ m. Para este punto

$$\bar{p}^\alpha_2=-[2/(\alpha V_\infty)]\,\alpha'\cos\gamma\Bigg(-\int_0^{\operatorname{arch}[(x_5-\varepsilon_5)/(\alpha'r_5)]}\dot{m}_{\text{s.c}}\operatorname{ch}z\,dz+$$
$$+\int_{\operatorname{arch}[(x_5-\varepsilon_5)/(\alpha'r_5)]}^{\operatorname{arch}[(x_5-\varepsilon_2)/(\alpha'r_5)]}\dot{m}_{\text{c}11}\operatorname{ch}z\,dz+\int_{\operatorname{arch}[(x_5-\varepsilon_5)/\alpha'r_5)]}^{\operatorname{arch}[(x_5-\varepsilon_1)/\alpha'r_5)]}\dot{m}_{\text{cono}}\operatorname{ch}z\,dz\Bigg),$$

donde $\dot{m}_{\text{s.c}}$, $\dot{m}_{\text{c}11}$, $\dot{m}_{\text{cono}}$ son los dipolos en el cono de cola, en el cilindro y en la punta cónica, respectivamente.

En correspondencia con la teoría aerodinámica del sólido delgado adoptemos

$$\dot{m}_{\text{s.c}}=(d^2/d\varepsilon^2)\,S''(\varepsilon)/\pi=2\beta^2_{\text{s.c}}\alpha V_\infty;\quad \dot{m}_{\text{cono}}=2\beta^2_{\text{cono}}\alpha V_\infty,$$

donde β_{cono} y $\beta_{\text{s.c}}$ son los ángulos de inclinación de las generatrices de los conos de las secciones de nariz y de cola.

Los valores de $\dot{m}_{\text{c}11}$ podían haber sido tomados del cálculo de los dipolos en el cilindro (es decir, tomar los valores de $\dot{m}_{2\alpha}$, $\dot{m}_{3\alpha}$, etc., obtenidos más arriba). Tomando en consideración el carácter aproximado de los cálculos, adoptemos como nulos los dipolos en el cilindro (como esto se deduce de la fórmula $\dot{m}_{\text{c}11}=S''(\varepsilon)\,\alpha V_\infty/\pi=0$) y hallaremos

$$\bar{p}^\alpha_2=-4\alpha'\cos\gamma\{\beta^2_{\text{s.c}}I_1(\bar{u}_5)+\beta^2_{\text{cono}}a[I_1(u_5)-I_1(\bar{u}_2)]\}. \qquad (10.140)$$

Calculamos:

$$\varepsilon_5 = x_4 - \alpha' r_4 = 6{,}134; \quad x_5 = 7{,}5;$$

$$r_5 = 0{,}5\,(r_{\text{máx. t}} + r_{\text{s. b}}) = 0{,}5\,(r_{\text{máx. t}} + r_{\text{máx. t}}\sqrt{\bar S_{\text{s. b}}}) = 0{,}425\ \text{m};$$

$$\beta_{\text{s. c}} = (r_{\text{máx. t}} - r_5)/(0{,}5\Delta x_{\text{s. b}}) = 0{,}15; \quad \bar u_5 = (x_5 - \varepsilon_5)/(\alpha' r_5) = 1{,}856;$$

$$\bar u_2 = (x_5 - \varepsilon_2)/(\alpha' r_5) = 4{,}572; \quad u_5 = x_5/(\alpha' r_5) = 10{,}19;$$

$$I_1(\bar u_5) = 1{,}564; \quad I_1(u_5) = 10{,}14; \quad I_1(\bar u_2) = 4{,}461; \quad \bar p_2^{\alpha} = -0{,}128\cos\gamma.$$

Analicemos el *movimiento rotativo* e introduzcamos en (10.135) el valor de $\dot m_\Omega$ referente al sector cónico:

$$\dot m_\Omega = (\Omega_z/\pi)\,[S''(\varepsilon)(\varepsilon - x_{\text{m}}) + 2S'(\varepsilon)]. \qquad (10.141)$$

Como $S''(\varepsilon) = 2\beta^2_{\text{cono}}\pi$, $\varepsilon = x - \alpha' r \operatorname{ch} z$; $S'(\varepsilon) = 2\beta^2_{\text{cono}}\pi\varepsilon = 2\beta^2_{\text{cono}}\pi\,(x - \alpha' r \operatorname{ch} z)$, entonces

$$\dot m_\Omega = 2\beta^2_{\text{cono}}\Omega_z\,[3\,(x - \alpha' r \operatorname{ch} z) - x_{\text{m}}]. \qquad (10.142)$$

Calculemos U_2 (10.135):

$$U_2 = 2\beta^2_{\text{cono}}\Omega_z\,\{3x\,[I_2(u_2) - I_2(\bar u_2)] - 3\alpha' r\,[I_3(u_2) - I_3(\bar u_2)] - x_{\text{m}}\,[I_2(u_2) - I_2(\bar u_2)]\},$$

donde

$$I_3 = \int_{\operatorname{arch}\bar u_2}^{\operatorname{arch} u_2} \operatorname{ch}^3 z\,dz = (1/3)\,[\sqrt{u_2^2 - 1}\,(u_2^2 + 2) - \sqrt{\bar u_2^2 - 1}\,(\bar u_2^2 + 2)] =$$

$$= I_3(u_2) - I_3(\bar u_2).$$

De (10.135) hallamos

$$\bar{\dot m}_{2\Omega} = [1/I_2(\bar u_2)]\,[(\bar x - \bar x_{\text{m}}) - \bar U_2]; \quad \bar{\dot m}_{2\Omega} = \dot m_{2\Omega}\alpha'^2/(x_{\text{c}}\Omega_z);$$

$$\bar U_2 = U_2\alpha'^2/(x_{\text{c}}\Omega_z); \quad \bar x = x/x_{\text{cono}}; \quad \bar x_{\text{m}} = x_{\text{m}}/x_{\text{c}}.$$

Para el punto ($x_2 = 5{,}1$ m; $r_2 = 0{,}5$ m) calculamos:

$$u_2 = x_2/(\alpha' r_2) = 5{,}889; \quad \bar u_2 = (x_2 - \varepsilon_2)/(\alpha' r_2) = 1{,}115;$$

$$I_2(u_2) = 18{,}31; \quad I_2(\bar u_2) = 0{,}5125; \quad \bar x_2 = x/x_{\text{c}} = 0{,}6375;$$

$$\bar x_{\text{m}} = x_{\text{m}}/x_{\text{c}} = 0{,}625; \quad I_3(u_2) = 70{,}95; \quad I_3(\bar u_2) = 0{,}5331;$$

$$\bar U_2 = [\alpha'^2/(x_{\text{c}}\Omega_z)]\,U_2 = 2\beta^2_{\text{cono}}\alpha'^2\ \{3\bar x\,[I_2(\bar u_2) - I_2(\bar u_2)] -$$

$$- 3\alpha'\,(r/x_{\text{c}})\,[I_3(u_2) - I_3(\bar u_2)] - (x/x_{\text{c}})\,[I_2(u_2) - I_2(\bar u_2)]\} =$$

$$= 0{,}00282; \quad \bar{\dot m}_{2\Omega} = 0{,}0175$$

y determinamos el coeficiente de presión

$$\bar p_2 = -(2\varphi_{2x}/V_\infty) = -(2\alpha'\cos\gamma/V_\infty)\,[\dot m_{2\Omega} I_1(\bar u_2) + U_1], \qquad (10.143)$$

donde
$$U_1 = \int_{\operatorname{arch}\bar u_2}^{\operatorname{arch} u_2} 2\beta^2_{\text{cono}}\Omega_z\,[3\,(x - \alpha' r \operatorname{ch} z) - x_{\text{m}}]\operatorname{ch} z\,dz = 2\beta^2_{\text{cono}}\Omega_z\,\{3x\,[I_1(u_2) -$$

$$- I_1(\bar u_2)] - 3\alpha' r\,[I_2(u_2) - I_2(\bar u_2)] - x_{\text{m}}\,[I_1(u_2) - I_1(\bar u_2)]\}.$$

Por esta razón

$$\overline{p}_2 = -(2\alpha' \cos\gamma/V_\infty)\,[(x_c\Omega_z/\alpha'^2)\,\dot{\overline{m}}_{2\Omega} I_1(\overline{u}_2) + \overline{U}_1(x_c\Omega_z)]$$

y la correspondiente derivada

$$\overline{p}_2^{\omega_z} = -2\alpha' \cos\gamma\,[\dot{\overline{m}}_{2\Omega} I_1(\overline{u}_2)/\alpha'^2 + \overline{U}_1]. \qquad (10.143')$$

Calculamos:

$$u_2 = 5{,}889;\quad \overline{u}_2 = 1{,}115;\quad I_1(\overline{u}_2) = 0{,}4932;\quad I_1(u_2) = 5{,}80;\quad I_2(\overline{u}_2) = 0{,}5125;$$

$$I_2(u_2) = 18{,}31;\quad \overline{U}_1 = U_1/(x_c\Omega_z) = 0{,}02105;\quad \overline{p}_2^{\omega_z} = -0{,}08289\cos\gamma.$$

Determinamos el coeficiente de presión en el extremo de la punta cónica ($x = x_1 = 5$ m; $r = r_1 = 0{,}5$ m);

$$\overline{p}_2 = -(2\alpha' \cos\gamma/V_\infty) \underbrace{\int_0^{\operatorname{arch}[x_1/(\alpha' r_1)]} \dot{m}_\Omega \operatorname{ch} z\, dz}_{U_1^n};$$

$$U_1^n = \underbrace{2\beta_{\text{cono}}^2\,[3\overline{x} I_1(u_{\text{cono}}) - 3\alpha' r I_2(u_{\text{cono}}) - \overline{x}_m I_1(u_{\text{cono}})]}_{\overline{U}_1^n}\,\Omega_z x_c = \overline{U}_1^n \Omega_z x_c.$$

La correspondiente derivada

$$\overline{p}_2^{\omega_z} = -2\alpha' \cos\gamma\,\overline{U}_1^n. \qquad (10.144)$$

Calculamos:

$$u_{\text{cono}} = x_1/(\alpha' r_1) = 1/(\alpha' \beta_{\text{cono}}) = 5{,}774:\quad I_1(u_{\text{cono}}) = 5{,}687:\quad I_2(u_{\text{cono}}) = 17{,}638:$$

$$\overline{U}_1^n = 0{,}02762:\quad \overline{p}_2^{\omega_z} = -0{,}09566\cos\gamma.$$

El coeficiente de presión en el punto ($x = x_2 = 5{,}1$ m; $r = r_2 = 0{,}5$ m) sin tener en cuenta la influencia de los dipolos en el cilindro ($\dot{m}_{2\Omega} = 0$)

$$\overline{p}_2 = -(2\alpha' \cos\gamma/V_\infty) \int_{\operatorname{arch}\overline{u}_2}^{\operatorname{arch} u_2} \dot{m}_{2\Omega} \operatorname{ch} z\, dz = -(2\alpha' \cos\gamma/V_\infty)\,\overline{U}_1(x_c\Omega_z)$$

y la derivada

$$p_2^{\omega_z} = -2\alpha' \cos\gamma\,\overline{U}_1. \qquad (10.145)$$

Calculamos:

$$\overline{U}_1 = 2\beta_{\text{cono}}^2 \{3\overline{x}\,[I_1(u_2) - I_1(\overline{u}_2)] - 3\alpha'\overline{r}\,[I_2(u_2) - I_2(\overline{u}_2)] - \overline{x}_m\,[I_1(u_2) - I_1(\overline{u}_2)]\} =$$

$$= 0{,}02105;\quad \overline{p}_2^{\omega_z} = -0{,}07292\cos\gamma.$$

Analicemos el punto con coordenadas $x_3 = 5{,}2$ m; $r_3 = 0{,}5$ m (fig. 10.42). Para él el dipolo se determina de la ecuación

$$\Omega_z(x - x_m) = \alpha'^2 \Big(\dot{m}_{3\Omega} \underbrace{\int_0^{\operatorname{arch}\overline{u}_3} \operatorname{ch}^2 z\, dz}_{I_3(\overline{u}_3)} + \dot{m}_{2\Omega} \underbrace{\int_{\operatorname{arch}\overline{u}_3}^{\operatorname{arch}\overline{u}_2} \operatorname{ch}^2 z\, dz}_{I_3(\overline{u}_2) - I_3(\overline{u}_3)} + \underbrace{\int_{\operatorname{arch}\overline{u}_2}^{\operatorname{arch} u_3} \dot{m} \operatorname{ch}^2 z\, dz}_{U_3}\Big),$$

en la que

$$U_2 = 2\beta^2_{\text{cono}}\Omega_z \{3x [I_2 (u_3) - I_2 (\bar{u}_3)] - 3\alpha' r [I_3 (u_3 - I_3 (\bar{u}_2)] - x_{\text{m}} [I_2 (u_3) - I_2 (\bar{u}_2)]\};$$

$$I_3 (u_3) - I_3 (\bar{u}_2) = (1/3) [\sqrt{u_3^2 - 1} (u_3^2 + 2) - \sqrt{\bar{u}_2^2 + 1} (\bar{u}_2^2 + 2)].$$

Tomando esto en consideración

$$\bar{\dot{m}}_{3\Omega} = [1/I_2 (\bar{u}_3)] \{(\bar{x} - \bar{x}_{\text{m}}) - \bar{\dot{m}}_2 [I_2 (\bar{u}_2) - I_2 (\bar{u}_3)] - \bar{U}_2\};$$

$$\bar{\dot{m}}_{3\Omega} = \dot{m}_{3\Omega}\alpha'^2/(x_c\Omega_z),$$

donde $\bar{U}_2 = U_2\alpha'^2/(x_c\Omega_z) = 2\beta^2_{\text{cono}}\alpha'^2 \{3\bar{x} [I_2 (u_3) - I_2 (\bar{u}_2)] - 3\alpha' \bar{r} [I_3 (u_3) - I_3 (\bar{u}_2)] - \bar{x}_{\text{m}} [I_2 (u_3) - I_2 (\bar{u}_2)]\}$ $(\bar{x} = x/x_c$: $\bar{r} = r/x_c$: $\bar{x}_{\text{m}} = x_{\text{m}}/x_c)$.

Determinemos el coeficiente de presión y su derivada:

$$\bar{p}_2 = -2 (\varphi_{2x}/V_\infty) =$$

$$= -2 (\alpha' \cos \gamma/V_\infty) \{(\dot{m}_{3\Omega} I_1 (\bar{u}_3) + \dot{m}_{2\Omega} [I_1 (\bar{u}_2) - I_1 (\bar{u}_3)] + U_1\}; \quad (10.146)$$

$$U_1 = 2\beta^2_{\text{cono}}\Omega_z \int_{\text{arch}\, \bar{u}_2}^{\text{arch}\, u_3} [3 \{x - \alpha' r \,\text{ch}\, z) - x_{\text{m}}] \,\text{ch}\, z \, dz = 2\beta^2_{\text{cono}}\Omega_z \{3x [I_1 (u_3) - I_1 (\bar{u}_2)] -$$

$$- 3\alpha' r [I_2 (u_3) - I_2 (\bar{u}_2)] - x_{\text{m}} [I_1 (u_3) - I_1 (\bar{u}_2)]\};$$

$$\bar{U}_1 = U_1/(x_c\Omega_z) =$$

$$= 2\beta^2_{\text{cono}} \{3\bar{x} [I_1 (u_3) - I_1 (\bar{u}_2)] - 3\alpha' \bar{r} [I_2 (u_3) - I_2 (\bar{u}_2)] - \bar{x}_{\text{m}} [I_1 (u_3) - I_1 (\bar{u}_2)]\};$$

$$\bar{p}_2^{\omega_z} = -2\alpha' \cos \gamma \{\bar{\dot{m}}_{3\Omega} I_1 (\bar{u}_3)/\alpha'^2 + (\bar{\dot{m}}_{2\Omega}/\alpha'^2) [I_1 (\bar{u}_2) - I_1 (\bar{u}_3)] + \bar{U}_1\}. \quad (10.146')$$

Calculamos;

$$\bar{x} = x/x_c = 0{,}65; \quad \bar{u}_3 = 1{,}115; \quad \bar{u}_2 = 1{,}231; \quad u_3 = 6{,}005; \quad I_2 (\bar{u}_2) = 0{,}7755;$$

$$I_1 (\bar{u}_2) = 0{,}7179; \quad I_2 (u_3) = 19{,}02; \quad I_2 (\bar{u}_3) = 0{,}512; \quad I_1 (\bar{u}_3) = 0{,}493;$$

$$I_1 (u_3) = 5{,}921; \quad I_3 (u_3) - I_3 (\bar{u}_2) = 70{,}33; \quad \bar{U}_2 = 0{,}00216; \quad \bar{\dot{m}}_{3\Omega} = 0{,}01951;$$

$$\bar{U}_1 = 0{,}01938; \quad \bar{p}_2^{\omega_z} = -0{,}07967 \cos \gamma.$$

Examinemos el punto arbitrario $(x = x_5$; $r = r_5)$ en el sector de cola, donde

$$\bar{p}_2 = -2 (\alpha' \cos \gamma/V_\infty) \int_0^{\text{arch}\, u_6} \dot{m}_\Omega \,\text{ch}\, z \, dz =$$

$$= -2 (\alpha' \cos \gamma/V_\infty) \left(\int_0^{\text{arch}\, \bar{u}_6} \dot{m}_\Omega \,\text{ch}\, z \, dz + \int_{\text{arch}\, \bar{u}_6}^{\text{arch}\, \bar{u}_2} \dot{m}_\Omega \,\text{ch}\, z \, dz + \int_{\text{arch}\, \bar{u}_2}^{\text{arch}\, u_6} \dot{m}_\Omega \,\text{ch}\, z \, dz \right).$$

La primera integral a la derecha determina el efecto de los dipolos sobre la cola, la segunda, en el cilindro y la tercera, en el sector de nariz. Tomemos la ley de distribución de los dipolos en la forma (10.141), según la cual en el cilindro,

donde $S'(\varepsilon) = S''(\varepsilon) = 0$, el efecto de los dipolos desaparece. Así,

$$\bar{p}_2 = -2(\alpha' \cos\gamma/V_\infty)\underbrace{\int_0^{\operatorname{arch}\bar{u}_5} \dot{m}_\Omega \operatorname{ch} z\, dz}_{U_1^x} + \underbrace{\int_{\operatorname{arch}\bar{u}_2}^{\operatorname{arch} u_5} \dot{m}_\Omega \operatorname{ch} z\, dz}_{U_1^n}\Big).$$

En la segunda integral a la derecha introducimos la derivada $\dot{m}_\Omega$ de (10.142):
$U_1^n = 2\beta_{\text{cono}}^2\Omega_z x_c\{3\bar{x}[I(u_5) - I_1(\bar{u}_2)] - 3\alpha'\bar{r}[I_2(u_5) - I_2(\bar{u}_2)] - \bar{x}_m[I_1(u_5) - I_1(\bar{u}_2)]\}$.
Para el cono en la cola tenemos:

$$S(\varepsilon) = \pi r^2 = \pi[r_{s.b} + (x_c - \varepsilon)\beta_{s.c}]^2;$$

$S'(\varepsilon) = 2\pi[r_{s.b} + (x_c - \varepsilon)\beta_{s.c}]\beta_{s.c}$; $S''(\varepsilon) = 2\pi\beta_{s.c}^2$.
Introduciendo aquí $S'(\varepsilon)$ y $S''(\varepsilon)$ de (10.141), hallamos:

$$\dot{m}_\Omega = 2\beta_{s.c}\Omega_z x_c\{\beta_{s.c}(\bar{\varepsilon} - \bar{x}_m) - 2[\bar{r}_{s.b} + (1 - \bar{\varepsilon})\beta_{s.c}]\};$$

$$U_1^x = 2\beta_{s.c}\Omega_z x_c\{\beta_{s.c}[\bar{x}I_1(\bar{u}_5) - \alpha'\bar{r}I_2(\bar{u}_5) - x_m I_1(\bar{u}_5)] -$$
$$-2[\bar{r}_{s.b}I_1(\bar{u}_5) + (1 - \bar{x})I_1(\bar{u}_5)\beta_{s.c} + \alpha'\bar{r}I_2(\bar{u}_5)\beta_{s.c}]\}.$$

De acuerdo con los resultados obtenidos

$$\bar{p}_2^{\omega_z} = -4\alpha' \cos\gamma\left[\left(\frac{U_1^x}{2\beta_{s.c}\Omega_z x_c}\right)\beta_{s.c} + \left(\frac{U_1^n}{2\beta_{\text{cono}}^2\Omega_z x_c}\right)\beta_{\text{cono}}^2\right](\omega_z = \Omega_z x_c/V_\infty). \quad (10.147)$$

Para el punto ($x = x_5 = 7{,}5$ m; $r = r_5 = 0{,}425$ m), calculamos:

$$\bar{x} = \bar{x}_5 = x/x_c = 0{,}9375; \quad \bar{r} = \bar{r}_5 = r_5/x_c = 0{,}0531;$$

$$\bar{r}_{s.b} = r_{s.b}/x_c = \sqrt{\bar{S}_{s.b}}\, r_{\text{máx.}t}/x_c = 0{,}04375; \quad \bar{x}_m = x_m/8 = 0{,}625;$$

$$\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 1{,}732; \quad \beta_{\text{cono}} = 0{,}1; \quad \beta_{s.c} = 0{,}15;$$

$\bar{u}_2 = (x_5 - \varepsilon_2)/(\alpha' r_5) = (x_5 - x_1 + \alpha' r_1)/(\alpha' r_5) = 4{,}572$;

$u_5 = x/(\alpha' r_5) = 10{,}19$; $\bar{u}_5 = (x_5 - \varepsilon_5)/(\alpha' r_5) = (x_5 - x_4 + \alpha' r_4)/(\alpha' r_5) = 1{,}856$;

$I_1(\bar{u}_4) = 1{,}564$; $I_1(u_5) = 10{,}14$; $I_1(u_2) = 4{,}461$; $I_2(\bar{u}_4) = 2{,}066$;

$I_2(u_4) = 53{,}17$; $I_2(\bar{u}_2) = 11{,}3$; $U_1^x/(2\beta_{s.c}\Omega_z x_c) = -0{,}1784$;

$$U_1^n/(2\beta_{\text{cono}}^2\Omega_z x_c) = 0{,}866; \quad \bar{p}_2^{\omega_z} = 0{,}1254\cos\gamma.$$

Analicemos el movimiento con *ángulo variable de ataque*. La correspondiente condición de circulación adherida

$$\alpha_0[V_\infty + ip/(x - x_m)]\exp(ipt)\cos\gamma =$$

$$= \exp(ipt)\cos\gamma\Big[\alpha'^2\int_0^{\operatorname{arch}[x_2/(\alpha' r_2)]} \dot{m}\operatorname{ch} z\, dz + (iM_\infty^2 p/\alpha' V_\infty)\int_0^{\operatorname{arch}[x_2/\alpha' r_2)]} m\, dz -$$

$$-(iM_\infty^2 pr/V_\infty)\int_0^{\operatorname{arch}[x_2/(\alpha' r_2)]} \dot{m}\operatorname{ch} z\, dz\Big]. \quad (10.148)$$

Tomemos por constantes en el pequeño sector $\varepsilon_3 - \varepsilon_2$ (fig. 10.42) las magnitudes $\bar{m}$ y $\dot{m}$ y representemos las integrales en la siguiente forma:

$$\int_0^{\operatorname{arch} u_2} \dot{m}\,\mathrm{ch}^2 z\,dz = \dot{m}\int_0^{\operatorname{arch}\bar{u}_2} \mathrm{ch}^2 z\,dz + \underbrace{\int_{\operatorname{arch}\bar{u}_2}^{\operatorname{arch} u_2} \dot{m}\,\mathrm{ch}^2 z\,dz}_{U_2} = \dot{m} I_2(\bar{u}_2) + U_2;$$

$$\int_0^{\operatorname{arch} u_2} m\,dz = m\int_0^{\operatorname{arch}\bar{u}_2} dz + \underbrace{\int_{\operatorname{arch}\bar{u}_2}^{\operatorname{arch} u_2} m\,dz}_{U_0} = \underbrace{m\operatorname{arch}\bar{u}_2}_{I_0(\bar{u}_2)} + U_0;$$

$$\int_0^{\operatorname{arch} u_2} \dot{m}\,\mathrm{ch}\, z\,dz = \dot{m}\int_0^{\operatorname{arch}\bar{u}_2} \mathrm{ch}\, z\,dz + \underbrace{\int_{\operatorname{arch}\bar{u}_2}^{\operatorname{arch} u_2} \dot{m}\,\mathrm{ch}\, z\,dz}_{U_1} = \dot{m}\underbrace{\sqrt{\bar{u}^2-1}}_{I_1(\bar{u}_2)} + U_1.$$

Introducimos en las integrales U_2, U_0, U_1 los valores de m (ε) y $\dot{\mathrm{m}}$ (ε), respectivamente:

$$m(\varepsilon) = [S'(\varepsilon)\,\alpha_0/\pi]\,[V_\infty + ip\,(\varepsilon - x_\mathrm{m})] + [S(\varepsilon)/\pi]\,ip\alpha_0 =$$
$$= 2\beta^2_{\mathrm{cono}}\alpha_0\,\{V_\infty + ip\,[1{,}5\,(x - \alpha' r\,\mathrm{ch}\,z) - x_\mathrm{m}]\}\,(x - \alpha' r\,\mathrm{ch} z);$$

$$\dot{m}(\varepsilon) = [S''(\varepsilon)\,\alpha_0/\pi]\,[V_\infty + ip\,(\varepsilon - x_\mathrm{m})] + [2S'(\varepsilon)/\pi]\,ip\alpha_0 =$$
$$= 2\beta^2_{\mathrm{cono}}\alpha_0\,\{V_\infty + ip\,[3\,(x - \alpha' r\,\mathrm{ch}\,z)] - x_\mathrm{m}]\}.$$

Como resultado

$$U_2 = 2\beta^2_{\mathrm{cono}}\alpha_0 V_\infty\,\{[I_2(u_2) - I_2(\bar{u}_2)] + ip_\infty \bar{U}_2\};$$

$$\bar{U}_2 = 3\bar{x}\,[I_2(u_2) - I_2(\bar{u}_2)] - 3\alpha'\bar{r}\,[I_3(u_2) - I_3(\bar{u}_2)] - \bar{x}_\mathrm{m}\,[I_2(u_2) - I_2(\bar{u}_2)];$$

$$\bar{x} = x/x_\mathrm{c};\quad \bar{r} = r/x_\mathrm{c};\quad \bar{x}_\mathrm{m} = x_\mathrm{m}/x_\mathrm{c};\quad p_\infty = px_\mathrm{c}/V_\infty;$$

$$U_0 = 2\beta^2_{\mathrm{cono}}\alpha_0 V_\infty \Big\{ \underbrace{\int_{\operatorname{arch}\bar{u}_2}^{\operatorname{arch} u_2} (x - \alpha' r\,\mathrm{ch}\,z)\,dz}_{N_1} +$$

$$+ ip_\infty \Big\{ \underbrace{\int_{\operatorname{arch}\bar{u}_2}^{\operatorname{arch} u_2} [1{,}5\,(\bar{x} - \alpha'\bar{r}\,\mathrm{ch}\,z) - \bar{x}_\mathrm{m}]\,(x - \alpha' r\,\mathrm{ch}\,z)\,dz}_{N_2} \Big\} =$$

$$= 2\beta_{\mathrm{cono}}\alpha_0 V_\infty\,(N_1 + ip_\infty N_2);$$

$$U_1 = 2\beta^2_{\mathrm{cono}}\alpha_0 V_\infty\,[I_1(u_2) - I_1(\bar{u}_2) + ip_\infty \bar{U}_1];$$

$$\bar{U}_1 = 3\bar{x}\,[I_1(u_2) - I_1(\bar{u}_2)] - 3\alpha'\bar{r}\,[I_1(u_2) - I_1(\bar{u}_2)] - \bar{x}_\mathrm{m}\,[\bar{I}_1(u_2) - I_1(\bar{u}_2)].$$

Representemos la potencia del dipolo m y la derivada $\dot{m}$ en la forma $m = m_0 + ip_\infty m_p$, $\dot{m} = \dot{m}_0 + ip_\infty \dot{m}_p$, después de lo cual hallamos la correspondiente expresión para $\alpha_0 V_\infty [1 + ip_\infty (\bar{x} - \bar{x}_m)]$.

Separemos en esta expresión los valores reales e imaginarios:

$$\alpha_0 V_\infty = \alpha'^2 \dot{m}_0 I_2 (\bar{u}_2) + 2\beta^2_{\text{cono}}\alpha_0\alpha'^2 V_\infty [I_2 (u_2) - I_2 (\bar{u}_2)] - \\ - p^2_\infty [M^2_\infty/(\alpha' x_c)] [m_p I_0 (\bar{u}_2) + 2\beta^2_{\text{cono}}\alpha_0 V_\infty N_2] + \\ + p^2_\infty M^2_\infty \bar{r} [\dot{m}_p I_1 (\bar{u}_2) + 2\beta^2_{\text{cono}}\alpha_0 V_\infty \bar{U}_1]; \tag{10.149}$$

$$\alpha_0 V_\infty (\bar{x} - \bar{x}_m) = \alpha'^2 \dot{m}_p I_2 (\bar{u}_2) + 2\beta^2_{\text{cono}}\alpha_0\alpha'^2 V_\infty \bar{U}_2 + \\ + [M^2_\infty/(\alpha' x_c)] [m_0 I_0 (\bar{u}_2) + 2\beta^2_{\text{cono}}\alpha_0 V_\infty N_1] - \\ - M^2_\infty \bar{r} \{\dot{m}_0 I_1 (\bar{u}_2) + 2\beta^2_{\text{cono}}\alpha_0 V_\infty [I_1 (u_2) - I_1 (\bar{u}_2)]\}. \tag{10.150}$$

Para *pequeños números de Strouhal* (10.149) podemos despreciar los términos con p^2_∞ y admitir

$$\alpha_0 V_\infty = \alpha'^2 \{\dot{m}_0 I_2 (\bar{u}_2) + 2\beta^2_{\text{cono}}\alpha_0 V_\infty [I_2 (u_2) - I_2 (\bar{u}_2)]\}.$$

Esta ecuación coincide con (10.134) para el movimiento *con ángulo constante de ataque* o bien para el movimiento simultáneamente acompañado de la rotación uniforme longitudinal. La ecuación (10.150) puede representarse en forma adimensional introduciendo los parámetros $\bar{\dot{m}}_p = \dot{m}_p \alpha'^2/(\alpha_0 V_\infty)$ y $\bar{m}_0 = m_0 \alpha'^2/(\alpha_0 V_\infty)$.

Al resolver esta ecuación hallamos el momento adimensional del dipolo:

$$\bar{\dot{m}}_p = [1/I_2 (\bar{u}_2)] [(\bar{x} - \bar{x}_m) - 2\beta^2_{\text{cono}}\alpha'^2 \bar{U}_2 - [M^2_\infty/(\alpha'^3 x_c)] [\bar{m}_0 I_0 (\bar{u}_2) + 2\beta^2_{\text{cono}}\alpha'^2 N_1] + \\ + M^2_\infty \bar{r} \{\bar{\dot{m}}_0 I_1 (\bar{u}_2)/\alpha'^2 + 2\beta^2_{\text{cono}} [I_1 (u_2) - I_1 (\bar{u}_2)]\}]. \tag{10.151}$$

El coeficiente de presión en el punto que examinamos

$$\bar{p}_2 = -2 (\varphi_{2x}/V_\infty + \varphi_{2t}/V_\infty),$$

donde

$$\varphi_{2x} = \alpha' \cos\gamma \exp (ipt) \left\{ \int_0^{\text{arch}\, u_2} \dot{m} \operatorname{ch} z\, dz - [ipM^2_\infty r/(\alpha' V_\infty)] \int_0^{\text{arch}\, u_2} \dot{m}\, dz \right\};$$

$$\varphi_{2t} = \alpha' ip \cos\gamma \exp (ipt) \left\{ \int_0^{\text{arch}\, u_2} m \operatorname{ch} z\, dz - [ipM^2_\infty r/(\alpha' V_\infty)] \int_0^{\text{arch}\, u_2} m\, dz \right\}.$$

Después de las correspondientes sustituciones obtenemos una ecuación en la que pueden eliminarse los términos con p^2. A continuación, introduciendo en la expresión hallada los parámetros adimensionales $\dot{m}_0 = \bar{\dot{m}}\alpha_0 V_\infty/\alpha'^2$; $\dot{m}_p = \bar{\dot{m}}_p \alpha_0 V_\infty/\alpha'^2$; $m_0 = \bar{m}_0 \alpha_0 V_\infty/\alpha'^2$ y tomando en consideración que $\alpha = \alpha_0 \times$

$\times$ exp (ipt); $\dot{\alpha} = d\alpha/dt = \alpha_0 ip$ exp (ipt), determinamos

$$\bar{p}_2 = -2\alpha' \cos\gamma \left\{ (\alpha/\alpha'^2) \int_0^{\operatorname{arch} u_2} \dot{\bar{m}}_0 \operatorname{ch} z\, dz + (\dot{\alpha}/\alpha'^2) \int_0^{\operatorname{arch} u_2} \dot{\bar{m}}_p \operatorname{ch} z\, dz - \right.$$
$$\left. - [\dot{\alpha} M_\infty^2 r/(\alpha'^3 V_\infty)] \int_0^{\operatorname{arch} u_2} \dot{\bar{m}}_0\, dz + [\dot{\alpha}/(\alpha'^2 V_\infty)] \int_0^{\operatorname{arch} u_2} \bar{m}_0 \operatorname{ch} z\, dz \right\},$$

de donde las derivadas

$$\bar{p}_2^\alpha = -2(\cos\gamma/\alpha') \int_0^{\operatorname{arch} u_2} \dot{\bar{m}}_0 \operatorname{ch} z\, dz;$$

$$\bar{p}_2^{\dot{\bar{\alpha}}} = -2\alpha' \cos\gamma \left\{ [V_\infty/(x_c \alpha'^2)] \int_0^{\operatorname{arch} u_2} \dot{\bar{m}}_p \operatorname{ch} z\, dz - \right.$$
$$\left. - (M_\infty^2 \tilde{r}/(\alpha'^3) \int_0^{\operatorname{arch} u_2} \dot{\bar{m}}_0\, dz + [1/(\alpha'^2 x_c)] \int_0^{\operatorname{arch} u_2} \bar{m}_0 \operatorname{ch} z\, dz \right\}, \qquad (10.152)$$

donde $\dot{\bar{\alpha}} = \dot{\alpha} x_c/V_\infty$, $\tilde{r} = r/x_c$.

Representemos las integrales en la siguiente forma

$$\int_0^{\operatorname{arch} u_2} \dot{\bar{m}}_p \operatorname{ch} z\, dz = \dot{\bar{m}}_p I_1(\bar{u}_2) + U_1; \qquad \int_0^{\operatorname{arch} u_2} \dot{\bar{m}}_0\, dz = \dot{\bar{m}}_0 I_0(\bar{u}_2) + U_0;$$

$$\int_0^{\operatorname{arch} u_2} \bar{m}_0 \operatorname{ch} z\, dz = \bar{m}_0 I_1(\bar{u}_2) + U_1^0.$$

Al calcular las integrales U_1, U_0, U_1^0 tenemos en cuenta que

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{m}_p = S''(\varepsilon)\,\alpha_0(\varepsilon - x_m)/\pi + 2S'(\varepsilon)\,\alpha_0/\pi = \\
&= 2\beta_{\text{cono}}^2 \alpha_0 [3(x - \alpha' r \operatorname{ch} z) - x_m]; \\
&\dot{\bar{m}}_p = [\alpha'^2/(\alpha_0 V_\infty)]\, \dot{m}_p = (2\beta_{\text{cono}}^2 \alpha'^2/V_\infty)[3(x - \alpha' r \operatorname{ch} z) - x_m]; \\
&\dot{m}_0 = 2\beta_{\text{cono}}^2 \alpha_0 V_\infty; \quad \dot{\bar{m}}_0 = 2\beta_{\text{cono}}^2 \alpha'^2; \\
&m_0 = 2\beta_{\text{cono}}^2 \alpha_0 V_\infty (x - \alpha' r \operatorname{ch} z); \\
&\bar{m}_0 = 2\beta_{\text{cono}}^2 \alpha'^2 (x - \alpha' r \operatorname{ch} z).
\end{aligned}\right\} \qquad (10.152')$$

Hallamos estas integrales

$$U_1 = \int_{\operatorname{arch} \bar{u}_2}^{\operatorname{arch} u_2} \dot{\bar{m}}_p \operatorname{ch} z\, dz = 2(\beta_{\text{cono}}^2 \alpha'^2/V_\infty)\{3x[I_1(u_2) - I_1(\bar{u}_2)] -$$
$$- 3\alpha' r [I_1(u_2) - I_1(\bar{u}_2)] - x_m [I_1(u_2) - I_1(\bar{u}_2)]\};$$

$$\bar{U}_1 = 3x[I_1(u_2) - I_1(\bar{u}_2)] - 3\alpha' \tilde{r} [I_2(u_2) - I_1(\bar{u}_2)] - \bar{x}_m [I_1(u_2) - I_1(\bar{u}_2)]$$

$$(\bar{x} = x/x_c);\ \tilde{r} = r/x_c;\ \bar{x}_m = x/x_c);$$

$$U_1 = (2\beta^2_{cono}\alpha'^2 x_c/V_\infty)\bar{U}_1;\ U_0 = \int_{\operatorname{arch}\bar{u}_2}^{\operatorname{arch} u_2} \dot{\bar{m}}_0\, dz = 2\beta^2_{cono}\alpha'^2[I_0(u_2) - I_0(\bar{u}_2)];$$

$$I_0(u) = \operatorname{arch} u_2 - \operatorname{arch}\bar{u}_2;$$

$$U_1^0 = \int_{\operatorname{arch}\bar{u}_2}^{\operatorname{arch} u_2} \bar{m}_0 \operatorname{ch} z\, dz = 2\beta^2_{cono}\alpha'^2\{x[I_1(u_2) - I_1(\bar{u}_2)] - \alpha' r[I_2(u_2) - I_2\bar{u}_2)]\};$$

$$\bar{U}_1^0 = \bar{x}[I_1(u_2) - I_1(\bar{u}_2)] - \alpha'\bar{r}[I_2(u_2) - I_2(\bar{u}_2)];\quad U_1^0 = 2\beta^2_{cono} x_c \alpha'^2 \bar{U}_1^0.$$

Para el punto (x_2 = 5,1 m; r_2 = 0,5 m) calculamos

$$\bar{u}_2 = 1{,}115;\quad u_2 = 5{,}889;\quad I_2(u_2) = 18{,}31;\quad I_2(\bar{u}_2) = 0{,}5125;$$

$$I_1(u_2) = 5{,}80;\ I_1(\bar{u}_2) = 0{,}4932;\ I_3(u_2) = 70{,}95;\ I_3(\bar{u}_2) = 0{,}5331;\ \bar{x}_2 = 0{,}6375;$$

$$\tilde{r} = 0{,}0625;\quad \bar{x}_m = 0{,}625;\quad \alpha' = 1{,}732;\quad \bar{U}_2 = 0{,}047;$$

$$I_0(\bar{u}_2) = \operatorname{arch}\bar{u}_2 = \ln\left(\bar{u}_2 + \sqrt{\bar{u}_2^2 - 1}\right) = 0{,}4751;$$

$$N_1 = x_2\{[I_0(u_2) - I_0(\bar{u}_2)] - \alpha' r_2[I_1(u_2) - I_1(\bar{u}_2)]\};$$

$$I_0(u_2) = \operatorname{arch} u_2 = \ln\left(u_2 + \sqrt{u_2^2 - 1}\right) = 2{,}459;\quad N_1 = 0{,}6903 x_c.$$

El valor de $\dot{\bar{m}}_p$ se puede calcular con (10.151).

Tomemos en dicha fórmula en la primera aproximación m_0 = 0 y el valor de $\dot{\bar{m}}_0 = \dot{m}_{2\alpha}$ = —0,01768. Con arreglo a esto $\dot{\bar{m}}_p$ = 0,00679. El valor de $\bar{m}_0$ puede precisarse conociendo $\dot{\bar{m}}_0$ = —0,01768 en el punto x_2 = 5,1 m. Entonces, $\bar{m}_0(x_2)$ = = $\bar{m}_0(0) + \dot{\bar{m}}_0\Delta\varepsilon$ = —0,001768. En tal caso, en correspondencia con (10.151), el valor precisado de $\dot{\bar{m}}_0$ = 0,00718.

A continuación hallamos: $\bar{U}_1$ = 1,0525; U_1 = 0,2105 $(x_c\alpha'^2/V_\infty)$; U_0 = 0,1190; $\bar{U}_1^0$ = 1,4565; U_1^0 = 0,02913 $(x_c\alpha'^2)$; $\bar{m}_0 I_1(\bar{u}_2)$ = —0,000872; $\dot{\bar{m}}_0 I_0(\bar{u}_2)$ = = —0,0084.

De acuerdo con la igualdad $\dot{\bar{m}}_p + ip_\infty\dot{\bar{m}}_{p\infty} = \dot{\bar{m}}_0 + ip\dot{\bar{m}}_p$ $(p_\infty = px_c/V_\infty)$ el valor de $\dot{\bar{m}}_p = \dot{\bar{m}}_{p\infty}(x_c/V_\infty)$, donde $\dot{\bar{m}}_{p\infty} = 0{,}00679$. Tomando esto en consideración $\dot{\bar{m}}_p I_1(\bar{u}_2) = (x_c/V_\infty)\, 0{,}00679 \cdot 0{,}4932 = 0{,}00335\,(x_c/V_\infty)$ y $\dot{\bar{p}}_2^\alpha = -0{,}1669\cos\gamma$.

Calculemos para el extremo del cono (x_1 = 5 m; r_1 = 0,5 m):

$$\dot{\bar{p}}_2^\alpha = -2\alpha'\cos\gamma\left\{[V_\infty/x_c\alpha'^2)]\underbrace{\int_0^{\operatorname{arch} u_{cono}} \dot{\bar{m}}_p \operatorname{ch} z\, dz}_{U_1^{cono}} - \right.$$

$$\left. -(M_\infty^2\bar{r}/\alpha'^3)\underbrace{\int_0^{\operatorname{arch} u_{cono}} \dot{\bar{m}}_0\, dz}_{U_0^{cono}} + [1/(\alpha'^2)]\underbrace{\int_0^{\operatorname{arch} u_{cono}} \bar{m}_0 \operatorname{ch} z\, dz}_{U_1^{0\,cono}}\right\}; \quad (10.153)$$

$$[u_{\text{cono}} = 1/(\alpha'\beta_{\text{cono}})];$$

$$U_1^{\text{cono}} = x_c\,(2\beta_{\text{cono}}^2\alpha'^2/V_\infty)\,\underbrace{[3\bar{x}I_1(u_{\text{cono}}) - 3\alpha'\bar{r}I_2(u_{\text{cono}}) - \bar{x}_m I_1(u_{\text{cono}})]}_{\bar{U}_1^{\text{cono}}};$$

$$U_1^{\text{cono}} = (2\beta_{\text{cono}}^2\alpha'^2 x_c/V_\infty)\,\bar{U}_1^{\text{cono}};\quad U_0^{\text{cono}} = 2\beta_{\text{cono}}^2\alpha'^2 I_0(u_{\text{cono}});$$

$$U_0^{\text{cono}} = 2\beta_{\text{cono}}^2\alpha'^2 I_0(u_{\text{cono}});$$

$$U_1^{0\,\text{cono}} = 2\beta_{\text{cono}}^2\alpha'^2 x_c\,\underbrace{[\bar{x}I_1(u_{\text{cono}}) - \alpha'\bar{r}I_2(u_{\text{cono}})]}_{\bar{U}_1^{0\,\text{cono}}};\quad U_1^{0\,\text{cono}} = 2\beta_{\text{cono}}^2\alpha'^2 x_c\bar{U}_1^{0\,\text{cono}}.$$

Calculamos:

$$u_{\text{cono}} = 1/(\alpha'\beta_{\text{cono}}) = 5{,}774;\quad I_0(u_{\text{cono}}) = \operatorname{arch} u_{\text{cono}} =$$

$$= \ln\left(u_{\text{cono}} + \sqrt{u_{\text{cono}}^2 - 1}\right) = 2{,}439;$$

$$I_1(u_{\text{cono}}) = 5{,}687;\quad I_2(u_{\text{cono}}) = 17{,}638;\quad \bar{x} = x/x_c = 0{,}625;\quad \bar{x}_m = x_m/x_c = 0{,}625;$$

$$\bar{U}_1^{\text{cono}} = 1{,}381;\quad U_1^{\text{cono}} = 0{,}02762\,(x_c\alpha'^2/V_\infty);\quad U_0^{\text{cono}} = 0{,}08449;$$

$$U_1^{0\,\text{cono}} = 0{,}0329\,(\dot{\alpha}'^2 x_c);\quad \bar{p}_2^{\dot{\alpha}} = -0{,}1956\cos\gamma.$$

Analicemos un punto en el cilindro con coordenadas $x_3 = 5{,}2$ m; $r_3 = 0{,}5$ m. Para este punto la condición de circulación adherida se determina con la ecuación (10.148) en la que el límite superior de las integrales es la función arch u_3 [donde $u_3 = x_3/(\alpha' r_3)$]. Estas integrales (fig. 10.42):

$$\int_0^{\operatorname{arch} u_3} \dot{m}\,\operatorname{ch}^2 z\,dz = \dot{m}_2\int_0^{\operatorname{arch}\bar{u}_3}\operatorname{ch}^2 z\,dz + \dot{m}_1\int_{\operatorname{arch}\bar{u}_3}^{\operatorname{arch}\bar{u}_2}\operatorname{ch}^2 z\,dz + \underbrace{\int_{\operatorname{arch}\bar{u}_2}^{\operatorname{arch} u_3}\dot{m}\,\operatorname{ch}^2 z\,dz}_{U_2} =$$

$$= \dot{m}_2 I_2(\bar{u}_3) + \dot{m}_1[I_2(\bar{u}_2) - I_2(\bar{u}_3)] + U_2;$$

$$[u_3 = x_3/(\alpha' r_3);\quad \bar{u}_3 = (x_3 - \varepsilon_3)/(\alpha' r_3);\quad \bar{u}_2 = (x_3 - \varepsilon_2)/(\alpha' r_3)];$$

$$\int_0^{\operatorname{arch} u_3} m\,dz = m_2\int_0^{\operatorname{arch}\bar{u}_3} dz + m_1\int_{\operatorname{arch}\bar{u}_3}^{\operatorname{arch}\bar{u}_2} dz + \underbrace{\int_{\operatorname{arch}\bar{u}_2}^{\operatorname{arch} u_3} m\,dz}_{U_0} =$$

$$= m_2 I_0(\bar{u}_3) + m_1[I_0(\bar{u}_2) - I_0(\bar{u}_3)] + U_0;$$

$$\int_0^{\operatorname{arch} u_3}\dot{m}\,\operatorname{ch} z\,dz = \dot{m}_2\int_0^{\operatorname{arch}\bar{u}_3}\operatorname{ch} z\,dz + \dot{m}_1\int_{\operatorname{arch}\bar{u}_3}^{\operatorname{arch}\bar{u}_2}\operatorname{ch} z\,dz + \underbrace{\int_{\operatorname{arch}\bar{u}_2}^{\operatorname{arch}\bar{u}_3}\dot{m}\,\operatorname{ch} z\,dz}_{U_1} =$$

$$= \dot{m}_2 I_1(\bar{u}_3) + \dot{m}_1[I_1(\bar{u}_2) - I_1(\bar{u}_3)] + U_1.$$

Con el fin de obtener la dependencia que permite calcular $\dot{m}_2$ es preciso efectuar transformaciones semejantes a las que se realizaron para el punto $(x_2;\ r_2)$. Como

resultado hallamos:

$$\dot{\overline{m}}_2 = \frac{1}{I_2(\overline{u}_3)} \Big[(\overline{x} - \overline{x}_{\rm m}) - \dot{\overline{m}}_{p1} [I_2(\overline{u}_2) - I_2(\overline{u}_3)] - 2\beta^2_{\rm cono}\alpha'^2 \overline{U}_2 -$$
$$- \frac{M^2_\infty}{\alpha'^3 x_c} \{\overline{m}_{02} I_0(\overline{u}_3) + \overline{m}_{01} [I_0(\overline{u}_2) - I_0(\overline{u}_3)] + 2\beta^2_{\rm cono}\alpha'^2 N_1\} +$$
$$+ M^2_\infty \overline{r} \Big\{ \frac{\dot{\overline{m}}_{02} I_1(\overline{u}_3) + \dot{\overline{m}}_{01} [I_1(\overline{u}_2) - I_1(\overline{u}_3)[}{\alpha'^2} + 2\beta^2_{\rm cono} [I_1(u_3) - I_1(\overline{u}_2)] \Big\} \Big], \quad (10.154)$$

donde $\overline{U}_2 = 3\overline{x}\,[I_2(u_3) - I_2(\overline{u}_2)] - 3\alpha'\overline{r}\,[I_3(u_3) - I_3(\overline{u}_2)] - \overline{x}_{\rm m}\,[I_2(u_3) - I_2(\overline{u}_3)]$, $N_1 = x_c\,\{\overline{x}\,[I_0(u_3) - I_0(\overline{u}_2)] - \alpha'\overline{r}\,[I_1(u_3) - I_1(\overline{u}_2)]\}$.

Con la primera aproximación hagamos en (10.154) $\overline{m}_{02} = 0$ y $\overline{m}_{01} = 0$.

Para calcular la derivada $\dot{\overline{p}^\alpha_2}$ en el punto (x_3, r_3) empleamos la fórmula (10.152), sustituyendo en ella el límite de las integrales arch u_2 por arch u_3 [$u_3 = (x_3 - \varepsilon_3)/(\alpha' r_3)$]. Las correspondientes integrales

$$\int_0^{\mathrm{arch}\,u_3} \dot{\overline{m}}_p \,\mathrm{ch}\, z\, dz = \dot{\overline{m}}_{p2} \int_0^{\mathrm{arch}\,\overline{u}_3} \mathrm{ch}\, z\, dz + \dot{\overline{m}}_{p1} \int_{\mathrm{arch}\,\overline{u}_3}^{\mathrm{arch}\,\overline{u}_2} \mathrm{ch}\, z\, dz + \underbrace{\int_{\mathrm{arch}\,\overline{u}_2}^{\mathrm{arch}\,u_3} \dot{\overline{m}}_p \,\mathrm{ch}\, z\, dz}_{U_1} =$$
$$= \dot{\overline{m}}_{p2} I_1(\overline{u}_3) - \dot{\overline{m}}_{p1} [I_1(\overline{u}_2) - I_1(\overline{u}_3)] + U_1; \quad (10.155)$$

$$\int_0^{\mathrm{arch}\,u_3} \dot{\overline{m}}_0 \, dz = \dot{\overline{m}}_{02} \int_0^{\mathrm{arch}\,\overline{u}_3} dz + \dot{\overline{m}}_{01} \int_{\mathrm{arch}\,\overline{u}_3}^{\mathrm{arch}\,\overline{u}_2} dz + \underbrace{\int_{\mathrm{arch}\,\overline{u}_2}^{\mathrm{arch}\,u_3} \dot{\overline{m}}_0 \, dz}_{U_0} =$$
$$= \dot{\overline{m}}_{02} I_0(u_3) + \dot{\overline{m}}_{01} [I_0(\overline{u}_2) - I_0(\overline{u}_3)] + U_0;$$

$$\int_0^{\mathrm{arch}\,u_3} \overline{m}_0 \,\mathrm{ch}\, z\, dz = \overline{m}_{02} \int_0^{\mathrm{arch}\,\overline{u}_3} \mathrm{ch}\, z\, dz + \overline{m}_{01} \int_{\mathrm{arch}\,\overline{u}_3}^{\mathrm{arch}\,\overline{u}_2} \mathrm{ch}\, z\, dz + \underbrace{\int_{\mathrm{arch}\,\overline{u}_2}^{\mathrm{arch}\,u_3} \overline{m}_0 \,\mathrm{ch}\, z\, dz}_{U_1^0} =$$
$$= \overline{m}_{02} I_1(\overline{u}_3) + \overline{m}_{01} [I_1(\overline{u}_2) - I_1(\overline{u}_3)] + U_1^0;$$

$$U_1 = (2\beta^2_{\rm cono}\alpha'^2 x_c / V_\infty) \{3\overline{x}\,[I_1(u_3) - I_1(\overline{u}_2)] - 3\alpha'\overline{r}\,[I_2(u_3) - I_2(\overline{u}_2)] -$$
$$- x_{\rm m}\,[I_1(u_3) - I_1(\overline{u}_2)]\}; \quad U_0 = 2\beta^2_{\rm cono}\alpha'^2 [I_0(u_3) - I_0(\overline{u}_2)];$$
$$U_1^0 = 2\beta^2_{\rm cono} x_c \alpha'^2 \{\overline{x}\,[I_1(u_3) - I_1(\overline{u}_2)] - \alpha'\overline{r}\,[I_2(u_3) - I_2(\overline{u}_2)]\}.$$

En la fórmula (10.155), en lugar de $\dot{\overline{m}}_{p2}$ y $\dot{\overline{m}}_{p1}$, hay que introducir los valores $\dot{\overline{m}}_{p2} = \dot{\overline{m}}_p x_c / V_\infty$ y $\dot{\overline{m}}_{p1} = \dot{\overline{m}}_p x_c / V_\infty$, donde $\dot{\overline{m}}_p$ es igual al momento del dipolo determinado por (10.154) o bien (10.151) para los sectores segundo y primero, respectivamente.

Calculamos:

$\bar{u}_3 = 1{,}115$; $u_2 = 1{,}231$; $\bar{u}_3 = 6{,}005$; $\bar{x}_2 = x_2/x_c = 0{,}65$; $I_3(\bar{u}_2) = 0{,}7755$; $I_1(\bar{u}_2) = 0{,}7179$; $I_2(u_3) = 19{,}02$; $I_2(\bar{u}_3) = 0{,}512$; $I_1(u_3) = 5{,}921$; $I_1(\bar{u}_3) = 0{,}493$; $I_3(u_3) = 75{,}118$; $I_3(\bar{u}_2) = 0{,}8411$; $I_0(u_3) = 2{,}478$; $I_0(\bar{u}_2) = 0{,}6673$; $I_0(\bar{u}_3) = 0{,}4751$; $I_1(\bar{u}_2) - I_1(\bar{u}_3) = 0{,}2249$; $I_2(\bar{u}_2) - I_2(\bar{u}_3) = 0{,}2635$; $\bar{U}_2 = 0{,}0526$; $N_1 = 0{,}6138x_c$; $I_1(u_3) - I_1(\bar{u}_2) = 5{,}2031$.

Suponiendo que en el sector cilíndrico los momentos de los dipolos son nulos ($m_{02} = m_{01} = 0$), obtenemos $\dot{\bar{m}}_2 = 0{,}030$.

Determinamos la derivada del coeficiente de presión a condición de que en el sector cilíndrico $\bar{m}_{p2} = \bar{m}_{p1} = 0$;

$$U_1 = (\alpha'^2 x_c/V_\infty)\,0{,}01938; \quad U_0 = 0{,}1086; \quad U_1^0 = 0{,}08442x_c;$$

$$\dot{\bar{m}}_{p2} I_1(\bar{u}_3) = 0{,}01479\,(x_c/V_\infty); \quad \dot{\bar{m}}_{p1}[I_1(\bar{u}_2) - I_1(\bar{u}_3)] = 0{,}001615x_c/V_\infty;$$

$$\dot{\bar{m}}_{02} I_0(\bar{u}_3) = -0{,}02760; \quad \dot{\bar{m}}_{01}[I_0(\bar{u}_2) - I_0(\bar{u}_3)] = -0{,}00328;$$

$$\dot{\bar{p}}_2^{\alpha} = -0{,}1813\cos\gamma.$$

Sin tomar en cuenta la influencia de los dipolos sobre el sector cilíndrico ($\bar{m}_{p1} = \bar{m}_{p2} = m_{02} = m_{01} = 0$)

$$\dot{\bar{p}}_2^{\alpha} = -2\alpha'\cos\gamma\Big\{[V_\infty/(x_c\alpha'^2]\underbrace{\int_{\operatorname{arch}\bar{u}_2}^{\operatorname{arch}u_3}\dot{\bar{m}}_p\operatorname{ch}z\,dz}_{U_1^3} -$$

$$-(M_\infty^2\bar{r}/\alpha'^3)\underbrace{\int_{\operatorname{arch}\bar{u}_2}^{\operatorname{arch}u_3}\dot{\bar{m}}_0\,dz}_{U_0^3} + [1/\alpha'^2x_c)]\underbrace{\int_{\operatorname{arch}\bar{u}_2}^{\operatorname{arch}u_3}\bar{m}_0\operatorname{ch}z\,dz}_{U_1^{03}}\Big\} =$$

$$= -2\alpha'\cos\gamma\,\{[V_\infty/(x_c\alpha'^2)]U_1^3 - (M_\infty^2\bar{r}/\alpha'^2)U_0^3 + [1/(\alpha'^2x_c)]U_1^{03}\}; \qquad (10.156)$$

$U_1^3 = (2\beta_{\text{cono}}^2\alpha'^2 x_c/V_\infty)\,\{3\bar{x}\,[I_1(u_3) - I_1(\bar{u}_2)] - 3\alpha'\bar{r}\,[I_2(u_3) - I_2(\bar{u}_2)] - \bar{x}_m\,[I_1(u_3) - I_1(\bar{u}_2)]\} = (\alpha'^2 x_c/V_\infty) = 0{,}01938;$

$$U_0^3 = \int_{\operatorname{arch}\bar{u}_2}^{\operatorname{arch}u_3}\dot{\bar{m}}_0\,dz = 2\beta_{\text{cono}}^2\alpha'^2\,[I_0(u_3) - I_0(\bar{u}_2)] = \alpha'^2 0{,}03621;$$

$$U_1^{03} = \int_{\operatorname{arch}\bar{u}_2}^{\operatorname{arch}u_3}\bar{m}_0\operatorname{ch}z\,dz = 2\beta_{\text{cono}}^2\alpha'^2x_c\,\{\bar{x}\,[I_1(u_3) - I_1(\bar{u}_2)] -$$

$$-\alpha'\bar{r}\,[I_2(u_3) - I_2(\bar{u}_2)]\} = 0{,}02554\,(\alpha'^2x_c); \quad \dot{\bar{p}}_2^{\alpha} = -0{,}1375\cos\gamma.$$

Analicemos el punto con coordenadas x_5, r_5 en el sector cónico de cola, junto al lugar de su conjugación con el cilindro. La condición de frontera de la circulación en dicho punto tiene la forma (10.148), sustituyendo el límite arch u_2 por arch u_5 [en donde $u_2 = x_2/(\alpha' r_2)$, $u_5 = x_5/(\alpha' r_5)$]. Las integrales que entran en la indicada ecuación

$$C_2 = \int_0^{\operatorname{arch} u_5} \dot{m} \operatorname{ch}^2 z\, dz = \dot{m}_5 \int_0^{\operatorname{arch} \bar{u}_5} \operatorname{ch}^2 z\, dz + \underbrace{\int_{\operatorname{arch} \bar{u}_5}^{\operatorname{arch} \bar{u}_2} \dot{m} \operatorname{ch}^2 z\, dz}_{U_2'} + \underbrace{\int_{\operatorname{arch} \bar{u}_2}^{\operatorname{arch} u_5} \dot{m} \operatorname{ch}^2 z\, dz}_{U_2''}.$$

$$[\bar{u}_5 = (x_5 - \varepsilon_5)/(\alpha' r_5);\quad \bar{u}_2 = (x_5 - \varepsilon_2)/(\alpha' r_5);\quad u_5 = x_5/(\alpha' r_5)].$$

Aquí la primera integral a la derecha determina el efecto de los dipolos sobre el pequeño sector del cono de cola que examinamos, en el que el momento $\dot{m}_5$ se toma constante; las otras dos integrales caracterizan la acción de los dipolos en el cilindro y la superficie de la nariz.

De acuerdo con las anotaciones adoptadas de las integrales, U_2' y U_2'', tenemos

$$C_2 = \dot{m}_5 I_2(\bar{u}_5) + U_2' + U_2'' \left[I_2(\bar{u}_5) = \int_0^{\operatorname{arch} \bar{u}_5} \operatorname{ch}^2 z\, dz \right].$$

De forma análoga representamos las otras dos integrales:

$$C_0 = \int_0^{\operatorname{arch} u_5} m\, dz = \dot{m}_5 \int_0^{\operatorname{arch} \bar{u}_5} dz + \underbrace{\int_{\operatorname{arch} \bar{u}_5}^{\operatorname{arch} \bar{u}_2} m\, dz}_{U_0'} + \underbrace{\int_{\operatorname{arch} \bar{u}_2}^{\operatorname{arch} u_5} m\, dz}_{U_0''} =$$

$$= m_5 I_0(\bar{u}_5) + U_0' + U_0'' \left[I_0(\bar{u}_5) = \int_0^{\operatorname{arch} \bar{u}_5} \operatorname{ch}^0 z\, dz = \int_0^{\operatorname{arch} \bar{u}_5} dz \right];$$

$$C_1 = \int_0^{\operatorname{arch} u_5} \dot{m} \operatorname{ch} z\, dz = \dot{m}_5 \int_0^{\operatorname{arch} \bar{u}_5} \operatorname{ch} z\, dz + \underbrace{\int_{\operatorname{arch} \bar{u}_5}^{\operatorname{arch} \bar{u}_2} \dot{m} \operatorname{ch} z\, dz}_{U_1'} +$$

$$+ \underbrace{\int_{\operatorname{arch} \bar{u}_2}^{\operatorname{arch} u_5} \dot{m} \operatorname{ch} z\, dz}_{U_1''} = \dot{m}_5 I_1(\bar{u}_5) + U_1' + U_1'' \left[I_1(\bar{u}_5) = \int_0^{\operatorname{arch} \bar{u}_5} \operatorname{ch} z\, dz \right].$$

En el sector cilíndrico los dipolos se determinan al resolver ecuaciones lineales que se componen para cada uno de los pequeños sectores, por ello, p. ej., para

tres sectores

$$U_2' = \int\limits_{\operatorname{arch} \bar{u}_5}^{\operatorname{arch} \bar{u}_2} \dot{m} \operatorname{ch}^2 z\, dz = \dot{m}_1 \int\limits_{\operatorname{arch} \bar{u}_5}^{\operatorname{arch} \bar{u}_4} \operatorname{ch}^2 z\, dz + \dot{m}_2 \int\limits_{\operatorname{arch} \bar{u}_4}^{\operatorname{arch} \bar{u}_3} \operatorname{ch}^2 z\, dz +$$

$$+ m_3 \int\limits_{\operatorname{arch} \bar{u}_3}^{\operatorname{arch} \bar{u}_2} \operatorname{ch}^2 z\, dz\, [\bar{u}_4 = (x_5 - \varepsilon_4)/(\alpha' r_5);$$

$$\bar{u}_3 = (x_5 - \varepsilon_3)/(\alpha' r_5); \quad \bar{u}_2 = (x_5 - \varepsilon_2)/(\alpha' r_5)].$$

A continuación, realizamos transformaciones análogas a las ejecutadas al analizar la circulación alrededor del sector cilíndrico:

$$\alpha_0 [V_\infty + ip(x - x_{\mathrm{m}})] = \alpha'^2 [\dot{m}_5 I_2(\bar{u}_5) + U_2' + U_2''] + [ipM_\infty^2/(\alpha' V_\infty)] [m_5 I_0(\bar{u}_5) +$$
$$+ U_0' + U_0''] - (ipM_\infty^2 r/V_\infty) [\dot{m}_5 I_1(\bar{u}_5) + U_1' + U_1''].$$

Introduciendo las funciones $\dot{m} = \dot{m}_0 + ip\dot{m}_p$; $m = m_0 + ipm_p$; $U = U_0 + ipU_p$, obtenemos la correspondiente expresión para $\alpha_0 [V_\infty + ip(x - x_{\mathrm{m}})]$. Separando en esta expresión los valores reales e imaginarios y eliminando los términos con p_2, obtenemos dos ecuaciones. La primera de ellas $\alpha_0 V_\infty = \alpha'^2 [\dot{m}_{50} I_2(\bar{u}_5) + U_{20}' + U_{20}'']$. La segunda ecuación al introducir las anotaciones (omitimos el índice 5) $\dot{\bar{m}} = \dot{m}\alpha'^2/(\alpha_0 V_\infty)$; $\bar{m} = m\alpha'^2/(\alpha_0 V_\infty)$; $\tilde{U} = U\alpha'^2/(\alpha_0 x_{\mathrm{c}})$, adquiere la siguiente forma:

$$\bar{x} - \bar{x}_{\mathrm{m}} = \dot{\bar{m}}_p (V_\infty/x_{\mathrm{c}}) I_2(\bar{u}_5) + \tilde{U}_{2p}' + \tilde{U}_{2p}'' + [M_\infty^2/(\alpha'^2 x_0)] [\bar{m}_0 I_0(\bar{u}_0) +$$
$$+ \tilde{U}_{00}'(x_{\mathrm{c}}/V_\infty) + \tilde{U}_{00}''(x_{\mathrm{c}}/V_\infty)] - M_\infty^2 \bar{r} \{\dot{\bar{m}} I_1(\bar{u}_0)/\alpha'^2 +$$
$$+ [x_{\mathrm{c}}/(\alpha'^2 V_\infty)] \tilde{U}_{10}' + [x_{\mathrm{c}}/(\alpha'^2 V_\infty)] \tilde{U}_{10}''\}. \tag{10.157}$$

Aquí

$$\tilde{U}_{2p}' = U_{2p}' \alpha'^2/(\alpha_0 x_{\mathrm{c}}) = \int\limits_{\operatorname{arch} \bar{u}_5}^{\operatorname{arch} \bar{u}_2} \dot{m}_p \operatorname{ch}^2 z\, dz\, [\alpha'^2/(\alpha_0 x_{\mathrm{c}})] = (V_\infty/x_{\mathrm{c}}) \int\limits_{\operatorname{arch} \bar{u}_5}^{\operatorname{arch} \bar{u}_2} \dot{\bar{m}}_p \operatorname{ch}^2 z\, dz;$$

$$\tilde{U}_{2p}'' = \int\limits_{\operatorname{arch} \bar{u}_2}^{\operatorname{arch} u_5} \dot{m}_p \operatorname{ch}^2 z\, dz\, (\alpha'^2/(\alpha_0 x_{\mathrm{c}})] = 2\beta_{\mathrm{cono}}^2 \bar{U}_2 \alpha'^2;$$

$$\bar{U}_2 = 3\bar{x} [I_2(u_5) - I_2(\bar{u}_2)] - 3\alpha' \bar{r} [(I_3(u_5) - I_3(\bar{u}_2)] - \bar{x}_{\mathrm{m}} [I_2(u_5) - I_2(\bar{u}_2)];$$

$$\tilde{U}_{00}''(x_{\mathrm{c}}/V_\infty) = U_{00}' [\alpha'^2/(\alpha_0 x_{\mathrm{c}})] (x_{\mathrm{c}}/V_\infty) = \int\limits_{\operatorname{arch} \bar{u}_2}^{\operatorname{arch} u_5} m_0\, dz\, [\alpha'^2/(\alpha_0 x_{\mathrm{c}})] (x_{\mathrm{c}}/V_\infty) =$$

$$= 2\alpha'^2 \beta_{\mathrm{cono}}^2 \bar{x}_{\mathrm{c}} \underbrace{\{\bar{x} [I_0(u_5) - I_0(\bar{u}_2)] - \alpha' \bar{r} [I_1(u_5) - I_1(\bar{u}_2)]\}}_{U_0} = 2\alpha'^2 \beta_{\mathrm{cono}}^2 x_{\mathrm{c}} U_0;$$

$$\widetilde{U}'_{00}(x_c/V_\infty) = [\alpha'^2/(\alpha_0 x_c)](x_c/V_\infty)U'_{00} =$$
$$= [\alpha'^2/(\alpha_0 x_c)](x_c/V_\infty)\int\limits_{\text{arch}\,\bar{u}_5}^{\text{arch}\,\bar{u}_2} m_0\,dz = \int\limits_{\text{arch}\,\bar{u}_5}^{\text{arch}\,\bar{u}_2} \bar{m}_0\,dz;$$
$$\widetilde{U}'_{10}[x_c/(\alpha'^2V_\infty)] = U'_1[\alpha'^2/(\alpha_0 x_c)](x_c/\alpha'^2V_\infty) =$$
$$= \int\limits_{\text{arch}\,\bar{u}_5}^{\text{arch}\,\bar{u}_2} \dot{m}_0\,\text{ch}\,z\,dz\,[\alpha'^2/(\alpha_0 x_c)][x_c/(\alpha'^2V_\infty)] = (1/\alpha'^2)\int\limits_{\text{arch}\,\bar{u}_5}^{\text{arch}\,\bar{u}_2} \dot{\bar{m}}_0\,\text{ch}\,z\,dz;$$
$$\widetilde{U}''_{10}[x_c/(\alpha'^2V_\infty)] = [\alpha'^2/(\alpha_0 x_c)][x_c/(\alpha'^2V_\infty)]U''_1 =$$
$$= [\alpha'^2/(\alpha_0 x_c)][x_c/(\alpha'^2V_\infty)]\int\limits_{\text{arch}\,\bar{u}_2}^{\text{arch}\,u_5} \dot{m}\,\text{ch}\,z\,dz = 2\beta^2_{\text{cono}}[I_1(u_5) - I_1(\bar{u}_2)].$$

De (10.157) hallamos:

$$\dot{\bar{m}}_p(V_\infty/x_c) = [1/I_2(u_5)]\{\bar{x} - \bar{x}_m - \widetilde{U}''_{2p} - 2\beta^2_{\text{cono}}\bar{U}_2\alpha'^2 -$$
$$- [M^2_\infty/(\alpha'^3 x_c)][\bar{m}_0 I_0(\bar{u}_5) + \widetilde{U}'_{00}(x_c/V_\infty) + 2\alpha'^2\beta^2_{\text{cono}}x_c U_0] +$$
$$+ (M^2_\infty\bar{r})\{[\dot{\bar{m}}_0 I_1(\bar{u}_5)/\alpha'^2 + \widetilde{U}'_{10}[x_c/(\alpha'^2V_\infty)] + 2\beta^2_{\text{cono}}[I_1(u_5) - I_1(\bar{u}_2)]\}\}.$$

Aquí $\bar{m}_0$ y $\dot{\bar{m}}_0$ se determinan con ayuda del problema de la *circulación uniforme* alrededor del sector de cola:

$$\bar{m}_0 = m_0[\alpha'^2/(\alpha_0 V_\infty)] = [S'(\varepsilon)/\pi]\,\alpha'^2;$$
$$\dot{\bar{m}}_0 = \dot{m}_0[\alpha'^2/(\alpha_0 V_\infty)] = [S''(\varepsilon)/\pi]\,\alpha'^2. \tag{10.158}$$

Para el cono de la cola con ángulo de inclinación de la generatriz $\beta_{s.c}$, el área $S = \pi r^2 = \pi(r_{s.b} + \Delta r)^2 = \pi[r_{s.b} + (x_c - \varepsilon)\beta_{s.c}]^2$, por lo que

$$\bar{m}_0 = -2[r_{s.b} + (x_c - \varepsilon)\beta_{s.c}]\beta_{s.c}\alpha'^2;\ \dot{\bar{m}}_0 = 2\beta_{s.c}\alpha'^2. \tag{10.158'}$$

Para el punto con coordenadas x_5, r_5, al calcular $\bar{m}_0$ se puede tomar $\varepsilon = x_5 - \alpha' r_5$.

Las funciones $\widetilde{U}'_{2p}$, $\widetilde{U}'_0$, $\widetilde{U}'_{10}$ caracterizan la influencia de los dipolos situados en el sector cilíndrico:

$$\left.\begin{aligned} &\widetilde{U}'_{2p} = (V_\infty/x_c)\int\limits_{\text{arch}\,\bar{u}_5}^{\text{arch}\,\bar{u}_2} \dot{\bar{m}}_p\,\text{ch}^2 z\,dz;\\ &\widetilde{U}'_{00}(x_c/V_\infty) = \int\limits_{\text{arch}\,\bar{u}_2}^{\text{arch}\,\bar{u}_5} \dot{\bar{m}}_0\,dz;\\ &\widetilde{U}'_{10}(x_c/\alpha'^2V_\infty) = (1/\alpha'^2)\int\limits_{\text{arch}\,\bar{u}_4}^{\text{arch}\,\bar{u}_2} \dot{\bar{m}}_0\,\text{ch}\,z\,dz.\end{aligned}\right\} \tag{10.159}$$

En los cálculos aproximados es tolerable tomar el valor medio del dipolo respecto de la longitud del cilindro:

$$\tilde{U}'_{2p} = (V_\infty/x_c)\,\dot{\bar m}_p\,[I_2(\bar u_2) - I_2(\bar u_5)]; \quad \tilde{U}'_{00}\,(x_c/V_\infty) = \dot{\bar m}_0\,[I_0(\bar u_2) - I_0(\bar u_5)];$$
$$\tilde{U}'_{10}\,[x_c/(\alpha'^2 V_\infty)] = (1/\alpha'^2)\,\dot{\bar m}_0\,[I_1(\bar u_2) - I_1(\bar u_5)]. \qquad (10.160)$$

En el caso más sencillo la distribución de los dipolos por el cilindro puede tomarse nula, entonces

$$\dot{\bar m}\,(V_\infty/x_c) = [1/I_2(\bar u_5)]\,\{\bar x - \bar x_m - 2\beta^2_{\text{cono}}\bar U_2\alpha'^2 - [\mathrm{M}^2_\infty/(\alpha'^2 x_c)]\,[\bar m_0 I_0(\bar u_5) +$$
$$+ 2\alpha'^2\beta^2_{\text{cono}}x_c U_0] + (\mathrm{M}^2_\infty \bar r)\,[\dot{\bar m}_0 I_1(\bar u_5)/\alpha'^2 + 2\beta^2_{\text{cono}}\,[I_1(u_5) - I_1(\bar u_2)]]\}. \qquad (10.161)$$

Con el fin de determinar la derivada $\dot{\bar p}^\alpha_2$ hay que hacer uso de la fórmula (10.152), sustituyendo en ella el intervalo arch u_2 por arch u_5. En esta fórmula las integrales tienen la forma:

$$D_1 = \int_0^{\text{arch}\,u_5} \dot{\bar m}_p\,\text{ch}\,z\,dz = \dot{\bar m}_p \int_0^{\text{arch}\,\bar u_5} \text{ch}\,z\,dz + \underbrace{\int_{\text{arch}\,\bar u_5}^{\text{arch}\,\bar u_2} \dot{\bar m}_p\,\text{ch}\,z\,dz}_{F'_1} + \underbrace{\int_{\text{arch}\,\bar u_2}^{\text{arch}\,u_5} \dot{\bar m}_p\,\text{ch}\,z\,dz}_{F''_1} =$$
$$= \dot{\bar m}_p I_1(\bar u_5) + F'_1 + F''_1;$$

$$D_0 = \int_0^{\text{arch}\,u_5} \dot{\bar m}_0\,dz = \dot{\bar m}_0 \int_0^{\text{arch}\,\bar u_5} dz + \underbrace{\int_{\text{arch}\,\bar u_5}^{\text{arch}\,\bar u_2} \dot{\bar m}_0\,dz}_{F'_0} + \underbrace{\int_{\text{arch}\,\bar u_2}^{\text{arch}\,u_5} \dot{\bar m}_0\,dz}_{F''_0} = \dot{\bar m}_0 I_0(\bar u_5) + F'_0 + F''_0;$$

$$D_1 = \int_0^{\text{arch}\,u_5} \bar m_0\,\text{ch}\,z\,dz = \bar m_0 \int_0^{\text{arch}\,\bar u_5} \text{ch}\,z\,dz + \underbrace{\int_{\text{arch}\,\bar u_5}^{\text{arch}\,\bar u_2} \bar m_0\,\text{ch}\,z\,dz}_{F'_{01}} + \underbrace{\int_{\text{arch}\,\bar u_2}^{\text{arch}\,u_5} \bar m_0\,\text{ch}\,z\,dz}_{F''_{01}} =$$
$$= \bar m_0 I_1(\bar u_5) + F'_{01} + G''_{01}.$$

Conforme a esto

$$\dot{\bar p}^\alpha_2 = -2\alpha'\cos\gamma\,\{[\dot{\bar m}_p I_1(\bar u_5) + F'_1 + F''_1]\,[V_\infty/(x_c\alpha'^2)] - (\mathrm{M}^2_\infty \bar r/\alpha')\,[\dot{\bar m}_0 I_0(\bar u_5) +$$
$$+ F'_0 + F''_0] + [1/(\alpha'^2 x_c)]\,[\bar m_0 I_1(\bar u_5) + F'_{01} + F''_{01}]\}. \qquad (10.162)$$

Para determinar $\dot{\bar m}_0$ y $\bar m_0$ en el sector cónico de cola pueden utilizarse (10.158) y (10.158′). Al calcular F'_1, F'_0 y F'_{01} para el sector cilíndrico son aplicables las relaciones análogas a (10.159) y (10.160). Si se desprecia la influencia de los dipolos sobre el sector cilíndrico y tomamos $F'_1 = F'_0 = F'_{01} = 0$, entonces

$$\dot{\bar p}^\alpha_2 = -2\alpha'\cos\gamma\,\{[\dot{\bar m}_p I_1(\bar u_5) + F''_1]\,[V_\infty/(x_c\alpha'^2)] -$$
$$- (\mathrm{M}^2_\infty \bar r/\alpha'^3)\,[\dot{\bar m}_0 I_0(\bar u_5) + F''_0] + [1/(\alpha'^2 x_c)]\,[\bar m_0 I_0(\bar u_5) + F''_{01}]\}. \qquad (10.162')$$

Aquí, para la parte cónica de proa

$$F_1'' = \int_{\text{arch } \bar{u}_2}^{\text{arch } u_5} \dot{\bar{m}}_p \operatorname{ch} z\, dz = (2\beta_{\text{cono}}^2 \alpha'^2 x_c/V_\infty) \times$$

$$\times \{\overbrace{3\bar{x}_{\text{m}} [I_1(u_5) - I_1(\bar{u}_2)] - 3\alpha'\bar{r} [I_2(u_5) - I_2(\bar{u}_2)] - \bar{x}_{\text{m}} \{I_1(u_5) - I_1(\bar{u}_2)]}^{\bar{F}_1}\} = (2\beta_{\text{cono}}^2 \alpha'^2 x_c/V_\infty) \bar{F}_1;$$

$$F_0''' = 2\beta_{\text{cono}}^2 \alpha'^2 [I_0(u_5) - I_0(\bar{u}_2)];$$

$$F_{01}''' = 2\beta_{\text{cono}}^2 x_c \alpha'^2 \{\overbrace{\bar{x} [I_1(u_5) - I_1(\bar{u}_2)] - \alpha'\bar{r} [I_2(u_5) - I_2(\bar{u}_2)]}^{\bar{F}_{01}}\} = 2\beta_{\text{cono}}^2 x_c \alpha'^2 \bar{F}_{01}.$$

Examinemos el punto con coordenadas $x_5 = 7{,}5$ m, $r_5 = 0{,}425$ m en la cola cónica:

$$\bar{u}_5 = (x_5 - \varepsilon_5)/(\alpha' r_5) = 1{,}856; \quad \bar{u}_2 = (x_5 - \varepsilon_2)/(\alpha' r_5) = 4{,}572;$$

$$u_5 = x_5/(\alpha' r_5) = 10{,}19; \quad I_1(\bar{u}_5) = 1{,}564; \quad I_1(u_5) = 10{,}14; \quad I_1(\bar{u}_2) = 4{,}461;$$

$$I_0(\bar{u}_5) = \text{arch } \bar{u}_5 = 1{,}018; \quad I_0(\bar{u}_2) = 2{,}201; \quad I_0(u_5) = 3{,}012; \quad I_2(\bar{u}_2) = 11{,}3;$$

$$I_2(u_5) = 53{,}17; \quad I_3(u_5) = 357{,}77; \quad I_3(\bar{u}_2) = 34{,}05; \quad I_2(\bar{u}_5) = 2{,}066;$$

$$\bar{x}_5 = x_5/x_c = 0{,}9375; \quad \bar{r}_5 = r_5/x_c = 0{,}05312; \quad \bar{x}_{\text{m}} = x_{\text{m}}/x_c = 0{,}625; \quad \bar{U}_2 = 2{,}24;$$

$$U_0 = 0{,}2378; \quad r_{\text{s. b}} = \sqrt{\bar{S}_{\text{s. b}}}\, r_{\text{máx. t}} = 0{,}35 \text{ m}; \quad \bar{r}_{\text{s. b}} = r_{\text{s. b}}/x_c = 0{,}04375;$$

$$\beta_{\text{s. c}} = (r_{\text{máx. t}} - r_{\text{s. b}})/x_{\text{s.c}} = 0{,}15; \quad \varepsilon = x_5 = 7{,}5 \text{ m}; \quad \bar{m}_0 = -0{,}3825;$$

$$\dot{\bar{m}}_0 = 0{,}135; \quad \dot{\bar{m}}_p (V_\infty/x_c) = 0{,}118.$$

Hallamos la correspondiente derivada:

$$\bar{F}_1 = 0{,}869; \quad F_1'' = 0{,}0521\,(x_c/V_\infty); \quad F_0'' = 0{,}04866; \quad \bar{F}_{01} = 1{,}472;$$

$$F_{01}''' = 0{,}08831 x_c; \quad \dot{\bar{p}}_2^{\alpha} = 0{,}9597.$$

Esta derivada en el cono de cola puede calcularse aproximadamente haciendo uso de las fórmulas

$$m(\varepsilon) = [S'(\varepsilon)\, \alpha_0/\pi]\, [V_\infty + ip\,(\varepsilon - x_{\text{m}})] + [S(\varepsilon)/\pi]\, ip\alpha_0;$$

$$\dot{m}(\varepsilon) = [S''(\varepsilon)\, \alpha_0/\pi]\, [V_\infty + ip\,(\varepsilon - x_{\text{m}})] + [2S'(\varepsilon)/\pi]\, ip\alpha_0.$$

De aquí hallamos

$$\bar{m}_0(\varepsilon) = [S'(\varepsilon)/\pi]\, \alpha'^2; \quad \dot{\bar{m}}_0(\varepsilon) = [S''(\varepsilon)/\pi]\, \alpha'^2;$$

$$\dot{\bar{m}}_p (V_\infty/x_c) = \{[S''(\varepsilon)/\pi]\, (\bar{\varepsilon} - \bar{x}_{\text{m}}) + 2S'(\varepsilon)/(\pi x_c)\}\, \alpha'^2 \,(\bar{\varepsilon} = \varepsilon/x_c; \ \bar{x}_{\text{m}} = x_{\text{m}}/x_c).$$

Para el cono de la cola tenemos

$$\left.\begin{aligned}
&S(\varepsilon)=\pi r^2=\pi\,[(r_{s.b}+(x_c-\varepsilon)\,\beta_{s.c}]^2;\\
&S'(\varepsilon)=-2\pi\,[r_{s.b}+(x_c-\varepsilon)\,\beta_{s.c}]\,\beta_{s.c};\quad S''(\varepsilon)=2\pi\beta^2_{s.c};\\
&\bar{m}_0(\varepsilon)=-2\,[r_{s.b}+(x_c-\varepsilon)\,\beta_{s.c}]\,\beta_{s.c}\alpha'^2;\quad \dot{\bar{m}}_0(\varepsilon)=2\beta^2_{s.c}\alpha'^2;\\
&\dot{\bar{m}}_p\,(V_\infty/x_c)=2\beta_{s.c}\,\{\beta_{s.c}\,(\bar{\varepsilon}-\bar{x}_m)-\\
&-2\,[\bar{r}_{s.b}+(1-\bar{\varepsilon})\,\beta_{s.c}]\}\,\alpha'^2\,(\bar{r}_{s.b}=r_{s.b}/x_c).
\end{aligned}\right\}\quad(10.162'')$$

Consideremos un punto arbitrario ($x=x_5$; $r=r_5$) en el cono de cola para el que (a condición de que en el sector cilíndrico $m=\dot{m}=0$)

$$\dot{\bar{p}}_2^{\bar{\alpha}}=-2\alpha'\cos\gamma\Big[\Big(\underbrace{\int_0^{\operatorname{arch}\bar{u}_5}\dot{\bar{m}}_p\operatorname{ch}z\,dz+F_1''}_{C_1}\Big)\,[V_\infty/(x_c\alpha'^2)]-$$

$$-(M_\infty^2\bar{r}/\alpha'^3)\Big(\underbrace{\int_0^{\operatorname{arch}\bar{u}_5}\dot{\bar{m}}_0\,dz+F_0''}_{C_0^0}\Big)+[1/(\alpha'^2x_c)]\Big(\underbrace{\int_0^{\operatorname{arch}\bar{u}_5}\bar{m}_0\operatorname{ch}z\,dz+F_{01}''}_{C_1^0}\Big)\Big\}.\qquad(10.163)$$

Aquí

$$C_1=(x_c/V_\infty)\int_0^{\operatorname{arch}\bar{u}_5}\dot{\bar{m}}_p\operatorname{ch}z\,dz=2\beta_{s.c}\alpha'^2\,\{\beta_{s.c}\,[\bar{x}I_1(\bar{u}_5)-\alpha'\bar{r}I_2(\bar{u}_5)-$$

$$-\bar{x}_mI_1(\bar{u}_5)]-2\,[\bar{r}_{s.b}I_1(u_5)+\beta_{s.c}\,[I_1(\bar{u}_5)-\bar{x}I_1(\bar{u}_5)+\alpha'\bar{r}I_2(\bar{u}_5]]\}\ (x_c/V_\infty);$$

$$C_0^0=\int_0^{\operatorname{arch}\bar{u}_5}\dot{\bar{m}}_0\,dz=2\beta^2_{s.c}\alpha'^2I_0(\bar{u}_5);$$

$$C_1^0=\int_0^{\operatorname{arch}\bar{u}_5}\bar{m}_0\operatorname{ch}z\,dz=-2\beta_{s.c}\alpha'^2\bar{x}_c\,\{\bar{r}_{s.b}I_1(\bar{u}_5)+[I_1(\bar{u}_5)-\bar{x}I_1(\bar{u}_5)+\alpha'\bar{r}I_2(\bar{u}_5)]\,\beta_{s.b}\}.$$

Para el punto ($x=x_5=7{,}5$ m; $r=r_5=0{,}425$ m), calculamos:

$$C_1=-0{,}1473\,(x_c/V_\infty);\quad C_0^0=0{,}1374;\quad C_1^0=-0{,}09056x_c;$$

$$F_1''=0{,}0521\,(x_c/V_\infty);\quad F_0'''=0{,}04866;\quad F_{01}''=0{,}08831x_c;\quad \dot{\bar{p}}_2^{\bar{\alpha}}=0{,}04\cos\gamma.$$

10.52. Para hallar la distribución de los dipolos en el cilindro (en el punto x_2, r_2, fig. 10.43) hacemos uso de la condición de frontera (10.133) que representamos en la forma

$$\alpha V_\infty+\Omega_z\,(x-x_m)=\alpha'^2\Big[\int_0^{\operatorname{arch}\bar{u}_2}\dot{m}\operatorname{ch}^2z\,dz+\int_{\operatorname{arch}\bar{u}_2}^{\operatorname{arch}u_2}\dot{m}\,ch^2z\,dz\Big]\,[u_2=x_2/(\alpha'r_2);$$

$$\bar{u}_2 = (x_2 - \varepsilon_2)/(\alpha' r_2)],$$

donde la primera integral a la derecha caracteriza la influencia de los dipolos sobre el cilindro y la segunda, sobre el sector de nariz curvilíneo para el que

$$\dot{m} = S''(\varepsilon)\,[\alpha V_\infty + \Omega_z(\varepsilon - x_\text{m})]/\pi + 2S'(\varepsilon)\,\Omega_z/\pi$$

o bien

$$\dot{m}^\text{n} = \dot{m}^\text{n}_\alpha \alpha + \dot{m}^\text{n}_\Omega \Omega_z,$$

donde $\dot{m}^\text{n}_\alpha = S''(\varepsilon)\,V_\infty/\pi$, $\dot{m}^\text{n}_\Omega = S''(\varepsilon)(\varepsilon - x_\text{m})/\pi + 2S'(\varepsilon)/\pi$.

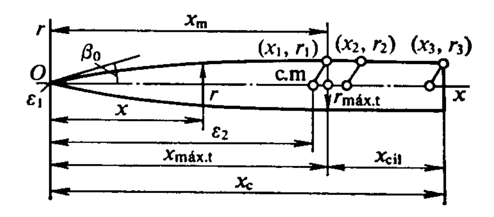


Fig. 10.43. Cuerpo cilíndrico con nariz que tiene la generatriz curvilínea

Representemos de forma análoga el dipolo en el cilindro

$$\dot{m}^\text{c} = \dot{m}^\text{c}_\alpha \alpha + \dot{m}^\text{c}_\Omega \Omega_z.$$

Con arreglo a esto hallamos la relación para $\alpha V_\infty + \Omega_z(x - x_\text{m})$, de la que obtenemos dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} V_\infty &= \alpha'^2 \Big[\int_0^{\operatorname{arch} \bar{u}_2} \dot{m}^\text{c}_\alpha \operatorname{ch}^2 z\,dz + \int_{\operatorname{arch} \bar{u}_2}^{\operatorname{arch} u_2} \dot{m}^\text{n}_\alpha \operatorname{ch}^2 z\,dz \Big], \\ x - x_\text{m} &= \alpha'^2 \Big[\int_0^{\operatorname{arch} \bar{u}_2} \dot{m}^\text{c}_\Omega \operatorname{ch}^2 z\,dz + \int_{\operatorname{arch} \bar{u}_2}^{\operatorname{arch} u_2} \dot{m}^\text{n}_\Omega \operatorname{ch}^2 z\,dz \Big]. \end{aligned}\right\} \quad (10.164)$$

Examinemos el punto con coordenadas x_2, r_2 cercano al punto de conjugación de la nariz con el cilindro. De la primera ecuación (10.164), hallamos para este punto

$$\dot{m}^\text{c}_\alpha = V_\infty (1/\alpha'^2 - U^\text{n}_2)/I_2(\bar{u}_2),$$

donde $U^\text{n}_2 = (1/\pi) \int_{\operatorname{arch} \bar{u}_2}^{\operatorname{arch} u_2} S''(x - \alpha' r \operatorname{ch} z) \operatorname{ch}^2 z\,dz$; $I_2(\bar{u}_2) = \int_0^{\operatorname{arch} \bar{u}_2} \operatorname{ch}^2 z\,dz$.

Analicemos la generatriz parabólica:

$r = x\,(r_{\text{máx. t}}/x_{\text{máx. t}})\,(2 - x/x_{\text{máx. t}}) = (0{,}5/\lambda_{\text{máx. t}})\,(2 - x/x_{\text{máx. t}})\,x$; $S = \pi r^2 = \pi\,(0{,}5/\lambda_{\text{máx. t}})^2\,x^2\,(2 - x/x_{\text{máx. t}})^2$; $S'(\varepsilon) = \pi\,[1/(2\lambda_{\text{máx. t}})]^2\,[2\varepsilon/(2 - \varepsilon/x_{\text{máx. t}})^2 + 2\varepsilon^2\,(2 - \varepsilon/x_{\text{máx. t}})\,(-1/x_{\text{máx. t}})]$; $S''(\varepsilon) = (\pi/\lambda^2_{\text{máx. t}})\,(2 - 6\varepsilon/x_{\text{máx. t}} + 3\varepsilon^2/x^2_{\text{máx. t}})$;
$U^\text{n}_2 = (1/\lambda^2_{\text{máx. t}})[2[I_2(u_2) - I_2(\bar{u}_2)] - 6\{\bar{x}[I_2(u_2) - I_2(\bar{u}_2)] - \alpha'\bar{r}[I_3(u_2) - I_3(\bar{u}_2)]\} + 3\{\bar{x}^2[I_2(u_2) - I_2(\bar{u}_2)] - 2\bar{x}\alpha'\bar{r}[I_3(u_2) - I_3(\bar{u}_2)] + \alpha'^2\bar{r}^2[I_4(u_2) - I_4(\bar{u}_2)]\}]$ $(\bar{x} = x/x_{\text{máx. t}}$; $\bar{r} = r/x_{\text{máx. t}})$.

Las funciones $I_2(u_2)$, $I_3(u_3)$, $I_4(u_2)$ se calculan con las fórmulas (10.131"). La derivada del coeficiente de presión en el punto que examinamos (x_2, r_2)

$$\bar{p}_2^{\alpha} = -(2\alpha' \cos\gamma/V_\infty)[\dot{m}_\alpha^{c} I_1(\bar{u}_2) + V_\infty U_1^{n}], \qquad (10.165)$$

donde

$$U_1^{n} = (1/\pi)\int_{\operatorname{arch}\bar{u}_2}^{\operatorname{arch}u_2} S'' \operatorname{ch} z\, dz = (1/\lambda_{\text{máx. t}}^{2})[2[I_1(u_2) - I_1(\bar{u}_2)] - 6\{\bar{x}[I_1(u_2) - I_1(\bar{u}_2)] -$$
$$-\alpha'\bar{r}[I_2(u_2) - I_2(\bar{u}_2)]\} + 3\{\bar{x}^2[I_1(u_2) - I_1(\bar{u}_2)] - 2\bar{x}\alpha'\bar{r}[I_2(u_2) - I_2(\bar{u}_2)] +$$
$$+\alpha'^2\bar{r}^2[I_3(u_2) - I_3(\bar{u}_2)]\}]. \qquad (10.166)$$

Para el punto con coordenadas $x_2 = 5{,}1$ m; $r_2 = 0{,}5$ m calculamos:

$$\bar{u}_2 = (x_2 - \varepsilon_2)/(\alpha' r_2) = 1{,}115; \quad u_2 = x_2/(\alpha' r_2) = 5{,}889; \quad I_2(\bar{u}_2) = 0{,}5125;$$
$$I_2(u_2) = 18{,}31; \quad I_3(\bar{u}_2) = 0{,}5331; \quad I_3(u_2) = 70{,}95; \quad I_4(\bar{u}_2) = 0{,}5553;$$
$$I_4(u_2) = 310{,}02; \quad \bar{x} = x_2/x_{\text{máx. t}} = 1{,}02; \quad \bar{r} = r_2/x_{\text{máx. t}} = 0{,}1; \quad U^{n} = 0{,}3445;$$
$$\dot{m}_\alpha^{c} = -0{,}02175 V_\infty; \quad I_1(\bar{u}_2) = 0{,}4932; \quad I_1(u_2) = 5{,}80; \quad U_1^{n} = 0{,}0267;$$
$$\bar{p}_2^{\alpha} = -0{,}0553 \cos\gamma.$$

En el punto con coordenadas $x_2 = 5{,}1$ m; $r_2 = 0{,}5$ m, sin tomar en consideración la influencia de los dipolos sobre el cilindro ($\dot{m}_{\alpha c}^{c} = 0$), la derivada $\bar{p}_2^{\alpha} = -2\alpha' \cos\gamma U_1^{n} = -0{,}0925 \cos\gamma$. Con esta condición en el extremo del cilindro ($x_3 = 7$ m; $r_3 = 5$ m), tenemos:

$$\bar{p}_2^{\alpha} = -2\alpha' \cos\gamma\, U_1^{n};$$
$$U_1^{n} = (1/\lambda_{\text{máx.t}}^{2})[2[I_1(u_3) - I_1(\bar{u}_3)] - 6\{\bar{x}[I_1(u_3) - I_1(\bar{u}_3)] - \alpha'\bar{r}[I_2(u_3) - I_2(\bar{u}_3)]\} +$$
$$+3\{\bar{x}^2[I_1(u_3 - I_1(\bar{u}_3)] - 2\alpha'\overline{xr}[I_2(u_3) - I_2(\bar{u}_3)] + \alpha'^2\bar{r}^2[I_3(u_3) - I_3(\bar{u}_3)]\}];$$
$$\bar{u}_3 = (x_3 - \varepsilon_3)/(\alpha' r_3) = (x_3 - x_2 + \alpha' r_2)/(\alpha' r_3) = 3{,}309; \quad u_3 = x_3/(\alpha' r_3) = 8{,}083;$$
$$I_1(\bar{u}_3) = \sqrt{\bar{u}_3^2 - 1} = 3{,}154; \quad I_1(u_3) = 8{,}021; \quad I_2(\bar{u}_3) = 6{,}152; \quad I_2(u_3) = 33{,}807;$$
$$I_3(\bar{u}_3) = 13{,}614; \quad I_3(u_3) = 180{,}03; \quad \bar{x} = x_3/x_{\text{máx.t}} = 1{,}4; \quad \bar{r} = r_3/x_{\text{máx.t}} = 0{,}1;$$
$$U_1^{n} = 0{,}03794.$$

En el extremo del sector de nariz ($x_1 = 5$ m; $r_1 = 0{,}5$ m), tenemos:

$$\bar{p}_2^{\alpha} = -2\alpha \cos\gamma\, U_1^{n}; \quad U_n^{n} = (1/\pi)\int_0^{\operatorname{arch}u_1} S''(x - \alpha' r \operatorname{chz}) \operatorname{ch} z dz = (1/\lambda_{\text{máx.t}}^{2})\{2I_1(u_1) -$$
$$-6[\bar{x}I_1(u_1) - \alpha'\bar{r}I_2(u_1)] + 3[\bar{x}I_1(u_1) - 2\alpha'\overline{xr}I_2(u_1) + \alpha'^2\bar{r}^2 I_3(u_1)]\};$$
$$u_1 = x_1/(\alpha' r_1) = 5{,}774; \quad I_1(u_1) = 5{,}687; \quad I_2(u_2) = 17{,}638; \quad I_3(u_1) = 66{,}991;$$
$$\bar{x} = x_1/x_{\text{máx.t}} = 1; \quad \bar{r} = r_1/x_{\text{máx.t}} = 0{,}1; \quad U_n^{n} = 0{,}01366;$$
$$\bar{p}_2^{\alpha} = -2\alpha' \cos\gamma\ 0{,}01366 = -0{,}04732 \cos\gamma.$$

Consideremos la *rotación del sólido prefijado* con relación al eje transversal que pasa por el punto en el eje con la coordenada $x_m = 5$ m. Partiendo de(10.164)

hallamos para el punto $(x_2;\ r_2)$

$$x - x_{\mathrm{m}} = \alpha''^{2} (\dot{m}^{\mathrm{c}}_{\Omega} \underbrace{\int_{0}^{\operatorname{arch} \bar{u}_2} \operatorname{ch}^2 z dz}_{I_2(\bar{u}_2)} + \underbrace{\int_{\operatorname{arch} \bar{u}_2}^{\operatorname{arch} u_2} \dot{m}^{\mathrm{n}}_{\Omega} \operatorname{ch}^2 z dz}_{U^{\mathrm{n}}_{2\Omega}},$$

de donde $\dot{m}^{\mathrm{c}}_{\Omega} = [(x - x_{\mathrm{m}})/\alpha''^{2} - U^{\mathrm{n}}_{2\Omega}]/I_2(\bar{u}_2)$;

$$U^{\mathrm{n}}_{2\Omega} = (1/\pi) \int_{\operatorname{arch} \bar{u}_2}^{\operatorname{arch} u_2} \{S''(x - \alpha' r \operatorname{ch} z)\,[(x - \alpha' r \operatorname{ch} z) - x_{\mathrm{m}}] + 2S'(x - \alpha' r \operatorname{ch} z)\} \operatorname{ch}^2 z dz.$$

Según (10.128), para la generatriz parabólica hallamos $S'(\varepsilon)$ y $S''(\varepsilon)$. Por consiguiente,

$$U^{\mathrm{n}}_{2\Omega} = (x_{\text{máx.t}}/\lambda^2_{\text{máx.t}}) \{6\alpha' \bar{r} (1 + \bar{x}_{\mathrm{m}}) [I^1_2(u_2) - I^1_2(\bar{u}_2)] - 3(4 + \bar{x}_{\mathrm{m}}) \alpha'^2 \bar{r}^2 [I^2_2(u_2) - I^2_2(\bar{u}_2)] + 5\alpha'^3 \bar{r}^3 [I^3_2(u_2) - I^3_2(\bar{u}_2)] - 2\bar{x}_{\mathrm{m}} [I^0_2(u_2) - I^0_2(\bar{u}_2)]\}, \quad (10.166')$$

donde

$$\left.\begin{aligned} &\bar{x}_{\mathrm{m}} = x_{\mathrm{m}}/x_{\text{máx.t}}; \quad \bar{r} = r/x_{\text{máx.t}}; \ I^1_2(u_2) - I^1_2(\bar{u}_2) = \\ &= u_2 [I_2(u_2) - I_2(\bar{u}_2)] - [I_3(u_2) - I_3(\bar{u}_2)]; \quad I^2_2(u_2) - I^2_2(\bar{u}_2) = \\ &= u^2_2 [I_2(u_2) - I_2(\bar{u}_2)] = 2u_2 [I_3(u_3) - I_3(\bar{u}_2)] + [I_4(u_2) - I_4(\bar{u}_2)]; \\ &I^3_3(u_2) - I^3_3(\bar{u}_2) = u^3_2 [I_2(u_2) - I_2(\bar{u}_2)] - 3u^2_2 [I_3(u_2) - \\ &- I_3(\bar{u}_2)] + 3u_2 [I_4(u_2) - I_4(\bar{u}_2)] - [I_5(u_2) - I_5(\bar{u}_2)]; \\ &I^0_2(u_2) - I^0_2(\bar{u}_2) = I_2(u_2) - I_2(\bar{u}_2). \end{aligned}\right\} \quad (10.166'')$$

Calculamos:

$$\bar{u}_2 = 1{,}115; \quad u_2 = 5{,}889; \quad I_1(\bar{u}_2) = 0{,}4932; \quad I_1(u_2) = 5{,}80; \quad I_2(\bar{u}_2) = 0{,}5125;$$
$$I_2(u_2) = 18{,}31; \quad \bar{x}_{\mathrm{m}} = x_{\mathrm{m}}/x_{\text{máx.t}} = 1; \quad \bar{r} = r_2/x_{\text{máx.t}} = 0{,}1; \quad I_3(\bar{u}_2) = 0{,}5331;$$
$$I_3(u_2) = 70{,}95; \quad I_4(\bar{u}_2) = 0{,}5553; \quad I_4(u_2) = 310{,}02; \quad I_5(\bar{u}_2) = \int_0^{\operatorname{arch} \bar{u}_2} \operatorname{ch}^5 z dz = 0{,}579;$$
$$I_5(u_2) = 1452{,}7; \ I^1_2(u_2) - I^1_2(\bar{u}_2) = 34{,}391; \ I^2_2(u_2) - I^2_2(\bar{u}_2) = 97{,}317;$$
$$I^3_2(u_2) - I^3_2(\bar{u}_2) = 323{,}78; \quad I^0_2(u_2) - I^0_2(\bar{u}_2) = 17{,}8; \ U^{\mathrm{n}}_{2\Omega} = -0{,}02018 x_{\text{máx.t}};$$
$$\dot{m}^{\mathrm{c}}_{\Omega} = [(1{,}02 - 1{,}0)/1{,}732^2 + 0{,}02018 x_{\text{máx.t}}]/0{,}5125 = 0{,}05238 x_{\text{máx.t}}.$$

Hallemos la derivada:

$$\bar{p}^{\omega_z}_2 = (-2\alpha' \cos\gamma/x_{\mathrm{c}}) (\dot{m}^{\mathrm{c}}_{\Omega} \int_0^{\operatorname{arch} \bar{u}_2} \operatorname{ch} z dz + \int_{\operatorname{arch} \bar{u}_2}^{\operatorname{arch} u_2} \dot{m}^{\mathrm{n}}_{\Omega} \operatorname{ch} z dz) =$$
$$= -(2\alpha' \cos\gamma/x_{\mathrm{c}}) [\dot{m}^{\mathrm{c}}_{\Omega} I_1(\bar{u}_2) + U^{\mathrm{n}}_1] \ (\omega_z = \Omega_z x_{\mathrm{c}}/V_\infty), \quad (10.167)$$

donde

$$U_1^n = (x_{\text{máx.t}}/\lambda^2_{\text{máx.t}})\{6\alpha'\bar{r}(1+\bar{x}_m)[I_1^1(u_2) - I_1^1(\bar{u}_2)] - 3(4+\bar{x}_m)\alpha'^2\bar{r}^2[I_1^2(u_2) -$$
$$- I_1^2(\bar{u}_2)] + 5\alpha'^3\bar{r}^3[I_1^3(u_2) - I_1^3(\bar{u}_2)] - 2\bar{x}_m[I_1^0(u_2) - I_1^0(\bar{u}_2)]\}; \qquad (10.168)$$
$$I_1^1(u_2) - I_1^1(\bar{u}_2) = u_2[I_1(u_2) - I_1(\bar{u}_2)] - [I_2(u_2) - I_2(\bar{u}_2)];$$
$$I_1^2(\bar{u}_2) - I_1^2(\bar{u}_2) = u_2^2[I_1(u_2) - I_1(\bar{u}_2)] - 2u_2[I_2(u_2) - I_2(\bar{u}_2)] + [I_3(u_2) - I_3(\bar{u}_2)];$$
$$I_1^3(u_2) - I_1^3(\bar{u}_2) = u_2^3[I_1(u_2) - I_1(\bar{u}_2)] - 3u_2^2[I_2(u_2) - I_2(\bar{u}_2)] +$$
$$+ 3u_2[I_3(u_2) - I_3(\bar{u}_2)] - [I_4(u_2) - I_4(\bar{u}_2)].$$

Calculamos:

$$I_1^1(u_2) - I_1^1(\bar{u}_2) = 13{,}454; \quad I_1^2(u_2) - I_1^2(\bar{u}_2) = 44{,}84;$$
$$I_1^3(\bar{u}_2) - I_1^3(\bar{u}_2) = 166{,}74; \quad I_1^0(u_2) - I_1^0(\bar{u}_2) = 5{,}307; \quad U_1^n = 0{,}06017x_{\text{máx.t}};$$
$$\bar{p}_2^{\omega_z} = -(2\cdot 1{,}732\cos\gamma/x_c)(0{,}05238\cdot 0{,}4932x_{\text{máx.t}} + 0{,}06017x_{\text{máx.t}}) = -0{,}2128\cos\gamma.$$

En el extremo del sector de nariz ($x = x_1 = 5m$; $r = r_1 = 0{,}5$ m)

$$\bar{p}_2^{\omega_z} = -(2\alpha'\cos\gamma/x_c)\frac{\int_0^{\text{arch}\,u_1} \dot{m}_\Omega \,\text{ch}\, z dz.}{U_n^n} \qquad (10.169)$$

De (10.168), haciendo $\bar{u}_2 = 0$ y $u_1 = x_1/(\alpha' r_1)$, hallamos

$$U_1^n = (x_{\text{máx.t}}/\lambda^2_{\text{máx.t}})[6\alpha'\bar{r}(1+\bar{x}_m)I_1^1(u_1) - 3(4+\bar{x}_m)\alpha'^2\bar{r}^2 I_1^2(u_1) +$$
$$+ 5\alpha'^3\bar{r}^3 I_1^3(u_1) - 2\bar{x}_m I_1^0(u_1)], \qquad (10.170)$$

donde

$$I_1^1(u_1) = u_1 I_1(u_1) - I_2(u_2); \quad I_1^2(u_1) = u_1^2 I_1(u_1) - 2u_1 I_2(u_1) + I_3(u_1);$$
$$I_1^3(u_1) = u_1^3 I_1(u_1) - 3u_1^2 I_2(u_1) + 3u_1 I_3(u_1) - I_4(u_1); \quad I_1^0(u_1) = I_1(u_1).$$

Calculamos:

$$u_1 = x_1/(\alpha' r_1) = 5{,}774;, \quad I_1(u_1) = 5{,}687; \quad I_2(u_1) = 17{,}638; \quad I_3(u_1) = 66{,}91;$$
$$I_4(u_1) = 286{,}91; \quad \bar{x} = \bar{x}_m = 1; \quad \bar{r} = 0{,}1; \quad I_1^1(u_1) = 15{,}199; \quad I_1^2(u_1) = 52{,}825;$$
$$I_1^3(u_1) = 202{,}75; \quad I_1^0(u_1) = 5{,}687; \quad U_1^n = 0{,}06851x_{\text{máx.t}};$$
$$\bar{p}_2^{\omega_z} = -(2\cdot 1{,}732\cos\gamma/x_c)\,0{,}06851x_{\text{máx.t}} = -0{,}01695\cos\gamma.$$

10.53. Empleemos la condición de frontera de la circulación inuniforme (10.148). Las funciones $m(\varepsilon)$ y $\dot{m}(\varepsilon)$ para el sector curvilíneo del cuerpo, que entran en dicha condición, tienen la siguiente forma:

$$\left.\begin{aligned} m(\varepsilon) &= [S'(\varepsilon)\alpha_0/\pi][V_\infty + ip(x - x_m)] + [S(\varepsilon)/\pi]\, ip\alpha_0; \\ \dot{m}(\varepsilon) &= [S''(\varepsilon)\alpha_0/\pi][V_\infty + ip(x - x_m)] + [2S'(\varepsilon)/\pi]\, ip\alpha_0. \end{aligned}\right\} \qquad (10.171)$$

Después de representar el dipolo y su derivada en forma de las sumas $m(\varepsilon) = m_0 + ipm_p$, $\dot{m}(\varepsilon) = \dot{m}_0 + ip\dot{m}_p$, luego de la correspondiente sustitución, hallamos la expresión para $\alpha_0 V_\infty + ip\alpha_0(x - x_m)$. Separando en esta expresión

los valores reales e imaginarios, obtenemos la ecuación

$$\alpha_0 V = \alpha'^2 \int_0^{\text{arch}\, u} \dot{m}\, \text{ch}^2 z dz - [M_\infty^2 p^2/\alpha' V_\infty)] \int_0^{\text{arch}\, u} m_p\, dz + (M_\infty^2 p^2 r/V_\infty) \int_0^{\text{arch}\, u} \dot{m}_p\, \text{ch}\, zdz.$$

Con pequeñas frecuencias de las vibraciones ($p \to 0$) esta ecuación toma la forma $\alpha_0 V_\infty = \alpha'^2 \int_0^{\text{arch}\, u} m_0\, \text{ch}^2\, z\, dz.$

Así, pues, con pequeñas frecuencias (pequeños números de Strouhal) los parámetros del gas, dependientes de α, se determinan como para la circulación estacionaria, es decir, según el ángulo de ataque instantáneo. El carácter no estacionario se manifiesta con la aparición de parámetros componentes determinados por la derivada $\dot{\alpha}$. Para este caso aducimos la condición de circulación adherida:

$$\alpha_0 (x - x_m) = \alpha'^2 \int_0^{\text{arch}\, u} \dot{m}_p\, \text{ch}^2\, zdz + [M_\infty^2/(\alpha' V_\infty)] \int_0^{\text{arch}\, u} m_0\, dz -$$
$$- (M_\infty^2 r/V_\infty) \int_0^{\text{arch}\, u} \dot{m}\, \text{ch}\, zdz.$$

Analicemos el punto con coordenadas x_2; r_2 junto al comienzo del sector cilíndrico y aduzcamos la condición de frontera

$$\alpha_0 (x - x_m) = \alpha'^2 (m_p^c \int_0^{\text{arch}\, \bar{u}_2} \text{ch}^2\, zdz + \int_{\text{arch}\, \bar{u}_2}^{\text{arch}\, u_2} \dot{m}_p\, \text{ch}^2\, zdz) +$$
$$+ [M_\infty^2/(\alpha' V_\infty] (\dot{m}_0^c \int_0^{\text{arch}\, \bar{u}_2} dz + \int_{\text{arch}\, \bar{u}_2}^{\text{arch}\, u_2} m_0\, dz) - (M_\infty^2 r/V_\infty)(\dot{m}_0^c \int_0^{\text{arch}\, \bar{u}_2} \text{ch}\, zdz +$$
$$+ \int_{\text{arch}\, \bar{u}_2}^{\text{arch}\, u_2} \dot{m}_0\, \text{ch}\, zdz)\ [\bar{u}_2 = (x_2 - \varepsilon_2)/(\alpha' r_2); \quad u_2 = x_2/(\alpha' r_2)],$$

donde la primera integral entre paréntesis ordinarios a la derecha corresponde a los dipolos en el sector cilíndrico pequeño, mientras que la segunda, en la parte curvilínea de nariz.

Introducimos las anotaciones:

$$I_0(\bar{u}_2) = \int_0^{\text{arch}\, \bar{u}_2} dz; \quad I_1(\bar{u}_2) = \int_0^{\text{arch}\, \bar{u}_2} \text{ch}\, zdz; \quad I_2(\bar{u}_2) = \int_0^{\text{arch}\, \bar{u}_2} \text{ch}^2\, zdz; \qquad (10.172)$$

$$U_0 = \int_{\text{arch}\, \bar{u}_2}^{\text{arch}\, u_2} m_0\, dz; \quad U_1 = \int_{\text{arch}\, \bar{u}_2}^{\text{arch}\, u_2} \dot{m}_0\, \text{ch}\, zdz; \quad U_2 = \int_{\text{arch}\, \bar{u}_2}^{\text{arch}\, u_2} \dot{m}_p\, \text{ch}^2\, zdz. \qquad (10.173)$$

Tomando en consideración estas anotaciones de la condición de frontera hallamos

$$\dot{m}_p^c = [1/I_2(\bar{u}_2)] \{\alpha_0 (x - x_m)/\alpha'^2 - U_2 - [M_\infty^2/(\alpha' U_\infty)] [m_0^c I_0(\bar{u}_2) + U_0] +$$
$$+ (M_\infty^2 r/V_\infty)] [\dot{m}_0^c I_1(\bar{u}_2) + U_1)]\}. \qquad (10.174)$$

Analicemos las integrales U_0, U_1, U_2. Haciendo uso de (10.171), hallamos:

$$m_0 = [S'(\varepsilon)/\pi]\,\alpha_0 V_\infty; \quad \dot{m}_0 = [S''(\varepsilon)/\pi]\,\alpha_0 V_\infty;$$
$$\dot{m}_p = [S''(\varepsilon)/\pi]\,\alpha_0(\varepsilon - x_m) + [2S'(\varepsilon)/\pi]\,\alpha_0. \tag{10.175}$$

Aquí, para la generatriz parabólica, las funciones $S'(\varepsilon)$ y $S''(\varepsilon)$ están representadas con (10.166), (10.166′). Después de las correspondientes sustituciones, obtenemos:

$$U_0 = (\alpha_0 V_\infty x_{\text{máx.t}}/\lambda^2_{\text{máx.t}})\,\{2\alpha'\bar{r}\,[I_0^1(u_2) - I_0^1(\bar{u}_2)] - 3\alpha'^2\bar{r}^2\,[I_0^2(u_2) - I_0^2(\bar{u}_2)] +$$
$$+ \alpha'^3\bar{r}^3\,[I_0^3(u_2) - I_0^3(\bar{u}_2)]\};$$
$$I_0^1(u_2) - I_0^1(\bar{u}_2) = u_2\,[I_0(u_2) - I_0(\bar{u}_2)] - [I_1(u_2) - I_1(\bar{u}_2)];$$
$$I_0^2(u_2) - I_0^2(\bar{u}_2) = u_2^2\,[I_0(u_2) - I_0(\bar{u}_2)] - 2u_2\,[I_1(u_2) - I_1(\bar{u}_2)] + [I_2(u_2) - I_2(\bar{u}_2)];$$
$$I_0^3(u_2) - I_0^3(\bar{u}_2) = u_2^3\,[I_0(u_2) - I_0(\bar{u}_2)] - 3u_2^2\,[I_1(u_2) - I_1(\bar{u}_2)] +$$
$$+ 3u_2\,[I_2(u_2) - I_2(\bar{u}_2)] - [I_3(u_2) - I_3(\bar{u}_2)];$$
$$U_1 = (\alpha_0 V_\infty/\lambda^2_{\text{máx.t}})\,\{2\,[I_1^0(u_2) - I_1^0(\bar{u}_2)] - 6\alpha'\bar{r}\,[I_1^1(u_2) - I_1^1(\bar{u}_2)] +$$
$$+ 3\alpha'^2\bar{r}^2\,[I_1^2(u_2) - I_1^2(\bar{u}_2)]\}; \quad I_1^0(u_2) - I_1^0(\bar{u}_2) = I_1(u_2) - I_1(\bar{u}_2);$$
$$I_1^1(u_2) - I_1^1(\bar{u}_2) = u_2\,[I_1(u_2) - I_1(\bar{u}_2)] - [I_2(u_2) - I_2(\bar{u}_2)];$$
$$I_1^2(u_2) - I_1^2(\bar{u}_2) = u_2^2\,[I_1(u_2) - I_1(\bar{u}_2)] - 2u_2\,[I_2(u_2) - I_2(\bar{u}_2)] + [I_3(u_2) - I_3(\bar{u}_2)];$$
$$U_2 = (\alpha_0 x_{\text{máx.t}}/\lambda^2_{\text{máx.t}})\,\{6\alpha'\bar{r}\,(1 + \bar{x}_m)\,[I_2^1(u_2) - I_2^1(\bar{u}_2)] - 3\,(4 + \bar{x}_m)\,\alpha'^2\bar{r}^2\,[I_2^2(u_2) -$$
$$- I_2^2(\bar{u}_2)] + 5\alpha'^3\bar{r}^3\,[I_2^3(u_2) - I_2^3(\bar{u}_2)] - 2\bar{x}_m\,[I_2^0(u_2) - I_2^0(\bar{u}_2)]\}.$$

Las diferencias de las variables entre corchetes a la derecha están representadas por las fórmulas (10.166″).

Para calcular la derivada $\dot{\bar{p}}_2^{\alpha}$ empleamos la ecuación (10.152).

Representemos cada integral en esa ecuación en forma de la suma de dos integrales, una de las cuales se refiere a un pequeño sector cilíndrico y la otra, a la sección de nariz e introducimos las anotaciones:

$$I_0(\bar{u}_2) = \int\limits_0^{\text{arch}\,\bar{u}_2} dz; \quad I_1(\bar{u}_2) = \int\limits_0^{\text{arch}\,\bar{u}_2} \text{ch}\,z\,dz; \quad F_0^0 = \int\limits_{\text{arch}\,\bar{u}_2}^{\text{arch}\,u_2} \dot{m}_0\,dz; \tag{10.176}$$

$$F_1^0 = \int\limits_{\text{arch}\,\bar{u}_2}^{\text{arch}\,u_2} m_0\,\text{ch}\,z\,dz; \quad F_1^p = \int\limits_{\text{arch}\,\bar{u}_2}^{\text{arch}\,u_2} \dot{m}_p\,\text{ch}\,z\,dz, \tag{10.177}$$

tomándolas en consideración

$$\dot{\bar{p}}_2^{\alpha} = -(2\alpha'\cos\gamma/\alpha_0)\,\{(1/x_c)\,[\dot{m}_p^c I_1(\bar{u}_2) + F_1^p] -$$
$$- [M_\infty^2 r/(x_c\alpha' V_\infty)]\,[\dot{m}_0^c I_0(\bar{u}_2) + F_0^0] + [1/(x_c V_\infty)]\,[m_0^c I_1(\bar{u}_2) + F_1^0]\}. \tag{10.178}$$

35*

Introducimos bajo las integrales F_0^0, F_1^0, F_1^p las correspondientes expresiones $\dot{m}_0$, $\dot{m}_0$ y $\dot{m}_p$ para la sección de nariz parabólica:

$$F_0^0=(\alpha_0 V_\infty/\lambda^2_{\text{máx.t}})\{2\,[I_0^0(u_2)-I_0^0(\bar{u}_2)]-6\alpha'\bar{r}\,[I_0^1(u_2)-$$

$$-I_0^1(\bar{u}_2)]+3\alpha'^2\bar{r}^2\,[I_0^2(u_2)-I_0^2(\bar{u}_2)]\};\qquad(10.179)$$

$$I_0^0(u_2)-I_0^0(\bar{u}_2)=I_0(u_2)-I_0(\bar{u}_2);\quad F_1^0=(\alpha_0 V_\infty x_{\text{máx.t}}/\lambda^2_{\text{máx.t}})\{2\alpha'\bar{r}\,[I_1^1(u_2)-$$

$$-I_1^1(\bar{u}_2)]-3\alpha'^2\bar{r}^2\,[I_1^2(u_2)-I_1^2(\bar{u}_2)]+\alpha'^3\bar{r}^3\,[I_1^3(u_2)-I_1^3(\bar{u}_2)]\};\qquad(10.180)$$

$$I_1^3(u_2)-I_1^3(\bar{u}_2)=u_2^3\,[I_1(u_2)-I_1(\bar{u}_2)]-3u_2^2\,[I_2(u_2)-I_2(\bar{u}_2)]+$$

$$+3u_2\,[I_3(u_2)-I_3(\bar{u}_2)]-[I_4(u_2)-I_4(\bar{u}_2)];$$

$$F_1^p=(\alpha_0 x_{\text{máx.t}}/\lambda^2_{\text{máx.t}})\{6\alpha'\bar{r}\,(1+\bar{x}_{\text{m}})\,[I_1^1(u_2)-I_1^1(\bar{u}_2)]-3(4+\bar{x}_{\text{m}})\,\alpha'^2\bar{r}^2\times$$

$$\times[I_1^2(u_2)-I_1^2(\bar{u}_2)]+5\alpha'^3\bar{r}^3\,(I_1^3(u_2)-I_1^3(\bar{u}_2))]-2\bar{x}_{\text{m}}\,[I_1^0(u_2)-I_1^0(\bar{u}_2)]\}.\qquad(10.181)$$

Para el punto con las coordenadas $x=x_2=5{,}1$ m, $r=r_2=0{,}5$ m, calculamos:

$$\bar{u}_2=1{,}115;\quad u_2=5{,}889;\quad I_0(\bar{u}_2)=0{,}4751;\quad I_0(u_2)=2{,}459;\quad I_1(\bar{u}_2)=0{,}4932;$$

$$I_1(u_2)=5{,}80;\quad I_2(\bar{u}_2)=0{,}5125;\quad I_2(u_2)=18{,}31;\quad I_3(\bar{u}_2)=0{,}5331;$$

$$I_3(u_2)=70{,}95;\quad I_4(\bar{u}_2)=0{,}5533;\quad I_4(u_2)=310{,}02;\quad I_5(\bar{u}_2)=0{,}579;$$

$$I_5(u_2)=1452{,}7;\quad \bar{x}=x/x_{\text{máx. t}}=1{,}02;\quad \bar{x}_{\text{m}}=1{,}0;\quad \bar{r}=r/x_{\text{máx. t}}=0{,}1;$$

$$\alpha'=\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2-1}=1{,}732;\quad I_0^1(u_2)-I_0^1(\bar{u}_2)=6{,}376;\quad I_0^2(u_2)-I_0^2(\bar{u}_2)=24{,}1;$$

$$I_0^3(u_2)-I_0^3(\bar{u}_2)=94{,}06;\quad U_0=0{,}02116\alpha_0 V_\infty x_{\text{máx. t}};\quad I_1^0(u_2)-I_1^0[\bar{u}_2]=5{,}307;$$

$$I_1^1(u_2)-I_1^1(\bar{u}_2)=13{,}45;\quad I_1^2(u_2)-I_1^2(\bar{u}_2)=44{,}84;\quad U_1=0{,}0267\alpha_0 V_\infty;$$

$$I_2^1(u_2)-I_2^1(\bar{u}_2)=34{,}39;\quad I_2^2(u_2)-I_2^2(\bar{u}_2)=97{,}5;\quad I_2^3(u_2)-I_2^3(\bar{u}_2)=323{,}82;$$

$$I_2^0(u_2)-I_2^0(\bar{u}_2)=I_2(u_2)-I_2(\bar{u}_2)=17{,}8;\quad U_2=0{,}01701\alpha_0 x_{\text{máx. t}}.$$

Más arriba habíamos hallado que $\dot{m}_0^{\text{c}}=\dot{m}_\alpha^{\text{c}}=-0{,}02175\alpha_0 V_\infty$ en el cilindro. De acuerdo con esto $\int_{(m_0^{\text{c}})_1}^{(m_0^{\text{c}})_2} dm_0^{\text{c}}=-0{,}02175\alpha_0 V_\infty\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_3} d\varepsilon$, de donde $(m_0^{\text{c}})_2=m_0^{\text{c}}=$ $=-0{,}02175\alpha_0 V_\infty\Delta\varepsilon+(m_0^{\text{c}})_1\;(\Delta\varepsilon=\varepsilon_3-\varepsilon_2=x_2-x_1)$.

Hallemos la variable $(m_0^{\text{c}})_1$ en el punto x_1; r_1 en el extremo de la sección de nariz (para $\varepsilon=x-\alpha' r=5-1{,}732\cdot0{,}5=4{,}134$):

$$(m_0^{\text{c}})_1=(\alpha_0 V_\infty/5^2)\,4{,}134\,(2-3\cdot4{,}134/5+4{,}134^2/5^2)=0{,}0336\alpha_0 V_\infty.$$

Así, pues, en (10.174) $m_0^{\text{c}}=0{,}03142\,\alpha_0 V_\infty$.

Introduzcamos los datos en (10.174): $\dot{m}_p^{\text{c}}=-0{,}1165\alpha_0 x_{\text{máx. t}}$.

Calculamos la derivada $\bar{p}_2^{\dot{\alpha}}$:

$$I_0^0(u_2)-I_0^0(\bar{u}_2)=1{,}984;\quad I_0^1(u_2)-I_0^1(\bar{u}_2)=6{,}376;\quad I_0^2(u_2)-I_0^2(\bar{u}_2)=24{,}1;$$

$$F_0^0=-0{,}0196\alpha_0 V_\infty;\; I_1^1(u_2)-I_1^1(\bar{u}_2)=13{,}45;\quad I_1^2(u_2)-I_1^2(\bar{u}_2)=44{,}84;$$

$$I_1^3(u_2) - I_1^3(\bar{u}_2) = 166{,}7; \quad F_1^0 = 0{,}05966\alpha_0 V_\infty x_{\text{máx. t}}; \quad I_1^0(u_2) - I_1^0(\bar{u}_2) = 5{,}307;$$
$$I_1^1(u_2) - I_1^1(\bar{u}_2) = 13{,}45; \quad I_1^2(u_2) - I_1^2(\bar{u}_2) = 44{,}84; \quad I_1^3(u_2) - I_1^3(\bar{u}_2) = 166{,}7;$$
$$F_1^p = 0{,}06019\alpha_0 x_{\text{máx. t}}; \quad \overline{p}_2^{\dot{\bar{\alpha}}} = -0{,}1792 \cos\gamma.$$

Determinemos la derivada análoga sin tomar en consideración la influencia de los dipolos en el sector cilíndrico:

$$\overline{p}_2^{\dot{\bar{\alpha}}} = -(2\alpha' \cos\gamma/\alpha_0)\{(1/x_c)\, F_1^p -$$
$$-[M_\infty^2 r/(x_c\alpha' V_\infty)]\, F_0^0 + [1/(x_c V_\infty)]\, F_1^0\} = -0{,}3077 \cos\gamma. \qquad (10.182)$$

Para el extremo de la sección de nariz ($x = x_1 = 5$ m; $r = r_1 = 0{,}5$ m) empleamos la fórmula (10.182) en la que

$$F_0^0 = \int_0^{\operatorname{arch} u_1} \dot{m}_0\, dz = (\alpha_0 V_\infty/\lambda_{\text{máx. t}}^2)\,[2I_0^0(u_1) - 6\alpha'\bar{r}I_0^1(u_1) + 3\alpha'^2\bar{r}^2 I_0^2(u_1)];$$

$$I_0^0(u_1) = I_0(u_1); \quad I_0^1(u_1) = u_1 I_0(u_1) - I_1(u_1); \quad I_0^2(u_1) = u_1^2 I_0(u_1) - 2u_1 I_1(u_1) + I_2(u_1);$$

$$F_1^0 = \int_0^{\operatorname{arch} u_1} m_0 \operatorname{ch} z\, dz = (\alpha_0 V_\infty x_{\text{máx. t}}/\lambda_{\text{máx. t}}^2)\,[2\alpha'\bar{r}I_1^1(u_1) - 3\alpha'^2\bar{r}^2 I_1^2(u_1) + \alpha'^3\bar{r}^3 I_1^3(u_1)];$$

$$I_1^1(u_1) = u_1 I_1(u_1) - I_2(u_1); \quad I_1^2(u_1) = u_1^2 I_1(u_1) - 2u_1 I_2(u_1) + I_3(u_1);$$
$$I_1^3(u_1) = u_1^3 I_1(u_1) - 3u_1^2 I_2(u_1) + 3u_1 I_3(u_1) - I_4(u_1);$$

$$F_1^p = \int_0^{\operatorname{arch} u_1} \dot{m}_p \operatorname{ch} z\, dz = (\alpha_0 x_{\text{máx. t}}/\lambda_{\text{máx. t}}^2)\,[6\alpha'\bar{r}(1+\bar{x}_m)\, I_1^1(u_1) -$$
$$-3(1+\bar{x}_m)\,\alpha'^2\bar{r}^2 I_1^2(u_1) + 5\alpha'^3\bar{r}^3 I_1^3(u_1) - 2\bar{x}_m I_1^0(u_1)]\,[u_1 = x_1/(\alpha' r_1)].$$

Calculamos:

$$u_1 = x_1/(\alpha' r_1) = 5{,}774; \quad I_0(u_1) = \operatorname{arch} u_1 = 2{,}439;$$
$$I_1(u_1) = 5{,}687; \quad I_2(u_1) = 17{,}64;$$
$$I_3(u_1) = 66{,}91; \quad I_4(u_1) = 286{,}91; \quad \bar{x}_m = 1; \quad I_0^0(u_1) = I_0(u_1) = 2{,}439;$$
$$I_0^1(u_1) = 8{,}396;$$
$$I_0^2(u_1) = 33{,}28; \quad F_0^0 = -0{,}03408\alpha_0 V_\infty; \quad I_1^1(u_1) = 15{,}2;$$
$$I_1^2(u_1) = 52{,}83; \quad I_1^3(u_1) = 203{,}1; \quad F_1^0 = 0{,}06264\alpha_0 V_\infty x_{\text{máx. t}};$$
$$F_1^p = 0{,}0688\alpha_0 x_{\text{máx. t}}; \quad \overline{p}_2^{\dot{\bar{\alpha}}} = -0{,}3447 \cos\gamma.$$

En el extremo del cilindro ($x_3 = 7$m; $r_3 = 0{,}5$m)

$$\bar{u}_3 = (x_3 - \varepsilon_3)/(\alpha' r_3) = 3{,}309; \quad u_3 = x_3/(\alpha' r_3) = 8{,}083;$$

$$I_0(\bar{u}_3) = \ln(\bar{u}_3 + \sqrt{\bar{u}_3^2 - 1}) = 1{,}866; \quad I_0(u_3) = 2{,}779; \quad I_1(\bar{u}_3) = 3{,}154;$$

$$I_1(u_3) = 8{,}021; \quad I_2(\bar{u}_3) = 6{,}152; \quad I_2(u_3) = 33{,}81; \quad I_3(\bar{u}_3) = 13{,}61; \quad I_3(u_3) = 180{,}0;$$

$$I_4(\bar{u}_3) = 33{,}19; \quad I_4(u_3) = 1084{,}3; \quad I_0^0(u_3) - I_0^0(\bar{u}_3) = 0{,}913;$$

$$I_0^1(u_3) - I_0^1(\bar{u}_3) = 2{,}512; \quad I_0^2(u_3) - I_0^2(\bar{u}_3) = 8{,}619; \quad F_0^0 = -0{,}00036\alpha_0 V_\infty;$$

$$I_1^1(u_3) - I_1^1(\bar{u}_3) = 11{,}68; \quad I_1^2(u_3) - I_1^2(\bar{u}_3) = 37{,}33; \quad I_1^3(u_3) - I_1^3(\bar{u}_3) = 134{,}0;$$

$$F_1^0 = 0{,}05539\alpha_0 V_\infty x_{\text{máx. t}}; \quad F_1^p = 0{,}04948\alpha_0 x_{\text{máx. t}}; \quad \bar{p}_2^{\dot{\alpha}} = -0{,}2596\cos\gamma.$$

10.54. Las derivadas aerodinámicas de sólidos de revolución delgados se determinan de acuerdo con las siguientes relaciones:

$$c_y^\alpha = (2\alpha'/S_{\text{máx. t}}) \int_0^{x_c} \Omega_3 r\,dx; \tag{10.183}$$

$$c_y^{\dot{\alpha}} = (2\alpha'/S_{\text{máx. t}}) \int_0^{x_c} \{-\Omega_3 \bar{x}_m + \Omega_4 + 3\Omega_1 - [M_\infty^2 r/(\alpha' x_c)]\,\Omega_2\}\, r\,dx; \tag{10.184}$$

$$c_y^{\omega_z} = (2\alpha' S_{\text{máx. t}}) \int_0^{x_c} (\Omega_4 - \bar{x}_m\Omega_3 + 2\Omega_1)\, r\,dx; \tag{10.185}$$

$$m_z^\alpha = c_y^\alpha \bar{x}_m - [2\alpha'/(S_{\text{máx. t}} x_c)] \int_0^{x_c} \Omega_3\, r\,x\,dx; \tag{10.186}$$

$$m_z^{\dot{\alpha}} = c_y^{\dot{\alpha}} \bar{x}_m - [2\alpha'/(S_{\text{máx. t}} x_c)] \int_0^{x_c} \{-\Omega_3 \bar{x}_m + \Omega_4 + 3\Omega_1 - $$
$$- [M_\infty^2 r/(\alpha' x_c)]\,\Omega_2\}\, r\,x\,dx; \tag{10.187}$$

$$m_z^{\omega_z} = c_y^{\omega_z} \bar{x}_m - [2\alpha'/(S_{\text{máx. t}} x_c)] \int_0^{x_c} (\Omega_4 - \bar{x}_m\Omega_3 + 2\Omega_1)\, r\,x\,dx. \tag{10.188}$$

Calculemos los parámetros geométricos:

$$r_{\text{s.b}}/r_{\text{máx. t}} = (x_c/x_{\text{máx. t}})(2 - x_c/x_{\text{máx. t}});$$

$$x_c/x_{\text{máx. t}} = 1 + \sqrt{1 - r_{\text{s.b}}/r_{\text{máx. t}}} = 1 + \sqrt{1 - \bar{S}_{\text{s.b}}^{1/2}} = 1{,}44;$$

$$x_{\text{máx. t}} = \lambda_{\text{máx. t}} 2 r_{\text{máx. t}} = 5\text{ m}; \quad x_c = (x_c/x_{\text{máx. t}})\, x_{\text{máx. t}} = 7{,}2\text{ m};$$

$$\bar{x}_m = x_m/x_c = 0{,}6947; \quad \lambda_c = x_c/(2r_{\text{máx. t}}) = 7{,}2\text{ m}.$$

La función $\Omega_3 = (\pi/\lambda_{\text{máx. t}}^2)[2i_r^0 - (6\bar{x}/u)\, i_r^1 + (3\bar{x}^2/u^2)\, i_r^2]$, donde $i_r^0 = I_1$; $i_r^1 = uI_1 - I_2$;

$$i_r^2 = u^2 I_1 - 2uI_2 + I_3; \quad I_n = \int_0^{\text{arch}\,u_3} \text{ch}^n z\,dz \;\; [n = 1,\ 2,\ 3;\ u = x/(\alpha' r)].$$

Hallamos:

$$c_y^\alpha = 1{,}386 \int\limits_0^{1{,}44} \Omega_3' \bar{r}\, d\bar{x}; \quad \Omega_3' = 2i_r^0 - (6\bar{x}/u)\, i_r^1 + (3\bar{x}^2/u^2)\, i_r^2; \qquad (10.188')$$

$$u = x/(\alpha' r) = 2\lambda_{\text{máx. t}}\, \bar{x}/(\alpha' \bar{r}) = 5{,}774\bar{x}/\bar{r};$$

$$u_0 = u_{x\to 0} = 5{,}744/(dr/dx)_{x\to 0} = 2{,}887; \quad \bar{x} = x/x_{\text{máx. t}}; \quad \bar{r} = r/r_{\text{máx. t}}.$$

Calculemos la derivada c_y^α por el método numérico. Para ello dividimos el intervalo de integración $\bar{x}_c - 0 = 1{,}44$ en nueve sectores cada uno de anchura $h = 0{,}1599$ y realizamos los correspondientes cálculos de $\Omega_3'\bar{r}$. Con esto, las funciones i_r^0, i_r^1, i_r^2, dependientes de u, se calculan según el método de las fuentes, en tanto que el radio adimensional $\bar{r} = r/r_{\text{máx.t}}$ se determina por la ecuación $\bar{r} = \bar{x}(2 - \bar{x})$.

Empleando la fórmula del trapecio, obtenemos $c_y^\alpha = 1{,}386 \cdot \underbrace{1{,}149}_{J_3} = 1{,}592$.

La derivada

$$\dot{c}_y^{\alpha} = -(4\alpha' \bar{x}_m/\lambda_{\text{máx. t}}) \underbrace{\int\limits_0^{\bar{x}_c} \Omega_3' \bar{r}\, d\bar{x}}_{J_3} + [4\alpha'/(\lambda_{\text{máx. t}} \bar{x}_c)] \underbrace{\int\limits_0^{\bar{x}_c} \Omega_4' \bar{r}\, d\bar{x}}_{J_4} +$$

$$+ [12\alpha'/(\lambda_{\text{máx. t}} \bar{x}_c)] \underbrace{\int\limits_0^{\bar{x}_c} \Omega' \bar{r}\, d\bar{x}}_{J_1} - [2M_\infty^2/(\lambda_c \lambda_{\text{máx. t}})] \underbrace{\int\limits_0^{\bar{x}_c} \Omega_2' \bar{r}^2 d\bar{x}}_{J_2} =$$

$$= -0{,}9625\, J_3 + 0{,}9625\, J_4 + 2{,}888\, J_1 - 0{,}2223\, J_2;$$

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1' &= (2\bar{x}/u)\, i_r^1 - (3\bar{x}^2/u^2)\, i_r^2 + (\bar{x}^3/u^3)\, i_r^3; \\ \Omega_2' &= 2i_x^0 - (6\bar{x}/u)\, i_x^1 + (3\bar{x}^2/u^2)\, i_x^2; \\ \Omega_4' &= (2\bar{x}/u)\, i_r^1 - (6\bar{x}^2/u^2)\, i_r^2 + (3\bar{x}^2/u^2)\, i_r^3. \end{aligned}\right\} \qquad (10.188'')$$

Realizamos la integración numérica haciendo uso de la fórmula del trapecio: $J_1 = 1{,}393$; $J_2 = -0{,}306$; $J_4 = -1{,}073$; $J_3 = 1{,}149$; $\dot{c}_y^{\alpha} = 1{,}952$.

A continuación, hallamos:

$$c_y^{\omega_z} = (4\alpha' \lambda_{\text{máx. t}}/\pi)\, [\pi/(\lambda_{\text{máx. t}}^2\, \bar{x}_c)] \underbrace{\int\limits_0^{\bar{x}_c} \Omega_4' \bar{r}\, d\bar{x}}_{J_4} -$$

$$- (4\alpha' \lambda_{\text{máx.t}}/\pi)\, (\pi \bar{x}_m/\lambda_{\text{máx. t}}^2) \underbrace{\int\limits_0^{\bar{x}_c} \Omega_3' \bar{r}\, d\bar{x}}_{J_3} +$$

$$+(4\alpha'\lambda_{\text{máx. t}}/\pi)\,[\pi\cdot 2/(\lambda^2_{\text{máx. t}}\,\bar{x}_{\text{m}})]\underbrace{\int_0^{\bar{x}_{\text{c}}}\Omega'_x\bar{r}\,d\bar{x}}_{J_1}=$$

$$=0{,}9625\,J_4-0{,}9625\,J_3+1{,}925\,J_1=0{,}543.$$

Las derivadas del coeficiente del momento de cabeceo:

$$m_z^{\alpha}=c_y^{\alpha}\bar{x}_{\text{m}}-[2\alpha' r_{\text{máx. t}}\,x^2_{\text{máx. t}}/(\pi r^2_{\text{máx. t}}\,x_{\text{c}})]\int_0^{\bar{x}_{\text{c}}}\Omega_3\bar{r}\,\bar{x}\,d\bar{x}=$$

$$=c_y^{\alpha}\bar{x}_{\text{m}}-[4\alpha'\lambda_{\text{máx. t}})\,(\pi\bar{x}_{\text{c}})]\,(\pi/\lambda^2_{\text{máx. t}})\underbrace{\int_0^{\bar{x}_{\text{c}}}\Omega'_3\bar{r}\,\bar{x}\,d\bar{x}}_{K_3}=1{,}106-0{,}9625\,K_3;$$

$$m_z^{\dot{\bar{\alpha}}}=c_y^{\dot{\bar{\alpha}}}\bar{x}_{\text{m}}+[4\alpha'\lambda_{\text{máx. t}}\,\bar{x}_{\text{m}}/(\pi\bar{x}_{\text{c}})]\,(\pi/\lambda^2_{\text{máx. t}})\underbrace{\int_0^{\bar{x}_{\text{c}}}\Omega'_3\bar{r}\,\bar{x}\,d\bar{x}}_{K_3}-$$

$$-[4\alpha'\lambda_{\text{máx. t}}/(\pi\bar{x}_{\text{c}})]\,[\pi/\lambda^2_{\text{máx. t}}\,\bar{x}_{\text{c}})]\underbrace{\int_0^{\bar{x}_{\text{c}}}\Omega'_4\bar{r}\,\bar{x}\,d\bar{x}}_{K_4}-[4\alpha'\lambda_{\text{máx. t}}/(\pi\bar{x}_{\text{c}})]\,[3\pi/(\lambda^2_{\text{máx. t}}\,\bar{x}_{\text{c}})]\times$$

$$\times\underbrace{\int_0^{\bar{x}_{\text{c}}}\Omega'_1\bar{r}\,\bar{x}\,d\bar{x}}_{K_1}+[4\alpha'\lambda_{\text{máx. t}}/(\pi\bar{x}_{\text{c}})]\,[\mathrm{M}^2_{\infty}/(2\alpha'\lambda_{\text{c}})]\,(\pi/\lambda^2_{\text{máx. t}})\underbrace{\int_0^{\bar{x}_{\text{c}}}\Omega'_2\bar{r}^2\bar{x}\,d\bar{x}}_{K''_2}=$$

$$=1{,}356+0{,}6686\,K_3-0{,}6683\,K_4-2{,}006\,K_1+0{,}1544\,K''_2;$$

$$m_z^{\omega_z}=c_y^{\omega_z}\bar{x}_{\text{m}}-[2\alpha' r_{\text{máx. t}}\,x^2_{\text{máx. t}}/(\pi r^2_{\text{máx. t}}\,x_{\text{c}})]\,[\pi/(\lambda^2_{\text{máx. t}}\,\bar{x}_{\text{c}})]\underbrace{\int_0^{\bar{x}_{\text{c}}}\Omega'_4\bar{r}\,\bar{x}\,d\bar{x}}_{K_4}+$$

$$+\bar{x}_{\text{m}}\,[2\alpha' r_{\text{máx. t}}\,x^2_{\text{máx. t}}/(\pi r^2_{\text{máx. t}}\,x_{\text{c}})]\,(\pi/\lambda^2_{\text{máx. t}})\underbrace{\int_0^{\bar{x}_{\text{c}}}\Omega'_3\bar{r}\,\bar{x}\,d\bar{x}}_{K_3}-$$

$$-[2\alpha' r_{\text{máx. t}}\,x^2_{\text{máx. t}}/(\pi r^2_{\text{máx. t}}\,x_{\text{c}})]\,[2\pi/(\lambda^2_{\text{máx. t}}\,x_{\text{c}})]\underbrace{\int_0^{\bar{x}_{\text{c}}}\Omega'_1\bar{r}\,\bar{x}\,d\bar{x}}_{K_1}=$$

$$=0{,}3772-0{,}6686\,K_4+0{,}6686\,K_3-1{,}337\,K_1.$$

Realicemos la integración numérica: $K_3 = 0{,}1593$; $m_z^{\alpha} = 0{,}9527$; $K_4 = -1{,}455$; $K_1 = 1{,}3$; $K_2 = -0{,}6251$; $m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} = -0{,}2621$; $m_z^{\omega_z} = -0{,}2814$.

10.55. Por analogía con (10.137), la derivada

$$\bar{p}_2^{\alpha} = -[2\alpha' \cos\gamma/(\alpha V_\infty)] \int_0^{\operatorname{arch} u} \dot{m} \operatorname{ch} z\, dz.$$

En particular, en la punta cónica $[u_{\text{cono}} = x_{\text{cono}}/(\alpha' r_{\text{cono}}) = 1/(\alpha' \beta_{\text{cono}})]$

$$\dot{m} = [S''(\varepsilon)/\pi]\, \alpha V_\infty = 2\beta_{\text{cono}}^2 \alpha V_\infty; \quad \bar{p}_2^{\alpha} = -4\alpha' \beta_{\text{cono}}^2 I_1(u_{\text{cono}}) \cos\gamma. \tag{10.189}$$

En el punto con coordenadas x; r en el sector cilíndrico $[u = x/(\alpha' r)]$

$$\bar{p}_2^{\alpha} = -[2\alpha' \cos\gamma/(\alpha V_\infty)] \left(\int_0^{\operatorname{arch} \bar{u}_{\text{cono}}} \dot{m}_{\text{cil}} \operatorname{ch} z\, dz + \int_{\operatorname{arch} \bar{u}_{\text{c}}}^{\operatorname{arch} u} \dot{m}_{\text{cono}} \operatorname{ch} z\, dz \right).$$

Como para el cilindro $S(\varepsilon) = \text{const}$, $\dot{m}_{\text{cil}} = [S''(\varepsilon)/\pi]\, \alpha V_\infty = 0$ y

$$\bar{p}_2^{\alpha} = -4\alpha' \beta_{\text{cono}}^2 \cos\gamma\, [I_1(u) - I_1(\bar{u}_{\text{cono}})]\, \{u = x/(\alpha' r);$$
$$\bar{u}_{\text{cono}} = [x - (x_{\text{cono}} - \alpha' r)]/(\alpha' r)\}. \tag{10.190}$$

Las coordenadas x_{cono}; r_{cono} corresponden al extremo de la generatriz del cono. Para la sección cónica de cola (punto x; r):

$$\bar{p}_2^{\alpha} = -[2\alpha' \cos\gamma/(\alpha V_\infty)] \left(\int_0^{\operatorname{arch} \bar{u}_{\text{cil}}} \dot{m}_{\text{s.c}} \operatorname{ch} z\, dz + \int_{\operatorname{arch} \bar{u}_{\text{cil}}}^{\operatorname{arch} \bar{u}_{\text{cono}}} \dot{m}_{\text{cil}} \operatorname{ch} z\, dz + \right.$$
$$\left. + \int_{\operatorname{arch} \bar{u}_{\text{cono}}}^{\operatorname{arch} u} \dot{m}_{\text{cono}} \operatorname{ch} z\, dz \right).$$

Como en el cilindro $\dot{m}_{\text{cil}} = 0$, en el cono de la nariz $\dot{m}_{\text{cono}} = 2\beta_{\text{cono}}^2 \alpha V_\infty$, en el sector cónico de la cola $\dot{m}_{\text{s.c}} = = 2\beta_{\text{s.c}}^2 \alpha V_\infty$, entonces

$$\bar{p}_2^{\alpha} = -4\alpha' \cos\gamma\, \{\beta_{\text{cono}}^2 I_1(\bar{u}_{\text{cil}}) + \beta_{\text{cono}}^2\, [I_1(u) - I_1(\bar{u}_{\text{cono}})]\}. \tag{10.191}$$

donde $\bar{u}_{\text{cil}} = [x - (x_{\text{cil}} - \alpha' r_{\text{cil}})]/(\alpha' r)$; $\bar{u}_{\text{cono}} = [x - (x_{\text{cono}} - \alpha' r_{\text{cono}})]/ /(\alpha' r)$; $u = x/(\alpha' r)$; x_{cil}; r_{cil} y x_{cono}; r_{cono} son las coordenadas de los puntos en el extremo del cilindro y el cono de nariz.

Para un cuerpo de largura $x_{\text{c}} = x_{\text{T}}$ tendremos:

$$c_y^{\alpha} = -(\pi/S_{\text{máx.t}}) \int_0^{x_{\text{T}}} (\bar{p}_2/\cos\gamma)\, r\, dx = \underbrace{2\alpha' \beta_{\text{cono}} I_1(u_{\text{cono}})}_{K} +$$
$$\underbrace{+ 4\alpha'^2 \beta_{\text{cono}}^2 \overbrace{\int_{\tilde{u}_{\text{cono}}}^{\tilde{u}_{\text{cil}}} [I_1(u) - I_1(\bar{u}_{\text{cono}})]\, d\tilde{u}}^{C'} +}_{C}$$

$$+4\alpha'^2 \int_{\tilde{u}_{c1l}}^{\tilde{u}_T} \underbrace{\{\beta_{s.c}^2 I_1(\bar{u}_{c1l}) + \beta_{cono}^2 [I_1(u) - I_1(\bar{u}_{cono})]\} \bar{r}\, d\tilde{u}}_{X'}; \qquad (10.192)$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{X}$$

$$\bar{u} = x/(\alpha' r_{máx.t}); \quad \tilde{u}_{cono} = x_{cono}/(\alpha' r_{máx.t}) = 1/(\alpha' \beta_{cono}); \quad \tilde{u}_{c1l} = x_{c1l}/(\alpha' r_{máx.t});$$
$$\tilde{u}_T = x_T/(\alpha' r_{máx.t}); \quad \bar{r} = r/r_{máx.t} = (1/r_{máx.t}) [r_{s.b} + (x_T - x) \beta_{s.c}].$$

Examinemos el cono (notación K):

$$\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 1{,}732; \quad \beta_{cono} = r_{cono}/x_{cono} = 0{,}1; \quad u_{cono} = x_{cono}/(\alpha' r_{cono}) = 5{,}774;$$
$$I_1(u_{cono}) = \sqrt{u_{cono}^2 - 1} = 5{,}687; \quad K = 2 \cdot 1{,}732 \cdot 0{,}1 \cdot 5{,}687 = 1{,}97.$$

Para el cilindro (notación C):

$$\tilde{u}_{cono} = x_{cono}/(\alpha' r_{máx.t}) = 5{,}774; \quad \tilde{u}_{c1l} = x_{c1l}/(\alpha' r_{máx.t}) = 8{,}083;$$
$$u = \tilde{u} = x/(\alpha' r_{máx.t}); \quad \bar{u}_{cono} = [x - (x_{cono} - \alpha' r_{máx.t})]/(\alpha' r_{máx.t}) =$$
$$= x/(\alpha' r_{máx.t}) - [x_{cono}/(\alpha' r_{máx.t}) - 1] = \tilde{u} - 4{,}774.$$

La función subintegral C' se calcula para seis valores de $u = \tilde{u} + \Delta\tilde{u}$ y el paso $\Delta\tilde{u} = 0{,}4619$ (incluidos el comienzo y el final del cilindro: $\tilde{u}_{cono} = 5{,}774$; $\tilde{u}_{c1l} = 8{,}083$). Como resultado de la integración numérica obtenemos $C = 1{,}394$. Con el fin de determinar la variable X (notación de la cola) hallamos:

$$\tilde{u}_{c1l} = 8{,}083; \quad \tilde{u}_T = x_T/(\alpha' r_{máx.t}) = 9{,}238;$$
$$u = x/(\alpha' r) = [x/(\alpha' r_{máx.t})] (r_{máx.t}/r) = \tilde{u}/\bar{r};$$
$$\bar{u}_{cono} = [x - (x_{cono} - \alpha' r_{máx.t})]/(\alpha' r) = (\tilde{u} - 4{,}774)/\bar{r}; \quad \bar{u}_{c1l} = [x - (x_{c1l} - \alpha' r_{c1l})]/(\alpha' r) =$$
$$= (\tilde{u} - 7{,}083)/\bar{r}; \quad \bar{r} = r/r_{máx.t} = (1/r_{máx.t}) [r_{s.b} + (x_T - x) \beta_{s.c}] = 0{,}2598\ (11{,}93 - \tilde{u});$$
$$\Delta u = (\tilde{u}_T - \tilde{u}_{c1l})/5 = 0{,}231.$$

En el intervalo $\tilde{u}_{c1l} - \tilde{u}_T = 8{,}083 - 9{,}238$ (comienzo y final de la cola), para el paso $\Delta\tilde{u} = 0{,}231$ determinamos el valor de la función subintegral X' y efectuamos la integración numérica, como resultado de la cual hallamos que $X = 1{,}058$.

La derivada para todo el cuerpo $c_y^\alpha = K + C + X = 4{,}422$. La derivada del coeficiente del momento de cabeceo (con relación a la punta)

$$m_z^\alpha = [\pi/(S_{máx.t} x_T)] \int_0^{x_T} (\bar{p}_2^\alpha/\cos\gamma)\, rx\, dx =$$

$$= \underbrace{-(4/3)\, \alpha' \beta_{cono} I_1(u_{cono})\, (x_{cono}/x_T)}_{K_m} - \underbrace{4\alpha'^3 \beta_{cono}^2}_{C_m} \times$$

$$\times (r_{\text{máx.t}}/x_T) \underbrace{\int_{\tilde{u}_{\text{cono}}}^{\tilde{u}_{c11}} \overbrace{[I_1(u) - I_1(\bar{u}_{\text{cono}})]\,\tilde{u}\, d\tilde{u}}^{C'_m}}_{C_m} -$$

$$\underbrace{-4\alpha'^3 (r_{\text{máx.t}}/x_T) \int_{\tilde{u}_{c11}}^{\tilde{u}_T} \overbrace{\{\beta^2_{\text{s.c}} I_1(\bar{u}_{c11}) + \beta^2_{\text{cono}}[I_1(u) - I_1(\bar{u}_{\text{cono}})]\}\,\bar{r}\tilde{u}\, d\tilde{u}}^{X'_m}.}_{X_m} \tag{10.193}$$

Calculamos: $K_m = -0{,}8208$. La función subintegral C'_m se calcula en el intervalo $\tilde{u}_{\text{cono}} - \tilde{u}_{c11} = 5{,}774...8{,}083$ (comienzo y final del cilindro) con el paso $\Delta\tilde{u} = 0{,}4619$. Como resultado de la integración numérica $C_m = 1{,}042$.

La segunda función subintegral X'_m se calcula para el comienzo y el final de la cola ($\tilde{u}_{c11} = 8{,}083$; $\tilde{u}_T = 9{,}328$; $\Delta\tilde{u} = 0{,}231$). Haciendo uso del resultado de la integración numérica hallamos $X_m = 0{,}806$; $m_z^\alpha = -K_m - C_m - X_m = -2{,}668$.

El correspondiente coeficiente del centro de presión (con relación a la punta del cuerpo) $c_p = -m_z^\alpha/c_y^\alpha = 0{,}6035$. La derivada para el centro de rotación, distanciado de la punta a x_m

$$m_{zm}^\alpha = -[\pi/(S_{\text{máx.t}} x_T)] \int_0^{x_T} (\bar{p}_2^\alpha r/\cos\gamma)(x_m - x)\, dx =$$
$$= c_y^\alpha (x_m/x_T) + m_z^\alpha = 0{,}0949. \tag{10.194}$$

Analicemos las derivadas $c_y^{\omega_z}$ y $m_z^{\omega_z}$. Éstas dependen de la función $\bar{p}_2^{\omega_z}$, determinada en el sector cónico de la nariz por la fórmula (10.144) en la que el parámetro $U_1^n = U^n$

$$\bar{U}^n = 2\beta^2_{\text{cono}}\{3\alpha'(r/x_T)[u_{\text{cono}} I_1(u_{\text{cono}}) - I_2(u_{\text{cono}})] - (x_m/x_T) I_1(u_{\text{cono}})\}$$
$$[u_{\text{cono}} = x/(\alpha' r) = 1/(\alpha'\beta_{\text{cono}})]. \tag{10.195}$$

Para el punto $(x;\ r)$ en el sector cilíndrico hallamos la derivada (10.143′), haciendo $\dot{m}_{2\Omega} = 0$:

$$\bar{p}_2^{\omega_z} = -2\alpha' \cos\gamma\, \bar{U}_1, \tag{10.196}$$

donde

$$\bar{U}_1 = 2\beta^2_{\text{cono}}[3\alpha'(r/x_T)\{u[I_1(u) - I_1(\bar{u}_{\text{cono}})] - [I_2(u) - I_2(\bar{u}_{\text{cono}})]\} -$$
$$- (x_m/x_T)[I_1(u) - I_1(\bar{u}_{\text{cono}})]]. \tag{10.197}$$

Empleando (10.147), hallamos para la cola cónica

$$\bar{p}_2^{\omega_z} = -4\alpha' \cos\gamma\, (\bar{U}_1^{\text{cola}} \beta_{\text{s.c}} + \bar{U}_1^n \beta^2_{\text{cono}}),$$

donde

$$\bar{U}_1^{\text{cola}} = -[\beta_{\text{s.c}}(\bar{x}_m + 2) + 2\bar{r}_{\text{s.b}}] I_1(\bar{u}_{c11}) + 3(\alpha' r/x_T)[u I_1(\bar{u}_{c11}) - I_2(\bar{u}_{c11})]\beta_{\text{s.c}}$$
$$\{\bar{x}_m = x_m/x_T;\ \bar{r}_{\text{s.b}} = r_{\text{s.b}}/x_T;\ \bar{u}_{c11} = [x - (x_{c11} - \alpha' r_{c11})]/(\alpha' r);\ u = x/(\alpha' r)\},$$
$$\bar{U}_1^n = 3\alpha'(r/x_T)\{u[I_1(u) - I_1(\bar{u}_{\text{cono}})] - [I_2(u) - I_2(\bar{u}_{\text{cono}})]\} -$$
$$- \bar{x}_m[I_1(u) - I_1(\bar{u}_{\text{cono}})];\quad \bar{u}_{\text{cono}} = [x - (x_{\text{cono}} - \alpha' r_{\text{cono}})]/(\alpha' r).$$

Tomando esto en consideración

$$c_y^{\omega_z} = -(\pi/S_{\text{máx.t}}) \int_0^{x_T} (\bar{p}_2^{\omega_z}/\cos\gamma)\, r\, dx = \underbrace{(2\alpha'/r^2_{\text{máx.t}}) \int_0^{x_{\text{cono}}} \bar{U}^{n} r\, dx}_{A} + (2\alpha'/r^2_{\text{máx.t}}) \times$$

$$\times \underbrace{\int_{x_{\text{cono}}}^{x_{\text{cil}}} \bar{U}_1 r\, dx}_{B} + \underbrace{(4\alpha'/r^2_{\text{máx.t}}) \int_{x_{\text{cil}}}^{x_T} (\bar{U}_{1\beta}^{\text{cola}}\,{}_{\text{s.c}} + \bar{U}_1''\beta^2_{\text{cono}})\, r\, dx}_{C}; \qquad (10.198)$$

$$A = \beta_{\text{cono}} \{2\alpha' (x_{\text{cono}}/x_T) [u_{\text{cono}} I_1(u_1) - I_2(u_{\text{cono}})]\, \beta_{\text{cono}} - (x_m/x_T)\, I_1(u_{\text{cono}})\}; \qquad (10.198')$$

$$B = 2\alpha'\beta^2_{\text{cono}} \int_{\tilde{u}_{\text{cono}}}^{\tilde{u}_{\text{cil}}} [3\alpha' (r_{\text{máx.t}}/x_T) \{u [I_1(u) - I_1(\bar{u}_{\text{cono}})] -$$

$$- [I_2(u) - I_2(\bar{u}_{\text{cono}})]\} - (x_m/x_T) [I_1(u) - I_1(\bar{u}_{\text{cono}})]\, d\tilde{u}; \qquad (10.199)$$

$$C = -\alpha'\beta_{\text{s.c}} [\beta_{\text{s.c}} (\bar{x}_m + 2) + 2\bar{r}_{\text{s.b}}] \underbrace{\overbrace{\int_{\tilde{u}_{\text{cil}}}^{\tilde{u}_T} I_1(\bar{u}_{\text{cil}})\, \bar{r}\, d\tilde{u}}^{C_1'}}_{C_1} +$$

$$+ 3\alpha'^2\beta^2_{\text{s.c}} (r_{\text{máx.t}}/x_T) \underbrace{\overbrace{\int_{\tilde{u}_{\text{cil}}}^{\tilde{u}_T} [u I_1(\bar{u}_{\text{cil}}) - I_2(\bar{u}_{\text{cil}})]\, \bar{r}^2\, d\tilde{u}}^{C_2'}}_{C_2} +$$

$$+ \alpha'\beta^2_{\text{cono}} \underbrace{\overbrace{\int_{\tilde{u}_{\text{cil}}}^{\tilde{u}_T} [3\alpha' (r_{\text{máx.t}}/x_T)\, \bar{r} \{u [I_1(u) - I_1(\bar{u}_{\text{cono}})] - [I_2(u) - I_2(\bar{u}_{\text{cono}})]\} - \bar{x}_m [I_1(u) - I_1(\bar{u}_{\text{cil}})]]\, \bar{r}\, d\tilde{u}}^{C_3'}}_{C_3} \qquad (10.199')$$

$$[\bar{x}_m = x_m/x_T;\ \bar{r}_{\text{s.b}} = r_{\text{s.b}}/x_T;\ \bar{r} = r/r_{\text{máx.t}};$$
$$\tilde{u} = x/(\alpha' r_{\text{máx.t}});\ \tilde{u}_{\text{cil}} = x_{\text{cil}}/(\alpha' r_{\text{máx.t}});$$
$$\tilde{u}_T = x_T/(\alpha' r_{\text{máx.t}})];\quad c_y^{\omega_z} = 2\alpha' (A + B + 2C). \qquad (10.199'')$$

Para el sector cónico

$\tilde{u}_{\text{cono}} = 5{,}774$; $I_1(u_{\text{cono}}) = 5{,}687$; $I_2(u_{\text{cono}}) = 17{,}64$; $A = -0{,}264$.

Para el cilindro

$$\tilde{u}_{\text{cono}}=5,774;\quad \tilde{u}_{\text{cil}}=8,083;$$

$$B=0,03464\int\limits_{5,774}^{8,083}\underbrace{[0,3248\{u[I_1(u)-I_1(\bar{u}_{\text{cono}})]-[I_2(u)-I_2(\bar{u}_{\text{cono}})]\}-0,625[I_1(u)-I_1(\bar{u}_{\text{cono}})]}_{B'}\,d\tilde{u};$$

$$u=\tilde{u}=x/(\alpha' r_{\text{máx.t}});\quad \bar{u}_{\text{cono}}=\tilde{u}-4,774;\quad \Delta\tilde{u}=0,4619.$$

La función subintegral se calcula en el cilindro para el intervalo $\tilde{u}_{\text{cono}}-\tilde{u}_{\text{cil}}=5,774-8,083$ con paso $\Delta\tilde{u}=0,4619$.

Para la integración numérica empleamos la fórmula del trapecio y hallamos $B=0,069$.

Examinemos el sector de cola

$$\bar{r}=r/r_{\text{máx.t}}=0,2598\,(11,93-\tilde{u});\quad \bar{u}_{\text{cil}}=(\tilde{u}-7,083)/\bar{r};\quad \bar{u}_{\text{cono}}=(\tilde{u}-4,774)/\bar{r};$$

$$u=x/(\alpha' r)=\tilde{u}/\bar{r};\quad \tilde{u}_{\text{T}}=9,238;\quad \tilde{u}_{\text{cil}}=8,083;\quad 3\alpha'\,(r_{\text{máx.t}}/x_{\text{T}})=0,3248;$$

$$\bar{x}_{\text{m}}=0,625.$$

Hallamos las funciones subintegrales C_2' y C_3' en la cola en el intervalo $\tilde{u}_{\text{cil}}-\tilde{u}_{\text{T}}=8,083...9,238$ con paso $\Delta u=0,231$ y efectuamos la integración numérica. Utilizando los resultados obtenidos, calculamos: $C_2=11,17$; $C_3=0,8838$; $C=0,02326$; $c_y^{\omega_z}=0,3314$.

Consideremos la derivada:

$$m_z^{\omega_z}=[\pi/S_{\text{máx.t}}x_{\text{T}})]\int\limits_0^{x_{\text{T}}}(\bar{p}_2^{\omega_z}/\cos\gamma)\,rx\,dx=$$

$$=-2\alpha'\underbrace{[1/(r^2_{\text{máx.t}}x_{\text{T}})]\int\limits_0^{x_{\text{cono}}}\bar{U}^{\text{n}}rx\,dx}_{A_m}-2\alpha'\underbrace{[1/(r^2_{\text{máx.t}}x_{\text{T}})]\int\limits_{x_{\text{cono}}}^{x_{\text{cil}}}\bar{U}_1rx\,dx}_{B_m}-$$

$$-4\alpha'\underbrace{[1/(r^2_{\text{máx.t}}x_{\text{T}})]\int\limits_{x_{\text{cil}}}^{x_{\text{cono}}}(\bar{U}_1^{\text{cola}}\beta_{\text{s.c}}+\bar{U}_1^{\text{n}}\beta^2_{\text{cono}})\,rx\,dx}_{C_m}=-2\alpha'\,(A_m+B_m+2C_m),\tag{10.200}$$

donde

$$A_m = \beta_{\text{cono}} (x_{\text{cono}}/x_{\text{T}}) \{(3/2)\, \alpha' (x_{\text{cono}}/x_{\text{T}}) \times$$
$$\times \beta_{\text{cono}} [u_{\text{cono}} I_1 (u_{\text{cono}}) - I_2 (u_{\text{cono}})] - (2/3) (x_{\text{m}}/x_{\text{T}}) I_1 (u_{\text{cono}})\}; \quad (10.201)$$

$$B_m = 2\alpha'' (r_{\text{máx.t}}/x_{\text{T}}) \beta^2_{\text{cono}} \int_{\tilde{u}_{\text{cono}}}^{u_{\text{c11}}} \overbrace{[3\alpha' (r_{\text{máx.t}}/x_{\text{T}}) \{u [I_1 (u) - I_1 (\bar{u}_{\text{cono}})] - [I_2 (u) - I_2 (\bar{u}_{\text{cono}})]\} - x_{\text{m}}/x_{\text{T}}) [I_1 (u) - I_1 (\bar{u}_{\text{cono}})]] \tilde{u}}^{B'_m} d\tilde{u}; \quad (10.202)$$

$$C_m = -\alpha'' \beta_{\text{s.c}} [\beta_{\text{s.c}} (\bar{x}_{\text{m}} + 2) + 2\bar{r}_{\text{s.b}}] (r_{\text{máx.t}}/x_{\text{T}}) \int_{\tilde{u}_{\text{c11}}}^{\tilde{u}_{\text{T}}} \overbrace{I_1 (\bar{u}_{\text{c11}}) \bar{r} \tilde{u}}^{C'_{1m}} d\tilde{u} +$$
$$+ \alpha'' \beta^2_{\text{s.c}} (r^2_{\text{máx.t}}/x^2_{\text{T}}) \int_{\tilde{u}_{\text{c11}}}^{\tilde{u}_{\text{T}}} \overbrace{[u I_1 (\bar{u}_{\text{c11}}) - I_2 (\bar{u}_{\text{c11}})] \bar{r}^2 \tilde{u}}^{C'_{2m}} d\tilde{u} + \alpha'' \beta^2_{\text{cono}} (r_{\text{máx.t}}/x_{\text{T}}) \times$$
$$\times \int_{\tilde{u}_{\text{c11}}}^{\tilde{u}_{\text{T}}} \overbrace{[[3\alpha' \bar{r} (r_{\text{máx.t}}/x_{\text{T}}) \{u [I_1 (u) - I_1 (\bar{u}_{\text{cono}})] - [I_2 (u) - I_2 (\bar{u}_{\text{cono}})]\} - \bar{x}_{\text{m}} [I_1 (u) - I_1 (\bar{u}_{\text{cono}})]] \bar{r} \tilde{u}}^{C'_{3m}} d\tilde{u}. \quad (10.203)$$

Para el cono de nariz $A_m = 0{,}006138$.

Para el cilindro la función subintegral B'_m se calcula en el sector $\tilde{u}_{\text{cono}} - \tilde{u}_{\text{c11}} = 5{,}774 \ldots 8{,}083$ ($\Delta\tilde{u} = 0{,}4691$). A continuación, se efectúa la integración numérica y según el resultado obtenido, hallamos $B_m = 0{,}05114$.

De modo análogo se determinan las funciones subintegrales C'_{1m}, C'_{2m}, C'_{3m} para la cola (en el sector $\tilde{u}_{\text{c11}} - \tilde{u}_{\text{T}} = 8{,}083 \ldots 9{,}238$ con paso $\Delta\tilde{u} = 0{,}231$).

Empleando los valores obtenidos con la integración numérica determinamos $C_m = -0{,}02749$ y la correspondiente derivada $m_z^{\omega_z} = 0{,}5648$.

Recalculamos esta derivada para el nuevo punto de reducción (x_{m}):

$$m_{zm}^{\omega_z} = c_y^{\omega_z} (x_{\text{m}}/x_{\text{T}}) + m_z^{\omega_z} = 0{,}772.$$

Conforme a (10.152) en el cono de nariz

$$\bar{p}_2^{\dot{\alpha}} = -(2\alpha' \cos\gamma/\alpha_0) \{(1/x_{\text{T}}) F_1^p - [\text{M}^2_\infty r/(x_{\text{T}} \alpha' V_\infty)] F_0^0 + [1/(x_{\text{T}} V_\infty)] F_1^0\}, \quad (10.204)$$

donde

$$F_0^0 = \int_0^{\text{arch } u_{\text{cono}}} \dot{m}_0\, dz; \quad F_1^0 = \int_0^{\text{arch } u_{\text{cono}}} m_0 \operatorname{ch} z\, zd; \quad F_1^p = \int_0^{\text{arch } u_{\text{cono}}} \dot{m}_p \operatorname{ch} z\, dz. \tag{10.205}$$

De acuerdo con las fórmulas (10.152′) para $\dot{m}_p$, $\dot{m}_0$, m_0, tenemos

$$F_0^0 = 2\beta^2_{\text{cono}}\alpha_0 V_\infty I_0(u_{\text{cono}}); \quad F_1^0 = 2\beta^2_{\text{cono}}\alpha_0 V_\infty \alpha' r\,[u_{\text{cono}} I_1(u_{\text{cono}}) - I_2(u_{\text{cono}})];$$

$$F_1^p = 2\beta^2_{\text{cono}}\alpha_0 \{3\alpha' r\,[u_{\text{cono}} I_1(u_{\text{cono}}) - I_2(u_{\text{cono}})] - x_{\text{m}} I_1(u_{\text{cono}})\};$$

$$c_{y\,\text{cono}}^{\dot{\bar{\alpha}}} = -(\pi/S_{\text{máx.t}}) \int_0^{x_{\text{cono}}} (\bar{p}_2^{\dot{\bar{\alpha}}}/\cos\gamma)\, r\, dx = 4\beta^2_{\text{cono}}\alpha' \{\alpha'(x_{\text{cono}}/x_{\text{T}})\,[u_{\text{cono}} I_1(u_{\text{cono}}) -$$

$$- I_2(u_{\text{cono}})] - 0{,}5\,(x_{\text{m}}/x_{\text{T}})\,(1/\beta_{\text{cono}})\, I_1(u_{\text{cono}}) - (\text{M}^2_\infty/3\alpha')\,(x_{\text{cono}}/x_{\text{T}})\, I_0(u_{\text{cono}}) +$$

$$+ (1/3)\,\alpha'\,(x_{\text{cono}}/x_{\text{T}})\,[u_{\text{cono}} I_1(u_{\text{cono}}) - I_2(u_{\text{cono}})]\}. \tag{10.206}$$

Calculamos:

$u_{\text{cono}} = 5{,}774$; $I_1(u_{\text{cono}}) = 5{,}687$; $I_2(u_{\text{cono}}) = 17{,}64$; $I_0(u_{\text{cono}}) = \text{arch}\, u_{\text{cono}} = 2{,}439$;

$$c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = 0{,}2071.$$

Examinemos el sector cilíndrico:

$$\bar{p}_2^{\dot{\bar{\alpha}}} = -(2\alpha' \cos\gamma/\alpha_0)\,\{(1/x_{\text{T}})\, F_1^p - [\text{M}^2_\infty r/(x_{\text{T}}\alpha' V_\infty)]\, F_0^0 + [1/(x_{\text{T}} V_\infty)\,] F_1^0\}, \tag{10.207}$$

donde

$$F_0^0 = \int_{\text{arch } \bar{u}_{\text{cono}}}^{\text{arch } u} \dot{m}_0\, dz = 2\beta^2_{\text{cono}}\alpha_0 V_\infty\,[I_0(u) - I_0(\bar{u}_{\text{cono}})];$$

$$F_1^0 = \int_{\text{arch } \bar{u}_{\text{cono}}}^{\text{arch } u} m_0 \operatorname{ch} z\, dz = 2\beta^2_{\text{cono}}\alpha_0 V_\infty \alpha' r\,\{u\,[I_1(u) - I_1(\bar{u}_{\text{cono}})] - [I_2(u) - I_2(\bar{u}_{\text{cono}})]\};$$

$$F_1^p = \int_{\text{arch } \bar{u}_{\text{cono}}}^{\text{arch } u} \dot{m}_p \operatorname{ch} z\, dz =$$

$$= 2\beta^2_{\text{cono}}\alpha_0\,[3\alpha' r\,\{u\,[I_1(u) - I_1(\bar{u}_{\text{cono}})] - [I_2(u) - I_2(\bar{u}_{\text{cono}})]\} - x_{\text{m}}\,[I_1(u) - I_1(\bar{u}_{\text{cono}})]].$$

La correspondiente derivada [tomando en consideración la anotación $\tilde{u}_{\text{cono}} = x_{\text{cono}}/(\alpha' r_{\text{máx.t}})$; $\tilde{u}_{\text{cil}} = x_{\text{cil}}/(\alpha' r_{\text{máx.t}})$; $\tilde{u} = x/(\alpha' r_{\text{máx.t}})$]

$$c_{y\,\text{cil}}^{\dot{\bar{\alpha}}} = -(\pi/S_{\text{máx.t}}) \int_{x_{\text{cono}}}^{x_{\text{cil}}} (\bar{p}_2^{\dot{\bar{\alpha}}}/\cos\gamma)\, r\, dx =$$

$$-4\beta^2_{\text{cono}}\alpha' \left\{\alpha' \int_{\tilde{u}_{\text{cono}}}^{\tilde{u}_{\text{cil}}} \overbrace{[3\alpha'\,(r_{\text{máx.t}}/x_{\text{T}})\,\{u\,[I_1(u) - I_1(\bar{u}_{\text{cono}})] - [I_2(u) - I_2(\bar{u}_{\text{cono}})]\} -}^{B^{p1}} \right.$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{B^p}$$

$$\underbrace{-(x_m/x_T)\,[I_1(u)-I_1(\bar{u}_{cono})]\,d\tilde{u}}_{B^{p1}} - \underbrace{(M_\infty^2 r_{máx.t}/x_T)\times}_{B^{p}}$$

$$\times \int_{\tilde{u}_{cono}}^{\tilde{u}_{cil}} \overbrace{[I_0(u)-I_0(\bar{u}_{cono})]\,d\tilde{u}}^{B_0^{01}} + \underbrace{(\alpha'^2 r_{máx.t}/x_T)\times}_{B_0^{0}}$$

$$\times \int_{\tilde{u}_{cono}}^{\tilde{u}_{cil}} \overbrace{\{u\,[I_1(u)-I_1(\bar{u}_{cono})]-[I_2(u)-I_2(\bar{u}_{cono})]\}\,d\tilde{u}}^{B_1^{01}} \Big\}. \qquad (10.208)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{B_1^{0}}$$

Calculemos para el cilindro las funciones subintegrales B^{p1}, B_1^{01}, B_0^{01} y las correspondientes integrales a condición de que $u = \tilde{u} = x/(\alpha' r_{máx.t})$; $\bar{u}_{cono'} = \tilde{u} - 4{,}774$; $\Delta\tilde{u} = 0{,}4619$; $\tilde{u}_{cono} = 5{,}774$; $\tilde{u}_{cil} = 8{,}083$.

Hallamos: $B^p = 1{,}993$; $B_0^0 = 3{,}111$; $B_1^0 = 28{,}49$; $\dot{c}_{y\,cil}^{\alpha} = 0{,}5553$.

Analicemos el sector cónico de cola:

$$\bar{p}_2^{\dot{\alpha}} = -(2\alpha'\cos\gamma/\alpha_0)\Big\{(1/x_T)\int_0^{\text{arch}\,u} \dot{m}_p\,\text{ch}\,z\,dz - [M_\infty^2 r/(x_T\alpha' V_\infty]\int_0^{\text{arch}\,u} \dot{m}_0\,dz +$$

$$+(1/x_T V_\infty)\int_0^{\text{arch}\,u} m_0\,\text{ch}\,z\,dz\Big\} =$$

$$= -(2\alpha'\cos\gamma/\alpha_0)\Big\{(1/x_T)\Big(\underbrace{\int_0^{\text{arch}\,\bar{u}_{cil}} \dot{m}_p\,\text{ch}\,z\,dz}_{U'_{p1}} + \underbrace{\int_{\text{arch}\,\bar{u}_{cono}}^{\text{arch}\,u} \dot{m}_p\,\text{ch}\,z\,dz}_{U_{p2}^1}\Big) -$$

$$-[M_\infty^2 r/(x_T\alpha' V_\infty)]\Big(\underbrace{\int_0^{\text{arch}\,\bar{u}_{cil}} \dot{m}_0\,dz}_{U_{01}^0} + \underbrace{\int_{\text{arch}\,\bar{u}_{cono}}^{\text{arch}\,u} \dot{m}_0\,dz}_{U_{02}^0}\Big) +$$

$$+(1/x_T V_\infty)\Big(\underbrace{\int_0^{\text{arch}\,\bar{u}_{cil}} m_0\,\text{ch}\,z\,dz}_{U_{01}^1} + \underbrace{\int_{\text{arch}\,\bar{u}_{cono}}^{\text{arch}\,u} m_0\,\text{ch}\,z\,dz}_{U_{02}^1}\Big)\Big\}. \qquad (10.209)$$

Para la cola cónica (índice «s.c.») y el cono de la nariz («cono») los valores de $\dot{m}_p$, $\dot{m}_0$, m_0 están representados con las correspondientes fórmulas (10.168″) y el y (10.152′).

Teniendo en cuenta dichos valores las integrales

$$U_{p1}^{1}=2\beta_{s.c}\{3\alpha'(r/x_T)[uI_1(\bar{u}_{c11})-I_2(\bar{u}_{c11})]\beta_{s.c}-[(2+\bar{x}_m)\beta_{s.c}+$$
$$+2\bar{r}_{s.b}]I_1(\bar{u}_{c11})\}\quad\{u=x/(\alpha'r);$$
$$\bar{u}_{c11}=[x-(x_{c11}-\alpha' r_{c11})]/(\alpha'r);\quad \bar{x}_m=x_m/x_T;\quad \bar{r}_{s.b}=r_{s.b}/x_T\};$$
$$U_{p2}^{1}=2\beta_{cono}^{2}[3\alpha'(r/x_T)\{u[I_1(u)-I_1(\bar{u}_{cono})]-[I_2(u)-I_2(\bar{u}_{cono})]\}-$$
$$-\bar{x}_m[I_1(u)-I_1(\bar{u}_{cono})]];$$
$$U_{01}^{0}=2\beta_{s.c}^{2}I_0(\bar{u}_{c11});\quad U_{02}^{0}=2\beta_{cono}^{2}[I_0(u)-I_0(\bar{u}_{cono})];$$
$$U_{01}^{1}=-2\beta_{s.c}(\bar{r}_{s.b}+\beta_{s.c})I_1(\bar{u}_{c11})+2\beta_{s.c}^{2}\alpha'(r/x_T)[uI_1(\bar{u}_{c11})-I_2(\bar{u}_{c11})];$$
$$U_{02}^{1}=2\beta_{cono}^{2}\alpha'(r/x_T)\{u[I_1(u)-I_1(\bar{u}_{c11})]-[I_2(u)-I_2(\bar{u}_{c11})]\}.$$

Para las anotaciones adoptadas en la cola cónica

$$\bar{p}_2^{\dot{\alpha}}=-2\alpha'\cos\gamma\{U_{1p}^{1}+U_{p2}^{1}-[M_\infty^2 r/(x_T\alpha')](U_{01}^{0}+U_{02}^{0})+U_{01}^{1}+U_{02}^{1}\};\qquad(10.210)$$

$$c_{y\,s.c}^{\dot{\alpha}}=-(\pi/S_{máx.t})\int_{x_{c11}}^{x_T}(\bar{p}_2^{\dot{\alpha}}/\cos\gamma)\,r\,dx=$$
$$=(2\alpha'/r_{máx.t}^{2})\Big[\underbrace{\int_{x_{c11}}^{x_T}U_{p1}^{1}r\,dx}_{\bar{U}_{p1}^{1}}+\underbrace{\int_{x_{c11}}^{x_T}U_{p2}^{1}r\,dx}_{\bar{U}_{p2}^{1}}-$$
$$-[M_\infty^2/(x_T\alpha')]\Big(\underbrace{\int_{x_{c11}}^{x_T}U_{01}^{0}r^2\,dx}_{\bar{U}_{01}^{0}}+\underbrace{\int_{x_{c11}}^{x_T}U_{02}^{0}r^2\,dx}_{\bar{U}_{02}^{0}}\Big)+\underbrace{\int_{x_{c11}}^{x_T}U_{01}^{1}r\,dx}_{\bar{U}_{01}^{1}}+\underbrace{\int_{x_{c11}}^{x_T}U_{02}^{1}r\,dx}_{\bar{U}_{02}^{1}}\Big];$$

$$\bar{U}_{p1}^{1}=(1/r_{máx.t}^{2})\int_{x_{c11}}^{x_T}U_{p1}^{1}r\,dx=0{,}02531\int_{\tilde{u}_{c11}}^{\tilde{u}_T}\{\overbrace{\bar{r}[uI_1(\bar{u}_{c11})-I_2(\bar{u}_{c11})]}^{\bar{U}_{p1}^{11}}-$$
$$\overbrace{-9{,}88I_1(\bar{u}_{c11})}^{\bar{U}_{p1}^{11}}\}\,\bar{r}\,d\tilde{u};$$

$$\bar{U}_{p2}^{1}=(1/r_{máx.t}^{2})\int_{x_{c11}}^{x_T}U_{p2}^{1}r\,dx=$$
$$=0{,}01125\int_{\tilde{u}_{c11}}^{\tilde{u}_T}\overbrace{[\bar{r}\{[uI_1(u)-I_1(\bar{u}_{cono})]-[I_2(u)-I_2(\bar{u}_{cono})]\}}^{U_{p2}^{11}}-$$
$$\overbrace{-1{,}925[I_1(u)-I_1(\bar{u}_{cono})]]}^{U_{p2}^{11}}\,\bar{r}\,d\tilde{u};\quad \bar{U}_{01}^{1}=(1/r_{máx.t}^{2})\int_{x_{c11}}^{x_T}U_{01}^{1}r\,dx=$$

$$= 0{,}1067 \int\limits_{\tilde{u}_{\text{c}1\text{l}}}^{\tilde{u}_{\text{T}}} \overbrace{\{-I_1(\bar{u}_{\text{c}1\text{l}}) + 0{,}08381\bar{r}\,[uI_1(\bar{u}_{\text{c}1\text{l}}) - I_2(\bar{u}_{\text{c}1\text{l}})]\}\,\bar{r}}^{U_{01}^{11}}\, d\tilde{u};$$

$$\bar{U}_{02}^{1} = (1/r_{\text{máx.t}}^{2}) \int\limits_{x_{\text{c}1\text{l}}}^{x_{\text{T}}} U_{02}^{1}\, r\, dx =$$

$$= 0{,}00375 \int\limits_{\tilde{u}_{\text{c}1\text{l}}}^{\tilde{u}_{\text{T}}} \overbrace{\{[uI_1(u) - I_1(\bar{u}_{\text{c}1\text{l}})] - [I_2(u) - I_2(\bar{u}_{\text{c}1\text{l}})]\}\,\bar{r}^2}^{\bar{U}_{02}^{11}}\, d\tilde{u};$$

$$\bar{U}_{01}^{0} = [1/(r_{\text{máx.t}}^{2} x_{\text{T}})] \int\limits_{x_{\text{c}1\text{l}}}^{x_{\text{T}}} U_{01}^{0} r^2\, dx = 0{,}004871 \int\limits_{\tilde{u}_{\text{c}1\text{l}}}^{u_{\text{T}}} \overbrace{I_0(\bar{u}_{\text{c}1\text{l}})\,\bar{r}^2}^{\bar{U}_{01}^{01}}\, d\tilde{u};$$

$$\bar{U}_{02}^{0} = [1/(r_{\text{máx.t}}^{2})] \int\limits_{x_{\text{c}1\text{l}}}^{x_{\text{T}}} U_{02}^{0} r^2\, dx = 0{,}02165 \int\limits_{\tilde{u}_{\text{c}1\text{l}}}^{\tilde{u}_{\text{T}}} \overbrace{[I_0(u) - I_0(\bar{u}_{\text{cono}})]\,\bar{r}^2}^{\bar{U}_{02}^{01}}\, d\tilde{u};$$

$$c_{y\,\text{s.c}}^{\dot{\bar{\alpha}}} = 2\alpha'\,[U_{p1}^{1} + U_{p2}^{1} - (\text{M}_{\infty}^{2}/\alpha')\,(\bar{U}_{01}^{0} + \bar{U}_{01}^{0}) + \bar{U}_{01}^{1} + \bar{U}_{02}^{1}]. \qquad (10.211)$$

Calculamos: $\bar{r} = r/r_{\text{máx.t}} = 0{,}2598\,(11{,}93 - \tilde{u})$; $\tilde{u} = x/(\alpha' r_{\text{máx.t}})$; $u = x/(\alpha' r) = \tilde{u}/\bar{r}$; $\bar{u}_{\text{c}1\text{l}} = (\bar{u} - 7{,}083)/\bar{r}$; $\bar{u}_{\text{cono}} = (\tilde{u} - 4{,}774)/\bar{r}$; $\tilde{u}_{\text{T}} = 9{,}238$; $\tilde{u}_{\text{c}1\text{l}} = 8{,}083$ y determinamos las funciones subintegrales $\bar{U}_{p1}^{11}$, $\bar{U}_{p2}^{11}$, $\bar{U}_{01}^{11}$, $\bar{U}_{02}^{11}$, $\bar{U}_{01}^{01}$, $\bar{U}_{02}^{01}$ en el intervalo $\tilde{u}_{\text{c}1\text{l}} - \tilde{u}_{\text{T}} = 8{,}083 \ldots 9{,}238$ y con el paso $\Delta\tilde{u} = 0{,}231$. Mediante la posterior integración hallamos $\bar{U}_{p1}^{1} = -0{,}08964$; $\bar{U}_{p2}^{1} = 0{,}03058$; $\bar{U}_{01}^{1} = -0{,}05889$; $\bar{U}_{02}^{1} = 0{,}1203$; $\bar{U}_{01}^{0} = 0{,}00442$; $\bar{U}_{02}^{0} = 0{,}01587$.

La correspondiente derivada para el sector de cola $c_{y\,\text{s.c}}^{\dot{\bar{\alpha}}} = -0{,}1542$, mientras que la derivada de todo el cuerpo $c_{y}^{\dot{\bar{\alpha}}} = c_{y\,\text{cono}}^{\dot{\bar{\alpha}}} + c_{y\,\text{cil}}^{\dot{\bar{\alpha}}} + c_{y\,\text{s.c}}^{\dot{\bar{\alpha}}} = 0{,}6082$.

La derivada para el cono de la nariz

$$m_{z\,\text{cono}}^{\dot{\bar{\alpha}}} = [\pi/(S_{\text{máx.t}} x_{\text{T}})] \int\limits_{0}^{x_{\text{cono}}} (\bar{p}_2^{\dot{\bar{\alpha}}}/\cos\gamma)\, rx\, dx =$$

$$= -4\beta_{\text{cono}}^{2}\alpha'\,\{(3/4)\,\alpha'\,(x_{\text{cono}}^{2}/x_{\text{T}}^{2})\,[u_{\text{cono}} I_1(u_{\text{cono}}) - I_2(u_{\text{cono}})] -$$
$$- (1/3)\,(x_{\text{m}}/x_{\text{T}})\,(x_{\text{cono}}/x_{\text{T}})\,(1/\beta_{\text{cono}})\, I_1(u_{\text{cono}}) - (\text{M}_{\infty}^{2}/\alpha')\,(x_{\text{cono}}^{2}/x_{\text{T}}^{2})\, I_0(u_{\text{cono}})\; 0{,}25 +$$
$$+ \alpha'\,(x_{\text{cono}}^{2}/x_{\text{T}}^{2})\,[u_{\text{cono}} I_1(u_{\text{cono}}) - I_2(u_{\text{cono}})]\; 0{,}25\} = -0{,}1612.$$

Para el sector cilíndrico

$$m_{z\,\text{cil}}^{\dot{\bar{\alpha}}} = [\pi/(S_{\text{máx.t}})] \int_{x_{\text{cono}}}^{x_{\text{cil}}} (\bar{p}_2^{\dot{\bar{\alpha}}}/\cos\gamma)\, rx\, dx =$$

$$= -4\beta^2_{\text{cono}}\alpha''(r_{\text{máx.t}}/x_{\text{T}}) \Big\{ \alpha' \int_{\tilde{u}_{\text{cono}}}^{\tilde{u}_{\text{cil}}} \underbrace{\overbrace{[3\alpha'(r_{\text{máx.t}}/x_{\text{T}})\{[uI_1(u) - I_1(\bar{u}_{\text{cono}})] - [I_2(u) - I_2(\tilde{u}_{\text{cono}})]\} - (x_{\text{m}}/x_{\text{T}})[I_1(u) - I_1(\bar{u}_{\text{cono}})]\tilde{u}}^{B_m^{p1}}\, d\tilde{u}}_{B_m^{p}} -$$

$$- (\text{M}^2_\infty r_{\text{máx.t}}/x_{\text{T}}) \underbrace{\int_{\tilde{u}_{\text{cono}}}^{\tilde{u}_{\text{cil}}} \overbrace{[I_0(u) - I_0(\bar{u}_{\text{cono}})]\tilde{u}}^{B_{0m}^{01}}\, d\tilde{u}}_{B_{0m}^{0}} +$$

$$+ (\alpha'' r_{\text{máx.t}}/x_{\text{T}}) \underbrace{\int_{\tilde{u}_{\text{cono}}}^{\tilde{u}_{\text{cil}}} \overbrace{\{[uI_1(u) - I_1(\bar{u}_{\text{cono}})] - [I_2(u) - I_2(\bar{u}_{\text{cono}})]\}\tilde{u}}^{B_{1m}^{01}}\, d\tilde{u}}_{B_{1m}^{0}} \Big\} =$$

$$= -4\beta^2_{\text{cono}}\alpha''(r_{\text{máx.t}}/x_{\text{T}})[\alpha' B_m^p - (\text{M}^2_\infty r_{\text{máx.t}}/x_{\text{T}}) B_{0\text{M}}^0 + (\alpha'' r_{\text{máx.t}}) B_{1m}^0]. \quad (10.212)$$

Determinamos las funciones subintegrales (en el intervalo $\tilde{u}_{\text{cono}} - \tilde{u}_{\text{cil}} = 5{,}774 \ldots 8{,}083$ con paso $\Delta\tilde{u} = 0{,}462$) B_m^{p1}, B_{0m}^{01}, B_{1m}^{01}.

Aplicando la fórmula del trapecio realizamos la integración numérica $B_m^p = 13{,}6$; $B_{0m}^0 = 20{,}94$; $B_{1m}^0 = 196{,}2$. Según estos datos hallamos $m_{z\,\text{cil}}^{\dot{\bar{\alpha}}} = -0{,}2386$.

Para la cola cónica

$$m_{z\,\text{s.c}}^{\dot{\bar{\alpha}}} = [\pi/(S_{\text{máx.t}} x_{\text{T}})] \int_{x_{\text{cil}}}^{x_{\text{T}}} (\bar{p}_2^{\dot{\bar{\alpha}}}/\cos\gamma)\, rx\, dx =$$

$$= -2\alpha''(r_{\text{máx.t}}/x_{\text{T}})[\bar{U}^1_{p1m} + \bar{U}^1_{p2m} - (\text{M}^2_\infty/\alpha')(\bar{U}^0_{01m} + \bar{U}^0_{02m}) + \bar{U}^1_{01m} + \bar{U}^1_{02m}], \quad (10.213)$$

donde

$$\bar{U}^1_{p1m} = 0{,}02531 \int_{\tilde{u}_{\text{cil}}}^{\tilde{u}_{\text{T}}} \underbrace{\{\bar{r}[u\, I_1(\bar{u}_{\text{cil}}) - I_2(\bar{u}_{\text{cil}})] - 9{,}88\, I_1(\bar{u}_{\text{cil}})\}\bar{r}\tilde{u}}_{\bar{U}^{11}_{p1m}}\, d\tilde{u};$$

$$\overline{U}^1_{p2m}=0{,}01125\int\limits_{u_{c11}}^{\tilde{u}_T}\underbrace{[\bar{r}\{u[I_1(u)-I_1(\bar{u}_{cono})]-[I_2(u)-I_2(\bar{u}_{cono})]\}-1{,}925[I_1(u)-I_1(\bar{u}_{cono})]]\,\bar{r}\tilde{u}\,d\tilde{u}}_{\overline{U}^{11}_{p2m}};$$

$$\overline{U}^1_{01m}=0{,}1067\int\limits_{\tilde{u}_{c11}}^{\tilde{u}_T}\underbrace{\{-I_1(\bar{u}_{c11})+0{,}08381\,\bar{r}\,[uI_1\ (\bar{u}_{c11})-I_2(\bar{u}_{c11})]\}\,\bar{r}\,\tilde{u}d\tilde{u}}_{\overline{U}^{11}_{01m}};$$

$$\overline{U}^1_{02m}=0{,}0037\int\limits_{\tilde{u}_{c11}}^{\tilde{u}_T}\underbrace{\{u[I_1(u)-I_1(\bar{u}_{c11})]-[I_2(u)-I_2(\bar{u}_{c11})]\}\,\bar{r}^2\,\tilde{u}d\tilde{u}}_{\overline{U}^{11}_{02m}};$$

$$\overline{U}^0_{01m}=0{,}004871\int\limits_{\tilde{u}_{c11}}^{\tilde{u}_T}\underbrace{I_0(\bar{u}_{c11})\,\bar{r}^2\,\tilde{u}d\tilde{u}}_{\overline{U}^{01}_{01m}};\quad \overline{U}^0_{02m}=0{,}02165\int\limits_{\tilde{u}_{c11}}^{\tilde{u}_T}\underbrace{[I_0(u)-I_0(\bar{u}_{cono})]\,\bar{r}^2\tilde{u}\,d\tilde{u}}_{U^{01}_{02m}}.$$

Calculamos las funciones subintegrales $\overline{U}^{11}_{p1m}$, $\overline{U}^{11}_{p2m}$, $\overline{U}^{11}_{01m}$, $\overline{U}^{11}_{02m}$, $\overline{U}^{01}_{01m}$, $\overline{U}^{01}_{02m}$ en el cilindro ($\tilde{u}_{c11}-\tilde{u}_T=8{,}083\ \ldots\ 9{,}238$; el paso $\Delta\tilde{u}=0{,}231$). Con los valores hallados de estas funciones, empleando la fórmula de los trapecios, determinamos: $\overline{U}^1_{p1m}=-0{,}7854$; $\overline{U}^1_{p2m}=0{,}2648$; $\overline{U}^1_{01m}=-0{,}5169$; $\overline{U}^1_{02m}=1{,}04$; $\overline{U}^0_{01m}=0{,}03868$; $\overline{U}^0_{02m}=0{,}136$.

La correspondiente derivada para la sección de cola $m^{\dot{\bar{\alpha}}}_{z\,s.c}=0{,}1503$ y para todo el cuerpo $m^{\dot{\bar{\alpha}}}_{z\,m}=m^{\dot{\bar{\alpha}}}_{z\,cono}+m^{\dot{\bar{\alpha}}}_{z\,cil}+m^{\dot{\bar{\alpha}}}_{z\,s.c}=-0{,}2495$; $m^{\dot{\bar{\alpha}}}_z=c^{\dot{\bar{\alpha}}}_y(x_m/x_T)+m^{\dot{\bar{\alpha}}}_{z\,m}=$ $=0{,}1306$.

10.56. En el cono, la derivada $\bar{p}^{\alpha}_2=-4\alpha'\beta^2_{cono}\ I_1\ (u_{cono})\cos\gamma\ [u_{cono}=$ $=x_{cono}/(\alpha' r_{cono})=1/(\alpha'\beta_{cono})]$, en tanto que las correspondientes derivadas de los coeficientes de la fuerza normal y del momento de cabeceo

$$c^{\alpha}_y=-(\pi/S_{máx.t})\int\limits_0^{x_{cono}}(\bar{p}^{\alpha}_2/\cos\gamma)\,r\,dx=$$

$$=[4\alpha'\beta^3_{cono}I_1(\bar{u}_{cono})\,(x^2_{cono}/2)/r^2_{máx.t}]=2\alpha'\beta_{cono}I_1(u_{cono});\tag{10.214}$$

$$m^{\alpha}_z=[\pi/(S_{máx.t})]\int\limits_0^{x_{cono}}(\bar{p}^{\alpha}_2/\cos\gamma)\,rx\,dx=-(4/3)\,\alpha'\beta_{cono}I_1(u_{cono})$$

$$[I_1(u_{cono})=\sqrt{u^2_{cono}-1}].\tag{10.215}$$

Calculamos: $\alpha'=\sqrt{M^2_\infty-1}=1{,}732$; $u_{cono}=1/(\alpha'\beta_{cono})=5{,}774$; $I_1(u_{cono})=5{,}687$; $c^{\alpha}_y=1{,}97$; $m^{\alpha}_z=-1{,}313$; $c_p=-m^{\alpha}_z/c^{\alpha}_y=0{,}6667$.

Como centro de reducción tomamos un punto situado en el fondo a una distancia de la punta $x=x_c=5$ m; $m^{\alpha}_{z\,cono}=c^{\alpha}_y(x/x_c)+m^{\alpha}_z=0{,}657$.

Analicemos las derivadas $c_y^{\omega_z}$ y $m_z^{\omega_z}$ que se determinan con los valores de $p_2^{\omega_z}$ (10.144). En esta fórmula hay que tomar

$\overline{U}_1^{n} = 2\beta^2_{\text{cono}} \{3\alpha' (r/x_c) [u_{\text{cono}} I_1 (\text{cono}) - I_2 (u_{\text{cono}})] - I_1 (u_{\text{cono}})]\} \quad [u_{\text{cono}} = 1/(\alpha'\beta_{\text{cono}})]$.

Las funciones $I_1 (u_{\text{cono}})$ e $I_2 (u_{\text{cono}})$ se calculan por (10.131″) para $u = u_{\text{cono}}$. De (10.198) y (10.200), obtenemos

$$c_y^{\omega_z} = -(\pi/S_{\text{máx.t}}) \int_0^{x_c} (\overline{p}_2^{\omega_z}/\cos\gamma)\, r\, dx = -2\alpha' A;$$

$$A = \beta^2_{\text{cono}} \{2\alpha'\beta_{\text{cono}} [u_{\text{cono}} I_1 (u_{\text{cono}}) - I_2 (u_{\text{cono}})] - I_1 (u_{\text{cono}})\};$$

$$m_z^{\omega_z} = [\pi/(S_{\text{máx. t}} x_c)] \int_0^{x_c} (\overline{p}_2^{\omega_z}/\cos\gamma)\, rx\, dx = -2\alpha' A_m;$$

$$A_m = \beta_{\text{cono}} \{(3/2)\, \alpha'\beta_{\text{cono}} [u_{\text{cono}} I_1 (u_{\text{cono}}) - I_2 (u_{\text{cono}})] - (2/3)\, I_1 (u_{\text{cono}})\}.$$

Realizamos los cálculos: $I_2 (u_{\text{cono}}) = 17{,}64$; $A = -0{,}04218$; $c_y^{\omega_z} = -0{,}1461$; $A_m = 0{,}01576$; $m_z^{\omega_z} = -0{,}05459$; $c_p = -m_z^{\omega_z}/c_y^{\omega_z} = -0{,}3736$.

Para el centro de reducción situado en el fondo, $m_{z\,\text{cono}}^{\omega_z} = c_y^{\omega_z} + m_z^{\omega_z} = -0{,}2007$. En la expresión $p_2^{\dot{\overline{\alpha}}}$ (10.204) para el cono entran las funciones

$F_1^{p} = 2\beta^2_{\text{cono}}\alpha_0 \{3\alpha' r [u_{\text{cono}} I_1 (u_{\text{cono}}) - I_2 (u_{\text{cono}})] - x_m I_1 (u_{\text{cono}})\}$;

$F_0^{0} = 2\beta^2_{\text{cono}}\alpha_0 V_\infty I_0 (u_{\text{cono}})$; $F_1^{0} = 2\beta^2_{\text{cono}}\alpha_0 V_\infty \alpha' r \times$
$\times [u_{\text{cono}} I_1 (u_{\text{cono}}) - I_2 (u_{\text{cono}})]$.

Aquí los parámetros $I_0 (u_{\text{cono}})$, $I_1 (u_{\text{cono}})$, $I_2 (u_{\text{cono}})$ se calculan por (10.131″) para $u = u_{\text{cono}}$, en tanto que la derivada $p_2^{\dot{\overline{\alpha}}}$ se calcula en correspondencia con (10.204) sustituyendo x_T por x_{cono}. La respectiva derivada (10.206)

$$c_{y\,\text{cono}}^{\dot{\overline{\alpha}}} = -(\pi/S_{\text{máx. t}}) \int_0^{x_c} (\overline{p}_2^{\dot{\overline{\alpha}}}/\cos\gamma)\, r\, dx =$$

$$= 4\beta^2_{\text{cono}}\alpha' \{\{\alpha' [u_{\text{cono}} I_1 (u_{\text{cono}}) - I_2 (u_{\text{cono}})] - (0{,}5/\beta_{\text{cono}})\, I_1 (u_{\text{cono}})\} - [M_\infty^2/(3\alpha')]\, I_0 (u_{\text{cono}}) + (1/3)\, \alpha' [u_{\text{cono}} I_1 (u_{\text{cono}}) - I_2 (u_{\text{cono}})]\},$$

mientras que la derivada

$$m_z^{\dot{\overline{\alpha}}} = -4\beta^2_{\text{cono}}\alpha' \{(3/4)\, \alpha' [u_{\text{cono}} I_1 (u_{\text{cono}}) - I_2 (u_{\text{cono}})] - (1/3)\, (1/\beta_{\text{cono}})\, I_1 (u_{\text{cono}}) - 0{,}25\, (M_\infty^2/\alpha')\, I_0 (u_{\text{cono}}) + 0{,}25\alpha' [u_{\text{cono}} I_1 (u_{\text{cono}}) - I_2 (u_{\text{cono}})]\}.$$

Calculamos: $I_0 (u_{\text{cono}}) = 2{,}439$; $c_y^{\dot{\overline{\alpha}}} = 0{,}3314$; $m_z^{\dot{\overline{\alpha}}} = -0{,}4127$; $c_p = -m_z^{\dot{\overline{\alpha}}}/c_y^{\dot{\overline{\alpha}}} = 1{,}245$. Consideremos como centro de reducción un punto situado en el fondo:

$$m_{z\,\text{cono}}^{\dot{\overline{\alpha}}} = c_y^{\dot{\overline{\alpha}}} (x_m/x_c) + m_z^{\dot{\overline{\alpha}}} = -0{,}0813.$$

10.57. Partiendo de las fórmulas (10.165) y (10.166) calculamos

$$\bar{p}_2^\alpha = -2\alpha' \cos\gamma U_1;\quad U_1 = (1/\lambda^2_{\text{máx. t}})\{2I_1(u) - (6\alpha' r/x_{\text{máx. t}})[uI_1(u) - I_2(u)] +$$
$$+ (3\alpha'^2 r^2/x^2_{\text{máx. t}})[u^2 I_1(u) - 2uI_2(u) + I_3(u)]\} =$$
$$= (1/\lambda^2_{\text{máx. t}})\{2I_1(u) - (6\alpha' r_{\text{máx. t}})/x_{\text{máx. t}}\bar{r}[uI_1(u) - I_2(u)] +$$
$$+ (3\alpha'^2 r^2_{\text{máx. t}}/x^2_{\text{máx. t}})\bar{r}^2[u^2 I_1(u) - 2uI_2(u) + I_3(u)]\}$$

y calculamos las derivadas:

$$c_y^\alpha = -(\pi/S_{\text{máx. t}})\int_0^{x_c}(\bar{p}_2^\alpha/\cos\gamma)\, r\, dx = 2\alpha'\bar{U}_1; \tag{10.216}$$

$$\bar{U}_1 = \alpha'\int_0^{\tilde{u}_{\text{cono}}} U_1\bar{r}\, d\tilde{u} = (\alpha'/\lambda^2_{\text{máx. t}})\int_0^{u_{\text{cono}}}\{2I_1(u) - (3\alpha'/\lambda_{\text{máx. t}})[uI_1(u) - I_2(u)]\bar{r} +$$
$$+ [3\alpha'^2/(4\lambda^2_{\text{máx. t}})]\bar{r}^2[u^2 I_1(u) - 2uI_2(u) + I_3(u)]\}\bar{r}\, d\tilde{u};$$

$$m_z^\alpha = [\pi/(S_{\text{máx. t}}x_c)]\int_0^{x_c}(\bar{p}_2^\alpha/\cos\gamma)\, rx\, dx = -2\alpha'\bar{U}_2; \tag{10.217}$$

$$\bar{U}_2 = \alpha'^2(r_{\text{máx. t}}/x_c)\int_0^{\tilde{u}_{\text{cono}}} U_1\bar{r}\tilde{u}\, d\tilde{u} =$$

$$= [\alpha'^2/(2\lambda^2_{\text{máx. t}}\lambda_{\text{cono}})]\int_0^{\tilde{u}_{\text{cono}}}\{2I_1(u) - (3\alpha'/\lambda_{\text{máx. t}})\bar{r}[uI_1(u) - I_2(u)] +$$
$$+ 3\alpha'^2/(4\lambda^2_{\text{máx. t}})]\bar{r}^2[u^2 I_1(u) - 2uI_2(u) + I_3(u)]\}\bar{r}\tilde{u}\, d\tilde{u};$$

$$u = x/(\alpha' r);\quad \tilde{u} = x/(\alpha' r_{\text{máx. t}});\quad \tilde{u}_{\text{cono}} = x_c/(\alpha' r_{\text{máx. t}}).$$

Las funciones $I_1(u)$, $I_2(u)$, $I_3(u)$ se determinan por (10.131″).
Efectuemos algunos cálculos: la longitud de la sección de nariz

$$\bar{x}^2 - 2\bar{x} + \bar{r} = 0;\quad \bar{x} = 1 + \sqrt{1 - \bar{r}};$$

$$\bar{x}_c = x_c/x_{\text{máx. t}} = 1 + \sqrt{1 - 0{,}41^2} = 1{,}6;\quad 8/x_{\text{máx. t}} = 1{,}6;\quad x_{\text{máx. t}} = 5\ \text{m};$$

el alargamiento de la sección de nariz y del cuerpo

$$\lambda_{\text{cono}} = x_c/(2r_{\text{máx. t}}) = 8;\quad \lambda_{\text{máx. t}} = x_{\text{máx. t}}/(2r_{\text{máx. t}}) = 5.$$

A continuación determinamos

$$\bar{U}_1 = 0{,}1386\int_0^{\tilde{u}_{\text{cono}}}\{I_1(u) - 0{,}5196[uI_1(u) - I_2(u)]\bar{r} +$$
$$+ 0{,}045\bar{r}^2[u^2 I_1(u) - 2uI_2(u) + I_3(u)]\}\bar{r}\, du;$$

$$\overline{U}_2 = 0{,}015 \int\limits_0^{\tilde{u}_{\text{cono}}} \{I_1(u) - 0{,}5196\,[uI_1(u) - I_2(u)]\,\overline{r} +$$

$$+ 0{,}045\overline{r}^2\,[u^2I_1(u) - 2uI_2(u) + I_3(u)]\}\,\overline{r}\tilde{u}\,d\tilde{u}.$$

Estas dos integrales se calculan numéricamente en el intervalo desde 0 hasta $\tilde{u}_{\text{cono}} = 8/(1{,}732\cdot 0{,}5) = 9{,}238$ tomando en consideración que $u = \tilde{u}/r$:

$$\overline{r} = r/r_{\text{máx. t}} = (x/x_{\text{máx. t}})\,(2 - x/x_{\text{máx. t}});$$

$$x/x_{\text{máx. t}} = [x/(\alpha' r_{\text{máx. t}})]\,(\alpha' r_{\text{máx. t}}/x_{\text{máx. t}}) = 0{,}1732\tilde{u};$$

$$u_{x=0} = x/(\alpha' r)_{x=0} = (1/\alpha')\,\lambda_{\text{máx. t}} = 2{,}887.$$

Como resultado obtenemos los valores de $\overline{U}_1 = 0{,}245$; $\overline{U}_2 = -0{,}9338$ con los cuales determinamos las derivadas: $c_y^\alpha = 2\alpha'\overline{U}_1 = 1{,}151$; $m_z^\alpha = -2\alpha'\overline{U}_2 = -0{,}3235$.

El correspondiente coeficiente del centro de presión $c_{\text{p}} = -m_z^\alpha/c_y^\alpha = 0{,}2811$.

Efectuamos el recálculo en el nuevo centro de reducción ($x_{\text{m}} = 5m$) de la derivada m_z^α:

$$m_{z\text{m}}^\alpha = c_y\,(x_{\text{m}}/x_{\text{cono}}) + m_z^\alpha = 1{,}043.$$

Analizamos las derivadas $c_y^{\omega_z}$ y $m_z^{\omega_z}$. Considerando que en (10.167) $\dot{m}_\Omega^{\text{cil}} = 0$ y tomando $U = U_1^{\text{n}}/x_{\text{cono}}$, obtenemos $\overline{p}_2^{\omega_z} = -2\alpha'\cos\gamma U$. Aquí, en correspondencia con (10.168),

$$U = [1/(\lambda_{\text{máx.t}}\,\lambda_{\text{cono}})]\,\{(3\alpha'/\lambda_{\text{máx.t}})\,\overline{r}(1 + \overline{x}_{\text{m}}) \times$$
$$\times [uI_1(u) - I_2(u)] - [3/(4\lambda_{\text{máx.t}}^2)]\,\alpha'^2\,(4 + \overline{x}_{\text{m}})\,r^2\,[u^2I_1(u) -$$
$$- 2uI_2(u) + I_3(u)] + [5/(8\lambda_{\text{máx.t}}^3)]\,\alpha'^3\overline{r}^3\,[u^3I_1(u) - 3u^2I_2(u) +$$
$$+ 3uI_3(u) - I_4(u)] - 2\overline{x}_{\text{m}}I_1(u)\}\quad (\overline{r} = r/r_{\text{máx.t}};\ \overline{x} = x_{\text{m}}/x_{\text{máx.t}}).$$

Las derivadas

$$c_y^{\omega_z} = -(\pi/S_{\text{máx. t}}) \int\limits_0^{x_{\text{c}}} (\overline{p}_2^{\omega_z}/\cos\gamma)\,r\,dx = (2\alpha'/r_{\text{máx. t}}^2) \int\limits_0^{x_{\text{c}}} U^0 r\,dx = 2\alpha'\overline{U}_1; \quad (10.218)$$

$$\overline{U}_1 = \left[\alpha'/(\lambda_{\text{máx. t}}\lambda_{\text{cono}})\right] \int\limits_0^{\tilde{u}_{\text{cono}}} \{(3\alpha'/\lambda_{\text{máx. t}})\,(1 + \overline{x}_{\text{m}})\,\overline{r}\,[uI_1(u) - I_2(u)] -$$

$$-[3/(4\lambda_{\text{máx. t}}^2)]\,\alpha'^2\,(4 + \overline{x}_{\text{m}})\,\overline{r}^2\,[u^2I_1(u) - 2uI_2(u) + I_3(u)] +$$

$$+ [5/(8\lambda_{\text{máx. t}}^3)]\,\alpha'^3\overline{r}^3\,[u^3I_1(u) - 3u^2I_2(u) + 3uI_3(u) - I_4(u)] - 2\overline{x}_{\text{m}}I_1(u)\}\,\overline{r}\,d\tilde{u}; \quad (10.219)$$

$$m_z^{\omega_z} = [\pi/(S_{\text{máx. t}}/x_{\text{c}})] \int\limits_0^{x_{\text{c}}} (\overline{p}_z^{\omega_z}/\cos\gamma)\,rx\,dx =$$

$$= -[2\alpha'/(r_{\text{máx. t}}^2 x_{\text{c}})] \int\limits_0^{\tilde{u}_{\text{cono}}} U^0 rx\,dx = -2\alpha'\overline{U}_2; \quad (10.220)$$

$$\overline{U}_2 = [\alpha'^2/(2\lambda_{\text{máx. t}}\lambda^2_{\text{cono}})] \int_0^{\tilde{u}_{\text{cono}}} \{(3\alpha'/\lambda_{\text{máx. t}})(1+\overline{x}_{\text{m}})\overline{r}[uI_1(u) - I_2(u)] -$$

$$- [3/(4\lambda^2_{\text{máx. t}})]\alpha'^2(4+\overline{x}_{\text{m}})\overline{r}^2[u^2I_1(u) - 2uI_2(u) + I_3(u)] +$$

$$+ [5/(8\lambda^3_{\text{máx. t}})]\alpha'^3\overline{r}^3[u^3I_1(u) - 3u^2I_2(u) + 3uI_3(u) - I_4(u)] -$$

$$- 2\overline{x}_{\text{m}}I_1(u)\}\overline{r}\tilde{u}\, d\tilde{u}. \tag{10.221}$$

Las funciones $I_1(u)$, $I_2(u)$, $I_3(u)$, $I_4(u)$ se han aducido más arriba [véase (10.131″)].

Realicemos los cálculos

$$\overline{U}_1 = 0{,}0866 \int_0^{\tilde{u}_{\text{cono}}} \underbrace{\{1{,}039\overline{r}[uI_1(u) - I_2(u)] - 0{,}225\overline{r}^2[u^2I_1(u) - 2uI_2(u) + I_3(u)] + 0{,}01299\overline{r}^3[u^3I_1(u) - 3u^2I_2(u) + 3uI_3(u) - I_4(u)] - I_1(u)\}}_{\overline{U}'_1}\overline{r}\, d\tilde{u};$$

$$\overline{U}_2 = 0{,}009374 \int_0^{\tilde{u}_{\text{cono}}} \underbrace{\{1{,}039\overline{r}[uI_1(u) - I_2(u)] - 0{,}225\overline{r}^2[u^2I_1(u) - 2uI_2(u) + I_3(u)] + 0{,}01299\overline{r}^3[u^3I_1(u) - 3u^2I_2(u) + 3uI_3(u) - I_4(u)] - I_1(u)\}}_{\overline{U}'_2}\overline{r}\tilde{u}\, d\tilde{u}.$$

Realizamos el cálculo de las funciones subintegrales $\overline{U}'_1$, $\overline{U}'_2$ para el intervalo $0 - \tilde{u}_{\text{cono}} = 0 \ldots 9{,}238$ y con el paso $\widetilde{\Delta u} = 0{,}9238$. Para la integración numérica aplicamos la fórmula del trapecio: $\overline{U}_1 = 0{,}1009$; $\overline{U}_2 = 0{,}1216$. Partiendo de estos valores hallamos $c_y^{\omega_z} = 2\alpha'\overline{U}_1 = 0{,}3495$; $m_z^{\omega_z} = -2\alpha'\overline{U}_1 = -0{,}4212$ y el correspondiente coeficiente del centro de presión $c_{\text{p}} = -m_z^{\omega_z}/c_y^{\omega_z} = 1{,}205$.

Efectuamos el recálculo de la derivada $m_z^{\omega_z}$ para el centro de presión en el fondo ($x_{\text{m}} = 5$ m). Entonces $m_{z\text{m}}^{\omega_z} = c_y^{\omega_z}/(x_{\text{m}}/x_{\text{c}}) + m_z^{\omega_z} = -0{,}2028$. De acuerdo con (10.178) la derivada

$$\overline{p}_2^{\dot{\alpha}} = -(2\alpha'\cos\gamma/\alpha_0)\{(1/x_{\text{c}})F_1^p - [\text{M}^2_\infty r/(x_{\text{c}}\alpha'V_\infty)]F_0^0 + [1/(x_{\text{c}}V_\infty)]F_1^0\},$$

donde F_0^0, F_1^0, F_1^p son magnitudes que se determinan con las relaciones (10.179) y (10.180) a condición de que $u_2 = u$; $\overline{u}_2 = 0$; arch $\overline{u}_2 = 0$.

La correspondiente derivada

$$c_y^{\dot{\alpha}} = -(\pi/S_{\text{máx. t}})\int_0^{x_{\text{c}}} (\overline{p}_2^{\dot{\alpha}}/\cos\gamma)\, r\, dx = 2\alpha'(\overline{F}_1^p - \overline{F}_0^0 + \overline{F}_1^0), \tag{10.222}$$

donde

$$\overline{F}_1^p = [\alpha'/(\lambda_{\text{máx. t}}\lambda_{\text{cono}})] \int\limits_0^{\tilde{u}_{\text{cono}}} \{(6\alpha' r_{\text{máx. t}}/x_{\text{máx. t}})(1+\overline{x}_{\text{m}})\overline{r}\,[uI_1(u)-I_2(u)]-$$

$$-3(4+\overline{x}_{\text{m}})(\alpha'^2 r^2_{\text{máx. t}}/x^2_{\text{máx. t}})\overline{r}^2\,[u^2 I_1(u)-2uI_2(u)+I_3(u)]+$$

$$+5(\alpha'^3 r^3_{\text{máx. t}}/x^3_{\text{máx. t}})\overline{r}^3\,[u^3 I_1(u)-3u^2 I_2(u)+3uI_3(u)-I_4(u)]-2\overline{x}_{\text{m}} I_1(u)\}\,\overline{r}\,d\tilde{u};$$

$$\overline{F}_0^0 = [\mathrm{M}_\infty^2/(2\lambda^2_{\text{máx. t}}\lambda_{\text{cono}})] \int\limits_0^{\tilde{u}_{\text{cono}}} \{2I_0(u)-(6\alpha' r_{\text{máx. t}}/x_{\text{máx. t}})\overline{r}\,[uI_0(u)-I_1(u)]+$$

$$+(3\alpha' r^2_{\text{máx. t}}/x^2_{\text{máx. t}})\overline{r}^2\,[u^2 I_0(u)-2uI_1(u)+I_2(u)]\}\,\overline{r}^2\,d\tilde{u};$$

$$\overline{F}_1^0 = [\alpha'/(\lambda_{\text{máx. t}}\lambda_{\text{cono}})] \int\limits_0^{\tilde{u}_{\text{cono}}} \{(2\alpha' r_{\text{máx. t}}/x_{\text{máx. t}})\overline{r}\,[uI_1(u)-I_2(u)]-$$

$$-(3\alpha'^2 r^2_{\text{máx. t}}/x^2_{\text{máx. t}})\overline{r}^2\,[u^2 I_1(u)-2uI_2(u)+I_3(u)]+$$

$$+(\alpha'^3 r^3_{\text{máx. t}}/x^3_{\text{máx. t}})\overline{r}^3\,[u^3 I_1(u)-3u^2 I_2(u)+3uI_3(u)-I_4(u)]\}\,\overline{r}\,d\tilde{u}.$$

La derivada

$$m_z^{\dot{\overline{\alpha}}} = [\pi/(S_{\text{máx. t}}x_{\text{c}})] \int\limits_0^{x_{\text{c}}} (\overline{p}_2^{\dot{\overline{\alpha}}}/\cos\gamma)\,rx\,dx = -2\alpha'\,(\overline{\overline{F}}_1^p-\overline{\overline{F}}_0^0-\overline{\overline{F}}_1^0), \qquad (10.223)$$

donde

$$\overline{\overline{F}}_1^p = [\alpha'^2/(2\lambda_{\text{máx. t}}\lambda^2_{\text{cono}})] \int\limits_0^{\tilde{u}_{\text{cono}}} \{(6\alpha' r_{\text{máx. t}}/x_{\text{máx. t}})(1+\overline{x}_{\text{m}})\overline{r}\,[uI_1(u)-I_2(u)]-$$

$$-3(4+\overline{x}_{\text{m}})(\alpha'^2 r^2_{\text{máx. t}}/x^2_{\text{máx. t}})\overline{r}^2\,[u^2 I_1(u)-2uI_2(u)+I_3(u)]+$$

$$+5(\alpha'^3 r^3_{\text{máx. t}}/x^3_{\text{máx. t}})\overline{r}^3\,[u^3 I_1(u)-3u^2 I_2(u)+3uI_3(u)-I_4(u)]-2\overline{x}_{\text{m}} I_1(u)\}\,\overline{r}\tilde{u}\,d\tilde{u};$$

$$\overline{\overline{F}}_0^0 = [\mathrm{M}_\infty^2\alpha'/(4\lambda^2_{\text{máx. t}}\lambda^2_{\text{cono}})] \int\limits_0^{\tilde{u}_{\text{cono}}} \{2I_0(u)-(6\alpha' r_{\text{máx. t}}/x_{\text{máx. t}})\overline{r}\,[uI_0(u)-I_1(u)]+$$

$$+(3\alpha'^2 r^2_{\text{máx. t}}/x^2_{\text{máx. t}})\overline{r}^2\,[uI_0(u)-2uI_1(u)+I_2(u)]\}\,\overline{r}^2\tilde{u}\,d\tilde{u};$$

$$\overline{\overline{F}}_1^0 = [\alpha'^2/(2\lambda_{\text{máx. t}}\lambda^2_{\text{cono}})] \int\limits_0^{\tilde{u}_{\text{cono}}} \{(2\alpha' r_{\text{máx. t}}/x_{\text{máx. t}})\overline{r}\,[uI_1(u)-I_2(u)]-$$

$$-(3\alpha'^2 r^2_{\text{máx. t}}/x^2_{\text{máx. t}})\overline{r}^2\,[u^2 I_1(u)-2uI_2(u)+I_3(u)]+$$

$$+(\alpha'^3 r^3_{\text{máx. t}}/x^3_{\text{máx. t}})\overline{r}^3\,[u^3 I_1(u)-3u^2 I_2(u)+3uI_3(u)-I_4(u)]\}\,\overline{r}\tilde{u}\,d\tilde{u}.$$

En estas expresiones $\tilde{u} = x/(\alpha' r_{\text{máx.t}})$; $u = x/(\alpha' r)$; $\bar{r} = r/\bar{r}_{\text{máx.t}}$; $\bar{x}_{\text{m}} = x_{\text{m}}/x_{\text{máx.t}}$; $\tilde{u}_{\text{cono}} = x_{\text{c}}/(\alpha' r_{\text{máx.t}})$. Las funciones $I_0(u) \ldots I_4(u)$ se determinan con las relaciones (10.131').

Efectuemos los cálculos:

$$\bar{F}_1^p = 0{,}0866 \int_0^{\tilde{u}_{\text{cono}}} \underbrace{\{1{,}039\bar{r}[uI_1(u) - I_2(u)] - 0{,}225\bar{r}^2[u^2I_1(u) - 2uI_2(u) + I_3(u)] + 0{,}01299\bar{r}^3[u^3I_1(u) - 3u^2I_2(u) + 3uI_3(u) - I_4(u)] - I_1(u)\}}_{\bar{F}_1^{p1}}\, \bar{r}\, d\tilde{u};$$

$$\bar{F}_0^0 = 0{,}02 \int_0^{\tilde{u}_{\text{cono}}} \underbrace{\{I_0(u) - 0{,}5196\bar{r}[uI_0(u) + I_1(u)] + 0{,}045\bar{r}^2[u^2I_0(u) - 2uI_1(u) + I_2(u)]\}}_{\bar{F}_0^{01}}\, \bar{r}^2\, d\tilde{u};$$

$$\bar{F}_1^0 = 0{,}0866 \int_0^{\tilde{u}_{\text{cono}}} \underbrace{\{0{,}1732\bar{r}[uI_1(u) - I_2(u)] - 0{,}045\bar{r}^2[u^2I_1(u) - 2uI_2(u) + I_3(u)] + 0{,}002598\bar{r}^3[u^3I_1(u) - 3u^2I_2(u) + 3uI_3(u) - I_4(u)]\}}_{\bar{F}_1^{01}}\, \bar{r}\, d\tilde{u};$$

$$\bar{\bar{F}}_1^p = 0{,}009374 \int_0^{\tilde{u}_{\text{cono}}} \underbrace{\{1{,}039\bar{r}[uI_1(u) - I_2(u)] - 0{,}225\bar{r}^2[u^2I_1(u) - 2uI_2(u) + I_3(u)] + 0{,}01299\bar{r}^3[u^3I_1(u) - 3u^2I_2(u) + 3uI_3(u) - I_4(u)] - I_1(u)\}}_{\bar{\bar{F}}_1^{p1}}\, \bar{r}\tilde{u}\, d\tilde{u};$$

$$\bar{\bar{F}}_0^0 = 0{,}002165 \int_0^{\tilde{u}_{\text{cono}}} \underbrace{\{I_0(u) - 0{,}5196\bar{r}[uI_0(u) - I_1(u)] + 0{,}045\bar{r}^2[u^2I_0(u) - 2uI_1(u) + I_2(u)]\}}_{\bar{\bar{F}}_0^{01}}\, \bar{r}^2\tilde{u}\, d\tilde{u};$$

$$\overline{\overline{F}}{}_1^0 = 0{,}009374 \int_0^{\tilde{u}_{\text{cono}}} \{\underbrace{0{,}1732\bar{r}\,[uI_1(u) - I_2(u)] - 0{,}045\bar{r}^2[u^2I_1(u) - 2uI_2(u) + I_3(u)] +}_{\overline{\overline{F}}{}_1^{01}}$$

$$\underbrace{+\,0{,}002598\bar{r}^3[u^3I_1(u) - 3u^2I_2(u) + 3uI_3(u) - I_4(u)]\}}_{\overline{\overline{F}}{}_1^{01}}\,\bar{r}\tilde{u}\,d\tilde{u}.$$

Calculamos las funciones subintegrales $\overline{\overline{F}}{}_1^{01}$, $\overline{\overline{F}}{}_1^{01}$, $\overline{\overline{F}}{}_1^{p1}$, $\overline{\overline{F}}{}_1^{01}$, ... para el intervalo $0 - \tilde{u}_{\text{cono}} = 0 \ldots 9{,}238$ con paso $\Delta\tilde{u} = 0{,}9238$; llevando a cabo la integración numérica, hallamos $c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = 2\alpha'(\overline{F}{}_1^p - \overline{F}{}_0^0 + \overline{F}{}_1^0) = 1{,}7629$; $m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} = -2\alpha'(\overline{\overline{F}}{}_1^p - \overline{\overline{F}}{}_0^0 + \overline{\overline{F}}{}_1^0) = -1{,}3571$.

Para el *nuevo centro de reducción* ($x_{\text{m}} = 5$ m) efectuamos el recálculo de la derivada $m_{z\text{m}}^{\dot{\bar{\alpha}}} = c_y^{\dot{\bar{\alpha}}}(x_{\text{m}}/x_{\text{c}}) + m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} = -0{,}2553$ y hallamos el coeficiente del centro de presión (con relación a la punta)

$$c_{\text{p}} = -m_z^{\dot{\bar{\alpha}}}/c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = 1{,}3571/1{,}7629 = 0{,}7698.$$

10.58. Las relaciones para las derivadas c_y^{α}, $c_y^{\dot{\bar{\alpha}}}$, $c_y^{\omega_z}$, m_z^{α}, $m_z^{\dot{\bar{\alpha}}}$, $m_z^{\omega_z}$ de los sólidos de revolución se dan en el problema 10.54. Hallemos las correspondientes derivadas obtenidas en la *teoría aerodinámica de sólidos delgados.* Empleando Ω_3 de (10.123), representemos (10.183) en la forma

$$c_y^{\alpha} = (2\alpha'/S_{\text{máx. t}}) \int_0^{x_{\text{c}}} r\,dx \int_0^{\text{arch}\,u} S''(x - \alpha' r\,\text{ch}\,z)\,\text{ch}\,z\,dz$$

y efectuemos la sustitución

$$\varepsilon = x - \alpha' r\,\text{ch}\,z; \quad \text{ch}\,z = (x - \varepsilon)/(\alpha' r);$$

$$d\varepsilon = -\alpha' r\,\text{sh}\,z\,dz = -\alpha' r\sqrt{[(x-\varepsilon)/(\alpha' r)]^2 - 1}\,dz;$$

$$c_y^{\alpha} = (2\alpha'/S_{\text{máx. t}}) \int_0^{x_{\text{c}}} r\,dx \int_{x-\alpha' r}^{0} S''(x - \alpha' r\,\text{ch}\,z)\,[-(x-\varepsilon)]\,[\alpha' r\sqrt{(x-\varepsilon)^2 - (\alpha' r)^2}]^{-1}\,d\varepsilon.$$

De aquí, para un sólido muy delgado ($r \to 0$)

$$c_y^{\alpha} = (2/S_{\text{máx. t}})\,S_{\text{s.b}} = 2\overline{S}_{\text{s.b}}. \tag{10.224}$$

Analicemos las diversas componentes de la derivada (10.184) a condición de que $r \to 0$:

$$c_{y1}^{\dot{\bar{\alpha}}} = (2\alpha'/S_{\text{máx. t}}) \int_{0\ r\to 0}^{x_{\text{c}}} -\Omega_3 \bar{x}_{\text{m}} r\,dx = -2\overline{S}_{\text{s.b}}\bar{x}_{\text{m}};$$

$$c_{y2}^{\dot{\bar{\alpha}}} = (2\alpha'/S_{\text{máx. t}}) \int_{0\ r\to 0}^{x_{\text{c}}} \Omega_4 r\,dx = [2/(S_{\text{máx. t}} x_{\text{c}})]\,(x_{\text{c}} S_{\text{s.b}} - 2W_{\text{T}})$$

$$\left(W_{\text{T}} = \int_0^{x_{\text{c}}} S\,dx \text{ es el volumen del sólido de revolución}\right);$$

$$c_{y3}^{\dot{\bar{\alpha}}}=(2\alpha'/S_{\text{máx. t}})\int\limits_{0\ r\to 0}^{x_c}3\Omega_1 r\,dx=6W_T/(S_{\text{máx. t}}x_c);$$

$$c_{y4}^{\dot{\bar{\alpha}}}=-[2\alpha'M_\infty^2/(S_{\text{máx. t}}\alpha'x_c)]\int\limits_0^{x_c}\Omega_2 r^2\,dx=0;$$

$$c_y^{\dot{\bar{\alpha}}}=c_{y1}^{\dot{\bar{\alpha}}}+c_{y2}^{\dot{\bar{\alpha}}}+c_{y3}^{\dot{\bar{\alpha}}}+c_{y4}^{\dot{\bar{\alpha}}}=2\bar{S}_{\text{s.b}}[1-\bar{x}_m+W_T/(S_{\text{s.b}}x_c)]. \qquad (10{,}224')$$

Para esta misma condición examinemos las componentes de la derivada (10.185):

$$c_{y1}^{\omega_z}=(2\alpha'/S_{\text{máx. t}})\int\limits_{0\ r\to 0}^{x_c}\Omega_4 r\,dx=[2/(S_{\text{máx. t}}x_c)]\,(x_cS_{\text{s.b}}-2W_T);$$

$$c_{y2}^{\omega_z}=(2\alpha'\bar{x}_m/S_{\text{s.b}})\int\limits_{0\ r\to 0}^{x_c}-\Omega_3 r\,dx=-2\bar{S}_{\text{s.b}}\bar{x}_m;$$

$$c_{y3}^{\omega_z}=(2\alpha'/S_{\text{máx. t}})\int\limits_{0\ r\to 0}^{x_c}2\Omega_1 r\,dx=4W_T/(S_{\text{máx. t}}x_c);$$

$$c_y^{\omega_z}=c_{y1}^{\omega_z}+c_{y2}^{\omega_z}+c_{y3}^{\omega_z}=2\bar{S}_{\text{s.b}}(1-\bar{x}_m). \qquad (10.225)$$

A continuación, obtenemos las correspondientes derivadas (10.186) — (10.188):

$$m_{z1}^{\alpha}=\underset{r\to 0}{c_y^{\alpha}\bar{x}_m}=2\bar{S}_{\text{s.b}}\bar{x}_m;\quad m_{z2}^{\alpha}=-[2\alpha'/(S_{\text{máx. t}}x_c)]\int\limits_0^{x_c}\Omega_3 rx\,dx=$$

$$=-[2/(S_{\text{máx. t}}x_c)]\,(x_cS_{\text{s.b}}-W_T);$$

$$m_z^{\alpha}=2\bar{S}_{\text{s.b}}[\bar{x}_m-1+W_T/(S_{\text{s.b}}x_c)]; \qquad (10.226)$$

$$m_{z1}^{\dot{\bar{\alpha}}}=c_y^{\dot{\bar{\alpha}}}\bar{x}_m=2\bar{S}_{\text{s.b}}\bar{x}_m[1-\bar{x}_m+W_T/(S_{\text{s.b}}x_c)];$$

$$m_{z2}^{\dot{\bar{\alpha}}}=-[2\alpha'/S_{\text{máx. t}}x_c)]\int\limits_{0\ r\to 0}^{x_c}-\Omega_3\bar{x}_m rx\,dx-[2\alpha'/(S_{\text{máx. t}}x_c)]\int\limits_0^{x_c}\Omega_4 rx\,dx-$$

$$-[2\alpha'/(S_{\text{máx. t}}x_c)]\int\limits_0^{x_c}3\Omega_1 rx\,dx+[2\alpha'/(S_{\text{máx. t}}x_c)]\,[M_\infty^2/(\alpha'x_c)]\times$$

$$\times\int\limits_0^{x_c}\Omega_2 r^2x\,dx=2\bar{S}_{\text{s.b}}\bar{x}_m[1-1/\bar{x}_m-W_T/(x_cS_{\text{s.b}})];$$

$$m_z^{\dot{\bar{\alpha}}}=m_{z1}^{\dot{\bar{\alpha}}}+m_{z2}^{\dot{\bar{\alpha}}}=-2\bar{S}_{\text{s.b}}(1-\bar{x}_m)^2; \qquad (10.226')$$

$$m_{z1}^{\omega_z}=c_y^{\omega_z}\bar{x}_m=2\bar{S}_{\text{s.b}}\bar{x}_m(1-\bar{x}_m);$$

$$m_{z2}^{\omega_z} = -[2\alpha'/(S_{\text{máx. t}}x_c)]\int_0^{x_c} \Omega_4 rx\,dx + [2\alpha'/(S_{\text{máx. t}}x_c)]\int_0^{x_c} \bar{x}_m\Omega_3 rx\,dx -$$

$$-[2\alpha'/(S_{\text{máx. t}}x_c)]\int_0^{x_c} 2\Omega_1 rx\,dx = -2\bar{S}_{\text{s.b}} + [2/(S_{\text{máx. t}}x_c^2)]\times$$

$$\times \int_0^{x_c} Sx\,dx + 2\bar{x}_m\bar{S}_{\text{s.b}}[1 - W_T/(x_c S_{\text{s.b}})];$$

$$m_z^{\omega_z} = m_{z1}^{\omega_z} + m_{z2}^{\omega_z} =$$

$$= -2\bar{S}_{\text{s.b}}\left\{(1-\bar{x}_m)^2 + \bar{x}_m W_T/(x_c S_{\text{s.b}}) - [1/(S_{\text{s.b}}x_c^2)]\int_0^{x_c} Sx\,dx\right\}. \quad (10.226'')$$

10.59. Los radios de las secciones máxima transversal y de base del sólido de revolución prefijado

$$r_{\text{máx. t}} = x_c/(2\lambda_c) = 0{,}5 \text{ m}; \quad r_{\text{s.b}} = r_{\text{máx. t}}\sqrt{\bar{S}_{\text{s.b}}} = 0{,}3202 \text{ m}.$$

La longitud de la sección de nariz

$$r_{\text{s.b}}/r_{\text{máx. t}} = (x_c/x_{\text{máx. t}})(2 - x_c/x_{\text{máx. t}});$$

$$x_c/x_{\text{máx. t}} = 1 + \sqrt{1 - r_{\text{s.b}}/r_{\text{máx. t}}} = 1{,}6; \quad x_{\text{máx. t}} = x_c/1{,}6 = 5 \text{ m}.$$

El alargamiento de la sección de nariz $\lambda_{\text{máx.t}} = x_{\text{máx.t}}/(2\, r_{\text{máx.t}}) = 5$.
El volumen del sólido de revolución

$$W_T = \pi\int_0^{x_c} r^2\,dx = [\pi x^3/(4\lambda_{\text{máx. t}}^2)][(4/3) - \bar{x}_c(1 - \bar{x}_c/5)] =$$

$$= 3{,}944\ m^3\ (\bar{x}_c = x_c/x_{\text{máx. t}}).$$

Calculemos las correspondientes derivadas: $c_y^\alpha = 0{,}82$; $c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = 1{,}564\ [\dot{\bar{\alpha}} = (d\alpha/dt)\,x_c/V_\infty]$; $c_y^{\omega_z} = 0{,}3075\ (\omega_z = \Omega_z x_c/V_\infty)$; $m_z^\alpha = 2\bar{S}_{\text{s.b}}[\bar{x}_m + W_T/(x_c S_{\text{s.b}}) - 1] = 2\cdot 0{,}41\,[5/8 + 3{,}944/(8\pi\cdot 0{,}3202)^2 - 1] = 0{,}9485$; $m_z^{\dot{\alpha}} = -0{,}1153$.

Seguidamente determinamos $S(x) = \pi r^2 = \pi r_{\text{máx. t}}^2\bar{x}^2(2-\bar{x})^2$; $[1/(x_c^2 S_{\text{s.b}})] \times \int_0^{x_c} S(x)\,x\,dx = (\bar{x}_c^2/\bar{S}_{\text{s.b}})[1 - \bar{x}_c(4/5 - \bar{x}_c/6)] = 0{,}9159$ y, en correspondencia con (10.226''), hallamos $m_z^{\omega_z} = -0{,}1493$.

El coeficiente del momento de cabeceo con relación al centro de masas, lo mismo que los parámetros $\dot{\alpha}$ y ω_z, está calculado respecto de la longitud del cuerpo x_c.

10.60. Hagamos uso de las relaciones de la teoría aerodinámica del sólido delgado (véase la solución del problema 10.59): $c_y^\alpha = 2\bar{S}_{\text{s.b}}$; $\bar{S}_{\text{s.b}} = S_{\text{s.b}}/S_{\text{máx.t}} = 1$; $c_y^\alpha = 2\ (1{,}876)$; $c_y^{\dot{\alpha}} = 2\bar{S}_{\text{s.b}}\,[1 - \bar{x}_m + W_T/(x_c S_{\text{sb.}})]$.

A continuación calculamos $\bar{S}_{s.b} = 1$; $\bar{x}_m = x_m/x_c = 0{,}625$; $W_T/(x_c S_{s.b}) = 1/3$ y, de acuerdo con (10.224'), (10.225), (10.226) y (10.226'), hallamos $c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = 1{,}417$ (0,4106); $c_z^{\omega_z} = 0{,}75$ (0,29); $m_z^{\alpha} = -0{,}08333$ $(-0{,}0782)$; $m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} = -2\bar{S}_{s.b}(1-\bar{x}_m)^2 = -0{,}2812$ $(-0{,}149)$.

Al calcular $[1/(x_c^2 S_{s.b})] \int_0^{x_c} S(x)\,x\,dx = 1{,}4$, por la fórmula (10.226"), hallamos la derivada $m_z^{\omega_z} = -0{,}1979$ $(-0{,}1493)$.

Consideremos el cálculo de las derivadas aerodinámicas de un cono, según la *teoría linealizada* (véase la solución del problema 10.54). Como la longitud del cono $x_{cono} = 7{,}198$ m, la distancia relativa desde la punta hasta el centro de masas $\bar{x}_m = x_m/x_{cono} = 5/7{,}198 = 0{,}6947$, el ángulo de inclinación de la tangente junto a la punta $\beta_{cono} = \operatorname{arctg}(dr/dx)_{x\to 0} = \operatorname{arctg}(1/\lambda_{máx.t}) = 0{,}2$; el alargamiento $\lambda_{cono} = \lambda_{máx.t} = 1/(2\beta_{cono}) = 2{,}5$, obtenemos

$$c_y^{\alpha} = (2\alpha'/S_{máx.\,t}) \int_0^{x_c} \Omega_3 r\,dx = 2\alpha'\beta_{cono} i_r^0,$$

donde

$$\Omega_3 = \lim_{\bar{x}\to 0} \{(\pi/\lambda_{máx.\,t}^2)[2i_r^0 - (6\bar{x}/u)\,i_r^1 + (3\bar{x}^2/u^2)\,i_r^2]\} = 2i_r^0\pi\beta_{cono}^2.$$

En el problema 10.54 hemos hallado para $u_{x\to 0} = x/(\alpha' r)_{x\to 0} = 1/(\alpha'\beta_{cono}) = 2{,}887$ la magnitud $2i_r^0 = 5{,}411$; por lo tanto, $c_y^{\alpha} = 1{,}874$ (1,592).

La derivada para el cono (véase el problema 10.51)

$$c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = (-1/r_{máx.\,t}^2) \int_0^{x_c} (\bar{p}_2^{\dot{\bar{\alpha}}}/\cos\gamma)\, r\,dx =$$

$$= 4\beta_{cono}^2\alpha' \{\alpha' [uI_1(u) - I_2(u)] - 0{,}5\,(x_m/x_c)\,(1/\beta_{cono})\,I_1(u) - $$

$$- [M_\infty^2/(3\alpha')]\,I_0(u) + (1/3)\,\alpha' [uI_1(u) - I_2(u)]\}.$$

Para $u = 2{,}887$ (véase el problema 10.51) los valores de $I_1(u) = 2{,}708$; $I_0(u) = 1{,}722$; $I_2(u) = 4{,}77$; $c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = 0{,}2085$; otras derivadas

$$c_y^{\omega_z} = (-1/r_{máx.\,t}^2) \int_0^{x_c} (\bar{p}_2^{\omega_z}/\cos\gamma)\, r\,dx =$$

$$= 2\beta_{cono}\alpha' \{2\beta_{cono}\alpha' [uI_1(u) - I_2(u)] - (x_m/x_c)\,I_1(u)\} = 0{,}1598;$$

$$m_z^{\alpha} = c_y^{\alpha}\bar{x}_m - [2\alpha'/(S_{máx.\,t}x_c)] \int_0^{x_c} \Omega_3 r x\,dx = c_y^{\alpha}\bar{x}_m - (4/3)\,\alpha'\beta_{cono} i_r^0 = 0{,}0524\ (1{,}698);$$

$$m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} = c_y^{\dot{\bar{\alpha}}}\bar{x}_m + [1/(r_{máx.\,t}^2 x_c)] \int_0^{x_c} (\bar{p}_2^{\dot{\bar{\alpha}}}/\cos\gamma)\, r x\,dx =$$

$$= c_y^{\dot{\bar{\alpha}}}\bar{x}_m - 4\beta_{cono}^2\alpha' \{(3/4)\,\alpha' [uI_1(u) - I_2(u)] - (1/3)\,(x_m/x_c)\,(1/\beta_{cono})\,I_1(u) -$$

$$-(M_\infty^2/\alpha')\, I_0(u)\, 0{,}25+\alpha'\,[uI_1(u)-I_2(u)]\,0{,}25\}=-0{,}1241;$$

$$m_z^{\omega_z}=c_y^{\omega_z}\bar{x}_{\rm m}+[1/(r^2_{\text{máx. t}}x_{\rm c})]\int_0^{x_{\rm c}}(p_2^{\omega_z}/\cos\gamma)\, rx\, dx=c_y^{\omega_z}\bar{x}_{\rm m}-$$

$$-2\alpha'\beta_{\rm cono}\{(3/2)\,\alpha'\beta_{\rm cono}\,[uI_1(u)-I_2(u)]-(2/3)\,(x_{\rm m}/x_{\rm c})\, I_1(u)\}=-0{,}1177.$$

Entre paréntesis, junto a la derivada obtenida, se ofrecen los correspondientes valores hallados para los sólidos delgados de revolución con generatriz curvilínea.

10.61. Para un sólido cilíndrico de rotación con sección cónica de la nariz

$$\bar{S}_{\rm s\cdot b}=S_{\rm s.b}/S_{\text{máx. t}}=1;\quad \bar{x}_{\rm m}=x_{\rm m}/x_{\rm c}=0{,}6;$$

$$W_{\rm T}/(x_{\rm c}S_{\rm s.b})=[(1/3)\,\pi r^2_{\text{máx. t}}x_{\text{máx. t}}+(x_{\rm c}-x_{\text{máx. t}})\,\pi r^2_{\text{máx. t}}]/(x_{\rm c}\pi r^2_{\text{máx. t}})=2/3;$$

$$[1/(x_{\rm c}^2S_{\rm s.b})]\int_0^{x_{\rm c}}S(x)\,x\,dx=x^2_{\text{máx. t}}/(4x_{\rm c}^2)+0{,}5\,(1-x^2_{\text{máx. t}}/x_{\rm c}^2)=0{,}4375.$$

Empleando estos valores, según (10.224′), (10.225), (10.226), (10.226′) y (10.226″), calculamos $c_y^\alpha=2$; $c_y^{\dot{\alpha}}=2{,}132$; $c_y^{\omega_z}=0{,}8$; $m_z^\alpha=0{,}5333$; $m_z^{\dot{\alpha}}=-0{,}32$; $m_z^{\omega_z}=-0{,}245$.

Analicemos un sólido cilíndrico con sección de nariz curvilínea (parabólica):

$$\bar{S}_{\rm s.b}=S_{\rm s.b}/S_{\text{máx. t}}=1;\quad \bar{x}_{\rm m}=x_{\rm m}/x_{\rm c}=0{,}6;$$

$$W_{\rm T}/(x_{\rm c}S_{\rm s.b})=[1/(x^2_{\text{máx. t}}x_{\rm c})]\,[(4/3)\,x^3_{\text{máx. t}}-(4/4)\,(x^4_{\text{máx. t}}/x_{\text{máx. t}})+$$

$$+(1/5)\,(x^5_{\text{máx. t}}/x^2_{\text{máx. t}})]+(1-x_{\text{máx. t}}/x_{\rm c})=0{,}7667;$$

$$[1/(x^2_{\rm cono}S_{\rm s.b})]\int_0^{x_{\rm c}}S(x)\,x\,dx=x^2_{\text{máx. t}}/x_{\rm c}^2-(4/5)\,x^2_{\text{máx. t}}/x_{\rm c}^2+(1/6)\,x^2_{\text{máx. t}}/x_{\rm c}^2+$$

$$+0{,}5\,(1-x^2_{\text{máx. t}}/x_{\rm c}^2)=0{,}4667;\quad c_y^\alpha=2;\quad c_y^{\dot{\alpha}}=2{,}333;$$

$$c_y^{\omega_z}=0{,}8;\quad m_z^\alpha=0{,}7334;\quad m_z^{\dot{\alpha}}=-0{,}32;\quad m_z^{\omega_z}=-0{,}3066.$$

10.62. La coordenada $x_{\rm m}=x_{\rm p\alpha}$ del centro de presión, como punto de aplicación de la fuerza normal correspondiente a la derivada c_y^α, se determina de la condición de la igualdad a cero de m_z^α (véase la solución del problema 10.60), es decir, $x_{\rm p\alpha}/x_{\rm c}+W_{\rm T}/(x_{\rm c}S_{\rm s.b})-1=0$. Como para el cono $W_{\rm T}/(x_{\rm c}S_{\rm s.b})=1/3$, $\bar{x}_{\rm p\alpha}=x_{\rm p\alpha}/x_{\rm c}=1-1/3=2/3$.

La distancia $x_{\rm m}=x_{{\rm p}\dot{\alpha}}$ hasta el centro de presión, que es el punto de aplicación de la fuerza, que corresponde a la derivada $c_y^{\dot{\alpha}}$ se halla de la ecuación $m_x^{\dot{\alpha}}=0$, es decir, $1-x_{{\rm p}\dot{\alpha}}/x_{\rm c}=0$; $\bar{x}_{{\rm p}\dot{\alpha}}=x_{{\rm p}\dot{\alpha}}/x_{\rm c}=1$.

La coordenada $x_m=x_{{\rm p}\omega_z}$ del punto en que está aplicada la fuerza no estacionaria, condicionada por la rotación, se determina con la ecuación $m_z^{\omega_z}=0$ [véase (10.226″)]. Después de las correspondientes sustituciones, dicha ecuación tiene la forma $(1-\bar{x}_{{\rm p}\omega_z})^2+\bar{x}_{{\rm p}\omega_z}/3-1/4=0$, de donde $\bar{x}_{{\rm p}\omega_z}=(5/6)\pm\sqrt{-0{,}0556.}$

Como vemos, para el caso cuando hay rotación ($\omega_z \neq 0$) no es posible indicar el punto en el eje del cono, que puede ser determinado como centro de presión para la fuerza no estacionaria condicionada por la rotación.

Examinemos un sólido puntiagudo de rotación con generatriz parabólica inscrito en el cono (véase la solución del problema (10.59). Haciendo $m_z^\alpha = 0$, obtenemos $\bar{x}_{p\alpha} + W_T/(x_c S_{s.b}) - 1 = 0$. Como $W_T/(x_c S_{s.b}) = 1{,}532$, $\bar{x}_{p\alpha} = -0{,}532$.

Para la tangente a la sección de nariz (radio de la sección de base $r_{s.b} = r_{máx.t}$, la longitud $x_c = x_{máx.t}$) tenemos $W_T = \pi r^2_{máx.t} x_{máx.t}(8/15)$; $W_T/(x_c S_{s.b}) = 8/15$; $\bar{x}_{p\alpha} = 7/15$.

Seguidamente de la ecuación $1 - \bar{x}_{p\dot{\alpha}} = 0$ hallamos la coordenada $\bar{x}_{p\dot{\alpha}} = 1$.

Resolviendo la ecuación $m_z^{\omega_z} = 0$, según (10.226″), con relación a la coordenada $\bar{x}_m + \bar{x}_{p\omega_z} = x_{p\omega_z}/x_c$ obtenemos $(1 - \bar{x}_{p\omega_z})^2 + \bar{x}_{p\omega_z} 1{,}532 - 0{,}9159 = 0$; $\bar{x}_{p\omega_z} = 0{,}324 \pm 0{,}1445$.

La real es la *disposición delantera del centro de presión* (es decir, $\bar{x}_{p\omega_z} = 0{,}1795$), lo que está condicionado por la presencia de la sección decreciente (inestabilizadora) de la cola del sólido de revolución.

Examinemos las relaciones de la teoría de circulación linealizada que ofrecen la posibilidad de tomar en consideración la influencia de los números M_∞ sobre dicha circulación (véase el problema 10.54). De la condición $m_z^\alpha = 0$, tenemos

$$\bar{x}_m = \bar{x}_{p\alpha} = x_{p\alpha}/x_c = [(2\alpha'/S_{máx.\,t} x_c c_y^\alpha)] \times \times \int_0^{x_c} \Omega_3 r x\, dx = [4\alpha'/(\lambda_{máx.\,t} \bar{x}_c c_y^\alpha)]\, K_3 = 0{,}0963.$$

Después de hallar $m_z^\alpha/c_y^\alpha = 0{,}9527/1{,}592 = 0{,}5984$ obtenemos, realmente, el mismo resultado, pero con la diferencia de que la variable $\Delta x_p/x_c = (x_m - x_{p\alpha})/x_c$ determina la distancia entre los centros de rotación (x_m) y de presión ($x_{p\alpha}$), o sea, $\bar{x}_{p\alpha} = \bar{x}_m - 0{,}5984 = 0{,}6947 - 0{,}5984 = 0{,}0963$.

La coordenada relativa $\bar{x}_{p\dot{\alpha}} = x_{p\dot{\alpha}}/x_c = \bar{x}_m$ se determina de la ecuación $m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} = 0$ (véase la solución del problema 10.54). Realizando en ella la correspondiente sustitución de $c_y^{\dot{\bar{\alpha}}}$ según la fórmula (10.188″), después de poner los datos, hallamos la ecuación cuadrática y su solución:

$$\bar{x}^2_{p\dot{\alpha}} - \bar{x}_{p\dot{\alpha}} 2{,}017 + 1{,}087 = 0; \quad \bar{x}_{p\dot{\alpha}} = 1{,}008 \pm \sqrt{1{,}017 - 1{,}087}.$$

Teniendo en cuenta el carácter aproximado de los cálculos podemos hacer $\bar{x}_{p\dot{\alpha}} \approx 1{,}008 \approx 1{,}0$, lo que coincide con el resultado de la teoría aerodinámica del sólido delgado.

A continuación, determinamos $\bar{x}_m = \bar{x}_{p\omega_z} = x_{p\omega_z}/x_c$ con ayuda de la ecuación $m_z^{\omega_z} = 0$ (véase la solución del problema 10.54). Después de sustituir en ella $c_y^{\omega_z}$ por la expresión utilizada en el problema 10.54, las correspondientes sustituciones y la solución de la ecuación cuadrática, obtenemos $\bar{x}_{p\omega_z} = 0{,}566 \pm \pm \sqrt{0{,}3204 - 0{,}4806}$.

Así, pues, en el caso dado no existe el centro de presión como punto de aplicación de la componente no estacionaria de la fuerza normal condicionada por la velocidad angular.

Para determinar los centros de presión del cono según la teoría linealizada hemos de emplear las correspondientes relaciones aducidas en el problema 10.60. Haciendo $m_z^{\alpha} = 0$ y tomando en consideración el respectivo valor de c_y^{α} (véase la solución del problema 10.60), hallamos

$$\bar{x}_{\mathrm{m}} = \bar{x}_{\mathrm{p}\alpha} = (4/3)\,\alpha'\beta_{\mathrm{cono}} i_r^0 \,(1/c_y^{\alpha}) = 2/3.$$

Haciendo $m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} = 0$ y sustituyendo $c_y^{\dot{\bar{\alpha}}}$ por la expresión empleada al resolver el problema 10.60, después de las correspondientes sustituciones, obtenemos la ecuación cuadrática respecto de la coordenada $\bar{x}_{\mathrm{m}} = \bar{x}_{\mathrm{p}\dot{\bar{\alpha}}}$. Resolviendo esta ecuación hallamos $\bar{x}_{\mathrm{p}\dot{\bar{\alpha}}} = 0{,}755 \pm \sqrt{0{,}57 - 0{,}633}$.

Suponiendo que $m_z^{\omega_z} = 0$ hallamos la ecuación que al resolverla (sustituyendo $c_y^{\omega_z}$ por la fórmula dada en el problema 10.60) nos permite obtener $\bar{x}_{\mathrm{m}} = \bar{x}_{\mathrm{p}\omega_z} = 0{,}723 \pm \sqrt{0{,}523 - 0{,}574}$. De este modo, para el cono no es real la existencia de los centros de presión como puntos de aplicación de fuerzas no estacionarias.

10.63. El esquema de un sólido delgado de revolución y la disposición de los ejes de coordenadas se muestran en la fig. 10.44. Para semejante sólido las derivadas aerodinámicas pueden determinarse sobre la base de las dependencias generales (9.837) — (9.850), útiles para toda clase de configuraciones simétricas, incluidas las superficies de sustentación y los cuerpos delgados. Estas dependencias se determinan por los parámetros adimensionales B_{ii}, C_{ii}, D_{ii} [véase (9.851) que, a su vez, se calculan según los *coeficientes dimensionales de las masas asociadas* $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \pi\rho_\infty r^2$; $\lambda_{33} = 0$ y los correspondientes valores adimensionales $A_{11} = A_{22} = \lambda_{11}/(\rho_\infty S_{\mathrm{máx.t}}) = r^2/r^2_{\mathrm{máx.t}}$; $A_{33} = 0$. Con estos valores hallamos [véase (9.851)]

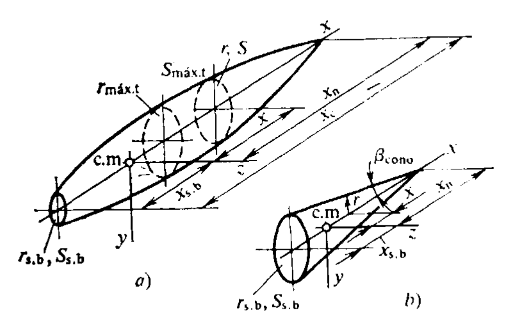


Fig. 10.44. Disposición de los ejes de coordenadas en el cuerpo:
a, con generatriz curvilínea; *b*, cono

$$B_{11} = B_{22} = B = \int_{\bar{x}_{\mathrm{s.b}}}^{\bar{x}_1} (r^2/r^2_{\mathrm{máx.\,t}})\, d\bar{x} = W_{\mathrm{T}}/W_{\mathrm{cil}},$$

donde W_{T} es el volumen de sólido de revolución; W_{cil}, el volumen de un cilindro con radio $r_{\mathrm{máx.t}}$ y largura x_{c}.

A continuación determinamos los parámetros

$$C_{11} = C_{22} = C = \int_{\bar{x}_{\mathrm{s.b}}}^{\bar{x}_1} (r^2/r^2_{\mathrm{máx.\,t}})\, \bar{x}\, d\bar{x}; \qquad D_{11} = D_{22} = D = \int_{\bar{x}_{\mathrm{s.b}}}^{\bar{x}_1} (r^2/r^2_{\mathrm{máx.\,t}})\, \bar{x}^2\, d\bar{x}$$

y los coeficientes $\bar{A}_{11} = \bar{A}_{22} = r^2_{\mathrm{s.b}}/r^2_{\mathrm{máx.\,t}} = \bar{S}_{\mathrm{s.b}} = S_{\mathrm{s.b}}/S_{\mathrm{máx.\,t}}$.

Con arreglo a estos datos, así como teniendo en cuenta que la rotación del cuerpo a velocidad angular Ω_x no influye sobre sus propiedades aerodinámicas, obtenemos:

las derivadas estáticas:

$$c_y^\alpha = -2\overline{S}_{s.b}; \quad c_z^\beta = -2\overline{S}_{s.b}; \tag{10.227}$$

$$m_y^\beta = -2(B + \overline{S}_{s.b}\overline{x}_{s.b}); \quad m_z^\alpha = 2(B + \overline{S}_{s.b}\overline{x}_{s.b}); \tag{10.228}$$

las derivadas rotativas

$$c_y^{\omega_z} = 4\overline{S}_{s.b}\overline{x}_{s.b}; \quad c_z^{\omega_y} = -4\overline{S}_{s.b}\overline{x}_{s.b}; \tag{10.229}$$

$$m_y^{\omega_y} = -4(\overline{S}_{s.b}\overline{x}_{s.b}^2 + C); \quad m_z^{\omega_z} = -4(\overline{S}_{s.b}\overline{x}_{s.b}^2 + C); \tag{10.230}$$

las derivadas por la aceleración

$$c_y^{\dot{\overline{\alpha}}} = c_z^{\dot{\overline{\beta}}} = -4B; \quad c_y^{\dot{\omega}_y} = -c_z^{\dot{\omega}_y} = 4C; \tag{10.231}$$

$$m_y^{\dot{\overline{\beta}}} = -m_z^{\dot{\overline{\alpha}}} = -4C; \quad m_y^{\dot{\omega}_y} = m_z^{\dot{\omega}_z} = -4D. \tag{10.232}$$

En las fórmulas aducidas

$$\omega_z = \Omega_z x_c/(2V_\infty); \quad \omega_y = \Omega_y x_c/(2V_\infty); \quad \dot{\overline{\alpha}} = \dot{\alpha} x_c/(2V_\infty); \quad \dot{\overline{\beta}} = \dot{\beta} x_c/(2V_\infty);$$

$$\dot{\omega}_z = \dot{\Omega}_z l^2/(2V_\infty^2); \quad \dot{\omega}_y = \Omega_y l^2/(2V_\infty^2),$$

donde x_c es la largura del cuerpo.

Calculemos las derivadas de la estabilidad del cono delgado. De la fig. 10.44 se deduce que $r = r_{\text{máx.t}}(x_1 - x)/x_c$. De acuerdo con esto

$$B = 1/3; \quad C = \overline{x}_1/3 - 1/4 = (1 + \overline{x}_{s.b})/3 - 1/4;$$

$$D = 1/5 - \overline{x}_1/2 + \overline{x}_1^2/3 = 1/5 - (1 + \overline{x}_{s.b})/2 + (1 + \overline{x}_{s.b})^2/3.$$

Adoptemos que el centro de masas (centro de rotación) está distanciado de la sección de base a $x_{s.b} = -x_c/4$ $(\overline{x}_{s.b} = -1/4)$, por lo que $C = 0$; $D = 1/80$.

Con arreglo a estos resultados y teniendo en cuenta que para el cono $\overline{S}_{s.b} = 1$, obtenemos

$$c_y^\alpha = c_z^\beta = -2; \quad m_y^\beta = -m_z^\alpha = -1/6; \quad c_y^{\omega_z} = -c_z^{\omega_y} = -1;$$

$$m_y^{\omega_y} = m_z^{\omega_z} = -1/4; \quad c_y^{\dot{\overline{\alpha}}} = c_z^{\dot{\overline{\beta}}} = -4/3;$$

$$c_y^{\dot{\omega}_z} = -c_z^{\dot{\omega}_y} = 0; \quad m_y^{\dot{\overline{\beta}}} = -m_z^{\dot{\overline{\alpha}}} = 0; \quad m_y^{\dot{\omega}_y} = m_z^{\dot{\omega}_z} = -1/20.$$

El coeficiente del centro de presión relacionado con el ángulo α, es igual a $(\Delta x_p/x_c)_\alpha = -m_z^\alpha/c_y^\alpha = 1/12$. Así, pues, el punto de aplicación de la fuerza condicionada por el ángulo de ataque se encuentra por *delante del centro de masas* a una distancia $(\Delta x_p)_\alpha = (1/12)\, x_c$ de él.

A continuación, hallamos $(\Delta x_p/x_c)_{\omega_z} = -m_z^{\omega_z}/c_y^{\omega_z} = -1/4$. Conforme a estos resultados el centro de presión, relacionado con ω_z, está situado *tras el centro de masas*, es decir, durante la rotación alrededor del eje transversal surge un momento amortiguador que obstaculiza tal rotación. En el caso de $\dot{\overline{\alpha}}$ tenemos $(\Delta x_p/x_c)_{\dot{\overline{\alpha}}} =$

$= -m_z^{\dot{\alpha}}/c_y^{\dot{\alpha}} = 0$, o sea, el centro de presión coincide con el de masas y se observa la neutralidad en lo que respecta al amortiguamiento al variar con el tiempo el ángulo de ataque.

Para las fuerzas y momentos relacionados con la derivada $\dot{\omega}_z$, tenemos $(\Delta x_p/x_c)_{\dot{\omega}_z} = -m_z^{\dot{\omega}_z}/c_y^{\dot{\omega}_z} = \infty$. Como vemos, el valor de $c_y^{\dot{\omega}_z} = 0$, pero la derivada $m_z^{\dot{\omega}_z} \neq 0$ y es negativa. De este modo, el centro de presión se halla infinitamente alejado del cono y el momento condicionado por $\dot{\omega}_z$ ejerce efecto estabilizador con cualquier disposición del centro de masas (centro de rotación).

10.64. El coeficiente de presión en el cono

$$\bar{p} = \bar{p}_v + \bar{p}_\Omega, \tag{10.233}$$

donde

$$\bar{p}_v = \tilde{p}\,(\text{sen}\,\beta\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha\cos\beta\cos\gamma)^2; \tag{10.234}$$

$$\bar{p}_\Omega = -(4\Omega_z/V_\infty)\,(r\,\text{tg}\,\beta + x - x_m)\,(\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta - \text{sen}\,\alpha\cos\beta\cos\gamma)\cos\beta\cos\gamma + (2\Omega_z^2/V_\infty^2)\cos^2\gamma\cos^2\beta\,(r\,\text{tg}\,\beta + x - x_m)^2; \quad \tilde{p} = 2\,(k+1)\,(k+7)/(k+3)^2. \tag{10.235}$$

Para pequeños ángulos α, β y la magnitud $\omega_z = \Omega_z x_c/V_\infty$

$$\bar{p}_v = \tilde{p}\,(\beta - \alpha\cos\gamma)^2; \tag{10.236}$$

$$\bar{p}_\Omega = -4\omega_z\,(\bar{r}\beta + \bar{x} - \bar{x}_m)\,(\beta - \alpha\cos\gamma)\cos\gamma\ (\bar{r} = r/x_c;\ \bar{x} = x/x_c;\ \bar{x}_m = x_m/x_c). \tag{10.237}$$

Tomando $k = 1{,}4$, obtenemos: $\tilde{p} = 2{,}083$; $\bar{p}_v = 0{,}02083\ (1 - \cos\gamma)^2$; $\bar{p}_\Omega = -(2/3)\,10^{-3}\,(0{,}1\,r + x - 0{,}5)\,(1 - \cos\gamma)\cos\gamma$; $\bar{p} = 0{,}02083\,(1 - \cos\gamma)^2 - (2/3)\ 10^{-3}\,(0{,}1\ r + x - 5)\,(1 - \cos\gamma)\cos\gamma$.

En la generatriz superior ($\gamma = 0$) el coeficiente $\bar{p} = 0$.

En la generatriz inferior ($\gamma = \pi$), junto a la punta, $\bar{p} = 0{,}07665$; en el extremo de la generatriz ($x = 5$ m; $r = 0{,}5$ m) el coeficiente $\bar{p} = 0{,}08339$.

La derivada $\bar{p}^{\omega_z} = \partial\bar{p}/\partial\omega_z = -4\,(\bar{r}\beta_{\text{cono}} + \bar{x} - \bar{x}_m)\,(\beta - \alpha\cos\gamma)\cos\gamma$.

En la generatriz superior ($\gamma = 0$), con $\alpha = \beta = 0{,}1$, la variable $\bar{p}^{\omega_z} = 0$. En la generatriz inferior ($\gamma = \pi$) en la punta del cuerpo ($r = x = 0$), la derivada $\bar{p}^{\omega_z} = -0{,}8$; en la base ($r = 0{,}5$ m; $x = 5$ m) esta derivada $\bar{p}^{\omega_z} = 0{,}008$.

El coeficiente de la fuerza axial del cono

$$c_{xp} = X/(q_\infty S_{\text{máx. t}}) = [2/(\pi r_{\text{máx. t}}^2)]\int_0^{x_c} r\,\text{tg}\,\beta\,dx\int_0^{\pi}(\bar{p}_v + \bar{p}_\Omega)\,d\gamma =$$

$$= \underbrace{[2/(\pi r_{\text{máx. t}}^2)]\int_0^{x_c} r\beta_{\text{cono}}\,dx\int_0^{\pi}\bar{p}_v\,d\gamma}_{c_{xp_0}} + \underbrace{[2/(\pi r_{\text{máx. t}}^2)]\int_0^{x_c} r\beta_{\text{cono}}\,dx\int_0^{\pi}\bar{p}_\Omega\,d\gamma}_{c_{xp\Omega}} =$$

$$= c_{xp_0} + c_{xp\Omega}, \tag{10.238}$$

donde

$$c_{xp_0}=\tilde{p}\,(\beta^2_{\text{cono}}+0{,}5\alpha^2);\quad c_{xp\Omega}=(2/3)\,\omega_z\alpha\,[2\,(\beta^2_{\text{cono}}+1)-3\bar{x}_{\text{m}}]. \qquad (10.239)$$

La correspondiente derivada

$$\partial c_{xp}/\partial\omega_z=c_{xp}^{\omega_z}=(2/3)\,\alpha\,[2\,(\beta^2_{\text{cono}}+1)-3\bar{x}_{\text{m}}]. \qquad (10.240)$$

Calculamos:

$$c_{xp_0}=0{,}03124;\quad c_{xp\Omega}=-0{,}000544;\quad c_{xp}=c_{xp_0}+c_{xp\Omega}=0{,}0307;\quad c_{xp}^{\omega_z}=-0{,}06533.$$

Determinamos los coeficientes aerodinámicos para el cono:

$$c_{yp}=-[2/(\pi r^2_{\text{máx. t}})]\int_0^{x_c} r\,dx\int_0^{\pi}(\bar{p}_v+\bar{p}_\Omega)\cos\gamma\,d\gamma=c_{yp_0}+c_{yp\Omega}; \qquad (10.241)$$

$$c_{yp_0}=\alpha\tilde{p};\quad c_{yp\Omega}=(2/3)\,[2\,(\beta^2_{\text{cono}}+1)-3\bar{x}_{\text{m}}]\,\omega_z; \qquad (10.242)$$

$$m_{zp}=[2/(\pi r^2_{\text{máx. t}}x_c)]\int_0^{x_c} rx\,dx\int_0^{\pi}(\bar{p}_v+\bar{p}_\Omega)\cos\gamma\,d\gamma=m_{zp_0}+m_{zp\Omega}; \qquad (10.243)$$

$$m_{zp_0}=-(2/3)\,\alpha\tilde{p};\quad m_{zp\Omega}=-(1/3)\,\omega_z\,[3\,(\beta^2_{\text{cono}}+1)-4\bar{x}_{\text{m}}] \qquad (10.244)$$

y las correspondientes derivadas:

$$c_{yp}^{\alpha}=\tilde{p};\quad c_{yp}^{\omega_z}=(2/3)\,[2\,(\beta^2_{\text{cono}}+1)-3\bar{x}_{\text{m}}]; \qquad (10.245)$$

$$m_{zp}^{\alpha}=-(2/3)\,\tilde{p};\quad m_{zp}^{\omega_z}=-(1/3)\,[3\,(\beta^2_{\text{cono}}+1)-4\bar{x}_{\text{m}}]. \qquad (10.246)$$

Calculamos:

$$c_{yp_0}=0{,}2083;\quad c_{yp\Omega}=-0{,}00544;\ c_{yp}=c_{yp_0}+c_{yp\Omega}=0{,}2029;$$
$$m_{zp_0}=-0{,}1389;\ m_{zp\Omega}=0{,}002694;\ m_{zp}=m_{zp_0}+m_{zp\Omega}=-0{,}1362;$$
$$c_{\text{p}_0}=-m_{zp_0}/c_{yp_0}=0{,}6667;\quad c_{p\Omega}=-m_{zp\Omega}/c_{yp\Omega}=0{,}4952;$$
$$c_{\text{p}}=-m_{zp}/c_{yp}=-(m_{zp_0}+m_{zp\Omega})/(c_{yp_0}+c_{yp\Omega})=0{,}6713.$$

Seguidamente calculamos:

$$c_{yp}^{\alpha}=2{,}083;\quad c_{yp}^{\omega_z}=-0{,}6533;\quad m_{zp}^{\alpha}=-1{,}389;\quad m_{zp}^{\omega_z}=0{,}3233.$$

Las derivadas del coeficiente del momento de cabeceo (con relación al centro de rotación)

$$m_{zpm}^{\alpha}=c_{yp}^{\alpha}\,(x_{\text{m}}/x_c)+m_{zp}^{\alpha}=0{,}694;\quad m_{zpm}^{\omega_z}=c_{yp}^{\omega_z}\,(x_{\text{m}}/x_c)+m_{zp}^{\omega_z}=-0{,}33.$$

10.65. Determinemos los coeficientes de presión de acuerdo con la *teoría del remanso newtoniano*. Tomando en consideración que el sólido de revolución es delgado ($r\beta$ es pequeña), en correspondencia con (10.236) y (10.237), tomamos

$$\bar{p}_v=\tilde{p}\,(\beta-\alpha\cos\gamma)^2;\quad \bar{p}_\Omega=-4\omega_z\,(\bar{x}-\bar{x}_{\text{m}})\,(\beta-\alpha\cos\gamma)\cos\gamma$$
$$(\bar{x}=x/x_{\text{máx.t}};\ \bar{x}_{\text{m}}=x_{\text{m}}/x_{\text{máx.t}}). \qquad (10.247)$$

El coeficiente sumario de presión $\bar{p}=\bar{p}_v+\bar{p}_\Omega$. El orden de los cálculos numéricos al emplear estos valores del coeficiente de presión es el mismo que en el

problema 10.64. Al efectuar semejantes cálculos, de las correspondientes dependencias excluyamos la variable $r\beta$ por ser muy pequeña para un sólido delgado de revolución.

Para $k = 1,4$ el valor de $\tilde{p} = 2,083$, por lo que $\tilde{p}_0 = 2,083\ (\beta - 0,1\cos\gamma)^2$; $\bar{p}_\Omega = -4\omega_z(\bar{x} - 4/5)\ (\beta - 0,1\cos\gamma)\cos\gamma$; $\bar{p} = 2,083\ (\beta - 0,1\cos\gamma)^2 - 4\omega_z(x - 4/5)\ (\beta - 0,1\cos\gamma)\cos\gamma$. Aquí el parámetro $\omega_z = \Omega_z x_{\text{máx.t}}/V_\infty = 5\cdot 5/3000 = 0{,}00833$.

Para la generatriz superior ($\gamma = 0$) en la punta cónica ($\beta = \beta_0 = 1/\lambda_{\text{máx.t}} = 1/5 = 0,2$; $x = r = 0$), tenemos $\bar{p} = 0,0235$; en el extremo de la generatriz ($x = x_{\text{máx.t}}$; $\beta = 0$) $\bar{p} = 0,0215$.

Para la generatriz inferior ($\gamma = \pi$) en la punta cónica, $\bar{p} = 0,1795$; en el extremo de la generatriz $\bar{p} = 0,0215$.

La correspondiente derivada

$$\bar{p}^{\omega_z} = -4(\bar{x} - \bar{x}_{\text{m}})\ (\beta - \alpha\cos\gamma)\cos\gamma = -4(\bar{x} - 0,8)\times$$
$$\times\ (\beta - 0,1\cos\gamma)\cos\gamma. \quad (10.248)$$

Para la generatriz superior en la punta cónica, la derivada $\bar{p}^{\omega_z} = 0,32$; en el extremo de la generatriz $\bar{p}^{\omega_z} = 0,08$.

Para la generatriz inferior en la punta cónica, la derivada $\bar{p}^{\omega_z} = -0,96$; en el extremo de la generatriz $\bar{p}^{\omega_z} = 0,08$.

A continuación hallamos $c_{xp} = x_{xp_0} + c_{xp\Omega}$. Con arreglo a (10.239)

$$c_{xp_0} = [2/(\pi r^2_{\text{máx. t}})] \int_0^{x_c} r\beta\,dx \int_0^{\pi} \tilde{p}\,(\beta - \alpha\cos\gamma)^2\,d\gamma \quad (\bar{x} = x/x_{\text{máx. t}}).$$

Como $\bar{r} = \bar{x}\,(2 - \bar{x})$, $\beta = dr/dx = (1/\lambda_{\text{máx.t}})\,(1 - \bar{x})$, $\bar{r} = r/r_{\text{máx.t}}$, $\bar{x} = x/x_{\text{máx.t}}$, entonces

$$c_{xp_0} = 4\tilde{p}\,(0,0837/\lambda^2_{\text{máx. t}} + 0,125\alpha^2). \quad (10.249)$$

Tomando en consideración que $\tilde{p} = 2,083$; $\lambda_{\text{máx.t}} = x_{\text{máx.t}}/(2r_{\text{máx.t}}) = 5$; $\alpha = 0,1$, obtenemos $c_{xp_0} = 0,0382$. En correspondencia con (10.240), haciendo $r\beta \approx 0$, hallamos

$$c_{xp\Omega} = [2/(\pi r^2_{\text{máx. t}})] \int_0^{x_c} r\beta\,dx \int_0^{\pi} -4\omega_z(\bar{x} - \bar{x}_{\text{m}})\,(\beta - \alpha\cos\gamma)\cos\gamma\,d\gamma =$$
$$= 8\omega_z\alpha\,(0,1167 - 0,25\bar{x}_{\text{m}}).$$

Introduciendo los valores $\omega_z = \Omega_z x_{\text{máx.t}}/3000 = 0,008333$; $\bar{x}_{\text{m}} = 4/5$; $\alpha = 0,1$, obtenemos $c_{xp\Omega} = -0,000555$; $c_{xp} = c_{xp_0} + c_{xp\Omega} = 0,0376$.

Hallamos la derivada $c_{xp}^{\omega_z} = 8\alpha\,(0,1167 - 0,25\,\bar{x}_{\text{m}}) = -0,0666$ y el coeficiente

$$c_{yp} = c_{yp_0} + c_{yp\Omega}. \quad (10.250)$$

Empleando (10.241)

$$c_{yp_0} = 4\lambda_{\text{máx. t}}\alpha\tilde{p}\int_0^1 \bar{x}(2-\bar{x})[(1-\bar{x})/\lambda_{\text{máx. t}}]\,d\bar{x} = 0{,}2083;$$

$$c_{yp\Omega} = 8\lambda_{\text{máx. t}}\omega_z\int_0^1 \bar{x}(2-\bar{x})[(1-\bar{x})/\lambda_{\text{máx. t}}](\bar{x}-\bar{x}_{\text{m}})\,d\bar{x} = -0{,}00555;$$

$$c_{yp} = c_{yp_0} + c_{yp\Omega} = 0{,}2028.$$

Las respectivas derivadas

$$c_{yp}^{\alpha} = \tilde{p} = 2{,}083; \quad c_{yp}^{\omega_z} = 8\,(0{,}1167 - 0{,}25\bar{x}_{\text{m}}) = -0{,}6664.$$

El coeficiente del momento $m_{zp} = m_{zp_0} + m_{zp\Omega}$. Utilizando (10.243), obtenemos

$$m_{zp_0} = -4\lambda_{\text{máx. t}}\tilde{p}\alpha\int_0^1 \bar{x}^2(2-\bar{x})[(1-\bar{x})/\lambda_{\text{máx. t}}]\,d\bar{x} = -0{,}09723;$$

$$m_{zp\Omega} = -8\omega_z\lambda_{\text{máx. t}}\int_0^1 \bar{x}^2(2-\bar{x})(\bar{x}-\bar{x}_{\text{m}})[(1-\bar{x})/\lambda_{\text{máx. t}}]\,d\bar{x} = 0{,}001779;$$

$$m_{zp} = m_{zp_0} + m_{zp\Omega} = -0{,}09545$$

y las derivadas $m_{zp}^{\alpha} = -0{,}4668\ \tilde{p} = -0{,}9723$; $m_{zp}^{\omega_z} = -8\,(0{,}06667 - 0{,}1167\,\bar{x}_{\text{m}}) = 0{,}2152$.

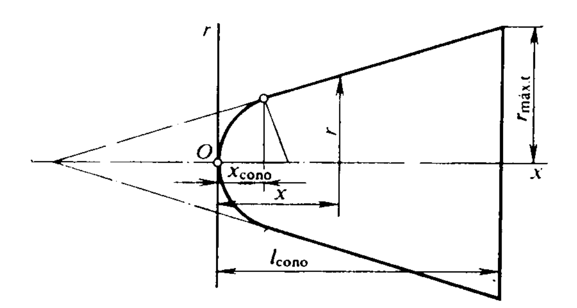


Fig. 10.45. Cono con nariz esférica

Calculemos los coeficientes de los centros de presión:

$$c_{p_0} = -m_{zp_0}/c_{yp_0} = 0{,}4668\tilde{p}\alpha/(\tilde{p}\alpha) = 0{,}4668;$$

$$c_{p\Omega} = -m_{zp\Omega}/c_{yp\Omega} = 8\omega_z\,(0{,}06667 - 0{,}1167\,\bar{x}_{\text{m}})/[8\omega\,(0{,}1167 - 0{,}25\,\bar{x}_{\text{m}})] = 0{,}3229;$$

$$c_{\text{p}} = -m_{zp}/c_{yp} = 0{,}466.$$

10.66. El esquema de un sólido cónico con punta esférica se aduce en la fig. 10.45. Con el fin de calcular sus características aerodinámicas hacemos uso de las siguientes dependencias. El coeficiente de la fuerza axial

$$c_{xp} = c_{xp_0} + \Delta c_{xp\Omega}, \tag{10.251}$$

donde

$$c_{xp_0} = 2 \text{ sen}^2\beta_{\text{cono}} + \text{sen}^2\alpha\,(1 - 3 \text{ sen}^2\beta_{\text{cono}}) + \\ + \bar{R}_T^2 \cos^2\beta_{\text{cono}}\,(1 - 0{,}5 \cos^2\beta_{\text{cono}})\,(2 - 3 \text{ sen}^2\alpha). \quad (10.252)$$

Para $\beta_{\text{cono}} = 15°$; $\alpha = 15°$; $\bar{R}_T = 0{,}5$, el coeficiente $c_{xp_0} = 0{,}3833$.

El valor adicional del coeficiente

$$\Delta c_{xp\Omega} = B_1 - \bar{x}_m B_2. \quad (10.253)$$

Aquí $B_1 = (2\omega_z/\bar{l})\, b_1 \text{ sen } \alpha$; $B_2 = 2\omega_z b_3 \text{ sen } \alpha \cos^2\beta_{\text{cono}}$.

La longitud del cono sin obtuse $l'_{\text{cono}} = r_{\text{máx.t}}/\text{tg } \beta_{\text{cono}} = 3{,}732$ m; la longitud relativa $\bar{l} = l_{\text{cono}}/l'_{\text{cono}} = 1 - \bar{R}_T\,(1 - \text{sen } \beta_{\text{cono}})/\cos\beta_{\text{cono}} = 0{,}8082$; la longitud del cono con obtuse $l_{\text{cono}} = 0{,}8082\ l'_{\text{cono}} = 3{,}016$ m, los parámetros

$$\omega_z = \Omega_z l_{\text{cono}}/V_\infty = 0{,}01005; \ b_1 = 2/3 - \bar{R}_T \cos\beta_{\text{cono}}\,(1 - \text{sen } \beta_{\text{cono}}) + \\ + \bar{R}_T^3 \cos^3\beta_{\text{cono}}\,(2 - 3 \text{ sen } \beta_{\text{cono}})/6 = 0{,}4465; \ b_3 = 1 - 0{,}5\,\bar{R}_T \cos^2\beta_{\text{cono}} = \\ = 0{,}8834;$$

$$B_1 = 0{,}002874; \quad B_2 = 0{,}004287.$$

El valor adicional del coeficiente de la fuerza axial $\Delta c_{xp\Omega} = 0{,}00143$. El valor sumario de este coeficiente $c_{xp} = c_{xp_0} + \Delta c_{xp\Omega} = 0{,}3847$.

El coeficiente de la fuerza normal

$$c_{yp} = c_{yp_0} + \Delta c_{yp\Omega}; \quad (10.254)$$

$$c_{yp_0} = \cos^2\beta_{\text{cono}} \text{ sen } 2\alpha\,(1 - 0{,}5\,\bar{R}_T^2 \cos^2\beta_{\text{cono}}) = 0{,}4121;$$

$$\Delta c_{yp\Omega} = A_1 - \bar{x}_m A_2;$$

$$A_1 = (2\omega_z/\bar{l})\, b_1 \cos\alpha = 0{,}01073; \ A_2 = 2\omega_z b_3 \cos\alpha \cos^2\beta_{\text{cono}} = 0{,}016;$$

$$\Delta c_{yp\Omega} = 0{,}00012; \quad c_{yp} = c_{yp_0} + c_{yp\Omega} = 0{,}4122.$$

El coeficiente del momento de cabeceo (respecto del centro de rotación)

$$m_{zp} = m_{zp_0} + \Delta m_{zp\Omega}. \quad (10.255)$$

Determinemos este coeficiente para el vértice de la punta:

$$m'_{zp_0} = -(\cos^2\beta_{\text{cono}} \text{ sen } 2\alpha/\bar{l})\ [(2/3)/\cos^2\beta_{\text{cono}} - (1 - \bar{l}) + \\ + (1/6)\,\bar{R}_T^3 \cos^3\beta_{\text{cono}}\,(2 - 3 \text{ sen } \beta_{\text{cono}})] = -0{,}315,$$

y, a continuación, lo recalculamos para el centro de rotación:

$$m_{zp_0} = c_{yp_0}\,(x_m/l_{\text{cono}}) + m'_{zp_0} = -0{,}082.$$

En definitiva calculamos:

$$\Delta m_{zp\Omega} = -F + 2A_1\bar{x}_m - A_2\bar{x}_m^2; \ F = (2\omega_z/l^2)\ (\cos\alpha/\cos^2\beta_{\text{cono}})\ (b_1^2 + b_5)/b_3;$$

$$b_5 = (1/18) - \bar{R}_T^2 \cos^2\beta_{\text{cono}}/4 + (2\bar{R}_T^3/9) \cos^3\beta_{\text{cono}} - (\bar{R}_T^6/36) \cos^6\beta_{\text{cono}} = \\ = 0{,}02224;$$

$$F = 0{,}02188, \quad \Delta m_{zp\Omega} = -0{,}003369; \ m_{zp} = m_{zp_0} + \Delta m_{zp\Omega} = 0{,}0791.$$

En correspondencia con los resultados obtenidos el coeficiente del centro de presión respecto del centro de rotación $c_p = m_{zp}/c_{yp} = 0{,}0791/0{,}4122 = 0{,}192$. Es fácil notar que la rotación del sólido conduce a la aparición de un momento inestabilizador adicional y, como consecuencia, al mayor desplazamiento del centro de presión con relación al de rotación.

Capítulo 11

Interferencia aerodinámica

Debido a la influencia mutua de los flujos de gas que circulan alrededor (a lo largo) de elementos por separado del vehículo volante (el fuselaje, las alas, el empenaje y los órganos de mando) las fuerzas de presión y rozamiento se redistribuyen por sus superficies, en comparación con el caso cuando dichos elementos, con las mismas condiciones, fuesen sometidos a la circulación de forma autónoma (aislada). Esto conduce a que al determinar las características aerodinámicas de los vehículos volantes sea preciso tener en cuenta los efectos de *la interferencia aerodinámica.*

En las preguntas y los problemas del presente capítulo se exponen los fundamentos de la interferencia aerodinámica, ya que su conocimiento permite con suficiente precisión y certeza determinar las características aerodinámicas del vehículo volante como un todo único. En particular se estudian los conceptos *de coeficientes de interferencia* y su importancia en los métodos de cálculo de dichas características. Son mostrados los procedimientos para su determinación partiendo de la teoría del sólido delgado y con ayuda de las ecuaciones linealizadas de movimiento de los gases.

El cálculo de las características aerodinámicas, tomando en consideración la interferencia, se realiza para los vehículos volantes tanto de configuración plana (tipo "fuselaje—ala horizontal"), como en forma de cruz en el flujo sin balanceo o con él. Con ello, con suficiente detalle se exponen los métodos de cálculo de la distribución de la presión por el fuselaje y el ala (empenaje) y de los coeficientes aerodinámicos sumarios. Tales cálculos se ofrecen tomando en consideración la compresibilidad del flujo, su deflexión y remanso, debidos a las partes del vehículo volante situadas por delante. En semejante caso se presta atención a la influencia que ejerce el diedro del ala, su posición a lo largo del fuselaje y su forma en la planta, así como la presencia de la capa límite desarrollada.

Una serie de problemas y preguntas está ligada al cálculo de los efectos de interferencia entre el empenaje y el ala tanto para velocidades subsónicas, como supersónicas, teniendo en cuenta la influencia del ángulo de ataque y de las ondas de choque. En lo que atañe a estas preguntas y problemas se aducen procedimientos eficaces de cálculo aerodinámico sobre la base del *método de reversibilidad* de los flujos, que permite hallar las características de interferencia de la circulación alrededor de los aparatos con deflexiones de los timones aerodinámicos de la posición neutra.

Aquí también se expone la determinación de las características de interferencia de los vehículos volantes cuando la circulación es inuniforme. Una serie de preguntas y problemas está ligada con la búsqueda de las derivadas sumarias de la estabilidad para combinaciones de unidades delgadas de vehículos volantes alrededor de los cuales circulan flujos subsónicos y supersónicos. Semejantes combinaciones pueden realizarse según los esquemas "fuselaje — ala (timones)" o bien "fuselaje — ala — empenaje (timones)".

Además, aquí se describen los procedimientos para hallar las derivadas sumarias de la estabilidad de configuraciones complicadas de vehículos volantes obtenidas en la teoría no estacionaria aerodinámica del sólido delgado (esbelto).

Problemas y preguntas

11.1. ¿Qué es la interferencia aerodinámica?

11.2. ¿Cómo variará la fuerza de sustentación de un ala aislada (o del empenaje) si la unimos al fuselaje?

11.3. ¿Cuándo es mayor la fuerza de sustentación del fuselaje: al estar éste aislado o al unirle el ala?

11.4. ¿Cómo se determinan las dimensiones de las zonas de influencia del ala y el empenaje en un flujo linealizado supersónico?

11.5. ¿Por qué razón la teoría aerodinámica del sólido delgado, que no asegura suficiente precisión al calcular las características aerodinámicas de vehículos volantes reales, resulta ser útil para resolver los problemas de interferencia aerodinámica?

11.6. Hallen el coeficiente de la fuerza de sustentación de un ala, instalada en un fuselaje en forma de sólido de revolución delgado, si conocemos los valores de dicho coeficiente para todo el modelo del vehículo volante $c_{y\ \mathrm{ala(f)}} = 1{,}9$, así como los valores de $K_{\mathrm{f.int}} = c_{y\ \mathrm{f}}/c_{y\ \mathrm{ala}} = 0{,}5$; $K_{\mathrm{ala}} = \Delta c_{y\ \mathrm{ala(f)}}/c_{y\ \mathrm{ala}} = 1{,}45$ y $K_{\mathrm{f}} = \Delta c_{y\mathrm{f(ala)}}/c_{y\ \mathrm{ala}} = 0{,}8$. Aquí $c_{y\ \mathrm{ala}}$, $c_{y\ \mathrm{f}}$ son los coeficientes de la fuerza de sustentación del ala y el fuselaje, respectivamente; $\Delta c_{y\ \mathrm{ala(f)}}$, $\Delta c_{y\ \mathrm{f(ala)}}$, los coeficientes análogos para el ala al haber fuselaje y para éste al haber ala; K_{ala}, K_{f}, los correspondientes coeficientes de interferencia.

11.7. Determinen el coeficiente de la fuerza de sustentación del fuselaje aislado de un vehículo volante, si el radio de dicho fuselaje $r = 1$ m, la semienvergadura del ala $s_m = 2$ m, el coeficiente de la fuerza de sustentación del vehículo $c_{y\ \mathrm{f(ala)}} = 1{,}72$ y del ala aislada $c_{y\ \mathrm{ala}} = 0{,}637$.

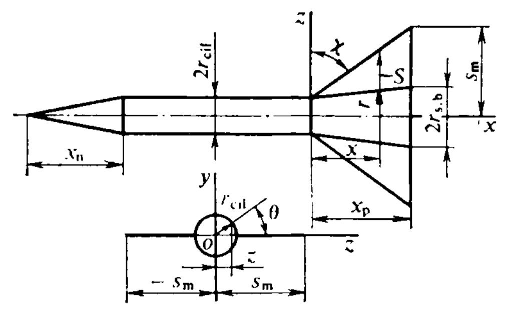


Fig. 11.1. Esquema de un fuselaje con empenaje:
$x_{\mathrm{n}} = 3$ m; $x_{\mathrm{p}} = 3$ m; $r_{\mathrm{cil}} = 0{,}5$ m; $r_{\mathrm{s.b}} = 0{,}8$ m
$s_m = 3{,}2$ m

Fig. 11.2. Fuselaje con empenaje cruciforme:
$r = 0{,}5$ m; $s_m = 3{,}5$ m; $x_{\mathrm{p}} = 3$m; $x_{\mathrm{c}} = 12$ m

11.8. ¿Cómo influye el ahusamiento del ala sobre los coeficientes de interferencia K_{f} y K_{ala}?

11.9. Explique el efecto físico de la influencia de la capa límite del fuselaje sobre los coeficientes de interferencia K_{f} y K_{ala}.

11.10. ¿En qué casos y por qué hay que tener en cuenta la influencia que ejerce la parte del fuselaje situada delante del ala (empenaje) sobre los coeficientes K_{f} y K_{ala}?

11.11. ¿Qué influencia ejerce la interferencia sobre la posición de los centros de presión de las semialas y el fuselaje?

11.12. Un sólido de revolución delgado con empenaje (alas) en forma de placas planas triangulares se encuentra en un flujo supersónico de aire ($k = 1{,}4$) con número $M_\infty = 1{,}5$ y presión $p_\infty = 9{,}807 \cdot 10^4$ Pa bajo pequeño ángulo de ataque $\alpha = 0{,}1$. Hallen la distribución de la presión en el empenaje, así como las fuerzas aerodinámicas aplicadas al vehículo volante. La forma y las dimensiones del vehículo se ofrecen en la fig. 11.1.

11.13. Expliquen el sentido físico de la interferencia entre el fuselaje y el ala instalada sobre él al haber ángulo de inclinación lateral (balanceo).

11.14. ¿Cómo varía la fuerza de sustentación en una combinación plana «fuselaje — ala» al aparecer ángulo de balanceo?

11.15. ¿Qué sucede con la fuerza lateral (en sentido del eje Oz) de una combinación plana del fuselaje y el ala de grosor nulo al haber ángulo de balanceo (fig. 11.2)?

11.16. Un sólido delgado de revolución con alas en forma de placas triangulares (fig. 11.1), en movimiento bajo ángulo de ataque $\alpha = 0{,}1°$, gira a un ángulo de balanceo $\varphi = 20°$. Calcular las características aerodinámicas del vehículo volante a condición de que el número $M_\infty = 1{,}5$, $p_\infty = 9{,}807 \cdot 10^4$ Pa.

11.17. ¿En qué consiste la singularidad de la interferencia (en los márgenes de la teoría aerodinámica del sólido delgado) de un fuselaje y de un ala cruciforme situada en él, en comparación con la combinación plana?

11.18. ¿En qué caso el centro de presión se desplaza más: para las fuerzas de interferencia con $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ o para las fuerzas provocadas por el balanceo ($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$)?

11.19. ¿A qué es igual el momento de balanceo de una combinación cruciforme con iguales semialas, que se encuentra en un flujo débilmente perturbado supersónico bajo los ángulos de ataque α y de deslizamiento β?

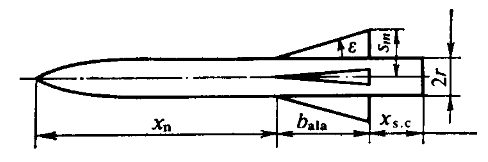


Fig. 11.3. Vehículo volante en forma de una combinación cruciforme:
$x_n = 4{,}5$ m; $b_{ala} = 4$ m; $x_{s.c} = 2{,}67$ m; $r = 0{,}75$ m; $s_m = 2{,}75$ m

11.20. ¿Cómo influye la interferencia del ala con el fuselaje sobre la posición del centro de presión de un vehículo volante, en forma de una combinación cruciforme delgada, situado en un flujo débilmente perturbado supersónico bajo ángulos de ataque y deslizamiento?

11.21. ¿Cómo variará, al disminuir el número M_∞, la influencia de la sección de cola del fuselaje situada detrás de las semialas (fig. 11.3) sobre las características aerodinámicas de un vehículo volante?

11.22. ¿Cómo se desplazará el centro de presión de un vehículo volante bajo la influencia de la sección de cola del fuselaje situada tras las semialas (fig. 11.3)?

11.23. ¿De qué modo se toma en consideración la influencia del remanso del flujo sobre la interferencia del ala y el fuselaje?

11.24. Determinen las características aerodinámicas de un vehículo volante en forma de la combinación cruciforme del fuselaje y de semialas delgadas triangulares a condición de que el número $M_\infty = 1{,}5$, la presión $p_\infty = 9{,}807 \cdot 10^4$ Pa, el ángulo de ataque $\alpha = 0{,}1$, el ángulo de balanceo $\varphi = 20°$. La forma y las dimensiones del vehículo se muestran en la fig. 11.2.

11.25. Con arreglo a la interferencia calculen las fuerzas y los momentos que actúan en la semiala derecha, en forma de ala triangular en el fuselaje, así como sobre toda la combinación cruciforme «ala — fuselaje» (las dimensiones se muestran en la fig. 11.3), si los ángulos $\alpha_c = 0{,}3°$, $\varphi = 22{,}5°$, el número $M_\infty = 2$. Durante los cálculos se adopta que el eje del momento longitudinal pasa por el punto del borde de ataque que se halla en el lugar de unión del ala con el fuselaje.

11.26. ¿Por qué las fuerzas normal y transversal, que actúan en las semialas inferior y superior y vienen condicionadas por la interferencial al inclinar lateralmente una configuración cruciforme, están entre sí dirigidas al encuentro?

11.27. Expliquen la causa del surgimiento del momento inestabilizante durante el balanceo de una configuración cruciforme.

11.28. ¿Cuál es la causa del surgimiento del momento adicional de balanceo que eleva la estabilidad transversal estática de una configuración plana durante el deslizamiento?

11.29. ¿Cómo influye la disposición no central del ala sobre el momento de balanceo?

11.30. Expliquen la influencia del diedro de la superficie de sustentación sobre la estabilidad estática lateral (de balanceo).

11.31. ¿Cómo influye la separación de la capa límite por sotavento del fuselaje sobre el momento de balanceo de las configuraciones plana y cruciforme?

11.32. ¿En qué consiste la naturaleza física de la interferencia entre el empenaje y el ala situada delante de él?

11.33. ¿Qué ala deflexiona en mayor grado el flujo: la aislada o la unida al fuselaje?

11.34. ¿Qué es el modelo simplificado vorticial de la combinación «fuselaje — ala» a velocidades supersónicas?

11.35. ¿Qué es el coeficiente de interferencia del ala y el empenaje i_{emp}?

11.36. ¿Cómo se determinan las coordenadas de un vórtice libre?

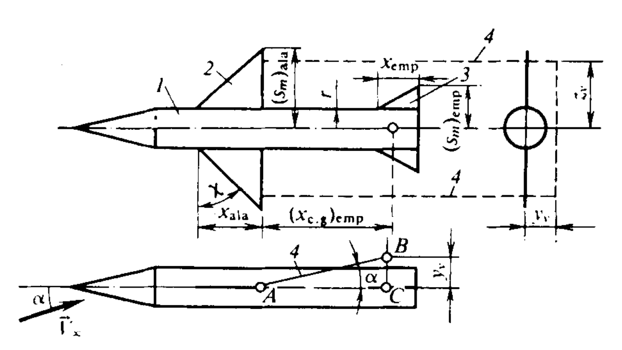


Fig. 11.4. Esquema y dimensiones de un fuselaje (*1*) con alas (*2*), empenaje (*3*) y haz vorticial (*4*):

$(s_m)_{ala} = 2{,}5$ m; $(s_m)_{emp} = 1{,}5$ m; $(x_{c.g})_{emp} = 4$ m; $x_{ala} = 2$ m; $x_{emp} = 1{,}5$ m; $r = 0{,}5$ m

11.37. Expliquen el principio de cálculo del coeficiente de interferencia i_{emp} mediante el método de reversibilidad del flujo?

11.38. ¿Cómo influyen el ángulo de ataque y las ondas de choque sobre la eficacia del empenaje situado tras el ala?

11.39. ¿De qué modo se tiene en cuenta el remanso del flujo tras el ala al calcular el coeficiente de la fuerza normal del empenaje?

11.40. En la fig. 11.4 se ofrece el esquema y se dan las dimensiones de un vehículo volante que es la combinación del fuselaje, las alas y el empenaje en forma de placas delgadas triangulares. Determinen la eficacia del empenaje a condición de que el número $M_\infty = 1{,}5$ y el ángulo de ataque $\alpha = 0{,}1$.

11.41. ¿En qué consiste la diferencia entre los controles aerodinámicos, gasodinámicos y combinados?

11.42. ¿Cuál es la aplicación de los alerones y qué efectos aerodinámicos acompañan a su funcionamiento?

11.43. ¿En qué consiste la particularidad de los alerones diferenciales?

11.44. Aduzcan la determinación de los timones aerodinámicos. ¿Con qué características se aprecia la eficacia de los timones de altura, así como de los de dirección y los alerones?

11.45. ¿ Qué significa la controlabilidad del vehículo volante? ¿Cómo se manifiesta su relación mutua con la maniobrabilidad y la estabilidad estática?

11.46. ¿En qué consiste la esencia y cuál es la conclusión fundamental del método de reversibilidad de los flujos?

11.47. Caractericen los límites de aplicación del método de reversibilidad de los flujos.

11.48. Empleando la relación fundamental del método de reversibilidad de los flujos

$$\int_S\int \Delta\bar{p}_1\alpha_2\,dS=\int_S\int \Delta\bar{p}_2\alpha_1\,dS, \qquad (11.1)$$

deduzcan la correspondiente dependencia para la combinación «fuselaje — ala — alerón del extremo» si los ángulos de ataque del fuselaje y el ala $\alpha = 0$, el alerón está girado al ángulo δ, mientras que en el flujo invertido la combinación se sitúa bajo un ángulo común de ataque igual a $\alpha = \delta$.

11.49. ¿En qué consiste el sentido de la fórmula $Y_t/Y_{ala} = K_{ala}$?

11.50. ¿Qué hipótesis sirvió de base al obtener la relación $k_t/k_{ala} = K_t/K_{ala}$?

11.51. ¿Qué influencia ejercen las ranuras entre el ala giratoria y el fuselaje sobre la interferencia aerodinámica? ¿De qué forma puede disminuirse dicha influencia?

11.52. ¿Cómo hallar la variación del esfuerzo de control creado por el ala giratoria, si el ángulo de flecha del eje de giro $\chi_t < 90°$?

11.53. Empleando la teoría aerodinámica del sólido delgado, analicen la influencia que ejerce la forma de la superficie de control en la planta sobre el valor de la fuerza que ella crea y el correspondiente coeficiente aerodinámico.

11.54. Calculen el coeficiente de la fuerza de sustentación del ala con timón a una velocidad de vuelo $M_\infty = 0{,}6$ bajo ángulo de ataque $\alpha = 5°$. Características

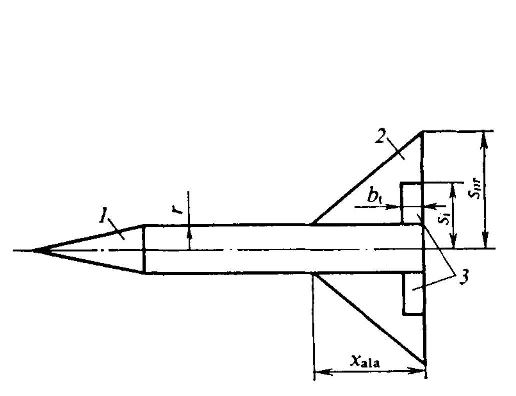


Fig. 11.5. Forma y dimensiones del vehículo volante:

1, fuselaje; 2, ala; 3, timón; $s_m = 2{,}5$ m; $s_t = 1{,}25$ m; $r = 0{,}5$ m; $x_{ala} = 2$ m

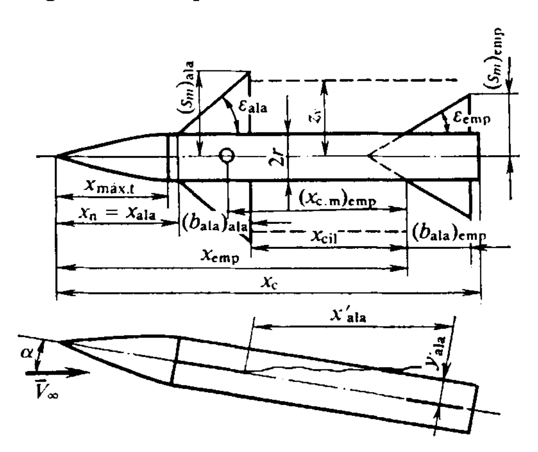
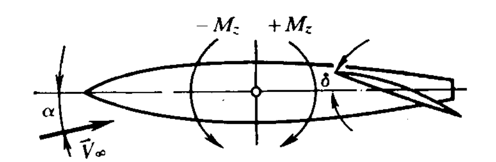


Fig. 11.6. Vehículo volante en forma de una combinación plana «fuselaje—ala triangular—empenaje triangular»:

$x_n = 3{,}75$; $(b_{ala})_{ala} = 2{,}25$; $x_{cil} = 3{,}16$; $x_c = 10{,}5$; $(b_{ala})_{emp} = 1{,}25$; $(s_m)_{ala} = 2{,}81$; $(s_m)_{emp} = 1{,}81$; $2r = 1{,}125$; $\alpha = 5°$; $\varepsilon = 45°$

geométricas del ala: $\lambda_{a\,la} = 8/3$; $\eta = 2$; $\chi_{b.a} = 45°$; $\bar{c} = 0{,}1$. El ángulo de ataque que corresponde a la fuerza de sustentación nula $\alpha_0 = -2°$. Los parámetros del timón: $\bar{S}_t = 0{,}4$; $\bar{b}_{t.m} = 0{,}2$, el ángulo de desviación $\delta_t = 60°$.

11.55. Sobre el fuselaje delgado de un vehículo volante de radio $r = 0{,}6$ m está instalada una superficie de control en forma de ala giratoria (placa) de semienvergadura $s_m = 1{,}5$ m. Esta ala aislada, durante el vuelo con ángulo de ataqne $\alpha = 5°$, crea una fuerza de sustentación $Y_{a\,la} = 9000$ N. Determinen las componentes de la fuerza de mando Y_t que surgen en el fuselaje $(\Delta Y)_{f(a\,la)\delta}$ y en las semialas $(\Delta Y)_{a\,la(f)\delta}$ al girar éstas a un ángulo $\delta = 5°$, si el valor del ángulo de ataque del vehículo volante (fuselaje) es $\alpha = 5°$.



11.56. Calculen el coeficiente de la fuerza de mando (de sustentación) creada por un timón que es parte de la superficie exterior del ala. Semejante ala se desplaza a una velocidad correspondiente al número $M_\infty = 1{,}5$ y el timón está girado a un ángulo $\delta = 0{,}1$. La forma y dimensiones del ala en el sector de la superficie del timón se muestran en la fig. 11.5.

11.57. Determinen la eficacia de un control en forma de ala móvil (fig. 11.5) a condición de que el número $M_\infty = 1{,}5$ y el ángulo de giro del timón $\delta = 0{,}1$.

11.58. Calculen la eficacia longitudinal y transversal de las semialas, por completo móviles, del empenaje de cola con $M_\infty = 2$ para la combinación «fuselaje — ala — empenaje», cuyas dimensiones y forma se ofrecen en la fig. 11.6. El centro de masas de la combinación está situado a una distancia $(x_{c.m})_{emp} = 3{,}95$ del punto delantero de la cuerda de raíz del empenaje.

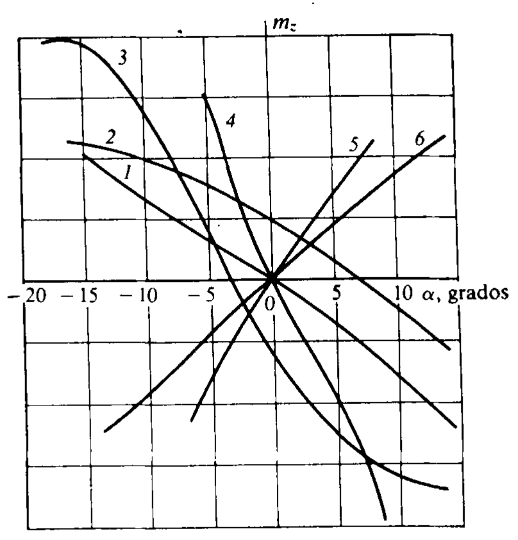


Fig. 11.7. Momento de cabeceo en diversos vehículos volantes

11.59. En la fig. 11.7 se muestra la variación del coeficiente del momento de cabeceo $m_z(\alpha)$, medido con relación al centro de masas de distintos modelos de un vehículo volante. Estos modelos son bien un fuselaje aislado, o bien un sólido de revolución con empenaje giratorio de cola. ¿A qué tipo de equilibrio longitudinal del vehículo volante corresponde cada curva en la figura? Indiquen la disposición aproximada del centro de masas en los modelos (¿delantera o posterior?). Determinen en la figura el valor aproximado del ángulo de ataque de trimado α_{tr}, indiquen el tipo de modelo (con o sin empenaje), así como el carácter de la disposición del empenaje.

11.60. Representen de modo gráfico la dependencia entre el coeficiente de la fuerza de sustentación c_{y_a} y el ángulo de ataque α para las alas con slat y flap. ¿En qué consiste la diferencia entre estas dependencias?

11.61. Representen la polar del ala $c_{y_a}(c_{x_a})$ sin dispositivos hipersustentadores y con los flaps desplegados y expliquen cómo y por qué varía la fuerza de sus-

tentación, la resistencia y la eficacia del ala al desviar los flaps. Indiquen cómo influye dicha desviación sobre el ángulo crítico de ataque y el número crítico de Mach.

11.62. De manera gráfica muestren la dependencia aproximada entre el coeficiente del momento respecto a la charnela m_{char} y el ángulo de desviación del timón de altura δ y el ángulo de ataque del empenaje solitario α (fig. 11.8). El signo del momento se considera positivo en el sentido del encabritado (aumento de los ángulos de ataque).

11.63. Calculen el coeficiente del momento respecto a la charnela en caso de $M_\infty = 2$; $\alpha = 0{,}1$; $\delta = 0{,}2$ para un control por completo móvil de forma triangu-

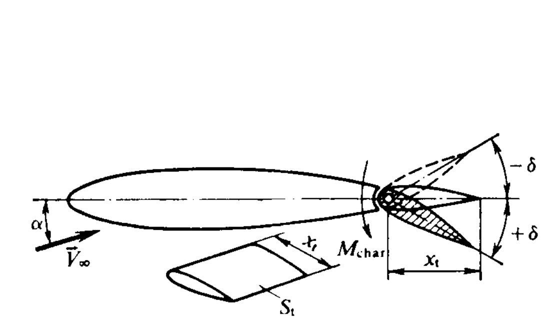


Fig. 11.8. Esquema del timón de altura

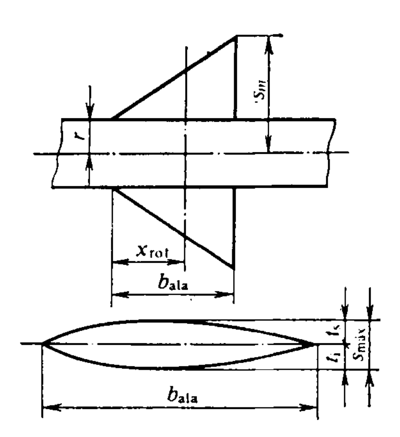


Fig. 11.9. Control en el ejemplo de cálculo: $r = 1$ m; $s_m = 4$ m; $x_{rot} = 2$ m; $b_{ala} = 3$ m; $s_{máx} = 0{,}05$ m; $t_s = t_1 = 0{,}025$ m

lar y con las dimensiones dadas en la fig. 11.9. El perfil del timón es simétrico, biconvexo, de grosor relativo $\bar{s}_{máx} = s_{máx}/b_{ala} = 0{,}05$.

11.64. Para la combinación «fuselaje — ala — empenaje» (véase la fig. 11.4) determinen los coeficientes aerodinámicos de la fuerza de sustentación a condición de que las alas y el empenaje desempeñan simultáneamente el papel de dispositivos de control, que giran respecto al fuselaje a los ángulos $\delta_{ala} = 0{,}05$ y $\delta_{emp} = 0{,}1$, respectivamente. El número de Mach del flujo en circulación $M_\infty = 1{,}5$, la presión $p_\infty = 9{,}807 \cdot 10^4$ Pa, el ángulo de ataque $\alpha = 0{,}1$.

11.65. Determinen la fuerza de mando (de sustentación) de un timón que es parte de la superficie exterior (trasdós) del ala y se desvía a un ángulo $\delta = 0{,}1$. Las dimensiones y la forma del ala y del sector del timón están representadas en la fig. 11.10. El número de Mach del flujo en circulación $M_\infty = 1{,}5$.

11.66. Calculen las características aerodinámicas de un modelo plano de la combinación «fuselaje — ala — empenaje» (fig. 11.11) para $M_\infty = 2{,}68$. Todos los parámetros geométricos lineales, dados en la figura, son adimensionales y están referidos al radio de la parte cilíndrica del fuselaje, la distancia relativa desde el borde de ataque hasta el centro de rotación $\bar{x}_{rot} = 10{,}5$.

11.67. Determinen las características aerodinámicas de un vehículo volante en forma de la combinación plana (o bien cruciforme) del fuselaje y las semialas de cola triangulares. La velocidad de vuelo $V_\infty = 510$ m/s, el ángulo de ataque

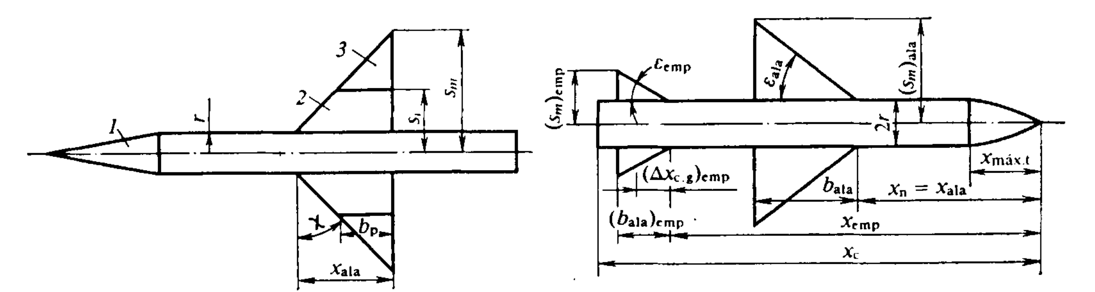


Fig. 11.10. Vista en la planta y dimensiones del vehículo volante:
1, fuselaje; 2, ala; 3, timón; $x_{ala}=2$ m; $s_I=1,5$ m; $r = 0,5$ m; $b_t = 0,25$ m; $s_m = 2,5$ m

Fig. 11.11. Modelo de un fuselaje con alas y empenaje:
$x_{ala} = 10,7$ m; $b_{ala} = 4,7$ m; $(b_{ala})_{emp} = 1,5$ m; $r = 1$; $x_c = 21$ m; $(s_m)_{ala}=4,1$ m; $(s_m)_{emp} = 2$ m; $x_{máx.t} = 5,5$ m; $x_{emp} = 18$ m

$\alpha_c = 0,1$; el movimiento transcurre sin balanceo ($\varphi = 0$) o con él ($\varphi = 60°$). La forma y las dimensiones (m) del vehículo volante se ofrecen en la fig. 11.12.

11.68. Expliquen qué componentes constituyen la resistencia completa X_a del vehículo volante al haber fuerza de sustentación. Escriban la fórmula desarrollada para el coeficiente de esta fuerza c_{x_a} e indiquen cuándo y qué sumandos pueden ser despreciados.

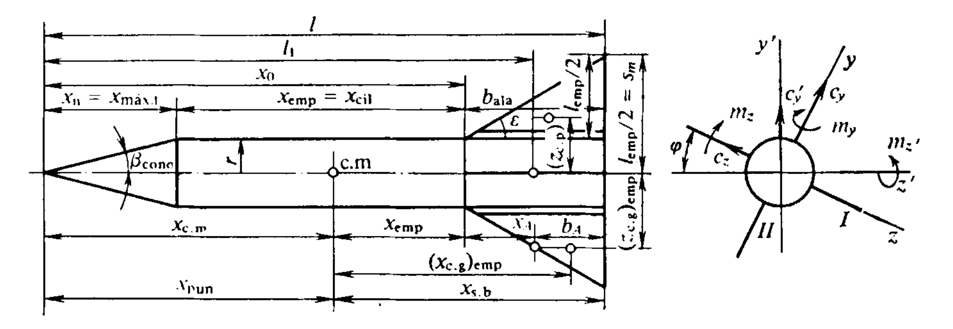


Fig. 11.12. Esquema de un vehículo volante con empenaje plano (*I*) y cruciforme (*II*):
$r = 0,5$ m; $x_n = 5$ m; $x_{emp} = x_{cil} = 7$ m; $b_{ala} = 3$ m; $\varepsilon = 45°$

11.69. ¿Por qué cuando las alas o el empenaje están situados en los sectores de sección decreciente o creciente del fuselaje la influencia de la interferencia sobre su resistencia puede ser considerable?

11.70. ¿En qué consiste la regla de las áreas y cuál es su aplicación práctica?

11.71. Determinen las derivadas de la estabilidad de un fuselaje con empenaje de cola para $M_\infty = 1,5$ y 2. La forma y las dimensiones del fuselaje y el empenaje se muestran en la fig. 11.13. La distancia desde la nariz del vehículo hasta el centro de masas $x_m = 6$ m.

11.72. Según el planteamiento del problema 11.71 determinen las derivadas $c_y^{\omega_z A}$ y $m_z^{\omega_z A}$ tomando como parámetros geométricos característicos el área de las semialas aisladas del empenaje y su cuerda aerodinámica media.

11.73. Empleando los resultados de la teoría linealizada de la circulación no estacionaria alrededor de las semialas aisladas del empenaje, calculen las deriva-

das de la estabilidad del sector del vehículo volante correspondiente al empenaje cuando $M_\infty = 1{,}5$. La forma y las dimensiones del vehículo se muestran en la fig. 11.13. La coordenada del centro de masas $x_m = 6$ *m*.

11.74. Determinen las derivadas aerodinámicas de un vehículo volante en forma de la combinación «fuselaje — ala cruciforme — empenaje plano» con $M_\infty =$

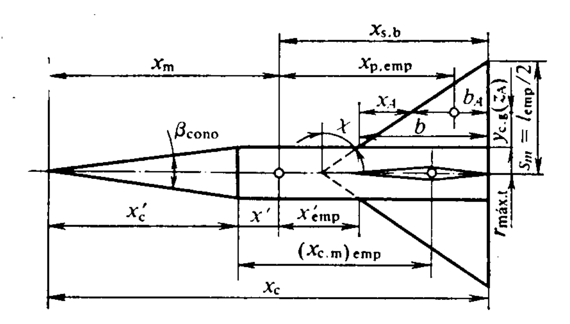


Fig. 11.13. Forma y dimensiones de un sólido de revolución con empenaje:
$x_c = 11{,}5$ m; $x'_c = 5$ m; $r_{máx.t} = 0{,}75$ m; $x_m = 6$ m; $s_m = 3$ m; $\chi = 55°$

$= 1{,}5$. La forma y las dimensiones del vehículo se ofrecen en la fig. 11.14. El centro de masas del vehículo dista de la nariz del mismo $x_m = 12$ m.

11.75. Determinan las derivadas de la estabilidad de un vehículo volante cuya forma y dimensiones se muestran en la fig. 11.15. El centro de masas (c. m) del vehículo dista de la nariz del mismo $x_m = 12$ m; los números de Mach del flujo en circulación $M_\infty = 0{,}8$; 0,995 y 1,5.

11.76. Según el método de las masas asociadas, determinen las derivadas de la estabilidad de un vehículo volante en forma de un sólido de revolución delgado con nariz cónica, equipado con empenaje de tres semialas. La forma y las dimensiones de este vehículo se dan en la fig. 11.16.

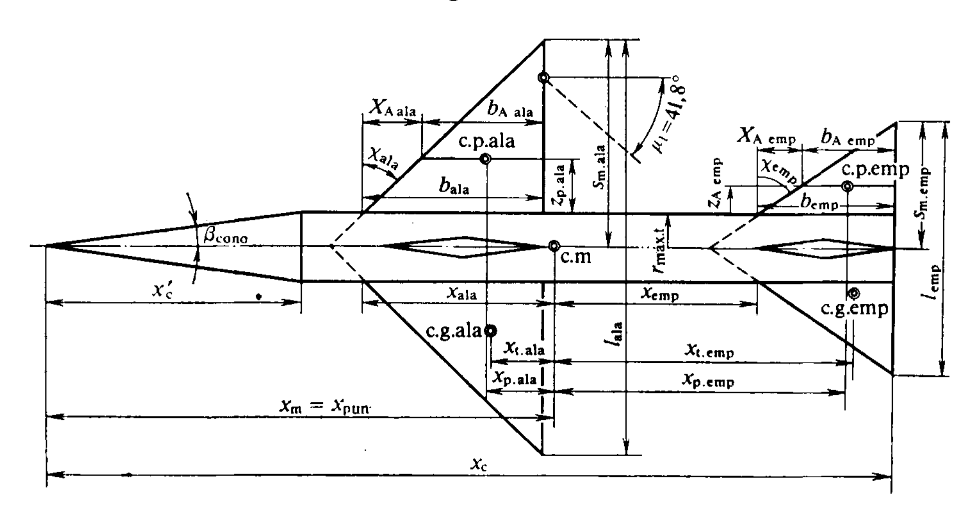


Fig. 11.14. Esquema de la combinación «fuselaje—ala cruciforme—empenaje cruciforme»:
$x_c = 20$ m; $x'_c = 5$ m; $r_{máx.t} = 0{,}75$ m; $x_{ala} = 4{,}3$ m; $\chi_{ala} = 45°$; $\chi_{emp} = 55°$; $(s_m)_{ala} = 5$ m; $(s_m)_{emp} = 3$ m

Fig. 11.15. Forma y dimensiones de un vehículo volante con empenaje no simétrico: $x_c = 20$ m; $x_m = 12$ m; $x_c' = 5$ m; $r_{máx.t} = 0,75$ m; $s_m = 5$ m; $\chi = 63,5°$

11.77. De acuerdo con los resultados en la solución del problema 11.76 determinen la posicion de los centros de presión para los movimientos de cabeceo y de guiñada del empenaje de tres semialas del vehículo volante y analicen su estabilidad.

11.78. Empleando el método de las masas asociadas, calculen las derivadas del coeficiente del momento de balanceo de la combinación de tres semialas del vehículo volante, cuya forma y dimensiones se representan en la fig. 11.16.

11.79. Utilizando el método de las masas asociadas, calculen las derivadas de la estabilidad de un vehículo volante de tres semialas que efectúa movimientos

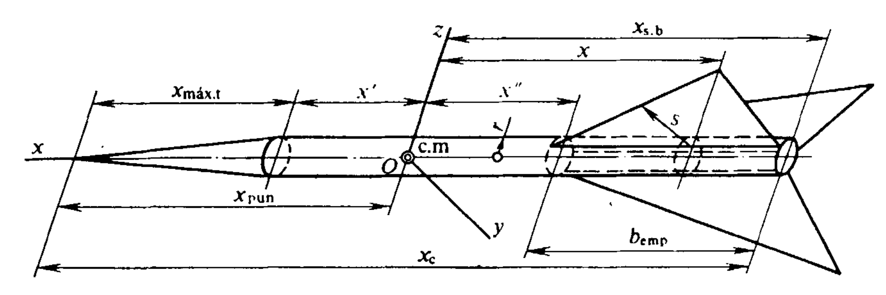


Fig. 11.16. Modelo de fuselaje con empenaje de tres semialas: $r = 1$ m; $x_{máx.t} = 10$ m; $x' = 4$ m; $x'' = -8$ m; $b_{emp} = 5$ m; $x_{s.b} = -13$ m; $x_c = 27$ m; $s_m = 4$ m

38—01650

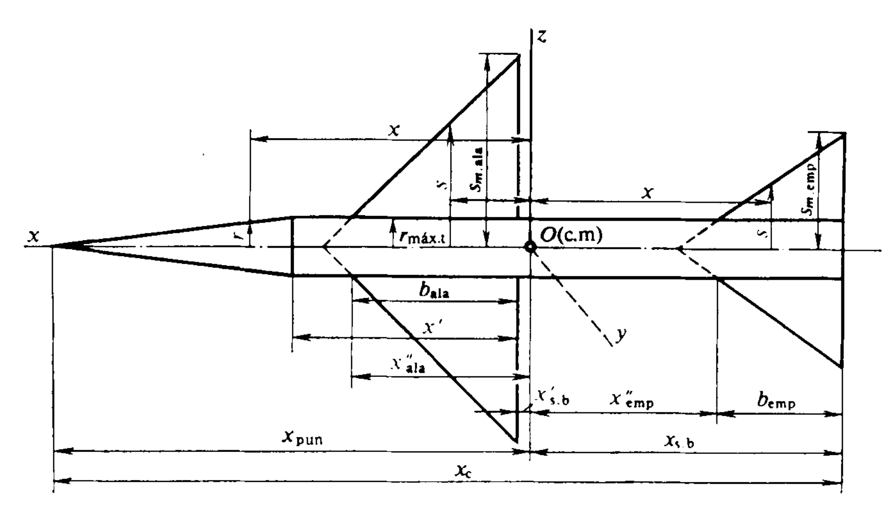


Fig. 11.17. Combinación cruciforme «fuselaje—ala—empenaje» (las dimensiones se muestran en la fig. 11.14)

independientes de cabeceo y de guiñada (sin balanceo $\Omega_x = 0$). La forma y las dimensiones del vehículo se dan en la fig. 11.15.

11.80. Haciendo uso del método de las masas asociadas, determinen las derivadas de amortiguamiento en balanceo, las derivadas giroscópicas, así como las derivadas condicionadas por las fuerzas de Magnus para la combinación de tres semialas de un vehículo volante (el esquema y las dimensiones de esta combinación se muestran en la fig. 11.15).

11.81. Empleando el método de las masas asociadas, determinen las derivadas de la estabilidad de un vehículo volante en forma de una combinación delgada «fuselaje — ala cruciforme — empenaje cruciforme», en movimiento sin balanceo y deslizamiento. La forma y las dimensiones del vehículo se dan en las figs. 11.14 y 11.17.

11.82. Determinen las derivadas de la estabilidad en balanceo de un vehículo volante, cuya forma y dimensiones se ofrecen en la fig. 11.14. Al efectuar los cálculos empleen la teoría aerodinámica de sólidos delgados (el método de las masas asociadas), así como los resultados de las investigaciones de la circulación supersónica linealizada alrededor de las alas con $M_\infty = 1,5$.

Solución de los problemas y respuestas a las preguntas

11.1. Recibe el nombre de *interferencia aerodinámica* la interacción de las partes del flujo que circula alrededor de sólidos situados cerca unos de otros, p. ej., el fuselaje y el ala (o bien el empenaje) del vehículo volante. Como resultado de dicha interacción la suma de las fuerzas o momentos aerodinámicos del ala, el fuselaje, el empenaje y de los timones, tomados por separado, no es igual a la fuerza total o al momento de la combinación constituida por estos mismos elementos y que en su conjunto es un sistema enterizo, es decir, el vehículo volante (fig. 11.18).

11.2. En comparación con un ala aislada la fuerza de sustentación de otra ala de iguales dimensiones y forma aumenta al unirla al fuselaje. Esto sucede debido

a que el flujo perturbado por el fuselaje circula alrededor del ala bajo ángulos locales de ataque mayores. Con esto, crece la diferencia de presiones en el intradós y trasdós del ala, lo que condiciona el aumento de su fuerza de sustentación.

11.3. En comparación con el fuselaje aislado, en presencia del ala la fuerza de sustentación es mayor. Esto está condicionado por el aumento de la presión en la superficie inferior del fuselaje y la disminución en la superior, lo que es debido a la presencia del ala y su influencia sobre la circulación alrededor del fuselaje.

11.4. Las dimensiones de la zona de influencia mutua entre el ala y el fuselaje en un flujo supersónico se condicionan por el efecto de la ley aerodinámica, de acuer-

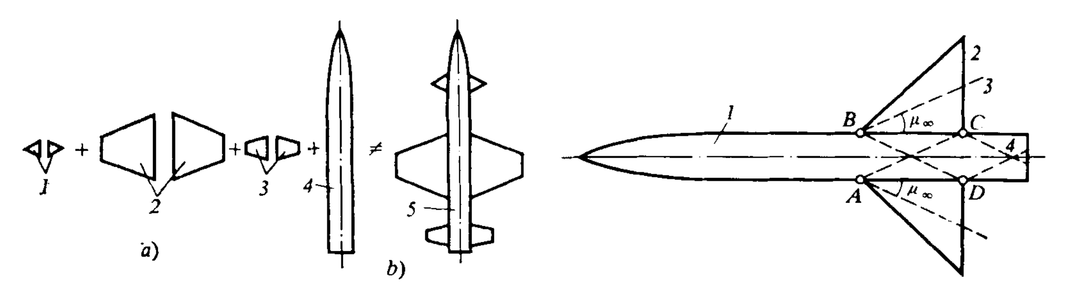


Fig. 11.18. Esquema para determinar la interferencia aerodinámica:
a, elementos aislados del vehículo volante; *b*, elementos unidos en la combinación; *1*, timones; *2*, alas; *3*, empenaje; *4* y *5*, fuselajes

Fig. 11.19. Zonas de influencia mutua del ala y el fuselaje:
1, fuselaje; *2*, ala; *3* y *4*, límites de la influencia del fuselaje sobre el ala y del ala sobre el fuselaje

do con la cual las perturbaciones sólo se propagan por el flujo hacia abajo en los límites de los conos de Mach con semiángulo en el vértice $\mu_\infty = \text{arcsen}\ (1/M_\infty)$. En el ala plana esta zona es un triángulo con el vértice en el comienzo de la cuerda de raíz (fig. 11.19), mientras que en la superficie cilíndrica del fuselaje semejante zona se limita por la línea de intersección del cono de Mach con el cilindro. Con ello, de acuerdo con la teoría aerodinámica del sólido delgado (esbelto), las cargas inducidas por el ala se propagan por el fuselaje en el área situada directamente debajo de las semialas (sector *ABCD* en la fig. 11.19).

11.5. Como en la teoría del sólido esbelto se resuelven ecuaciones simplificadas, ella no asegura una determinación suficientemente precisa de los coeficientes aerodinámicos tanto de los elementos aislados del vehículo volante (fuselaje, ala, empenaje), como de su combinación. No obstante, el cálculo de los coeficientes de interferencia que son la razón de los correspondientes coeficientes aerodinámicos (p. ej., $K_{\text{a la}} = \Delta c_{y_a \text{a la(f)}}/c_{y_a \text{a la}}$, donde $\Delta c_{y_a \text{la(f)}}$ es el coeficiente de la fuerza de sustentación del ala estando presente el fuselaje; $c_{y_a \text{a la}}$, el coeficiente de la fuerza de sustentación del ala solitaria) resultan ser suficientemente precisos. La explicación de esto yace en que la teoría del sólido delgado refleja de forma objetivamente correcta el proceso de la circulación en torno de sólidos de diversa configuración y, aunque, p. ej., los coeficientes $\Delta c_{y_a \text{ala(f)}}$ y $c_{y_a \text{ala}}$ se hallan con determinada aproximación, su razón corresponde al valor real de K_{ala}. Esto da la posibilidad de que, después de calcular con métodos más exactos que con la teoría del sólido delgado los coeficientes aerodinámicos de elementos aislados del vehículo volante, mediante los correspondientes coeficientes de interferencia se puedan determinar las características aerodinámicas de sus combinaciones ($\Delta c_{y_a \text{ala(f)}} = K_{\text{a la}} c_{y_a \text{a la}}$).

11.6. Con arreglo a los datos iniciales primero determinamos el coeficiente de la fuerza de sustentación del ala aislada:

$$c_{y\,\text{ala}} = c_{y(f)\text{ala}}/(K_{f.\text{int}} + K_f + K_{\text{ala}}) = 1{,}9/(0{,}5 + 0{,}8 + 1{,}45) = 0{,}6909.$$

A este valor corresponde el coeficiente de la fuerza de sustentación del ala al haber fuselaje

$$\Delta c_{y\,\text{ala}(f)} = c_{y\,\text{ala}} K_{\text{ala}} = 1{,}002.$$

11.7. Calculemos la suma de los coeficientes de interferencia: $K_{\text{ala}} + K_f = (\bar{s}_m + 1)^2/\bar{s}_m^2$, donde $\bar{s}_m = s_m/r = 2$. Después de poner el valor, obtenemos $K_{\text{ala}} + K_f = 2{,}25$. A continuación calculamos $K_{f.\text{int}} + K_{\text{ala}} + K_f = c_{y\,f(\text{ala})}/c_{y\,\text{ala}} = 2{,}700$. De acuerdo con esto $K_{f.\text{int}} = c_{y\,f(\text{ala})}/c_{y\,\text{ala}} - (K_{\text{ala}} + K_f) = 0{,}450$. El coeficiente de la fuerza de sustentación del fuselaje aislado $c_{y\,f} = c_{y\,\text{ala}} K_{f.\,\text{int}} = 0{,}2867$.

11.8. El ahusamiento del ala de modo notorio influye sobre los coeficientes de interferencia K_f y K_{ala}. En comparación con el ala rectangular en la planta, para la que la teoría del sólido delgado determina con suficiente precisión los valores de estos coeficientes $(K_f)_{\text{teor}}$ y $(K_{\text{ala}})_{\text{teor}}$, en las alas de sección decreciente mayor parte del área hace contacto con el fuselaje. Por esta razón, semejantes alas ejercen mayor efecto interferencial sobre el fuselaje y perciben en mayor grado el efecto debido al fuselaje. La consecuencia de esto es el aumento de los valores de los coeficientes de interferencia K_f y K_{ala} con el crecimiento del ahusamiento del ala η_{ala}. Es posible calcular K_f y K_{ala} mediante el coeficiente de corrección ν_η determinado con la fórmula empírica

$$\nu_\eta = 1 + [r_m (1 - r_m)/(1 + r_m)^2] (1 - 1/\eta_{\text{ala}}), \qquad (11.2.)$$

donde $r_m = r/s_m$.

De acuerdo con esto $K_f = \nu_\eta (K_f)_{\text{teor}}$; $K_{\text{ala}} = \nu_\eta (K_{\text{ala}})_{\text{teor}}$.

11.9. La influencia que ejerce la capa límite del fuselaje sobre los coeficientes de interferencia K_f y K_{ala} se explica del modo siguiente. El radio eficaz del fuselaje en el lugar donde están situadas las semialas aumenta en el valor del grosor del desplazamiento de la capa límite δ^*, pero simultáneamente en ese mismo valor disminuye la semienvergadura de las semialas. La primera circunstancia conduce al aumento de la fuerza normal a cuenta del crecimiento de los coeficientes de interferencia, la segunda, a su disminución debido a la reducción del área del ala. Como muestran las investigaciones, semejante disminución es suficientemente grande y, por ello, el coeficiente de corrección $\nu_{c.l}$ que entra en las relaciones $K_f = \nu_{c.l} (K_f)_{\text{teor}}$; $K_{\text{ala}} = \nu_{c.l} (K_{\text{ala}})_{\text{teor}}$ y que se calcula con la expresión

$$\nu_{c.l} = 1 - r_m (1 + r_m^2) [r_m + \eta_{\text{ala}} (1 + 3\, r_m) - 1] (\delta^*/r)/(\eta_{\text{ala}} + 1), \qquad (11.3)$$

siempre es menor que la unidad. Aquí todas las designaciones son las mismas que en el problema 11.8, mientras que δ^* se debe calcular en la parte media de la cuerda del ala.

11.10. Al determinar el valor de los coeficientes de interferencia K_f y K_{ala}, aplicando la teoría del sólido delgado, se hace la suposición de que alrededor de la combinación «fuselaje — ala», circula un flujo no perturbado. Esta suposición no es de importancia si el ala está suficientemente distanciada de la nariz del fuselaje. En caso contrario, la influencia de la parte del fuselaje situada delante del ala puede ser considerable. Las perturbaciones que introduce la sección de nariz del fuselaje conducen a la disminución de los coeficientes de interferencia y el

correspondiente coeficiente de corrección

$$\nu_f = K_f/(K_f)_{teor} = K_{ala}/(K_{ala})_{teor} = [0,6 + (1 + 0,2\,\bar{l}_1)^2]/[1 + (1 + 0,2\,\bar{l}_1)^2], \tag{11.4}$$

donde $\bar{l}_1 = l_1/r$ es la distancia relativa desde el borde de ataque del fuselaje hasta la parte media de la cuerda del ala.

11.11. En correspondencia con la teoría aerodinámica del sólido delgado, debido a la interferencia de la combinación «fuselaje — ala» el ángulo local de ataque a lo largo del fuselaje queda constante y la diferencia de presión, inducida por el fuselaje en las semialas, se distribuye con mayor o menor uniformidad por todas las superficies de sustentación. Por esta causa, no se observa una variación notoria de la posición del centro de presión de las semialas tanto por la envergadura, como por la cuerda. En el fuselaje se observan otros fenómenos. El ángulo local de ataque varía a lo largo de la envergadura de las semialas, por lo que el ala induce en diferentes secciones transversales del fuselaje distintas caídas de presión. Esto provoca notorias variaciones de la posición del centro de presión. Semejante influencia de la interferencia es en particular considerable en los llamados casos límites. En el primero de estos casos se considera un fuselaje infinitamente delgado. Es evidente que entonces podemos considerar que el centro de presión se halla en la parte media de la cuerda de raíz de la semiala [el coeficiente del centro de presión $(c_{c.p})_{\alpha f(ala)} = 0,5$]. El segundo caso límite se caracteriza por la envergadura infinitamente pequeña de las semialas, con la que toda la fuerza de sustentación del ala se transmite al fuselaje y su centro de presión resulta estar cerca del centro de presión del ala solitaria $[(c_{c.p})_{\alpha\ f(ala)} \approx 2/3]$.

11.12. Recibe el nombre de *combinación esbelta* (*delgada*) el acoplamiento «fuselaje—ala» en el que las dimensiones transversales (p. ej., la envergadura l del ala) son considerablemente menores que la longitud L del fuselaje es decir $l \ll L$. Alrededor de semejante combinación el flujo tiene carácter linealizado. Con ello, podemos tomar que la parte de cola del fuselaje, junto con el empenaje (las alas), se encuentra a gran distancia de la sección de nariz, por lo que su influencia sobre la circulación alrededor del empenaje es despreciablemente pequeña. Así, pues, la circulación alrededor de la sección de cola se efectúa por un flujo prácticamente no perturbado con número $\mathbf{M}_\infty = 1,5$. Con estas condiciones analicemos el cálculo de las características aerodinámicas.

Presión. Para calcular el coeficiente de la diferencia de presión $\Delta\bar{p} = \bar{p}_i - \bar{p}_s$ en los correspondientes puntos de los lados inferior y superior del fuselaje (véase la fig. 11.1), tomando en consideración la interferencia con el ala, hay que emplear la fórmula

$$\Delta\bar{p}_{f(ala)} = \frac{4\alpha\,[(1-r^4/s^4)\,ds/dx + (2r/s)\,(dr/dx)\,(1+r^2/s^2-2z^2/r^2)]}{[(1+r^2/s^2)^2-4z^2/s^2]^{1/2}} \tag{11.5}$$

Aquí

$$\left.\begin{aligned} &ds/dx = (s_m - r_{cil})/x_p = 0,9; \quad dr/dx = (r_{s.b} - r_{cil})/x_p = 0,1;\\ &s = r_{cil} + x\,(ds/dx) = 0,5 + 0,9x;\\ &r/s = [r_{cil} + x\,(dr/dx)]/[r_{cil} + x\,(ds/dx)] = (5+x)/(5+9x);\\ &z/s = (r/s)\cos\theta = (5+x)\cos\theta/(5+9x); \quad z/r = \cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{11.5'}$$

Considerando estos datos, obtenemos para $x = 0$ (véase la fig. 11.1)

$$\Delta\bar{p}_{f(ala)} = 4\cdot 0,1\cdot 2\cdot 1\cdot 0,1\,(2 - 2\cos^2\theta)/(4 - 4\cdot 1\cos^2\theta)^{1/2}.$$

Para la sección del fuselaje junto a la sección de base, donde $x = x_p = 3$,

$$\Delta \bar{p}_{f(a\,la)} = 0{,}4\,[0{,}8965 + 0{,}05\,(1{,}062 - 2\cos^2\theta)]/(1{,}129 - 0{,}25\cos^2\theta)^{1/2}.$$

Asignando diversos valores de x y de θ es posible determinar la distribución del coeficiente de la diferencia de presión por el fuselaje al haber ala.

En el ala el coeficiente de la diferencia de presión

$$\Delta \bar{p}_{a\,la(f)} = \frac{4\alpha}{\left[(1+r^4/s^4) - \frac{z^2}{s^2}\left(1+\frac{r^4}{z^4}\right)\right]^{1/2}} \times$$

$$\times \left\{\frac{ds}{dx}\left(1-\frac{r^4}{s^4}\right) + \frac{r}{s}\frac{dr}{dx}\left[2\left(\frac{r^2}{s^2}-1\right)+\left(1-\frac{r^2}{s^2}\right)^2\right]\right\}. \quad (11.6)$$

Aquí $\alpha = 0{,}1$, mientras que ds/dx y r/s se calculan en correspondencia con (11.5′).

Para $x = 0$ la magnitud $z = r$ y $\Delta \bar{p}_{a\,la(f)} = 0$. Para el borde de salida, donde $x = x_p = 3$, $r = r_{s.b} = 0{,}8$,

$$\Delta \bar{p}_{f(a\,la)} = \frac{0{,}4\,\{0{,}897 + 0{,}025\,[-1{,}88 + (1 - 0{,}8^2/z^2)^2]\}}{[1{,}004 - (z^2/0{,}8^2)\,0{,}0625\,(1 + 0{,}8^4/z^4)]^{1/2}}. \quad (11.6')$$

Cuando no hay ensanchamiento del fuselaje en la sección de cola ($dr/dx = 0$) los coeficientes de la caída de presión en el fuselaje y el ala se determinan, respectivamente, con las expresiones

$$\Delta \bar{p}_{f(a\,la)} = \frac{4\alpha\,(1 - r^4/s^4)\,ds/dx}{[(1 + r^2/s^2)^2 - 4z^2/s^2]^{1/2}}; \quad (11.7)$$

$$\Delta \bar{p}_{a\,la(f)} = \frac{4\alpha\,(1 - r^4/s^4)\,ds/dx}{[(1 + r^4/s^4) - z^2/s^2\,(1 + r^4/z^4)]^{1/2}}. \quad (11.8)$$

En particular, en la sección de base del vehículo volante, que coincide con el borde de salida del ala ($x = x_p = 3$)

$$\Delta \bar{p}_{f(a\,la)} = 0{,}359/(1{,}13 - 0{,}25\cos^2\theta)^{1/2};$$

$$\Delta \bar{p}_{a\,la(f)} = 0{,}359/[1{,}004 - 0{,}625\,(z^2/0{,}8^2)\,(1 + 0{,}8^4/z^4)]^{1/2}.$$

Los valores obtenidos en la práctica poco se diferencian de los correspondientes coeficientes para el caso cuando hay una pequeña variación del radio del fuselaje. Por esta razón, en los cálculos, por regla, la influencia de este cambio no se toma en consideración.

Coeficiente de interferencia. Determinemos el coeficiente:

$$K_f = \frac{\Delta c_{y\,f(a\,la)}}{c_{y\,a\,la}} = \frac{2}{\pi\,(\bar{s}_m - 1)^2}\left[\frac{\bar{s}_m^2 - 1}{\bar{s}_m} + \frac{\pi}{2}\left(\bar{s}_m^2 + \frac{1}{\bar{s}_m^2}\right) - \frac{(\bar{s}_m^2 + 1)^2}{\bar{s}_m^2}\operatorname{arctg}\bar{s}_m\right]. \quad (11.9)$$

Hagamos aquí $\bar{s}_m = s_m/r_{c11} = 6{,}4$. Conforme a esto $K_f = 0{,}2131$.

El coeficiente de interferencia del ala con el fuselaje

$$K_{a\,la} = \Delta c_{y\,a\,la(f)}/c_{y\,a\,la} = (\bar{s}_m + 1)^2/\bar{s}_m^2 - K_f = 1{,}124.$$

Fuerza de sustentación de la combinación. Ésta se calcula con la fórmula

$$Y_{f.a\,la} = 2\alpha\pi s_m^2\,(1 - 1/\bar{s}_m^2 + 1/\bar{s}_m^4)\,q_\infty. \quad (11.10)$$

Introduciendo aquí la presión de velocidad $q_\infty = 0{,}5k\,p_\infty M_\infty^2 = 1{,}54 \cdot 10^5$ Pa y los demás datos, obtenemos $Y_{f.a\,la} = 9{,}6 \cdot 10^5$ N.

Especificación según la teoría linealizada (teniendo en cuenta la influencia del número M_∞). De acuerdo con esta teoría, los coeficientes de interferencia K_f. K_{ala} no varían ($K_f = 0{,}2131$ y $K_{ala} = 1{,}124$), en tanto que el coeficiente de la fuerza de sustentación del ala aislada se determina según la teoría linealizada.

El ángulo de flecha de semejante ala (véase la fig. 11.1) $\chi = \text{arctg}\,[x_p/(s_m - r_{cil})] = 48°$, en tanto que el ángulo de Mach $\mu_\infty = \text{arcsen}\,(1/M_\infty) = 41{,}83°$. Así, pues, $\chi < (\pi/2 - \mu_\infty)$, ya que $48° < (90 - 41{,}83°) = 48{,}17°$ y, por lo tanto, el borde de ataque del ala es supersónico. Conforme a esto $c_{y\,ala} = 4\alpha/\sqrt{M_\infty^2 - 1} = 0{,}357$.

Tomamos el coeficiente de la fuerza de sustentación igual al correspondiente valor para el cono de nariz, suponiendo con ello que tal coeficiente está calculado según el área de las dos semialas S_{ala}. Como resultado

$$c_{y\,f} = 2\alpha'\alpha\beta_{cono}\sqrt{u_{cono}^2 - 1}\,(S_{máx.\,f}/S_{ala}). \tag{11.11}$$

Aquí

$$\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 1{,}118; \quad \beta_{cono} = r_{cil}/x_n = 0{,}1667; \quad u_{cono} = 1/(\alpha'\beta_{cono}) = 5{,}347;$$

$$S_{máx.\,f}/S_{ala} = \pi r_{cil}^2/[(s_m - r_{cil})\,x_p] = 0{,}0969.$$

Después de poner estos datos en (11.11) hallamos $c_{yf.} = 0{,}01962$. De modo que para la combinación «fuselaje — ala» $c_{y\,f(ala)} = c_{y\,f} + (K_f + K_{ala})\,c_{y\,ala} = 0{,}4962$.

La correspondiente fuerza de sustentación $Y_{f.ala} = c_{yf(ala)}\,q_\infty S_{ala}$. Como $S_{ala} = (s_m - r_{cil})\,x_p = 8{,}1\ \text{m}^2$; $Y_{f(ala)} = 6{,}19\cdot10^5$ N.

Centro de presión. Según la teoría linealizada de la circulación supersónica, el centro de presión de un ala triangular se halla a una distancia del vértice igual a $^2/_3$ de su altura. Bajo la influencia de la interferencia con el fuselaje esta distancia es, para $r/s_m = 0{,}156$, igual al valor $(\bar{c}_{c.p})\,\alpha_{ala(f)} x_p = 0{,}654\cdot3 = 1{,}962$.

El centro de presión se desplaza, en comparación con el ala aislada, a una distancia más corta hacia el borde de ataque. Para el sector simétrico del fuselaje solitario el centro de presión se sitúa en el medio, mientras que bajo la influencia de la interferencia su distancia hasta el comienzo del sector varía y constituye 0,532 de la longitud de dicho sector, es decir, el centro de presión se desplaza hacia la sección de base.

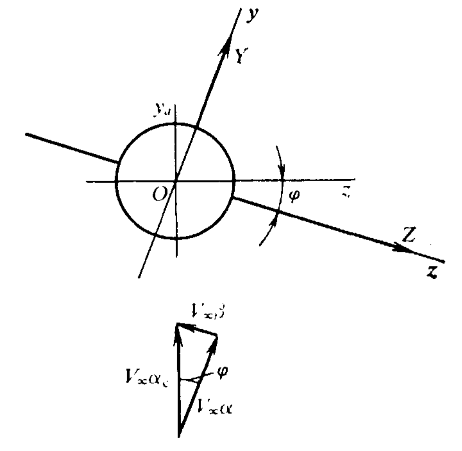


Fig. 11.20. Sistema de coordenadas durante el balanceo del vehículo volante

11.13. El balanceo (inclinación lateral) de la combinación plana «fuselaje — ala» situada en un flujo supersónico bajo ángulo de ataque, hace que varíe el carácter de la interferencia en el ala y el fuselaje. Después del balanceo la semiala derecha (fig. 11.20) se encuentra en el flujo transversal a una velocidad $V_\infty\,\alpha_c$ bajo un ángulo menor que $\pi/2$, mientras que la izquierda, bajo un ángulo mayor que $\pi/2$. Por esta causa, en la semiala derecha la diferencia de presión aumenta, en tanto que en la izquierda, disminuye. El efecto examinado de la interferencia

depende de los ángulos de ataque α y de balanceo φ (o bien del ángulo de deslizamiento β).

11.14. Al haber ángulo de balanceo la interacción entre el ala y el fuselaje de una combinación plana conduce al aumento de la fuerza de sustentación para la semiala derecha y a la disminución de ella en la izquierda (véase la solución del problema 11.13). En los márgenes de la teoría aerodinámica del sólido delgado, para iguales semialas, las variaciones de la fuerza de sustentación son las mismas. Por consiguiente, la fuerza de sustentación sumaria de la combinación sigue siendo la misma que al no haber balanceo.

11.15. Un ala de grosor nulo no ejerce influencia sobre la circulación a lo largo de la combinación en el sentido del eje Oz. Así, pues, la fuerza lateral se crea en dicho sentido sólo por el fuselaje. La importancia de esa fuerza está condicionada por la circulación alrededor del fuselaje de un flujo transversal a la velocidad $V_\infty\beta$ (fig. 11.20).

11.16. Para calcular las características aerodinámicas hagamos uso de las dependencias obtenidas en la teoría aerodinámica del sólido delgado.

Presión. El coeficiente de la diferencia de presión en los lados inferior y superior del fuselaje condicionado por la interferencia con el ala

$$\Delta\bar{p}_{f(\text{ala})} = \bar{p}^{i}_{f(\text{ala})} - \bar{p}^{s}_{f(\text{ala})} =$$

$$= \frac{4\alpha\,[(1-r^4/s^4)\,ds/dx + 2\,(r/s)\,(dr/dx)\,(1+r^2/s^2-2z^2/r^2)] + 32\alpha\beta\,(r/s)\cos\theta\,\text{sen}^2\,\theta}{[(1+r^2/s^2)^2 - 4\,(z^2/s^2)]^{1/2}}. \qquad (11.12)$$

Eliminando el término con dr/dx que ejerce una influencia despreciablemente pequeña sobre la presión y poniendo aquí los valores de $\alpha = \alpha_c \cos\varphi$, $\beta = \alpha_c \times \text{sen}\,\varphi$, $z/r = \cos\theta$, así como los demás datos (véase la solución del problema 11.12), hallamos

$$\Delta\bar{p}_{f(\text{ala})} = \frac{0{,}338\,\{1-[(5+x)/(5+9x)]^4\} + 0{,}102\,[(5+x)/(5+9x)]\cos\theta\,\text{sen}^2\,\theta}{\{[1+[(5+x)/(5+9x)]^2]^2 - 4\,[(5+x)/(5+9x)]^2\cos^2\theta\}^{1/2}}.$$

En el fuselaje junto al vértice del ala ($x=0$) el coeficiente $\Delta\bar{p}_{f(\text{ala})} = 0{,}051 \times \cos\theta\,\text{sen}\,\theta$. En el borde de salida del ala, donde $x = x_p = 3$, tenemos $\Delta\bar{p}_{f(\text{ala})} = (0{,}338 + 0{,}026\,\cos\,\theta\,\text{sen}\,^2\theta)/(1{,}13 - 0{,}25\cos\,^2\theta)^{1/2}$.

Analicemos el coeficiente de la diferencia de presión en el ala en presencia del fuselaje:

$$\Delta\bar{p}_{\text{ala}(f)} = \frac{4\alpha\,\{(r/s)\,(dr/ds)\,[(1-r^2/z^2)^2 + 2\,(r^2/s^2-1)] + (ds/dx)\,(1-r^4/s^4)\} \pm \pm\, 4\alpha\beta\,(z/s)\,(1+r^2/z^2)\,(1-r^2/z^2)^2}{[(1+r^2/s^2)^2 - (z^2/s^2)\,(1+r^2/z^2)^2]^{1/2}}. \qquad (11.13)$$

El signo «+», se refiere a la semiala derecha, «—», a la izquierda.

Eliminando en (11.13) el término con dr/dx y poniendo en ella los datos que conocemos, hallamos la dependencia numérica para $\Delta\bar{p}_{\text{ala}(f)}$ como función de x y z. En particular, en el vértice del ala ($x=0$)

$$\Delta\bar{p}_{\text{ala}(f)} = \pm\,[0{,}04\cos\varphi\,\text{sen}\,\varphi\,(z/0{,}5)\,(1+0{,}5^2/z^2)\,(1-0{,}5^2/z^2)^2]/ /[4-(z^2/0{,}5^2)\,(1+0{,}5^2/z^2)^2]^{1/2};$$

en el borde de salida ($x = x_p = 3$)

$$\Delta\bar{p}_{\text{ala}(f)} = [0{,}338 \pm 0{,}04\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi\,(z/3{,}2)\,(1+0{,}5^2/z^2) \times \times\,(1-0{,}5^2/z^2)^2]/[1{,}13-(z^2/3{,}2^2)\,(1+0{,}5^2/z^2)]^{1/2}.$$

En el sentido del eje Oy (fig. 11.20) la fuerza de sustentación de la combinación

$$Y = 2\alpha_c \cos \varphi \pi s_m^2 (1 - 1/\bar{s}_m^2 + 1/\bar{s}_m^4)\, q_\infty = 9{,}10 \cdot 10^5 \mathrm{N}.$$

La fuerza lateral

$$Z = -2\alpha_c \pi r_{c\,il}^2 \operatorname{sen} \varphi q_\infty = -0{,}827 \cdot 10^4 \mathrm{N}.$$

Los correspondientes coeficientes aerodinámicos:

$$c_y = Y/(q_\infty S_{\text{máx.t}}) = 2\alpha_c \cos \varphi \bar{s}_m^2 (1 - 1/\bar{s}_m^2 + 1/\bar{s}_m^4) = 7{,}64;$$

$$c_z = Z/(q_\infty S_{\text{máx.t}}) = -2\alpha_c \operatorname{sen} \varphi = -0{,}0685.$$

El coeficiente de la fuerza adicional de sustentación de la semiala, provocada por el balanceo,

$$\Delta c_{y\ \text{ala(f)}} = K_\varphi \alpha_c \operatorname{sen} \varphi\, c_{y\ \text{ala}}/\operatorname{ctg} \chi.$$

Con ayuda de la teoría aerodinámica del sólido delgado, según el valor de $r/s_m = 1/6{,}4 = 0{,}156$, hallamos $K_\varphi = 0{,}683$. Para empezar tomamos el coeficien-

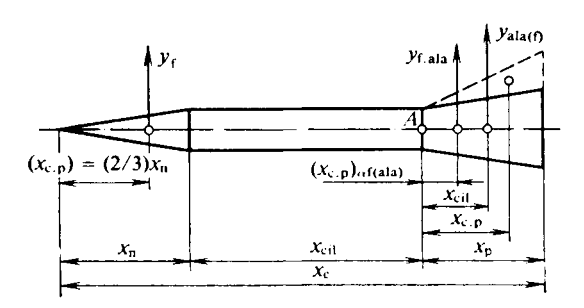


Fig. 11.21. Esquema de acción de las fuerzas aerodinámicas

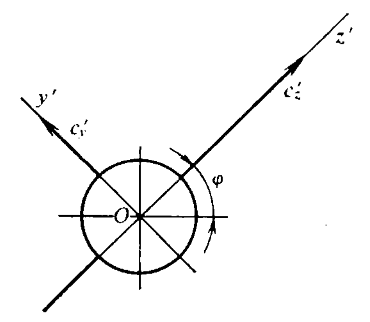


Fig. 11.22. Disposición de los ejes de coordenadas durante el balanceo

te $c_{y\ \text{ala}}$ igual al correspondiente valor de acuerdo con la teoría aerodinámica del sólido delgado (para el área característica $S_{\text{máx.t}} = \pi r_{c\,il}^2$):

$$c_{y\ \text{ala}} = 2\alpha \operatorname{sen} \varphi (\bar{s}_m - 1)^2 = 1{,}995.$$

Con arreglo a esto $\Delta c_{y\ \text{ala(f)}} = 0{,}0517$.

Según la teoría linealizada (para el área característica S_{ala}) calculamos $c_{y\ \text{ala}} = 4\alpha/\sqrt{M_\infty^2 - 1} = 0{,}3578$. Entonces

$$\Delta c_{y\ \text{ala(f)}} = (0{,}683 \cdot 0{,}1 \ \operatorname{sen} 20°/\operatorname{ctg}\ 48°)\, (S_{\text{ala}}/S_{\text{máx.t}})\, 0{,}3578 = 0{,}0958.$$

De acuerdo con la teoría aerodinámica del sólido delgado, por $r/s_m = 0{,}156$ hallamos las coordenadas relativas del centro de presión de una semiala durante el balanceo (fig. 11.21):

$$(\bar{x}_{c.p})_{\varphi\ \text{ala(f)}} = (x_{c.p\ \varphi}/b_{\text{ala}})_{\text{ala(f)}} = 0{,}672;$$

$$(\bar{z}_{c.p})_{\varphi\ \text{ala(f)}} = (z_{c.p\ \varphi} - r)/(s_m - r) = 0{,}525.$$

Fuerzas y momentos para la combinación «fuselaje — ala», teniendo en cuenta la influencia del balanceo. El coeficiente de la fuerza de sustentación (fig. 11.22)

$$c_{y'} = (c_{y'})_f + (dc_y/d\alpha)_{\text{ala}} (K_f + K_{\text{ala}})\, \alpha \cos \varphi. \qquad (11.14)$$

Aquí $\alpha = \alpha_c \cos\varphi = 0{,}094$; $(c_{y'})_f = 2\alpha'\alpha\beta_{cono}\sqrt{u_{cono}^2 - 1}\,(S_{máx.\,t}/S_{ala}) = 0{,}0196$; $(dc_y/d\alpha)_{ala} = 4/\sqrt{M_\infty^2 - 1} = 3{,}578$.

De acuerdo con esto $c_{y'} = 0{,}4674$.

El coeficiente de la fuerza lateral

$$c_{z'} = (c_{z'})_f + (dc_y/d\alpha)_{ala}\,(K_f + K_{ala})\,\beta\cos\varphi, \tag{11.14'}$$

donde $\beta = \alpha_c \operatorname{sen}\varphi = 0{,}0342$; $(c_{z'})_f = 2\alpha'\alpha_c = \operatorname{sen}\varphi\beta_{cono}\sqrt{u_{cono}^2 - 1}\times$ $\times\,(S_{máx.\,t}/S_{ala}) = 0{,}00670$.

Así, pues, $c_{z'} = 0{,}1594$.

El coeficiente del momento de cabeceo con relación al eje transversal que pasa por el vértice del ala (punto A en la fig. 11.21)

$$m_{z'} = (m_{z'})_f - [K_f\,(x_{c.p})_{\alpha\, f(ala)} + K_{ala}\,(x_{c.p})_{\alpha\, ala(f)}]\times$$
$$\times\,(\alpha_c \cos^2\varphi/x_c)\,(dc_y/d\alpha)_{ala}. \tag{11.15}$$

Aquí $x_c = x_n + x_{c11} + x_p = 12$ m; $(m_{z'})_f = (c_{z'})_f\,[x_{c11} + x_n - (2/3)\,x_n]/x_c =$ $= 0{,}0039$. Según la teoría aerodinámica del sólido delgado, para $r/s_m = 0{,}156$ tenemos $(x_{c.p\alpha}/b_{ala})_{f(ala)} = 0{,}532$, mientras que $(x_{c.p\alpha}/b_{ala})_{f(ala)} = 0{,}654$, de donde $(x_{c.p})_{f(ala)} = 0{,}532\,x_p = 1{,}60$; $(x_{c.p})_{\alpha\, ala(f)} = 0{,}654\,x_p = 1{,}96$.

En correspondencia con esto $m_{z'} = -0{,}0673$.

El coeficiente del momento de balanceo

$$m_{x'} = -K_{ala}\,(dc_y/d\alpha)_{ala}\,[(z_{c.p})_{\alpha\, ala(f)}/x_c)]\,\alpha_c\cos\varphi.$$

Aquí la coordenada lateral del centro de presión se determina del siguiente modo. De acuerdo con la teoría aerodinámica del sólido delgado, según $r/s_m =$ $= 0{,}156$, hallamos

$$(z_{c.p})_{\alpha\, ala(f)} = (z_{c.p\,\alpha} - r)/(s_m - r) = 0{,}420.$$

Teniendo en cuenta que $r = r_{c11} = 0{,}5$ y $s_m = 3{,}2$, calculamos $z_{c.p\,\alpha} = 0{,}420\times$ $\times\,(s_m - r_{c11}) + r_{c11} = 1{,}634$. Así, pues, $m_{x'} = -0{,}0511$.

11.17. Cuando hay deslizamiento de una combinación cruciforme delgada (fuselaje cilíndrico e iguales semialas de grosor nulo), la peculiaridad de la interferencia aerodinámica (en los márgenes de la teoría aerodinámica del sólido delgado) es la independencia entre el ángulo de balanceo y la fuerza de sustentación determinada en el plano vertical paralelo al flujo incidente y que pasa por el eje longitudinal del vehículo volante. Esto se desprende de la fórmula

$$Y = 2\alpha_c\pi s_m^2\,(1 - 1/\bar{s}_m^2 + 1/\bar{s}_m^4)\,q_\infty. \tag{11.15'}$$

Como vemos, en esta fórmula el ángulo de balanceo no entra.

Desde el punto de vista físico, semejante singularidad de la interferencia puede explicarse así . Las semialas verticales de grosor nulo no influyen sobre la circulación a lo largo de la combinación en sentido longitudinal bajo el ángulo de ataque α, en tanto que las horizontales, en el sentido del ángulo de deslizamiento β. Esto proporciona la posibilidad de analizar dos flujos independientes uno de los cuales circula alrededor de la combinación «fuselaje — ala vertical» bajo el ángulo β y el segundo en torno al «fuselaje — ala' horizontal» bajo el ángulo α. Con ello, es conocido que la fuerza de sustentación sumaria de semejantes combinaciones planas no depende del ángulo de balanceo (véase la solución del problema 11.19). Por consiguiente, la fuerza de sustentación de toda la combinación cruciforme tampoco depende de dicho ángulo.

11.18. Para las fuerzas de interferencia, provocadas por el balanceo ($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$), el centro de presión se desplaza a mayor distancia que para las fuerzas de interferencia en ausencia del deslizamiento ($\alpha \neq 0$, $\beta = 0$). Esto se explica por la redistribución adicional de la presión a cuenta del efecto del flujo condicionado por el deslizamiento.

11.19. El momento de balanceo de una combinación cruciforme fina con iguales semialas, situada en un flujo no perturbado supersónico bajo los ángulos de ataque α y deslizamiento β, es igual a cero, ya que, de acuerdo con la teoría aerodinámica del sólido delgado, las semialas verticales crean el mismo momento de balanceo que las horizontales, pero de sentido opuesto.

11.20. Si un vehículo volante en forma de una combinación cruciforme fina se halla en un flujo supersónico débilmente perturbado bajo ángulos de ataque y deslizamiento, se produce la interferencia mutua de las semialas portantes. La presencia de las semialas verticales reduce la influencia de los flujos transversales a velocidades $V_\infty\alpha$ y $V_\infty\beta$ (véase la fig. 11.20) sobre la redistribución de la presión por las semialas y disminuye la fuerza normal inducida del ala. La circulación asimétrica no provoca la variación de la distribución de la presión por el fuselaje, pero las coordenadas de los centros de presión de las semialas resultan ser próximas a los correspondientes valores para las semialas aisladas. Por esta razón, la interferencia del ala con el fuselaje no ejerce notoria influencia sobre la posición del centro de presión de todo el vehículo.

11.21. La influencia de la sección de cola del fuselaje, situada tras las semialas, sobre las características aerodinámicas del vehículo volante con la disminución del número M_∞ aumenta, ya que debido al crecimiento del ángulo de Mach [$\mu_\infty = \arcsen (1/M_\infty)$] a mayor parte del área del fuselaje se transmite la carga inducida por el ala (véase la fig. 11.19).

11.22. La parte de cola del fuselaje situada tras las semialas influye sobre el desplazamiento del centro de presión en el sentido de la sección de base, ya que las cargas inducidas por el ala se propagan a esta parte del fuselaje y contribuyen al surgimiento de un mayor efecto estabilizador.

11.23. El remanso (la deceleración) del flujo delante del ala puede influir notoriamente sobre la interferencia entre el ala y el fuselaje a velocidades supersónicas de vuelo. En semejante caso el remanso del flujo se provoca por la onda de choque frontal. En el ejemplo de la fórmula para el coeficiente de la fuerza normal de la combinación «fuselaje — ala» $c_{y\,\mathrm{f(ala)}} = c_{y\,\mathrm{f}} + (K_\mathrm{f} + K_\mathrm{ala})\, c_{y\,\mathrm{ala}}\, k_1$, donde k_1 es el coeficiente de remanso del flujo.

Como vemos, el remanso del flujo reduce el efecto de la interferencia ($k_1 < 1$), pero durante los cálculos hay que determinar el coeficiente de la fuerza normal del ala solitaria según el número M_1 del flujo delante del ala.

11.24. Examinemos el cálculo según la teoría aerodinámica del sólido delgado. El coeficiente de la diferencia de presión en los lados inferior y superior del fuselaje al haber ala

$$\Delta\bar{p}_{\mathrm{f(ala)}} = -4\alpha \frac{4\dfrac{z^2}{r^2}\dfrac{dr}{dx}\dfrac{r}{s} - \left(1+\dfrac{r^2}{s^2}\right)\left[2\dfrac{r}{s}\dfrac{dr}{dx} + \dfrac{ds}{dx}\left(1-\dfrac{r^2}{s^2}\right)\right]}{\left[\left(1+\dfrac{r^2}{s^2}\right)^2 - 4\dfrac{z^2}{s^2}\right]^{1/2}} \pm$$

$$\pm \frac{64\alpha\beta\dfrac{z^2}{s^2}\left(1-\dfrac{z^2}{r^2}\right)}{\left[\left(1+\dfrac{r^2}{s^2}\right)^2 - 4\dfrac{z^2}{s^2}\right]^{1/2}\left[\left(1-\dfrac{r^2}{s^2}\right)^2 + 4\dfrac{z^2}{s^2}\right]^{1/2}}, \qquad (11.16)$$

donde el signo «+» se refiere a la mitad derecha del fuselaje y el «—», a la izquierda. En el caso que consideramos el fuselaje tiene radio constante en el sector donde están situadas las semialas y, por ello, $dr/dx = 0$. Tomando también en consideración que $\alpha = \alpha_c \cos\varphi$ y $\beta = \alpha_c \operatorname{sen}\varphi$, hallamos

$$\Delta\bar{p}_{f(\text{ala})} = \frac{4\alpha_c \cos\varphi\,(ds/dx)\,(1 - r^4/s^4)}{[(1+r^2/s^2)^2 - 4z^2/s^2]^{1/2}} \pm$$

$$\pm \frac{64\alpha_c^2 \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi\,(z^2/s^2)\,(1 - z^2/r^2)}{[(1+r^2/s^2)^2 - 4z^2/s^2]^{1/2}\,[(1-r^2/s^2)^2 + 4z^2/s^2]^{1/2}}. \qquad (11.16')$$

Calculamos (véase la fig. 11.2):

$\alpha_c \operatorname{sen}\varphi = 0{,}0342$; $\alpha_c \cos\varphi = 0{,}094$; $ds/dx = (s_m - r_{c11})/x_p = 1$;

$s = r + x\,ds/dx = 0{,}5 + x$; $r/s = r/[r + x\,(ds/dx)] = 1/(1 + 2x)$; $z/r = \cos\theta$;

$z/s = (z/r)/(r/s) = \cos\theta/(1 + 2x)$.

Tomando en consideración estos datos

$$\Delta\bar{p}_{f(\text{ala})} = \frac{0{,}376\left[1 - \dfrac{1}{(1+2x)^4}\right]}{\left\{\left[1 + \dfrac{1}{(1+2x)^2}\right]^2 - \dfrac{4\cos^2\theta}{(1+2x)^2}\right\}^{1/2}} \pm$$

$$\pm \frac{\dfrac{0{,}24\cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta}{(1+2x)^2}}{\left\{\left[1 + \dfrac{1}{(1+2x)^2}\right]^2 - \dfrac{4\cos^2\theta}{(1+2x)^2}\right\}^{1/2}\left\{\left[1 - \dfrac{1}{(1+2x)^2}\right]^2 + \dfrac{4\cos^2\theta}{(1+2x)^2}\right\}^{1/2}}.$$

El coeficiente de presión para $x = 0$ (punto en el fuselaje junto al vértice del ala) $\Delta\bar{p}_{f(\text{ala})} = \pm\, 0{,}05 \cos\theta \operatorname{sen}\theta$.

Para $x = x_p = 3$

$$\Delta\bar{p}_{f(\text{ala})} = 0{,}376/(1{,}04 - 0{,}0816\cos^2\theta)^{1/2} \pm$$

$$\pm\, 0{,}0042/[(1{,}04 - 0{,}0816\cos^2\theta)^{1/2}\,(0{,}996 + 0{,}0816\cos^2\theta)^{1/2}].$$

El coeficiente de la diferencia de presión en las semialas horizontales (en la derecha con signo «+» y en la izquierda con «—»)

$$\Delta\bar{p}_{\text{ala}(f)} = \frac{4\alpha\,(ds/dx)\,(1 - r^4/s^4)}{[1 + r^4/s^4 - (z^2/s^2)\,(1 + r^4/s^4)]^{1/2}} \pm \frac{4\,(z^2/s^2)\,\alpha\beta\,(1 - r^4/z^4)^2}{[(1 + r^4/s^4)^2 - (z^4/s^4)\,(1 + r^4/z^4)^2]^{1/2}}. \qquad (11.17)$$

Poniendo aquí los datos, obtenemos

$$\Delta\bar{p}_{\text{ala}(f)} = \frac{0{,}376\,[1 - 1/(1+2x)^4]}{\{1 + 1/(1+2x)^4 - [z/(0{,}5+x)]^2\,[1 + 1/(1+2x)^4]\}^{1/2}} \pm$$

$$\pm \frac{0{,}0128\,[1 - (,05/z)^4]^2\, z^2/(0{,}5+x)^2}{\{[1 + 1/(1+2x)^4]^2 - [z/(0{,}5+x)^4]\,[1 + (0{,}5/z)^4]^2\}^{1/2}}.$$

Para $x = 0$

$$\Delta\bar{p}_{\text{ala}(f)} = \pm 0{,}0128\,(z/0{,}5)^2\,[1 - (0{,}5/z)^4]^2/\{4 - (z/0{,}5)^4\,[1 + (0{,}5/z)^4]^2\}^{1/2}$$

y para $x = x_p = 3$

$$\Delta\bar{p}_{\text{ala}(f)} = 0{,}376/(1 - z^2/12{,}25)^{1/2} \pm 0{,}001\, z^2\,[1 - (0{,}5/z^4)]^2/$$

$$/[1{,}004 - (y^2/150)\,(1 + 0{,}5^4/y^4)\,]^{1/2}.$$

Calculamos las fuerzas y los momentos que actúan y sus coeficientes. El coeficiente de la fuerza adicional que actúa sobre el fuselaje en el sentido en que se cuenta el ángulo α referido al área S_{ala} de las dos semialas aisladas

$$\Delta c^{\alpha}_{y\,f(\text{ala})} = K_f\,(dc_y/d\alpha)_{\text{ala}}\,\alpha_c \cos\varphi. \qquad (11.18)$$

Aquí la derivada $(dc_y/d\alpha)_{\text{ala}}$ ha de determinarse según la teoría linealizada. Con este fin, calculemos el ángulo de flecha del ala $\chi = \text{arctg}\,[(s_m - r_{c1})/x_p)] = 45°$ y el ángulo de Mach $\mu_\infty = \text{arcsen}\,(1/M_\infty) = 41{,}83°$.

De acuerdo con estos datos $\chi < \pi/2 - \mu_\infty$ ($45° < \pi/2 - 41{,}83° = 48{,}17°$) y, por lo tanto, el borde de ataque del ala es supersónico. Para semejante ala $dc_y/d\alpha)_{\text{ala}} = 4/\sqrt{M_\infty^2 - 1} = 3{,}578$.

Según la teoría aerodinámica del sólido delgado para el valor de $r/s_m = 0{,}5/3{,}5 = 0{,}143$, hallamos $K_f = 0{,}195$; entonces, $\Delta c^{\alpha}_{y\,f(\text{ala})} = 0{,}0655$.

El correspondiente coeficiente de la fuerza en el sentido por el que se cuenta el ángulo β

$$\Delta c^{\beta}_{y\,f(\text{ala})} = -K_f\,(dc_y/d\alpha)_{\text{ala}}\,\alpha_c \,\text{sen}\,\varphi = -0{,}024.$$

En la dirección del eje Oy' el coeficiente de la fuerza de sustentación

$$c_{y'f(\text{ala})} = \Delta c^{\alpha}_{y\,f(\text{ala})} \cos\varphi - \Delta c^{\beta}_{y\,f(\text{ala})} \,\text{sen}\,\varphi = 0{,}0698.$$

La fuerza lateral en el sentido Oz' es igual a cero. El coeficiente de la fuerza de sustentación de toda la combinación (véase la fig. 11.22)

$$c_{y'} = c_{y'f} + (dc_y/d\alpha)_{\text{ala}}\,(K_f + K_{\text{ala}})\,\alpha_c, \qquad (11.19)$$

donde $c_{y'f} = 2\alpha'\alpha_c\beta_{\text{cono}}\sqrt{u^2_{\text{cono}} - 1}\,S_{\text{máx.t}}/S_{\text{ala}} = 0{,}0171$.

El coeficiente K_{ala} se halla según la teoría aerodinámica del sólido delgado para el valor de $r/s_m = 0{,}143$; su valor $K_{\text{ala}} = 1{,}113$. En correspondencia con estos datos $c_{y'} = 0{,}484$.

Calculemos ahora el coeficiente del momento de cabeceo (fig. 11.12):

$$m_{z'} = \frac{M_{z'}}{q_\infty S_{\text{ala}} x_c} = m_{z'f} - \frac{(x_{\text{c.p}})_{\alpha\,\text{ala}(f)}K_{\text{ala}} + (x_{\text{c.p}})_{\alpha\,f(\text{ala})}K_f}{x_c}\left(\frac{dc_y}{d\alpha}\right)_{\text{ala}}\alpha_c. \qquad (11.20)$$

Más arriba se halló el coeficiente $m_{z'f} = 0{,}0038$ (calculado según el área de las dos semialas S_{ala}.

Conociendo $r/s_m = 0{,}143$, según la teoría aerodinámica del sólido delgado, determinamos los coeficientes de los centros de presión: $(c_{\text{c.p}})_{\alpha(\text{ala})f} = (x_{\text{c.p}}/b_{\text{ala}})_{\text{ala}(f)} = 0{,}654$; $(c_{\text{c.p}})_{\alpha\,f(\text{ala})} = (x_{\text{c.p}\alpha}/b_{\text{ala}})_{f(\text{ala})} = 0{,}530$. Con arreglo a estos datos y haciendo $b_{\text{ala}} = x_p = 3$ m, hallamos $(x_{\text{c.p}})_{\alpha\,\text{ala}(f)} = 1{,}962$; $(x_{\text{c.p}})_{\alpha\,f(\text{ala})} = 1{,}59$.

Así, pues, $m_{z'} = -0{,}0703$.

Determinemos la fuerza de sustentación $Y' = c'_y q_\infty S_{\text{ala}} = 6{,}71\cdot10^5$ N y el momento $M_{z'} = m_{z'} q_\infty S_{\text{ala}} x_c = -1{,}16\cdot10^6$ N·m. A continuación, calculamos la coordenada del centro de presión: $x_{\text{c.p}} = -M_{z'}/Y' = 1{,}73$ m.

Conforme a la teoría del sólido delgado determinamos las fuerzas sumarias y los coeficientes. El coeficiente de la fuerza de sustentación en el sentido del eje Oy (fig. 11.20)

$$c_y = 2\alpha\bar{s}^2_m\,(1 - 1/\bar{s}^2_m + 1/\bar{s}^4_m). \qquad (11.21)$$

Como aquí $\bar{s}_m = s_m/r = 6{,}4$, resulta que $c_y = 7{,}5139$. El coeficiente de la fuerza lateral en el sentido del eje Oz

$$c_z = -2\beta\,\bar{s}^2_m\,(1 - 1/\bar{s}^2_m + 1/\bar{s}^4_m) = -2{,}735.$$

Hallamos las correspondientes fuerzas:

$$Y = c_y q_\infty S_{\text{máx.t}} = 9{,}08\cdot 10^5 \text{ N}; \quad Z = c_z q_\infty S_{\text{máx.t}} = -3{,}32\cdot 10^5 \text{ N}.$$

El coeficiente de la fuerza de sustentación en el sentido del eje Oy_a

$$c_{y_a} = 2\alpha_c \bar{s}_m^2 (1 - 1/\bar{s}_m^2 + 1/\bar{s}_m^4) = 8.$$

La correspondiente fuerza $Y_a = c_{y_a} q_\infty S_{\text{máx. t}} = 9{,}7\cdot 10^5$ N.

Como más arriba establecimos la fuerza lateral en el sentido del eje Oz' es nula.

11.25. Calculemos la razón $r/s_m = 0{,}2727$. Con arreglo a la teoría aerodinámica del sólido delgado hallamos, para esta magnitud, los coeficientes de interferencia $K_{\text{a la}} = 1{,}23$; $K_f = 0{,}39$, así como $(x_{\text{c.p}\,\alpha}/b_{\text{a la}})_{\text{a la(f)}} = 0{,}648$; $(x_{\text{c.p}\alpha}/b_{\text{a la}})_{\text{f(a la)}} = 0{,}556$ y $(z_{\text{c.p}\,\alpha} - r)/(s_m - r) = 0{,}418$, de donde $(z_{\text{c.p}\alpha})_{\text{a la(f)}} = 0{,}418\,(s_m - r) + r = 1{,}586$.

En correspondencia con la teoría aerodinámica del sólido delgado hallamos, para $r/s_m = 0{,}27$, $K_\varphi = 0{,}5$; $(x_{\text{c.p}\,\varphi}/b_{\text{a la}})_{\text{a la(f)}} = 0{,}669$ y $(z_{\text{c.p}\,\varphi} - r)/(s_m - r) = 0{,}537$, de donde $(z_{\text{c.p}\,\varphi})_{\text{a la(f)}} = 0{,}537\,(s_m - r) + r = 1{,}824$.

El parámetro $\alpha' = \sqrt{\text{M}_\infty^2 - 1} = 1{,}732$. Entonces, $\operatorname{tg}\varepsilon = (s_m - r)/b_{\text{a la}} = 0{,}5$; $2\,\alpha' r/b_{\text{a la}} = 0{,}866$ y $\alpha' \operatorname{tg}\varepsilon = 0{,}866$.

Según las dos últimas magnitudes, en la gráfica experimental, determinamos $(x_{\text{c.p}\,\alpha}/b_{\text{a la}})_{\text{f(a la)}} = 0{,}85$. Este valor, precisado con ayuda de la teoría linealizada, es mayor que según la teoría de sólido delgado.

Seguidamente, después de calcular $k = \sqrt{1 - (\alpha' \operatorname{tg}\varepsilon)^2} = 0{,}501$, hallamos la integral elíptica $E = 1{,}47$.

El alargamiento del ala que examinamos $\lambda_{\text{a la}} = 4 \operatorname{tg}\varepsilon = 2$ y, por esto, en correspondencia con la teoría linealizada, $c_{y\lambda}^\alpha = \pi\lambda_{\text{a la}}/(2E) = 2{,}136$.

El coeficiente de la fuerza Y en la semiala derecha

$$(c_y)_{\text{a la}} = K_{\text{a la}} 0{,}5\,(c_y^\alpha)_{\text{a la}} \alpha_c \cos\varphi + (K_\varphi/\operatorname{tg}\varepsilon) \times \times 0{,}5\,(c_y^\alpha)_{\text{a la}} \alpha_c^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi = 0{,}399.$$

Calculamos las coordenadas de las correspondientes fuerzas:

$$(x_{\text{c.p}\,\alpha})_{\text{a la(f)}} = x_n + (x_{\text{c.p}\,\alpha}/b_{\text{a la}})_{\text{a la(f)}} b_{\text{a la}} = 7{,}09;$$
$$(x_{\text{c.p}\,\alpha})_{\text{f(a la)}} = x_n + (x_{\text{c.p}\,\alpha}/b_{\text{a la}})_{\text{f(a la)}} b_{\text{a la}} = 7{,}90;$$
$$(x_{\text{c.p}\,\varphi})_{\text{a la(f)}} = x_n + (x_{\text{c.p}\,\varphi}/b_{\text{a la}})_{\text{a la(f)}} b_{\text{a la}} = 7{,}18.$$

El coeficiente del momento de charnela de la semiala derecha

$$m_{\text{char}} = -0{,}5 K_{\text{a la}} (c_y^\alpha)_{\text{a la}} [(x_{\text{c.p}\,\alpha})_{\text{a la(f)}}/x_c]\, \alpha_c \cos\varphi - - 0{,}5\,(K_\varphi/\operatorname{tg}\varepsilon)\,(c_y^\alpha)_{\text{a la}} [(x_{\text{c.p}\,\varphi})_{\text{a la(f)}}/x_c]\, \alpha_c \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi = -0{,}253.$$

El coeficiente del momento de balanceo de la semiala derecha

$$(m_{x1})_b = -0{,}5\, K_{\text{a la}} (c_y^\alpha)_{\text{a la}} [(z_{\text{c.p}\,\alpha})_{\text{a la(f)}}/x_c] \alpha_c \cos\varphi - - 0{,}5\,(K_\varphi/\operatorname{tg}\varepsilon)\,(c_y^\alpha)_{\text{a la}} [(z_{\text{c.p}\,\varphi})_{\text{a la(f)}}/x_c]\, \alpha_c^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi = -0{,}0576.$$

El coeficiente de la fuerza normal, inducida por el ala en el fuselaje, $(c_y)_{\text{f(a la)}} = K_f\,(c_y^\alpha)_{\text{a la}} \alpha_c = 0{,}25$. El coeficiente de la fuerza lateral, inducida por el ala en el fuselaje, $(c_{z'})_{\text{f(a la)}} = 0$.

El coeficiente del momento longitudinal, inducido por el ala en el fuselaje,

$$(m_{z'})_{\text{f(a la)}} = -K_f\,(c_y^\alpha)_{\text{a la}} [(x_{\text{c.p}\,\alpha})_{\text{(f)a la}}/x_c] \alpha_c = -0{,}177.$$

Los coeficientes de las fuerzas sumarias y los momentos de la combinación cruciforme:

de la fuerza normal

$$c_y = c_{y\,f} + (K_f + K_{a\,la})\,(c_y^\alpha)_{a\,la}\,\alpha_c = c_{y\,f} + 1{,}04;$$

de la fuerza lateral $c_{z'} = 0$;

del momento longitudinal

$$m_{z'} = (m_{z'})_f - (1/x_c)\,K_f(x_{c.p\,\alpha})_{f(a\,la)} +$$
$$+ K_{a\,la}\,(x_{c.p\,\alpha})_{a\,la(f)}\,(c_y^\alpha)_{a\,la}\alpha_c \cos^2\varphi = (m_{z'})_f - 0{,}579;$$

del momento de balanceo $m_{x'} = 0$.

11.26. Al inclinar, formando el ángulo φ, la configuración plana «fuselaje—ala», que se encuentra en un flujo bajo el ángulo de ataque α_c, la corriente que se forma es equivalente al flujo que surge al ser el ángulo de ataque $\alpha = \alpha_c \cos\varphi$ y el de deslizamiento $\beta = \alpha_c$ sen φ. La interferencia entre el ala y el fuselaje hace que, con el crecimiento del ángulo φ, aumente la fuerza normal en la semiala derecha y, al mismo valor, hace que disminuya esa fuerza en la semiala izquierda. Por lo tanto, la fuerza normal sumaria queda invariable.

Para la configuración cruciforme se parte de la suposición de que la presencia de las semialas verticales no influye sobre el carácter de la circulación en el plano longitudinal bajo el ángulo de ataque α, mientras que las semialas horizontales no influyen sobre el espectro aerodinámico de la circulación condicionada por el ángulo de deslizamiento β. Si tenemos en cuenta que para las semialas verticales el ángulo de deslizamiento es α y el de ataque, $(-\beta)$, con cualesquiera de sus combinaciones (todo ángulo φ) los signos de las componentes normal y transversal de las fuerzas, provocadas por la interferencia de las semialas superiores e inferiores, son distintos, es decir, estas fuerzas están dirigidas entre sí al encuentro.

11.27. El momento inestabilizante de balanceo surge al variar su signo. Este fenómeno se observa siendo pequeños los ángulos de flecha y bastante elevados los números $\mathbf{M}_\infty$ de los flujos supersónicos, cuando cambia el sentido de la fuerza normal adicional provocada por la interferencia del ala y el fuselaje durante el balanceo de una configuración cruciforme.

11.28. Durante el deslizamiento de una configuración plana el momento adicional de balanceo, que eleva la estabilidad transversal estática, sólo surge cuando la semiala tiene el borde lateral rectilíneo y éste es como una parte del borde de ataque. En las semialas derecha e izquierda aparecen fuerzas normales adicionales dirigidas en distintos sentidos y que forman el correspondiente momento. Si el vehículo volante tiene, además, un par de semialas verticales el momento adicional de balanceo, creado en ellas por las fuerzas transversales, será igual en valor y de sentido opuesto al momento de las semialas horizontales y, por lo tanto, el momento adicional sumario de balanceo de toda la configuración resultará nulo.

11.29. Si inclinamos las combinaciones planas del fuselaje y las semialas con diferentes disposiciones respecto del eje a un mismo ángulo φ, la semiala derecha con posición superior resultará estar inclinada a un ángulo menor, mientras que con la inferior, a un ángulo mayor que en caso de disposición central. Es conocido que los ángulos de ataque de las semialas α y de la combinación α_c están ligados con la dependencia $\alpha = \alpha_c \cos\varphi$. Por esta razón, con iguales ángulos de ataque y de balanceo de las combinaciones que examinamos la semiala derecha con posición superior se encuentra en el flujo con mayor ángulo de ataque, en tanto que con la inferior, bajo ángulo menor. Por consiguiente, en el primer caso, debajo de la semiala surge presión adicional de aire y en el segundo, enrarecimiento adicional.

Es evidente que con las semialas izquierdas sucede lo contario. Esto conduce a la creación de momentos adicionales de balanceo, los que estabilizan la rotación de la combinación con la posición superior del ala e inestabilizan en caso de la inferior.

11.30. Del análisis de los triángulos de velocidad (análogos a los de la fig. 11.20) durante la circulación alrededor de una superficie de sustentación con diedro alar, instalada bajo el ángulo ψ en el fuselaje, con ángulos de ataque $\alpha = 0$ y de deslizamiento $\beta \neq 0$, se desprende que la semiala derecha se encuentra bajo el ángulo local de ataque $\Delta\alpha_d = \beta\varphi$ y la izquierda, bajo el ángulo $\Delta\alpha_i = -\beta\psi$. Las fuerzas normales adicionales, condicionadas por estos ángulos, tienen sentidos contrarios y crean un momento de balanceo.

Si bajo el efecto del momento perturbador de balanceo la semiala derecha se desvía hacia abajo y la izquierda, hacia arriba, esto conduce en caso de diedro positivo a la aparente disminución y aumento de los ángulos ψ para las semialas de-

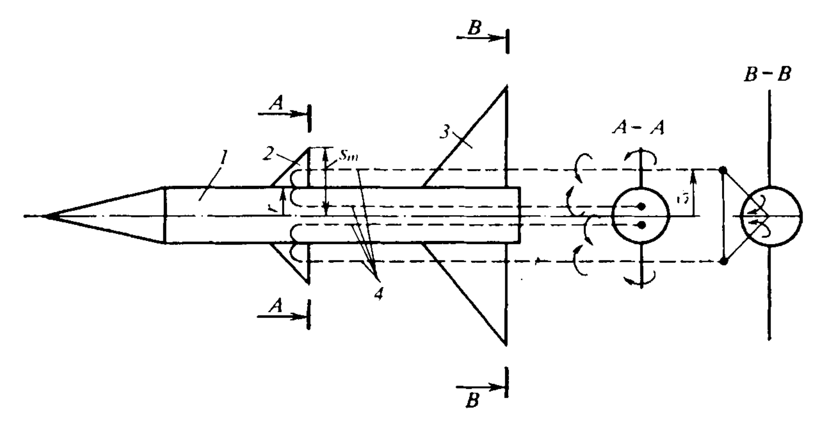


Fig. 11.23. Modelo vorticial del vehículo volante:
1, fuselaje; *2*, ala; *3*, empenaje; *4*, vórtices en herradura cuadrada

recha e izquierda, correspondientemente. La fuerza adicional en la semiala derecha disminuye, en la izquierda, aumenta. A cuenta de esto, aparece un momento inestabilizante adicional de balanceo que contribuye al alabeo adicional del vehículo volante.

En el caso de diedro negativo todo sucederá a la inversa y surgirá un *momento estabilizante* adicional *de balanceo.*

11.31. En el caso cuando el vuelo transcurre con grandes ángulos de ataque se produce la separación de la capa límite del fuselaje, lo que crea en la zona del ala (empenaje) la deflexión inuniforme del flujo condicionada por el balanceo o deslizamiento del vehículo volante. Esto conduce a la creación del correspondiente momento adicional de balanceo que se determina por vía experimental.

11.32. La naturaleza física de la interferencia entre el empenaje y el ala consiste en que la capa vorticial que sale del ala y que pasa cerca del empenaje, provoca la deflexión y el remanso del flujo y, como resultado, la disminución de su ángulo de ataque y fuerza de sustentación.

11.33. El ala unida al fuselaje provoca una mayor deflexión del flujo. La explicación de este fenómeno consiste en que, debido a la interferencia con el fuselaje semejante ala posee mayor fuerza de sustentación que el ala solitaria. Al incrementarse la fuerza de sustentación, se intensifica la capa vorticial saliente del ala que induce tras ella mayores velocidades y hace mayor la deflexión del flujo.

11.34. El modelo vorticial simplificado de la combinación «fuselaje—ala», empleado durante las investigaciones de la interferencia entre el empenaje y el ala a velocidades supersónicas, son dos pares de vórtices en herradura (fig. 11.23), con la particularidad de que el vórtice asociado está situado, parcialmente, en las semialas y el fuselaje. Un vórtice libre se separa de la semiala y el otro, se sitúa a lo largo del fuselaje. El sentido de giro de estos dos vórtices conjugados es opuesto.

11.35. El coeficiente de interferencia del ala y del empenaje situado tras ella i_{emp} es la razón entre dos magnitudes adimensionales: la primera es el cociente entre las fuerzas normales $\Delta Y_{(f.emp)\,v}/Y_{emp}$ en el fuselaje y el empenaje, respectivamente, tomando en consideración la influencia de los vórtices que salen del ala y en el empenaje aislado, en tanto que la segunda, la circulación adimensional que caracteriza la intensidad de dichos vórtices.

11.36. La coordenada lateral z_v del vórtice libre se determina suponiendo que él sustituye la capa vorticial, que se desprende del borde de salida del ala (fig. 11.23), en tanto que su intensidad es igual a la circulación en la sección de raíz Γ_0, es decir,

$$\int_r^{s_m} \Gamma\, dz = \Gamma_0 (z_v - r). \qquad (11.22)$$

La distribución de la circulación a lo largo del borde de salida del ala $\Gamma = \varphi_i - \varphi_s$, donde φ_i y φ_s son los potenciales de velocidad en el intradós y el trasdós del ala junto al borde de salida, respectivamente, que se determinan con ayuda de la teoría del sólido delgado. El valor de la integral en (11.22) se halla con ayuda de la integración numérica. Como los vórtices se desplazan en sentido lateral de forma insignificante, se considera que la coordenada z_v no varía a lo largo del flujo.

Suponiendo que los vórtices que se separan siguen la dirección del flujo, mientras que la coordenada transversal y_v está situada sobre el centro de gravedad del área del empenaje, calculada teniendo en cuenta la parte del área ocupada por el fuselaje, a la distancia $(x_{c.g})_{emp}$ del borde de salida del ala, hallamos que $y_v = \alpha\,(x_{c.g})_{emp}$ (véase la fig. 11.4).

11.37. Para determinar el coeficiente de interferencia i_{emp} es preciso calcular la razón entre la fuerza normal en la sección de cola del fuselaje con empenaje $\Delta Y_{(f,emp)v}$, condicionada por el vórtice, y la fuerza normal del empenaje aislado Y_{emp}. El valor de $\Delta Y_{(f.emp)v}$ se determina mediante el método de la reversibilidad del flujo, en tanto que Y_{emp}, con la fórmula obtenida con ayuda de la teoría del sólido delgado. Y aunque cada una de estas variables se calcula de modo aproximado, su cociente es suficientemente preciso.

Analicemos la circulación de flujos directo e inverso alrededor de la combinación del fuselaje no desviado ($\alpha_f = 0$) y el empenaje, situado bajo un ángulo de ataque α_v igual al valor negativo del ángulo de deflexión del flujo ($\alpha_v = -\varepsilon$). En la ecuación principal del método de reversibilidad del flujo tomemos para el flujo directo que en el área S_f, ocupada por la parte del fuselaje debajo del empenaje, el ángulo de ataque $\alpha_1 = \alpha_f = 0$ y en el área S_{emp} de las semialas $\alpha_1 = \alpha_v$; para el flujo inverso suponemos que el fuselaje y el empenaje se encuentran bajo un ángulo de ataque unitario. Entonces, de

$$\iint_{(S_f+S_{emp})} \Delta \bar{p}_1\, 1\, dS = \int_{(S_{emp})} \Delta \bar{p}_2 \alpha_v\, dS. \qquad (11.23)$$

De acuerdo con esto, la fuerza normal que buscamos

$$\Delta Y_{(\mathrm{f.emp})\mathrm{v}} = q_\infty \iint\limits_{(S_\mathrm{f}+S_\mathrm{emp})} \Delta \bar{p}_1\, dS = q_\infty \iint\limits_{(S_\mathrm{emp})} \Delta \bar{p}_2 a_\mathrm{v}\, dS. \qquad (11.24)$$

La función subintegral en el miembro central de esta igualdad, en correspondencia con la teoría del sólido delgado y el método de determinación del ángulo de deflexión del flujo mediante el cálculo del campo de velocidades inducido por los vórtices libres derecho e izquierdo, tiene su expresión analítica. Después de poner las correspondientes variables en (11.24) y ciertras tansformaciones, se obtiene la dependencia para el coeficiente de interferencia i_emp, con arreglo a la cual los cálculos se efectúan según el método de integración numérica.

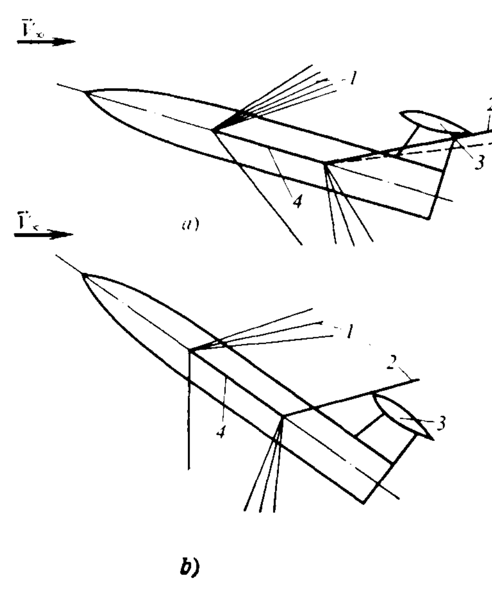


Fig. 11.24. Características instantáneas de la combinación «fuselaje—ala—empenaje»: *a* y *b*, ángulos de ataque pequeños y grandes; *1*, onda de enrarecimiento; *2*, onda de choque; *3*, empenaje; *4*, ala

11.38. Al aumentar el ángulo de ataque el efecto contraproducente de la interferencia puede ser reducido. Esto está condicionado por el descenso del empenaje con respecto al vórtice, situado en dirección del flujo (fig. 11.24), el crecimiento de la coordenada y_v y la disminución de i_emp. El empenaje horizontal elevado, o sea, situado más arrriba que el ala, para pequeños ángulos de ataque tiene mejores características, ya que los vórtices que se separan del ala pasan por debajo de él a considerable distancia. Pero cuanto mayor sea el ángulo de ataque, más cerca del vórtice se encontrará el empenaje y crecerá la influencia desfavorable de la inteferencia. Después de que el ángulo de ataque aumente hasta que el empenaje cruce el vórtice y comience a distanciarse de él, todo lo descrito anteriormente transcurrirá a la inversa y crecerá la estabilidad estática del vehículo volante.

Las ondas de choque y las ondas de enrarecimiento, que se forman en el ala, también influyen sobre la eficacia del empenaje. Con la disposición elevada del empenaje horizontal éste puede encontrarse delante de la onda de choque (fig. 11.24, *a*), someterse a la circulación bajo ángulo de ataque nulo y no crear fuerza normal. Con el crecimiento del ángulo de ataque aumenta el ángulo de la onda de choque y el empenaje penetra en el flujo que ha pasado la onda de choque (fig. 11.24, *b*) y de forma considerable restablece su eficacia, la que, debido a la influencia del ángulo de deflexión del flujo y a su remanso tras el ala, resulta ser algo más baja que durante la circulación de un flujo no perturbado bajo ese mismo ángulo de ataque.

11.39. Como sabemos, la circulación alrededor del fuselaje y del ala se acompaña del remanso de flujo. Por consiguiente, si el empenaje se encuentra en la cola del vehículo volante tras el ala, él se somete a la circulación de un flujo con número $\mathbf{M}_1 < \mathbf{M}_\infty$. Este número puede calcularse con ayuda de la dependencia $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_\infty \sqrt{k_2}$ en la que el coeficiente $k_2 = q_1/q_\infty$ es la razón de las presiones dinámi-

cas delante del empenaje y en el flujo no perturbado y que se halla usando una dependencia empírica. Conforme el número M_1 hallado calculamos la fuerza normal del empenaje.

11.40. El coeficiente de eficacia del empenaje

$$\eta_{emp} = \frac{Y_{f.ala\,emp} - Y_{f.ala}}{Y_{f.emp} - Y_f} = 1 + \\ + \frac{i_{emp} K_{ala} (dc_y/d\alpha)_{ala} S_{ala} (s_m^2)_{emp}}{8\,[(s_m)_{emp} + r_{emp}]^2 \pi\,[(s_m)_{emp} - r_{emp}]\,(z_v - r_{ala})}. \quad (11.25)$$

Esta fórmula determina la razón entre el incremento de la fuerza de sustentación al instalar el empenaje en la combinación «ala — fuselaje» y el incremento de dicha fuerza al instalar el empenaje en un fuselaje aislado.

El parámetro i_{emp} en (11.25) es el cociente entre dos magnitudes adimensionales: el incremento de la fuerza de sustentación del fuselaje y el empenaje bajo el efecto del vórtice (la circulación que caracteriza la intensidad del vórtice de estela), es decir,

$$i_{emp} = -4\bar{z}_v\,[(\bar{s}_m)_{emp} - 1]\,(K_{ala})_{emp}/[(\bar{y}_v^2 + \bar{z}_v^2)\,(\bar{s}_m)_{emp}]. \quad (11.26)$$

La coordenada lateral del vórtice junto al empenaje z_v se toma en los cálculos de la interferencia igual que en el ala, ya que las investigaciones muestran que el desplazamiento del vórtice en sentido lateral es pequeño.

De acuerdo con la teoría aerodinámica del sólido delgado, para $r/(s_m)_{ala} = 0{,}2$, hallamos el valor de $(z_v - r)/(s_m - r)_{ala} = 0{,}76$ según el cual determinamos la coordenada $z_v = r + 0{,}76 \cdot [(s_m)_{ala} - r] = 2{,}02$ y su valor relativo $\bar{z}_v = z_v/(s_m)_{emp} = 1{,}346$.

Hallemos la coordenada y_v en correspondencia con la fig. 11.4 como el cateto del triángulo rectángulo ABC, suponiendo que ella se encuentra debajo del centro de gravedad del área del empenaje, tomando en consideración la parte ocupada por el fuselaje, en tanto que la dirección de los vórtices coincide con la del flujo: $y_v = (x_{c.g})_{emp}\alpha = 0{,}4$.

El valor relativo de esta coordenada $\bar{y}_v = y_v/(s_m)_{emp} = 0{,}267$.

Según la teoría del sólido delgado, para $r/(s_m)_{emp} = 0{,}333$, determinamos el valor de $(K_{ala})_{emp} = 1{,}285$. Teniendo asimismo en cuenta que $(\bar{s}_m)_{emp} = (s_m)_{emp}/r = 3$, hallamos $i_{emp} = -2{,}45$.

Calculemos el coeficiente de eficiencia con la fórmula (11.25), en la que K_{ala} se calcula con arreglo a la teoría del sólido delgado para $r/(s_m)_{ala} = 0{,}2$ y es igual a $K_{ala} = 1{,}162$. Con el fin de calcular $(dc_y/d\alpha)_{ala}$ es preciso, primeramente, establecer el carácter del borde de ataque del ala. El ángulo de flecha $\chi = \mathrm{arctg}\, x_{ala}/[(s_m)_{ala} - r_{c11}]) = 45°$ y el ángulo de Mach $\mu_\infty = \mathrm{arcsen}\,(1/M_\infty) = 41{,}81°$. De aquí se desprende que $\chi < \pi/2 - \mu_\infty$ $(45° < \pi/2 - 41{,}81° = 48{,}19°)$.

Así, pues, el borde de ataque es supersónico. Para este caso $(dc_y/d\alpha)_{ala} = 4\sqrt{M_\infty^2 - 1} = 3{,}51$. Teniendo en cuenta que el área de las semialas $S_{ala} = [(s_m)_{ala} - r]\,x_{ala} = 4\ m^2$, después de poner en (11.25) todos los datos, hallamos $\eta_{emp} = 0{,}4$.

11.41. La diferencia entre los controles aerodinámicos, gasodinámicos y combinados consiste, ante todo, en los principios de creación de los esfuerzos de control. Con *los controles aerodinámicos* se controla el vuelo a cuenta de la redistribución de la presión del flujo incidente por las superficies externas del vehículo, o sea, variando el vector de las resultante de todas las fuerzas aerodinámicas; con *los*

gasodinámicos, debido a la redistribución de la presión por las superficies internas del vehículo (toberas, grupo motopropulsor, etc.), por lo que varía el vector de las resultantes de todas las fuerzas gasodinámicas. *Los controles combinados* utilizan los efectos de la interacción a chorro del flujo incidente con el flujo de gas que se expulsa al exterior por los orificios (ranuras, rendijas) en la superficie externa del vehículo volante. Con ello, en el esfuerzo de control entra no sólo la correspondiente componente de la fuerza propulsora (de empuje), formada debido a la inyección a chorro, sino también la fuerza aerodinámica que surge a cuenta de la interferencia del chorro con el flujo exterior. Desde el punto de vista de tal definición, el control que es la combinación de timones aerodinámico y accionado por gases, situados en un mismo eje y que giran mediante un mismo servomotor, no puede considerarse combinado. Éstos son dos diferentes timones que funcionan conjuntamente.

11.42. Los alerones están destinados a controlar el balanceo del vehículo volante. Esto se consigue debido a que los alerones situados en el borde de salida o bien en el extremo del ala (empenaje) se desvían en diferentes direcciones. La inclinación se emplea para girar el vehículo con el fin de variar su curso, ya que durante el balanceo se crea una componente horizontal de la fuerza normal (esquema de maniobra del avión). Pero, con ello, surge un momento de guiñada que obstaculiza la realización de la maniobra necesaria. La naturaleza de semejante momento es la siguiente. La desviación de los alerones acarrea la creación de incrementos de signos opuestos de la fuerza normal en las semialas derecha e izquierda. Esto provoca la aparición de la correspondiente diferencia de las fuerzas de la resistencia inducida que son las que crean el momento de guiñada y que hacen girar al vehículo en dirección del alerón bajado.

11.43. La peculiaridad de *los alerones diferenciales* consiste en que el alerón se desvía hacia arriba a un ángulo mayor que su pareja hacia abajo. Esto permite reducir a cero el incremento de las fuerzas normales en las semialas derecha e izquierda [véase (11.42)] y, por lo tanto, liquidar la diferencia de las fuerzas de la resistencia inducida en las dos semialas y el correspondiente momento de guiñada.

11.44. Recibe el nombre de *eficacia de los timones aerodinámicos* el grado de incremento de las fuerzas y los momentos de control del vehículo volante durante su deflexión. La eficacia se determina según el valor de las correspondientes derivadas parciales de los coeficientes de las fuerzas y los momentos con arreglo al ángulo de giro del timón. P. ej., para los timones de dirección la eficacia direccional se caracteriza con la expresión

$$\partial c_z/\partial\delta_{\text{dir}} = c_z^{\delta\text{dir}} \quad \text{o bien} \quad \partial m_y/\partial\delta_{\text{dir}} = m_y^{\delta\text{dir}}.$$

11.45. Entendemos por *controlabilidad o manejabilidad del vehículo* volante su capacidad de reaccionar a la deflexión de los timones variando respectivamente los parámetros de movimiento (ángulos de ataque, deslizamiento, inclinación y viraje de la trayectoria, etc.). La controlabilidad se aprecia según el grado de susceptibilidad del vehículo a la deflexión de los timones, es decir, por la intensidad de la variación de los parámetros de vuelo, principalmente, de los parámetros de la trayectoria del centro de masas del vehículo que determinan la ejecución de la maniobra necesaria. La controlabilidad se determina en grado considerable por la maniobrabilidad, o sea, por la capacidad del vehículo de variar con suficiente rapidez la altura de vuelo, el valor y el sentido de la velocidad.

La dependencia mutua entre la controlabilidad del vehículo volante y su estabilidad estática es contradictoria y consiste en lo siguiente. Los vehículos con gran margen de estabilidad estática, para asegurar rápida maniobra, requieren grandes

valores de los esfuerzos y momentos de control y, por consiguiente, la deflexión de los correspondientes controles a grandes magnitudes en el transcurso de intervalos relativamente pequeños de tiempo, lo que evidencia el bajo grado de controlabilidad. Y viceversa, los vehículos volantes de alta manejabilidad deben tener pequeño margen de estabilidad estática e, incluso, ser estáticamente inestables.

11.46. *El método de reversibilidad de los flujos* se basa en la teoría linealizada de la circulación alrededor de una misma forma en la planta, es decir, de una placa combada de diferente modo, de los flujos directo e inverso con iguales propiedades y velocidad. La relación fundamental de este método es la ecuación

$$\int\int_{(S)} \Delta\bar{p}_1\alpha_2\, dS = \int_{(S)} \Delta\bar{p}_2\alpha_1\, dS, \qquad (11.27)$$

en la que $\Delta\bar{p}_1$ y $\Delta\bar{p}_2$ son los coeficientes de la diferencia de presión en los lados inferior y superior de la placa en los flujos directo e inverso, respectivamente; α_1 y α_2, los ángulos locales de ataque en los mismos puntos de la placa en los flujos directo e inverso; S, el área de la placa en el plano.

En el caso particular de una placa plana $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ y de (11.27) obtenemos, que

$$\int\int_{(S)} \Delta\bar{p}_1\, dS = \int\int_{(S)} \Delta\bar{p}_2\, dS \qquad (11.27')$$

o bien $Y_1 = Y_2$, o sea, para las corrientes directa e inversa la fuerza de sustentación es la misma.

11.47. Los márgenes de aplicación del método de reversibilidad de los flujos están limitados por las suposiciones adoptadas en las teorías del sólido delgado y de la circulación linealizada. Con arreglo a esto, el método de reversibilidad de los flujos sólo es aplicable cuando tiene lugar la circulación del flujo linealizado uniforme (poco perturbado) de un fluido perfecto alrededor de sólidos delgados y superficies débilmente curvadas. Dicho método no toma en consideración la fuerza de succión que surge en el borde de ataque del ala.

11.48. Como conforme al planteamiento del problema el fuselaje y el ala se encuentran en el flujo directo bajo el ángulo de ataque $\alpha_1 = 0$, el timón (alerón del extremo) está deflexionado al ángulo δ ($\alpha_1 = \delta$), en tanto que en el flujo invertido supondremos que la combinación «fuselaje — ala — timón» está dispuesta bajo el ángulo común de ataque $\alpha_2 = \delta$. Partiendo de esto, en la fórmula (11.27) podemos realizar la simplificación en δ y obtener la dependencia buscada

$$\int\int_{(S_f+S_{ala}+S_t)} \Delta\bar{p}_1\, dS = \int\int_{(S_t)} \Delta\bar{p}_2\, dS. \qquad (11.28)$$

Al resolver el segundo miembro de esta ecuación, hallamos la fuerza normal de toda la combinación, cuando desviamos el timón, reduciéndola a la presión dinámica del flujo incidente no perturbado q_∞, es decir,

$$Y_t/q_\infty = \int\int_{(S_t)} \Delta\bar{p}_2\, dS. \qquad (11.29)$$

11.49. El sentido de la fórmula $Y_t/Y_{ala} = K_{ala}$ consiste en que al determinar, según la teoría del sólido delgado, el esfuerzo de control Y_t en la superficie de mando completamente móvil de acuerdo con el método de reversibilidad del flujo y comparar dicho esfuerzo con la fuerza Y_{ala}, creada en el ala inmóvil con la misma

área en la planta, se puede llegar a la conclusión: el efecto de la interferencia para toda la combinación «fuselaje — ala giratoria» es el mismo que para el ala inmóvil instalada en el fuselaje, a condición de que el ángulo de ataque de la indicada combinación α es igual al ángulo δ de giro de la superficie de mando.

11.50. La relación entre los coeficientes de la interferencia k_f y k_{ala}, condicionada por la deflexión de los timones completamente móviles al ángulo δ con el ángulo de ataque $\alpha = 0$, resulta ser igual al cociente entre los coeficientes de interferencia del fuselaje y el ala (K_f y K_{ala}), respectivamente, si empleamos la hipótesis de que el ala transmite al fuselaje parte de su fuerza normal sin que esto dependa de si esta fuerza se crea cuando la combinación se halla en un flujo bajo ángulo α o bien el ala está girada al ángulo δ y $\alpha = 0$.

11.51. Las ranuras entre el ala giratoria y el fuselaje reducen la eficacia de semejante superficie de control. Esto se explica por la disminución de la caída de presión en las superficies opuestas de la semiala, en la región de la cuerda de raíz, provocada por la ranura. Cuanto mayor sea la anchura de ésta y el ángulo de giro del timón, mayor será el espacio para el derrame del flujo de la región de presión elevada a la de baja presión y, por lo tanto, en mayor grado disminuirá el esfuerzo de control. De aquí queda claro que para disminuir la influencia de las ranuras sobre la eficacia del ala giratoria hemos de tender a los valores mínimos del ángulo tolerable de su giro y de la anchura de la ranura. A esto contribuirá asimismo la capa límite que, con una ranura suficientemente estrecha, reduce el derrame de forma notoria.

11.52. Si el ángulo de flecha del eje del ala $\chi_t < 90°$, el ángulo real de ataque α, por el que se calcula el esfuerzo de control, es menor que el ángulo de giro del ala δ. La relación entre estos dos ángulos se describe con la dependencia geométrica $\alpha = \delta \cos \chi_t$.

11.53. En correspondencia con la teoría aerodinámica del sólido delgado, la fuerza creada por la superficie de control se concentra en su borde de ataque, por lo que la forma de la mencionada superficie no influye sobre la fuerza de control. Desde el punto de vista físico este fenómeno puede explicarse del modo siguiente. En los vehículos volantes, que podemos considerar como sólidos delgados, la envergadura de la superficie de control es comparativamente pequeña y, por lo tanto, son insignificantes los cambios de la fuerza de sustentación, que tienen lugar debido a la variación de la forma de la indicada superficie y que se explican por la distinta capacidad portadora de los sectores situados a diferentes distancias del fuselaje.

11.54. Calculemos los valores eficaces de los parámetros:

$$\lambda'_{ala} = \lambda_{ala}\sqrt{1-M_\infty^2} = 2{,}133; \quad \operatorname{tg}\chi'_{b.a} = \operatorname{tg}\chi_{b.a}(1-M_\infty^2)^{-1/2} = 1{,}25\ (\chi'_{b.a} = 51{,}33°);$$
$$m' = \lambda'_{ala}/(a_0 \cos\chi'_{b.a}) = 0{,}543,$$

donde a_0 es el parámetro que se toma como para una placa delgada, igual a 2π.

Calculemos el valor de $\tau' = 5{,}88\delta\tau = 0{,}00194$ (δ y τ se hallan con ayuda de la teoría aerodinámica del sólido delgado, según el valor de $\eta = 2$).

Calculamos:

$$c_{y_a} = \pi\lambda_{ala}(\alpha-\alpha_0)/[1-\tau'\sqrt{(1+\tau')^2+(m'\pi)^2}] = 0{,}344. \qquad (11.30)$$

Tomando para el perfil $c_{y\ \text{máx. per}} = 0{,}9$ y, tomando en consideración que para $\eta = 2$ el coeficiente $K_\eta = 0{,}94$, calculamos el valor máximo del coeficiente de la fuerza de sustentación:

$$c_{y_a\,\text{máx}} = c_{y_a\,\text{máx.per}} K_\eta (1+\cos\chi)/2 = 0{,}722. \qquad (11.31)$$

Según la teoría aerodinámica del sólido delgado, para $\bar{b}_{t.m} = 0{,}2$ y $\delta_t = 60°$, determinamos el parámetro $\delta = 12$. A continuación, después de calcular según el valor de $\operatorname{tg} \chi_m = \operatorname{tg} \chi_{b.a} - (2/\lambda_{ala})(\eta - 1)/(\eta + 1) = 3/4$ la función $\cos \chi_m = 0{,}80$, calculamos el valor de $c_{y\ máx}$ del ala con el timón deflexionado: $c_{y\ máx\ \delta} = c_{y\ máx} + 0{,}075\bar{s}_t \delta \cos^2 \chi_m = 0{,}952$.

11.55. Según la teoría aerodinámica del sólido delgado, para la razón $r/s_m = r_s = 0{,}6/1{,}5 = 0{,}4$, hallamos el coeficiente de interferencia $K_{ala} = 1{,}349$. Con su ayuda, haciendo uso de la propiedad del ala móvil de provocar, durante el giro al ángulo δ, la misma fuerza de sustentación que al girar la combinación «fuselaje — ala fija» al ángulo de ataque $\alpha = \delta$, determinamos la fuerza sumaria de control: $Y_t = K_{ala} Y_{ala} = 12\,141$ N.

Seguidamente calculamos el valor del coeficiente de interferencia $k_{ala} = \Delta Y_{ala(f)\delta}/Y_{ala} = K^2_{ala}/(1 + r_s)^2 = 0{,}928$ y la correspondiente fuerza de sustentación $\Delta Y_{ala(f)\delta} = k_{ala} Y_{ala} = 8352$ N.

Como $Y_t = \Delta Y_{ala(f)\delta} + \Delta Y_{f(ala)\delta}$, tendremos $\Delta Y_{f(ala)\delta} = Y_t - \Delta Y_{ala(f)\delta} = 3789$ N.

11.56. La razón entre los coeficientes de la fuerza de sustentación de los timones y las correspondientes alas aisladas

$$\frac{Y_t}{Y_{ala}} = \frac{2}{\pi(1-\bar{s}_i)^2}\left[\frac{\pi}{4}(1-r_s^2)^2 - (\bar{s}_i^2 - r_s^4)^{1/2}(1-\bar{s}_i^2)^{1/2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(1+r_s^4)\operatorname{arc\,sen}\frac{1-2\bar{s}_i^2+r_s^4}{1-r_s^4} + r_s^2 \operatorname{arcsen}\frac{(1+r_s^4)\bar{s}_i^2 - 2r_s^4}{(1-r_s^4)\bar{s}_i^2}\right], \qquad (11.32)$$

donde $\bar{s}_i = s_i/s_m = 0{,}5$; $r_s = r/s_m = 0{,}2$.

Introduciendo estos datos en (11.32) obtenemos $Y_t/Y_{ala} = c_{y\ t}/c_{y\ ala} = 1{,}59$.

Determinemos $c_{y\ ala}$ del ala aislada. Como su forma y dimensiones, así como las condiciones de la circulación ($\mathbf{M}_\infty$ y $\alpha = \delta$) resultan ser las mismas que en el problema 11.40, $c_{y\ ala} = (dc_y/d\alpha)_{ala}\,\alpha = 0{,}357$. En correspondencia con esto, para el timón $c_{y\ t} = c_{y\ ala}(c_{y\ t}/c_{y\ ala}) = 0{,}567$.

Así, pues, debido a la interferencia la fuerza de sustentación del timón es mayor que la de la correspondiente ala solitaria.

11.57. El cociente entre los coeficientes de la fuerza de sustentación del timón (ala móvil) y las semialas aisladas $c_{y\ t}/c_{y\ ala} = K_{ala}$. Según los datos de la teoría aerodinámica del sólido delgado, para $r/s_m = 0{,}5/2{,}5 = 0{,}2$, ese coeficiente de interferencia $K_{ala} = 1{,}162$. Por ello, $c_{y\ t}/c_{y\ ala} = 1{,}162$. Como vemos, la fuerza de sustentación del timón crece debido a la interferencia con el fuselaje más del 16% en comparación con el ala aislada.

De la solución del problema anterior tenemos $c_{y\ ala} = 0{,}357$. De acuerdo con esto, $c_{y\ t} = c_{y\ ala}(c_{y\ t}/c_{y\ ala}) = 0{,}416$.

11.58. Para el valor de $(r/s_m)_{emp} = 1{,}125/(2 \cdot 1{,}81) = 0{,}31$, según la teoría aerodinámica del sólido delgado, hallamos los coeficientes $k_{emp} = 0{,}936$ y $0{,}327$, así como la coordenada relativa $(x_{c.p\delta}/b_{ala})_{emp(f)} = 0{,}666$ (el subíndice «ala» se sustituye por «emp»). De la teoría aerodinámica del sólido delgado, según $(r/s_m)_{emp} = 0{,}310$, determinamos la coordenada relativa $(x_{c.p\delta}/b_{ala})_{f(emp)} = 0{,}571$ y la consideramos igual a la coordenada $(x_{c.p\delta}/b_{ala})_{f(emp)}$.

La eficacia longitudinal

$$\partial m_z/\partial \delta_e = -(b_{emp.ala}/l)\{K_{emp}[(x_{c.p\delta}/b_{ala})_{emp(f)} + (x_{c.p\delta}/b_{ala})_{emp}] +$$
$$+ K_f[(x_{c.p\delta}/b_{ala})_{f(emp)} + (x_{c.p\delta}/b_{ala})_{emp}]\}(c_y^\alpha)_{emp} = -9{,}24.$$

Aquí se tom. .omo dimensión característica l la longitud de la cuerda media aerodinámica del ala $b_{CAM} = 1{,}5$, mientras que el valor del coeficiente aerodinámico $(c_y^\alpha)_{emp} = 2{,}31$ se ha tomado de la solución del problema 11.63.

Para determinar la eficacia transversal calculamos, según la teoría aerodinámica del sólido delgado, $f_{s.d} = 0{,}167\,[1 + 3{,}71\,(r/s_m)_{emp}] = 0{,}359$ y $\alpha' = \sqrt{M^2 - 1} = 1{,}73$. El alargamiento del empenaje aislado constituye, en correspondencia con sus dimensiones, $\lambda_{emp} = 4$. Como $\alpha'\lambda_{emp} = 6{,}92 > 4$, la razón

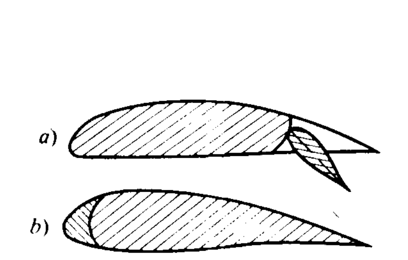


Fig. 11.25. Esquema del flap (*a*) y del slat (*b*)

Fig. 11.26. Dependencia para el coeficiente de la fuerza de sustentación:
1, sin hipersustentadores; *2*, con slat; *3*, con flap

de las derivadas estáticas de los coeficientes de la fuerza normal del empenaje, determinadas con arreglo a la teoría linealizada y la del sólido delgado, $(c_y^\alpha)_{emp.t.lin}/(c_y^\alpha)_{emp.s.d} = 8/(\pi\alpha'\lambda_{emp}) = 0{,}368$.

Seguidamente, calculamos el valor de la función f teniendo en cuenta la corrección introducida por la teoría linealizada: $f = f_{s.d}\,(c_y^\alpha)_{emp.t.lin}/(c_y^\alpha)_{emp.s.d} = 0{,}1321$. Entonces, la eficacia transversal $\partial m_x/\partial\delta_a = -\lambda_{ala} f = -0{,}528$.

Si tomamos como área característica $S = S_{emp}$, la inclinación de la curva $c_y\,(\delta_e)$ es igual a $(\partial c_y/\partial\delta_e)_{(f.emp)\delta} = (c_y^\alpha)_{emp}\,(k_{ala} + k_f) = 2{,}918$.

11.59. Las curvas *5* y *6* (fig. 11.7) corresponden al equilibrio inestable (para modelos sin empenaje), en tanto que las curvas *1—4*, al estable (para los modelos con empenaje). A la posición delantera del centro de masas corresponde la curva *3*, a la posterior, la *2*. Los valores aproximados de los ángulos de ataque de trimado: $\alpha_{tr} = -3°$ (curva *3*), $\alpha_{tr} = 7°$ (curva *2*) y $\alpha_{tr} = 0$ para las curvas *4*, *5*, *6* y *1*.

11.60. Los esquemas de alas con flap y slat se ofrecen en la fig. 11.25, mientras que en la fig. 11.26 se muestran las dependencias entre el coeficiente de la fuerza de sustentación de las alas c_{y_a} sin sistema hipersustentador, con slat y con flap y el ángulo de ataque α. Vemos que la diferencia de estas dependencias consiste en que el ala con slat aumenta notoriamente el ángulo crítico de ataque ($\alpha_{cr\,2} > \alpha_{cr\,1}$), en tanto que para el ala con flap es característica cierta disminución de este ángulo ($\alpha_{cr\,3} < \alpha_{cr\,1}$). Esto se explica por *el efecto de soplado tangencial* en la capa límite sobre la superficie superior del perfil del ala, efectuada por la ranura perfilada entre el slat doblado y el ala (fig. 11.25, *b*). El chorro que sale a gran velocidad por la ranura desplaza el punto de desprendimiento en sentido del flujo hacia abajo y asegura la circulación adherida con mayores ángulos de ataque que con el flap inclinado, cuyo efecto de succión es más débil.

11.61. En la fig. 11.27 están representadas las polares de alas sin sistema hipersustentador y con los flaps inclinados. La deflexión de los flaps aumenta la resis-

tencia al avance, el valor máximo de la fuerza de sustentación y el valor crítico del número de Mach, pero con todo esto, reduce el ángulo crítico de ataque y el rendimiento del ala. Esto se explica por la redistribución de la presión durante la deflexión de los flaps: la presión en el intradós del ala crece, sobre la superficie superior del flap se crea enrarecimiento, lo que aumenta la velocidad y reduce la presión en el trasdós del ala (efecto de succión).

11.62. En la fig. 11.28 se aducen las dependencias aproximadas entre el coeficiente del momento respecto a la charnela m_{char} y los ángulos de deflexión del timón de altura δ y de ataque α de un empenaje aislado. La presencia del ángulo positivo de ataque desplaza dicha dependencia hacia abajo, por ello, con $\delta = 0$ el momento $m_{\text{char}} < 0$, mientras que con $\delta < 0$, $m_{\text{char}} = 0$.

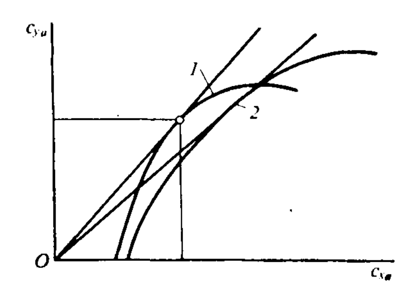


Fig. 11.27. Polares de las alas sin hipersustentadores (1) y con flap (2)

Fig. 11.28. Curvas para el momento de charnela del timón de altura

11.63. Según la teoría aerodinámica del sólido delgado, para el valor de $(r/s_m)_{\text{ala}} = 1/4 = 0{,}25$, hallamos los coeficientes de interferencia $K_{\text{ala}} = 1{,}21$, $k_{\text{ala}} = 0{,}94$. Como el ala tiene borde de ataque supersónico, $(c_y^\alpha)_{\text{ala}} = (c_y^\delta)_{\text{ala}} = 4/\sqrt{M_\infty^2 - 1} = 2{,}31$.

Calculamos los coeficientes de la fuerza normal conforme a los ángulos α y δ: $(c_y)_\alpha = K_{\text{ala}} (c_y^\alpha)_{\text{ala}}\, \alpha = 0{,}2795$; $(c_y)_\delta = k_{\text{ala}} (c_y^\delta)_{\text{ala}}\, \delta = 0{,}4342$.

Calculen los valores de los coeficientes de descomposición:

$$c_1 = (M_\infty^2 - 1)^{-1/2} = 0{,}5743; \quad c_2 = 0{,}25\,(M_\infty^2 - 1)^{-2}\,[(M_\infty^2 - 2)^2 + kM_\infty^4] = 0{,}7312.$$

Suponiendo que $b_{\text{CAM}}/b_{\text{ala}} = 2/3$ ($b_{\text{CAM}} = 2$). Determinamos el valor de $\Delta\bar{x}_{\text{c.p}} = (2/3)\,(c_2/c_1)\,\bar{s}_{\text{máx}} = 0{,}0422$.

Calculamos la distancia relativa del centro de presión al borde de ataque de la cuerda de raíz del ala:

$$x_{\text{c.p}}/b_{\text{ala}} = (x_{\text{c.p}}/b_{\text{ala}})_{\text{ala}} - \Delta\bar{x}_{\text{c.p}} b_{\text{CAM}}/b_{\text{ala}} = 0{,}6385.$$

Aquí hemos adoptado que $(x_{\text{c.p}}/b_{\text{ala}})_{\text{ala}} = 2/3$.

De acuerdo con la teoría aerodinámica del sólido delgado, para $(r/s_m)_{\text{ala}} = 0$ y $0{,}25$, respectivamente, hallamos $(x_{\text{c.p}\alpha}/b_{\text{ala}})_{\text{ala}} = 0{,}667$, $(x_{\text{c.p}\alpha}/b_{\text{ala}})_{\text{ala(f)}} = 0{,}648$. Por consiguiente, $\Delta\bar{x}_{\text{c.p}\alpha} = (x_{\text{c.p}\alpha}/b_{\text{ala}})_{\text{ala}} - (x_{\text{c.p}\alpha}/b_{\text{ala}})_{\text{ala(f)}} = 0{,}019$.

Para determinar el desplazamiento del centro de presión durante la deflexión del timón ($\Delta\bar{x}_{c.p\delta}$), según la teoría aerodinámica del sólido delgado, para $(r/s_m)_{ala} = 0$ y $0{,}25$, obtenemos $(x_{c.p\delta}/b_{ala})_{ala} = 0{,}667$ y $(x_{c.p\delta}/b_{ala})_{ala(f)} = 0{,}667$, respectivamente. O sea, $\Delta x_{c.p\delta} = (x_{c.p\delta}/b_{ala})_{ala} - (x_{c.p\delta}/b_{ala})_{ala(f)} = 0$ y, en correspondencia con los resultados obtenidos, la coordenada relativa del centro de presión con la deflexión del timón $(x_{c.p\delta}/b_{ala})_\delta = x_{c.p}/b_{ala} - \Delta\bar{x}_{c.p\delta} b_{CAM}/b_{ala} = 0{,}6385$, en tanto que la coordenada relativa del centro de presión $(x_{c.p}/b_{ala})_\alpha = x_{c.p}/b_{ala} - \Delta x_{c.p\alpha} b_{CAM}/b_{ala} = 0{,}6259$.

Determinamos el coeficiente del momento respecto a la charnela:

$$m_{char} = \frac{b_{ala}}{b_{CAM}} \left\{ (c_y)_\alpha \left[\frac{x_{rot}}{b_{ala}} - \left(\frac{x_{c.p}}{b_{ala}} \right)_\alpha \right] + \right.$$

$$\left. + (c_y)_\delta \left[\frac{x_{rot}}{b_{ala}} \left(\frac{x_{c.p}}{b_{ala}} \right)_\delta \right] \right\} = 0{,}0378.$$

11.64. El coeficiente de la fuerza de sustentación del vehículo volante, referido al área del ala aislada, se determina en forma de la suma de varias componentes:

$$c_y = c_{y\,f} + (c_y)_{(ala)f} + (c_y)_{f(ala)} + (c_y)_{emp(f)} + (c_y)_{f(emp)} + (c_y)_{f(emp)v}. \quad (11.33)$$

Calculemos cada una de estas componentes. El coeficiente de la fuerza de sustentación del fuselaje se toma igual al correspondiente coeficiente para el cono de nariz:

$$c_{yf} = 2\alpha'\alpha\beta_{cono}\sqrt{u_{cono}^2 - 1}\, S_{máx.t}/S_{ala}, \quad (11.34)$$

donde $\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 1{,}12$. $\beta_{cono} = r/x_n = 0{,}1666$; $u_{cono} = 1/(\alpha'\beta_{cono}) = 5{,}3619$; $S_{máx.t}/S_{ala} = \pi r^2/\{x_{ala}[(s_m)_{ala} - r]\} = 0{,}1962$.

De acuerdo con lo anterior $c_{y\,f} = 0{,}0374$.

El coeficiente de la fuerza de sustentación del ala giratoria con la presencia del fuselaje

$$(c_y)_{ala(f)} = (K_{ala}\alpha + k_{ala}\delta_{ala})\,(c_y^\alpha)_{ala}. \quad (11.35)$$

Para el ala aislada la derivada $(c_y^\alpha)_{ala} = (dc_y/d\alpha)_{ala} = 4/\sqrt{M_\infty^2 - 1} = 3{,}57$. Este resultado corresponde al borde supersónico de ataque del ala (véase la solución del problema 11.40).

A continuación, según la teoría aerodinámica del sólido delgado, para la razón $r/(s_m)_{ala} = r_s = 0{,}2$, hallamos $K_{ala} = 1{,}162$ y calculamos $k_{ala} = K_{ala}^2/(1 + r_s)^2 = 0{,}9376$. Teniendo en cuenta estos datos $(c_y)_{ala(f)} = 0{,}5822$.

El coeficiente de la fuerza de sustentación del fuselaje en presencia del ala

$$(c_y)_{f(ala)} = (K_f\alpha + k_f\delta_{ala})\,(c_y^\alpha)_{ala}. \quad (11.36)$$

De forma análoga, de acuerdo con $r/(s_m)_{ala} = 0{,}2$, hallamos $K_f = 0{,}278$ y el coeficiente $k_f = K_{ala} - k_{ala} = 0{,}2244$.

Así, pues, $(c_y)_{f(ala)} = 0{,}1210$.

El coeficiente de la fuerza de sustentación del empenaje en presencia del fuselaje (sin tomar en consideración la influencia de los vórtices del ala)

$$(c_y)_{emp(f)} = (K_{emp}\alpha + k_{emp}\delta_{emp})\,(c_y^\alpha)_{emp}\,(S_{emp}/S_{ala}). \quad (11.37)$$

Las semialas del empenaje con geométricamente semejantes a las del ala, tienen bordes de ataque supersónicos y, por ello, iguales coeficientes $(c_y^\alpha)_{emp} = (c_y^\alpha)_{ala} = 3{,}57$. El cociente de las áreas $S_{emp}/S_{ala} = [(s_m)_{emp} - r]\,x_{emp}/ /[(s_m)_{ala} - r]\,x_{ala} = 0{,}375$.

Con arreglo a la teoría aerodinámica del sólido delgado, para el parámetro $r/(s_m)_{emp} = r_s = 0{,}333$, hallamos el coeficiente $K_{emp} = 1{,}285$ y el coeficiente $k_{emp} = K^2_{emp}/(1 + r_s)^2_{emp} = 0{,}9293$. Así, pues, $(c_y)^2_{emp(f)} = 0{,}2342$.

El coeficiente de la fuerza de sustentación del fuselaje en presencia del empenaje (sin tener en cuenta los vórtices del ala)

$$(c_y)_{f(emp)} = [(K_f)_{emp}\,\alpha + (k_f)_{emp}\,\delta_{emp}]\,(c_y^\alpha)_{emp}\,(S_{emp}/S_{ala}). \qquad (11.38)$$

Análogamente, por el valor de $r/(s_m)_{emp} = 0{,}333$, hallamos el coeficiente $(K_f)_{emp} = 0{,}495$ y el coeficiente $(k_f)_{emp} = K_{emp} - k_{emp} = 0{,}359$. En correspondencia con estos datos $(c_y)_{f(emp)} = 0{,}09$.

El coeficiente de la fuerza de sustentación del sector aleteado, provocada por la influencia de los vórtices del ala,

$$(c_y)_{(f\cdot emp)v} = i_{emp}\,\{(c_y^\alpha)_{ala}\,(c_y^\alpha)_{emp}\,(K_{ala}\alpha + k_{ala}\delta_{ala}) \times$$
$$\times [(s_m)_{emp} - r]\}/[2\pi\lambda_{emp}\,(z_v - r)]. \qquad (11.39)$$

Aquí, el alargamiento de empenaje aislado $\lambda_{emp} = 4\,[(s_m)_{emp} - r]^2/S_{emp} = 4$.

En la solución del problema 11.40 obtuvimos $i_{emp} = -2{,}45$. Introduciendo estos datos y otros valores conocidos en (11.39), hallamos $(c_y)_{(f\cdot emp)v} = -0{,}1333$.

Ahora, calculamos el coeficiente sumario de la fuerza de sustentación $c_y = 0{,}8837$ y el correspondiente valor de ésta $Y = c_y q_\infty S_{ala} = c_y\,(kp_\infty \mathrm{M}_\infty^2/2) \times [(s_m)_{ala} - r]\,x_{ala} = 5{,}2127\cdot 10^5$ N.

11.65. Calculemos las magnitudes necesarias para el posterior cálculo: $r_s = r/s_m = 0{,}2$; $\bar{s}_i = s_i/s_m = 0{,}6$; $q_\infty = (k/2)\,p_\infty \mathrm{M}_\infty^2 = 1{,}5446\cdot 10^5$ Pa.

Aquí, la presión dinámica se ha calculado a condición de que el vuelo transcurre en la atmósfera aérea a una presión $p_\infty = 9{,}81\cdot 10^4$ Pa. Conforme a la teoría aerodinámica del sólido delgado, la fuerza de sustentación de la combinación «fuselaje — ala — timón», condicionada por la deflexión del control móvil, cuya cuerda es igual a la del timón posterior,

$$Y_{t.c.móv} = 4\delta q_\infty s_m^2\,\{(\pi/4)\,(1 - r_s^2)^2 - r_s\,(1 - r_s^2) +$$
$$+ [(1 + r_s^2)^2/2]\,\mathrm{arcsen}\,[(1 - r_s^2)/(1 + r_s^2)]\} = 1{,}1473\,(4\delta q_\infty s_m^2). \qquad (11.40)$$

Para esa misma combinación hallemos la fuerza de sustentación provocada por la deflexión del timón externo, cuya cuerda es igual a la del prefijado

$$Y_{t\cdot ext} = 4\delta q_\infty s_m^2 \left[\frac{\pi}{4}\,(1 - r_s^2)^2 - (\bar{s}_i^2 - r_s^4)^{1/2}\,(1 - \bar{s}_i)^{1/2} + \frac{1}{2}\,(1 + r_s^4) \times\right.$$
$$\left.\times\,\mathrm{arcsen}\,\frac{1 - 2\bar{s}_i^2 + r_s^4}{1 - r_s^4} + r_s^2\,\mathrm{arcsen}\,\frac{(1 + r_s^4)\,\bar{s}_i^2 - 2r_s^4}{(1 - r_s^4)\,\bar{s}_i^2}\right] = 0{,}448\,(4\delta q_\infty s_m^2). \qquad (11.40')$$

Determinemos la razón entre la fuerza de sustentación, dependiente de la deflexión del timón interno y el correspondiente valor de esta fuerza para el ala aislada, formada en realidad por los timones internos unidos conjuntamente:

$$\left(\frac{Y_{t.int}}{Y_{ala\ int}}\right)_{s.d} = \frac{Y_{t.c.móv} - Y_{t.ext}}{2\pi\delta q_\infty\,(s_i - r)^2} = \frac{(1{,}17 - 0{,}448)\,4\delta q_\infty s_m^2}{2\pi\delta q_\infty\,(s_i - r)^2} = 2{,}71.$$

El valor de la fuerza de sustentación para el ala aislada, calculada por la teoría linealizada,

$$(Y_{ala\ int})_{t.lin} = 2\,(s_i - r)^2\,b_t q_\infty\,(4\alpha/\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}) = 278 \text{ N}.$$

A este valor corresponde la fuerza de sustentación de la combinación «fuselaje — ala — timón interno» $Y_{t.int} = (Y_{t.int}/Y_{ala\ int})_{s.d}\ (Y_{ala\ int})_{t.lin} = 767$ N.

11.66. Tomando en consideración la interferencia, calculamos la derivada respecto del ángulo de ataque α del coeficiente de la fuerza normal de la combinación «fuselaje — ala — empenaje»:

$$(c_y^\alpha)_{f.ala\ emp} = (K_{ala} + K_f + K_{f.ais})\,(c_y^\alpha)_{ala} + (K_{emp} + K_f)\,(c_y^\alpha)_{emp}\,(S_{emp}/S_{ala}). \qquad (11.41)$$

Esta fórmula contiene los resultados del cálculo de los coeficientes de interferencia para las combinaciones «fuselaje — ala» y «fuselaje — empenaje», respectivamente. Calculemos estos coeficientes haciendo uso de las gráficas y tablas obtenidas con ayuda de la teoría aerodinámica del sólido delgado. Según el valor de $(r_s)_{ala} = r/(s_m)_{ala} = 1/4{,}1 = 0{,}2439$ hallamos $K_{ala} = (c_y)_{ala(f)}/(c_y)_{ala} = 1{,}2$, mientras que conforme a $2\alpha' r/b_{ala} = 2\sqrt{M_\infty^2 - 1}\,r/b_{ala} = 1{,}0580$ y α' tg $\varepsilon_{ala} = \sqrt{M_\infty^2 - 1}\,\{[(s_m)_{ala} - r]/b_{ala}\} = 1{,}6398$ determinamos $\overline{K}_f = 3{,}3$. Después de calcular $\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 2{,}49$, $(\partial c_y/\partial\alpha)_{ala} = (c_y^\alpha)_{ala} = 1{,}609$, $b_{c.extr}/b_{ala} = 0$ y $(s_m)_{ala}/r = 4{,}1$, obtenemos

$$K_f = \overline{K}_f/[\alpha'\,(\partial c_y/\partial\alpha)_{ala}\,(1 + b_{c.extr}/b_{ala})\,(s_m/r - 1)] = 0{,}266.$$

De modo análogo se calculan los correspondientes coeficientes de interferencia para el empenaje. De acuerdo con el valor de $(r_s)_{emp} = r/(s_m)_{emp} = 1/2 = 0{,}5$, determinamos $K_{emp} = (c_y)_{emp(f)}/(c_y)_{emp} = 1{,}45$ y por $2\alpha' r/(b_{ala})_{emp} = 3{,}32$ y α' tg $\varepsilon_{emp} = \alpha'\,[(s_m)_{emp} - r]/(b_{ala})_{emp} = 1{,}65$ hallamos $\overline{K}_f = 0{,}5$ y según este valor determinamos $K_f = 0{,}125$.

Calculemos el coeficiente $K_{f.ais}$ que toma en consideración la fuerza de sustentación del fuselaje aislado:

$$K_{f.ais} = (c_y^\alpha)_f\,S_{máx.t}/[(c_y^\alpha)_{ala}\,S_{ala}]. \qquad (11.42)$$

Con este fin, con arreglo a la teoría del sólido delgado hallamos la derivada del coeficiente de la fuerza normal del fuselaje respecto del ángulo α:

$$(c_y^\alpha)_f = (\partial c_N/\partial\alpha)_f = 2.$$

La derivada del coeficiente de la fuerza normal del ala respecto del ángulo α ha sido calculada con anterioridad $(c_y^\alpha)_{ala} = 1{,}61$. Como el área $S_{máx.t} = \pi r^2 = 3{,}14$, mientras que el área del ala (la suma de las áreas de dos semialas) $S_{ala} = [(s_m)_{ala} - r]\,(b_{ala} - b_{c.extr}) = 14{,}6$, resulta que $K_{f.ais} = 0{,}267$.

Considerando que el área del empenaje $S_{emp} = [(s_m)_{emp} - r]\,[(b_{ala})_{emp} - (b_{c.extr})_{emp}] = 1{,}5$, con la fórmula (11.41) calculamos $(c_y^\alpha)_{f.ala\ emp} = 0{,}0534$. Para los coeficientes se ha tomado en esta fórmula la igualdad $(c_y^\alpha)_{emp} = (c_y^\alpha)_{ala}$ debido a que en la planta la forma del ala y del empenaje es la misma; además, realizamos su recálculo de la medida en radianes de los ángulos a la de grados: $(c_y^\alpha)_{emp} = (c_y^\alpha)_{ala} = 0{,}0281$.

Las derivadas de los coeficientes de la fuerza normal del ala y el empenaje (con la presencia del fuselaje) respecto de su ángulo de giro δ se calculan con las expresiones:

$$(c_y^\delta)_{ala\ f} = (k_{ala} + k_f)\,(c_y^\alpha)_{ala}; \qquad (11.43)$$

$$(c_y^\delta)_{emp.f} = (k_{emp} + k_f)\,(c_y^\alpha)_{emp}\,(S_{emp}/S_{ala}). \qquad (11.43')$$

Los coeficientes de interferencia que entran en estas expresiones han de determinarse con arreglo a la teoría aerodinámica del sólido delgado. De acuerdo con el valor de $(r_s)_{ala} = 0{,}244$, hallamos $k_{ala} = 0{,}94$, $k_f = 0{,}27$, en tanto que con el

valor de $(r_s)_{emp} = 0{,}5$, los valores de $k_{emp} = 0{,}94$, $k_f = 0{,}51$. Así, pues, $(c_y^\delta)_{ala.f} = 0{,}0341$; $(c_y^\delta)_{emp.f} = 0{,}0042$.

Para calcular la derivada del coeficiente del momento longitudinal respecto del ángulo α, hacemos uso de la fórmula

$$(m_z^\alpha)_{f.ala\,emp} =$$
$$= \{K_{ala}[x_{rot} - (x_{c.p\alpha})_{ala}] + K_f[x_{rot} - (x_{c.p\alpha})_f] + K_{f.als}[x_{rot} - x_{c.p})_f]\} c_y^\alpha{}_{ala}/x_c +$$
$$+ \{K_{emp}[x_{rot} - (x_{c.p\alpha})_{emp}] + K_f[x_{rot} - (x_{c.p\alpha})_f]\} c_y^\alpha{}_{emp} S_{emp}/(S_{ala} x_c). \quad (11.44)$$

Determinemos las coordenadas de los centros de presión que en (11.44) entran. Según el valor de $(r_s)_{ala} = 0{,}244$, hallamos $(x_{c.p\alpha}/b_{ala})_{ala(f)} = 0{,}648$. En correspondencia con esto, $(x_{c.p\alpha})_{ala} = x_{ala} + (x_{c.p\alpha}/b_{ala})_{ala(f)} b_{ala} = 13{,}75$.

Según el valor de $2\alpha' r/b_{ala} = 1{,}06$, hallamos $(x_{c.p\alpha}/b_{ala})_{f(ala)} = 1{,}05$ y determinamos $(x_{c.p\alpha})_f = x_{rot} + (x_{c.p\alpha}/b_{ala})_{f(ala)} b_{ala} = 15{,}6$.

De este mismo modo se calculan las coordenadas del centro de presión del empenaje. Para $(r_s)_{emp} = 0{,}5$ obtenemos $(x_{c.p\alpha}/b_{ala})_{emp(f)} = 0{,}647$ y calculamos $(x_{c.p\alpha})_{emp} = x_{emp} + (x_{c.p\alpha}/b_{ala})_{emp(f)} (b_{ala})_{emp} = 18{,}97$.

De acuerdo con la teoría aerodinámica del sólido delgado, la distancia hasta el centro de presión del fuselaje

$$(x_{c.p})_f = x_{máx.t}[1 - W_f/(\pi r^2_{máx.t} x_{máx.t})], \quad (11.45)$$

donde $W_f = a\pi r^2_{máx.t} x_{máx.t}$ es el volumen de la sección (cono) de nariz; a, el coeficiente de dicho volumen.

Para sección ojival de nariz $a = 0{,}495$, por lo que $(x_{c.p})_f = x_{máx.t}(1 - a) = 2{,}78$.

A continuación, para el valor de $2\alpha' r/(b_{ala})_{emp} = 3{,}32$ determinamos $[x_{c.p\alpha}/(b_{ala})_{emp}]_{f(emp)} = 0{,}67$ y calculamos la coordenada del centro de presión de la fuerza adicional normal del fuselaje, condicionada por la influencia del empenaje: $(x_{c.p\alpha})_f = x_{emp} + [x_{c.p\alpha}/(b_{ala})_{emp}]_{f(emp)} (b_{ala})_{emp} = 19{,}0$.

Pongamos los valores hallados en (11.44): $(m_z^\alpha)_{f.ala.emp} = -0{,}0063$.

Calculemos las derivadas $(m_z^\delta)_{ala\,f}$ y $(m_z^\delta)_{emp.f}$. Con este fin, según la teoría aerodinámica del sólido delgado, para el valor de $(r_s)_{ala} = 0{,}244$, hallamos $(x_{c.p\delta})/(b_{ala})_{ala(f)} = 0{,}677$ y, para $(r_s)_{emp} = 0{,}5$, calculamos $[x_{c.p\delta}/(b_{ala})_{emp}]_{emp(f)} = 0{,}664$. Con estos datos determinamos $(x_{c.p\delta})_{ala} = x_{ala} + (x_{c.p\delta}/b_{ala})_{ala(f)} b_{ala} = 13{,}85$; $(x_{c.p\delta})_{emp} = x_{emp} + [x_{c.p\delta}/(b_{ala})_{emp}]_{emp(f)} \times (b_{ala})_{emp} = 19{,}0$.

Los valores buscados de las derivadas:

$$(m_z^\delta)_{ala\,f} = \{k_{ala}[x_{rot} - (x_{c.p\delta})_{ala}] + k_f[x_{rot} - (x_{c.p\alpha})_f]\} c_y^\alpha{}_{ala}/x_c = -0{,}0061;$$
$$(m_z^\delta)_{emp.f} = \{k_{emp}[x_{rot} - (x_{c.p\delta})_{emp}] + k_f[x_{rot} - (x_{c.p\alpha})_f]\} \times$$
$$\times c_y^\alpha{}_{emp} S_{emp}/(S_{ala} x_c) = -0{,}0017.$$

Después de calcular las restantes componentes de los coeficientes de la fuerza normal c_y' y del momento longitudinal m_z' podemos determinar sus valores para toda la combinación sin tomar, por el momento, en consideración la influencia de los vórtices del ala. Hallemos dichos valores para las siguientes condiciones de vuelo: ángulo de ataque $\alpha = 6°$; ángulos de giro del empenaje $(\delta_l)_{emp} = 0$ y $10°$, ángulo de giro del ala $(\delta_l)_{ala} = 0$. Las correspondientes dependencias de cálculo tienen la forma

$$c_y = (c_y^\alpha)_{f.ala\,emp}\alpha + (c_y^\delta)_{emp.f}(\delta_l)_{emp} + (c_y^\delta)_{ala(f)}(\delta_l)_{ala}; \quad (11.46)$$
$$m_z' = (m_z^\alpha)_{f.ala\,emp}\alpha + (m_z^\delta)_{emp.f}(\delta_l)_{emp} + (m_z^\delta)_{ala(f)}(\delta_l)_{ala}. \quad (11.47)$$

Después de poner en ellas los datos para el caso $(\delta_l)_{ala} = 0$, obtenemos: para $(\delta_l)_{emp} = 0$, $c_y' = 0{,}32$; $m_z' = -0{,}038$; para $(\delta_l)_{emp} = 10°$, $c_y' = 0{,}362$; $m_z' = -0{,}0551$.

Ahora, calculamos estas características aerodinámicas teniendo en cuenta los vórtices del ala. El coeficiente de la fuerza normal

$$c_y = c_y' + \frac{i_{emp}\,[K_{ala}\alpha + k_{ala}\,(\delta_l)_{ala}]\,c^{\alpha}_{y\,ala}c^{\alpha}_{y\,emp}\,(s_m - r)_{emp}\,57{,}3}{2\pi\lambda_{emp}\,[(z_v - r)/(s_m - r)]_{ala}\,(s_m - r)_{ala}}. \quad (11.48)$$

Calculemos las variables incógnitas que entran aquí. El alargamiento $\lambda_{emp} = 4\,[(s_m)_{emp} - r]/(b_{ala})_{emp} = 2{,}67$.

De acuerdo con la teoría aerodinámica del sólido delgado, para $\lambda = b_{c.extr}/b_{ala} = 0$ y $\lambda_{ala}\alpha' = 4\,[(s_m)_{ala} - r]\,\alpha'/b_{ala} = 6{,}55$, donde $\lambda_{ala} = 2{,}64$, obtenemos $[(z_v - r)/(s_m - r)]_{ala} = 0{,}68$.

Seguidamente, hallamos el valor del coeficiente de interferencia i_{emp}. Con este fin, previamente, calculamos el valor de $(\Delta x_{c.g})_{emp} = (b_{ala})_{emp}(1/3) \times [2\,(s_m)_{emp} - 1]/[(\bar{s}_m)_{emp} + 1] = 0{,}5$ que es la coordenada del centro de gravedad de las semialas del empenaje y de la parte del fuselaje que se cubre con él (véase la fig. 11.4), así como los valores

$$(z_v/s_m)_{emp} = \{[(z_v - r)/(s_m - r)]_{emp}\,[1 - (r_s)_{ala}] + (r_s)_{ala}\}\,(s_m)_{ala}/(s_m)_{emp} = 1{,}56;$$

$$(y_\delta/s_m)_{emp} = \{[x_{emp} - x_{ala} - b_{ala} + (\Delta x_{c.g})_{emp}]\,\alpha - b_{emp}\,(\delta_l)_{ala}\}/[57{,}3\,(s_m)_{emp}] = 0{,}162.$$

En correspondencia con los valores obtenidos de $(z_v/s_m)_{emp} = 1{,}56$, $(y_v/s_m)_{emp} = 0{,}162$ y el valor de $(r/s_m)_{emp} = 0{,}5$, el coeficiente $i_{emp} = -1{,}3$. Conforme a estos datos $c_y = c_y' - 0{,}012$, de donde $\Delta c_y' = c_y - c_y' = -0{,}012$; $m_z = m_z' + \Delta c_y'\,[x_{rot} - (x_{c.p\delta})_{emp}]/x_c = m_z' - \Delta c_y'\,0{,}405$.

Según estas dependencias, empleando los valores obtenidos de c_y' y m_z', cuando $(\delta_l)_{ala} = 0$, hallamos los valores de los coeficientes aerodinámicos: para $(\delta_l)_{emp} = 0° - c_y = 0{,}308$; $m_z = -0{,}0331$, $c_{c.p} = m_z/c_y = 0{,}107$; para $(\delta_l)_{emp} = 10° - c_y = 0{,}35$; $m_z = 0{,}0502$, $c_{c.p} = 0{,}144$.

Determinemos la eficacia longitudinal y transversal de las semialas giratorias del empenaje. La derivada del coeficiente del momento de balanceo m_x respecto del ángulo δ_a, en caso de deflexión diferencial de las semialas horizontales que caracteriza la eficacia transversal,

$$\partial m_x/\partial\delta_a = -\lambda_{ala}\,0{,}167\,[1 + 3{,}71\,(r_s)_{emp}]\,(c^{\alpha}_y)_{ala\ lin}/(c^{\alpha}_y)_{ala\ s.d}. \quad (11.49)$$

La razón entre las derivadas estáticas c^{α}_{ala}, calculadas según la teoría linealizada (subíndice lin) y la teoría aerodinámica del sólido delgado (subíndice s.d)

$$(c^{\alpha}_y)_{ala\ lin}/(c^{\alpha}_{y\,ala\ s.d} = 8/\pi\alpha'/\lambda_{ala}). \quad (11.50)$$

Como $\alpha'/\lambda_{ala} = 6{,}55$, $(c^{\alpha}_y)_{ala\ lin}/(c^{\alpha}_y)_{ala\ s.d} = 0{,}389$.

Así, pues, $\partial m_x/\partial\delta_a = -0{,}490$.

La derivada del coeficiente del momento longitudinal respecto del ángulo δ_l con la deflexión simétrica de las semialas horizontales, que caracteriza la eficacia longitudinal,

$$\partial m_z/\partial\delta_l = (-b_{emp}/l)\,\{k_{emp}\,[(x_{c.p\delta}/b_{ala})_{emp} + (x_{c.g}/b_{ala})_{emp}] + k_f\,[(x_{c.p\alpha}/b_{ala})_{f(emp)} + (x_{c.g}/b_{ala})_{emp}]\}\,c^{\alpha}_{y\ emp}. \quad (11.51)$$

Para determinar esta variable, previamente, hallamos, según $(r_s)_{emp} = 0{,}5$, el valor de $(x_{c.p\alpha}/b_{ala})_{f(emp)} = 0{,}598$, así como calculamos $(x_{c.g})_{emp} = x_{emp} - x_{rot} + (\Delta x_{c.g})_{emp} = 8$.

Tomando como dimensión característica l la longitud del fuselaje $x_c = 21$, después de la sustitución, obtenemos $\partial m_z/\partial \delta_l = -0{,}996$.

11.67. Con arreglo a la teoría aerodinámica del sólido delgado, para el valor de $r_m = r/s_m = 0{,}143$, hallamos los valores teóricos de los coeficientes de interferencia $(K_f)_{teór} = 0{,}195$ y $(K_{emp})_{teór} = 1{,}113$. Determinamos las correcciones debidas a la influencia del ahusamiento de las semialas, de la capa límite y la disposición del empenaje. Como para el empenaje triangular $\eta_{emp} = \infty$, tendremos $\nu_\eta = 1 + r_m (1 - r_m)/(1 + r_m)^2 = 1{,}094$.

Suponiendo que el vuelo transcurre cerca de la Tierra (para el aire $\nu_\infty = 14{,}4 \times 10^{-6}$ m²/s²), calculamos: $\mathrm{Re} = V_\infty l_1/\nu_\infty = 4{,}7812\cdot 10^8$, donde $l_1 = x_0 + b_{ala}/2 = 13{,}5$ m es la distancia desde la punta del cono hasta la parte media de la cuerda

$$\delta^*_{inc} = 0{,}046\ \mathrm{Re}^{-1/5}\, l_1/r = 0{,}023,\quad \nu_{c.l} = 1 - r_m (1 + r_m^2)(1 + 3r_m)\,\delta^*_{inc} = 0{,}9861;$$

$$\nu_l = [0{,}6 + (1 + 0{,}2l_1/r)^2]/[1 + (1 + 0{,}2l_1/r)^2] = 0{,}99.$$

Así, pues, los valores sumarios de los coeficientes de interferencia son los siguientes:

$$K_f = (K_f)_{teór}\nu_\eta\nu_{c.l}\nu_l = 0{,}2102;\qquad K_{emp} = (K_{emp})_{teór}\nu_\eta\nu_{c.l}\nu_l = 1{,}20.$$

Tomemos los coeficientes de interferencia durante el balanceo iguales a los valores $K_\varphi = 0{,}685$ (para la combinación plana) y $K_\varphi = 0{,}461$ (para la combinación cruciforme).

Combinación plana. *Movimiento sin balanceo* ($\varphi = 0$). Hallamos los coeficientes de los centros de presión:

$$(c_{c.p})_{\alpha\ emp(f)} = (x_{c.p}/b_{ala})_{\alpha\ emp(f)} = 0{,}654;$$

$$(c_{c.p})_{\alpha\ f\ (emp)} = (x_{c.p}/b_{ala})_{\alpha\ f\ (emp)} = 0{,}53.$$

A continuación determinamos:

$$(c'_{c.p})_{\alpha\ emp(f)} = (x_n + x'_{emp})/l + (c_{c.p})_{\alpha\ emp(f)}\,(b_{ala}/l) = 0{,}931;$$

$$(c'_{c.p})_{\alpha\ f(emp)} = (x_n + x'_{emp})/l + (c_{c.p})_{\alpha\ f(emp)}\,(b_{ala}/l) = 0{,}906.$$

Tomamos el coeficiente de la fuerza normal de las semialas aisladas $(c_y)_{emp} = 2\alpha\pi\ \mathrm{tg}\ \varepsilon$.

De acuerdo con esto $(c_y^\alpha)_{emp} = 2\pi\ \mathrm{tg}\ 45° = 2\pi$.

La derivada del coeficiente de la fuerza normal para el fuselaje

$$(c_y^\alpha)_f = 2\pi r^2/S_{emp} = 2\pi r^2/[b_{ala}\,(s_m - r)] = 0{,}056\pi.$$

El coeficiente del centro de presión del fuselaje

$$(c_{c.p})_f = (x_{c.p}/l)_f = 1 - W_f/W_{cil} = 1 - [(1/3)\,x_n + x_{cil} + b_{ala}]/l = 0{,}2222.$$

Hallemos las derivadas de los coeficientes de la fuerza normal condicionada por la interferencia:

$$(\Delta c_y^\alpha)_{f(emp)} = K_f\,(c_y^\alpha)_{emp} = 0{,}422\pi;\quad (\Delta c_y^\alpha)_{emp(f)} = K_{emp}\,(c_y^\alpha)_{emp} = 2{,}4\pi.$$

El valor sumario de la derivada del coeficiente de la fuerza normal de la combinación

$$c_y^\alpha = (c_y^\alpha)_f + (\Delta c_y^\alpha)_{f(emp)} + (\Delta c_y^\alpha)_{emp(f)} = 2{,}878\pi.$$

El correspondiente valor de la derivada del coeficiente del momento lo itungdinal

$$m_z^\alpha = -[(c_{c.p})_f (c_y^\alpha)_f + (c'_{c.p})_{\alpha f(emp)} (\Delta c_y^\alpha)_{\alpha f(emp)} + + (c'_{c.p})_{\alpha\ emp(f)} (\Delta c_y^\alpha)_{emp(f)}] = 2{,}6291\pi.$$

El coeficiente del centro de presión de la combinación $c_{c.p} = x_{c.p}/l = -m_z^\alpha/c_y^\alpha = 0{,}9135$.

Movimiento con balanceo. Para $r_m = 0{,}143$ hallamos el coeficiente $K_\varphi = 0{,}684$, la magnitud adimensional $(\bar{z}_{c.p})_{\varphi\ emp(f)} = 0{,}524$ y, a continuación, determinamos

$$m_x = -(K_\varphi/\text{tg}\ \varepsilon)(c_y^\alpha)_{emp} [(\bar{z}_{c.p})_{\varphi\ emp(f)} + (s_m - 1)^{-1}] \times \times [(s_m - r)/l]\ \alpha\beta = -0{,}189\alpha\beta\pi.$$

Como $\alpha = \alpha_c \cos\varphi$ y $\beta = \alpha_c \text{ sen } \varphi$, obtenemos $\alpha\beta = \alpha_c^2 \text{ sen }\varphi \cos\varphi = 0{,}0043$; por lo tanto, $m_x = -8{,}1 \cdot 10^{-4}\pi$. La estabilidad estática longitudinal en el plano del ángulo de ataque $\alpha = \alpha_c \cos\varphi$ se caracteriza con el mismo valor del coeficiente del centro de presión que en el plano del ángulo de ataque con el movimiento sin balanceo ($c_{c.p} = 0{,}913$). En el plano del ángulo de deslizamiento $\beta = \alpha_c \text{ sen } \varphi$ la coordenada del centro de presión se determina por su valor para el fuselaje sin empenaje (están ausentes las semialas verticales). El correspondiente coeficiente del centro de presión $(c_{c.p}) = 0{,}222$.

Examinemos el cálculo de un coeficiente análogo que caracteriza la estabilidad longitudinal en el plano de ángulo prefijado α_c. Calculamos el coeficiente de la fuerza normal:

$$(c_{y'}^*)_f = (c_y^\alpha)_f\, \alpha_c = 0{,}056\pi\alpha_c; \quad (\Delta c_{y'})_{f(emp)} = (\Delta c_y^\alpha)_{f(emp)}\, \alpha \cos\varphi = 0{,}106\pi\alpha_c;$$

$$(\Delta c_{y'})_{emp(f)} = (\Delta c_y^\alpha)_{emp(f)}\, \alpha \cos\varphi = 0{,}6\pi\alpha_c;$$

$$c_{y'} = (c_y^\alpha)_f + (\Delta c_{y'})_{f(emp)} + (\Delta c_{y'})_{emp(f)} = 0{,}762\pi\alpha_c.$$

El coeficiente del momento de la combinación

$$m_{z'} = -[(c_{c.p})_f (c_{y'})_f + (c'_{c.p})_{\alpha f(emp)} (\Delta c_{y'})_{f(emp)} + + (c'_{c.p})_{\alpha\ emp(f)} (\Delta c_{y'})_{emp(f)}] = -0{,}667\pi\alpha_c.$$

El correspondiente coeficiente del centro de presión $c_{c.p} = -m_{z'}/c_{y'} = 0{,}8753$. Como vemos, el centro de presión en el plano del ángulo α_c se ha desplazado hacia la sección de nariz y, por lo tanto, el margen de estabilidad estática ha aumentado en cierto grado.

Configuración cruciforme. *Movimiento sin balanceo.* Con éste las características aerodinámicas de la combinación (c_y^α, m_z^α, $c_{c.p}$) son las mismas que con el empenaje plano.

Movimiento con balanceo. En este caso las derivadas de los coeficientes de la fuerza normal c_y^α y lateral c_z^α, en los planos de los ángulos α y β, respectivamente, son equivalentes e iguales a $2{,}878\pi$, es decir, son los mismos que con $\varphi = 0$. Esto asimismo se refiere a las derivadas de los coeficientes del momento longitudinal m_z^α y del momento de guiñada m_y^β. Su valor es igual a $-2{,}624\pi$. De acuerdo con esto, serán iguales los correspondientes coeficientes del centro de presión ($c_{c.p} = 0{,}9135$).

Analicemos el plano del ángulo α_c. El coeficiente de la fuerza normal

$$(\Delta c_{y'})_{f(emp)} = (\Delta c_y^\alpha)_{f(emp)}\, \alpha \cos\varphi + (\Delta c_z^\beta)_{f(emp)}\, \beta \text{ sen } \varphi = (\Delta c_y^\alpha)_{f(emp)}\, \alpha_c.$$

De modo análogo determinamos el valor de $(\Delta c_{y'})_{\text{emp(f)}} = (\Delta c_y^{\alpha})_{\text{emp(f)}}\, \alpha_c$, así como el valor sumario de los coeficientes de la fuerza normal:

$$c_{y'} = (c_y^{\alpha})_f\, \alpha_c + (\Delta c_y^{\alpha})_{f(\text{emp})}\, \alpha_c + (\Delta c_y^{\alpha})_{\text{emp(f)}}\, \alpha_c. \quad (11.52)$$

El correspondiente coeficiente del momento de cabeceo

$$m_{z'} = -[(c_{\text{c.p}})_f\, (c_y^{\alpha})_f\, \alpha_c + (c'_{\text{c.p}})\, \alpha_{f(\text{emp})}\, (\Delta c_y^{\alpha})_{f(\text{emp})}\, \alpha_c + \\ + (c'_{\text{c.p}})\, \alpha_{\text{emp(f)}}\, (\Delta c_y^{\alpha})_{\text{emp(f)}}\, \alpha_c]. \quad (11.53)$$

Conforme a las expresiones obtenidas $c_{\text{c.p}} = x_{\text{c.p}}/l = -m_{z'}/c_{y'} = -m_z^{\alpha}/c_y^{\alpha} = 0{,}913$.

Así, pues, el balanceo de una combinación cruciforme no influye sobre la disposición del centro de presión: ésta sigue siendo la misma que con la ausencia del balanceo.

Examinemos el cálculo de características aerodinámicas tomando en consideración la compresibilidad y otra serie de factores (forma de las semialas, largura de la sección de cola).

El número $M_\infty = V_\infty/a_\infty = 1{,}5$ (la velocidad del sonido en la atmósfera $a_\infty = 340$ m/s). Para este valor de M_∞

$$\delta^*/\delta^*_{\text{inc}} = (1 + 0{,}14\, M_\infty^2)^{0{,}35} = 1{,}1;$$

$$\nu'_{\text{c.l}} = 1 - \frac{r_m\,(1 + r_m^2)\,[r_m + \eta_{\text{emp}}\,(1 + 3r_m) - 1]\,\delta^*}{\eta_{\text{emp}} + 1} = 0{,}9442;$$

$$\nu_M = e^{0{,}05(1 - M_\infty)} = 1{,}0253.$$

Consideremos la influencia de la sección de cola sobre el coeficiente de interferencia. Hallamos: $x_i = \pi r \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 0{,}56\pi$; $d = 0{,}866\, [(b_{\text{ala}}/x_i)^2\, (4 + 1/\eta_{\text{emp}})\, (1 + 8r_m^2)]^{-1/2} = 0{,}236$; $z_1 = [(b_{\text{ala}} + x_{\text{cola}})/x_i]\, [2\, (4 + 1/\eta_{\text{emp}})\, (1 + 8r_m^2)]^{1/2} = 3{,}9842$ [$x_{\text{cola}} = 0$ (véase la fig. 11.12), ya que tras el empenaje no hay sección de cola del vehículo volante]; $z_2 = (x_{\text{cola}}/x_i)\, [2\, (4 + 1/\eta_{\text{emp}})\, (1 + 8r_m^2)]^{1/2} = 0$.

Según los valores de los argumentos $z_1 = 5{,}2$ y $z_2 = 0$, en las correspondientes tablas matemáticas, hallamos las funciones de Laplace — Gauss (integrales de probabilidad) $\Phi_1\,(z_1) = 1$ y $\Phi_2\,(z_2) = 0$.

Entonces, el coeficiente de corrección

$$F = 1 - d\,[\Phi\,(z_1) - \Phi\,(z_2)] = 0{,}764.$$

Es posible mostrar que la influencia del remanso del flujo delante del empenaje es despreciablemente pequeña y se debe tomar $k_1 = M_1^2/M_\infty^2 = 1$.

Calculamos los valores sumarios de los coeficientes de interferencia:

$$K_f = K_{f.\text{teór}}\, (\nu'_{\text{c.l}}/\nu_{\text{c.l}})\, \nu_M F = 0{,}1571;$$

$$K_{\text{emp}} = K_{\text{emp.teór}}\, (\nu'_{\text{c.l}}/\nu_{\text{c.l}})\, \nu_M = 1{,}17.$$

El ángulo de Mach $\mu_\infty = \arcsin\,(1/M_\infty) = 41{,}85°$. Es menor que el ángulo en el vértice de la semiala $\varepsilon = 45°$; por consiguiente, su borde de ataque es supersónico. Para semejante semiala $(c_y^{\alpha})_{\text{emp}} = 4/\sqrt{M_\infty^2 - 1} = 3{,}5778\ (2\pi)$.

Adoptemos que la fuerza normal del fuselaje se crea por la sección de nariz cónica, para la cual

$$(c_y^{\alpha})_f = 2\alpha' \beta_{\text{cono}} \sqrt{u_{\text{cono}}^2 - 1}\, (S_{\text{máx.t}}/S_{\text{emp}}) = 0{,}174\pi.$$

El centro de presión del fuselaje está situado a una distancia igual a $^2/_3$ de la altura del cono desde la punta. Con arreglo a esto $(c_{\text{c.p}})_f = (x_{\text{c.p}}/l)_f = 0{,}2222$.

Calculamos las derivadas de los coeficientes de la fuerza normal:

$$(\Delta c_y^\alpha)_{f(\text{emp})} = K_f\,(c_y^\alpha)_{\text{emp}} = 0{,}5604\,(0{,}422\pi);$$

$$(c_y^\alpha)_{\text{emp}(f)} = K_{\text{emp}}\,(c_y^\alpha)_{\text{emp}} = 4{,}18\,(2{,}4\pi);\quad c_y^\alpha = 4{,}796\,(2{,}878\pi).$$

La correspondiente derivada del coeficiente del momento de cabeceo

$$m_z^\alpha = -c_y^\alpha c_{\text{c.p}} = -[(c_{(\text{c.p})f})\,(c_y^\alpha)_f + (c'_{\text{c.p}})_{\alpha f(\text{emp})}\,(\Delta c_y^\alpha)_{f(\text{emp})} + $$
$$+ (c'_{\text{c.p}})'_{\alpha\ \text{emp}(f)}] = -4{,}4112\,(-2{,}624\pi).$$

El coeficiente de centro de presión $c_{\text{c.p}} = -m_z^\alpha/c_y^\alpha = 0{,}9023$. Comparando los parámetros obtenidos con los respectivos valores entre paréntesis es posible estimar la influencia de la compresibilidad (números M_∞) y de la sección de cola sobre las características aerodinámicas del vehículo voltante de la configuración prefijada.

Determinemos los coeficientes de la fuerza normal y del momento durante el balanceo. Primero hallamos $(\Delta c_y)_{\varphi\ \text{emp}(f)} = (c_y)_\chi = 1{,}17\ (\Delta c_y)_{\text{emp}}$. Para determinar el coeficiente $(\Delta c_y)_{\text{emp}}$ calculamos

$$\operatorname{tg}\chi_{1/2} = (b_{\text{ala}}/2)/(s_m - r) = 0{,}5;\quad (c_y^\alpha)_{\text{emp}} = 4/\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1} = 3{,}5778;$$

$$\lambda_{\text{emp}} = l_{\text{emp}}^2/S_{\text{emp}} = (2s_m)^2/(s_m^2/\operatorname{tg}\varepsilon) = 4;$$

$$\lambda_{\text{emp}}\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1} = 4{,}4721;\quad \lambda_{\text{emp}}\operatorname{tg}\chi_{1/2} = 2.$$

Según los valores de los dos últimos parámetros, aplicando la teoría aerodinámica del sólido delgado, hallamos $B_1 = 0{,}68$; $B_2 = -0{,}05$ y calculamos $(\Delta c_y)_{\text{emp}} = 2\alpha\beta\ \operatorname{tg}\chi_{1/2}\ (c_y^\alpha)_{\text{emp}}\ [1 - B_1 + 0{,}5B_2\ (\operatorname{tg}^{-2}\chi_{1/2} - 1)] = 1{,}5351\alpha\beta$. Conforme a este valor, obtenemos

$$(\Delta c_y)_{\varphi\ (\text{emp})f} = (\Delta c_y)_{\text{emp}} K_{\text{emp}} k_1 = (c_y)_\chi = 1{,}0237\alpha\beta.$$

El coeficiente del momento de balanceo $(m_x)_\chi = -0{,}5\ (\Delta c_y)_{\text{emp}}\ K_{\text{emp}} \times \times [r_m + (1 - r_m)\ (z_{\text{c.p}})_{\varphi\ \text{emp}(f)}] = -0{,}3018\alpha\beta$.

Aquí, el valor de $(z_{\text{c.p}})_{\varphi\ \text{emp}(f)}$ ha sido hallado mediante la teoría aerodinámica del sólido delgado para $r_m = 0{,}143$. Para la semiala triangular $\eta_{\text{emp}} = \infty$, por lo que, de acuerdo con la ecuación

$$(m_x)_{\text{c.extr}} = -0{,}04\alpha\beta\ (c_y^\alpha)_{\text{emp}}/[\lambda_{\text{emp}}\ (\eta_{\text{emp}} + 1)\ 3], \tag{11.54}$$

el momento adicional de balanceo, condicionado por la influencia del borde lateral rectilíneo, es igual a cero, es decir, $(m_x)_{\text{c.extr}} = 0$.

Como en sentido vertical no hay desplazamiento del empenaje ($y_{\text{emp}} = 0$), de acuerdo con la fórmula $(m_x)_{\text{d}} = -0{,}22 r_m\ (c_y^\alpha)_{\text{emp}}\ \beta$ sen $[(\pi/2)\ y_{\text{emp}}/r]$ el coeficiente adicional $(m_x)_{\text{d}} = 0$.

Supongamos que el empenaje está instalado bajo cierto ángulo de diedro ψ. Esto provoca un momento adicional de balanceo, cuyo coeficiente

$$(m_x)_\psi = (M_x)_\psi/(q_\infty S_{\text{emp(c)}} l_{\text{emp}}) =$$
$$= -0{,}5\,(c_y^\alpha)_{\text{emp}}\,\beta\psi\,K_\psi k_1\,[r_m + (1 - r_m)\,(z_{\text{c.p}})_{\psi\ \text{emp}(f)}] = -0{,}922\beta\psi.$$

En esta expresión el valor de $K_\psi = 0{,}87$ se determina de acuerdo con la teoría aerodinámica del sólido delgado, según los valores de $\lambda_{\text{emp}}\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1} = 4{,}4721$ y $r_m = 0{,}1428$.

Cierto momento de balanceo se crea a cuenta del efecto sobre el empenaje de los vórtices que se desprenden del fuselaje. El coeficiente de este momento se

calcula con la fórmula

$$(m_x)_v = A\ (\beta^2 - \alpha^2)\ \alpha\beta k_1. \qquad (11.55)$$

Así, pues, el coeficiente sumario del momento de balanceo

$$m_x = (m_x)_\chi + (m_x)_\psi + (m_x)_v =$$
$$= \alpha\beta\ [-0{,}302 - 0{,}922\ (\psi/\alpha) + A\ (\beta^2 - \alpha^2)].$$

11.68. Al haber fuerza de sustentación, la resistencia total del vehículo volante X_a se compone de la resistencia de sustentación nula X_{a0}, de la parte fundamental de la resistencia inducida X_i, por el fuselaje, alas y empenaje, y la componente adicional de dicha resistencia ΔX_α, condicionada por ciertas fuerzas aerodinámicas que no se han tenido en cuenta.

La fórmula desarrollada para el coeficiente de la resistencia total del vehículo volante a velocidades supersónicas tiene la forma

$$c_{x_a} = [c'_{xf} + \Delta c'_{xf(\text{ala})} + \Delta c'_{xf(\text{emp})}]\ S_{\text{máx.t}}/S + (c_{x\,\text{ala}})_{\text{ais}}\ (1 - K_{1.\text{ala}} \Delta S_{\text{ala}}/S'_{\text{ala}}) \times$$
$$\times k_1 \sum S'_{\text{ala}}/S + (c_{x\,\text{emp}})_{\text{ais}}\ (1 - K_{1.\text{emp}} \Delta S_{\text{emp}}/S'_{\text{emp}})\ k_2 \sum S'_{\text{emp}}/S +$$
$$+ c_{y_a}\alpha + (\Delta c_{x\alpha})_f + (\Delta c_{x\alpha})_{\text{ala}} + (\Delta c_{x\alpha})_{\text{emp}}, \qquad (11.56)$$

donde c'_{xf}, $(c_{x\,\text{ala}})_{\text{ais}}$, $(c_{x\,\text{emp}})_{\text{ais}}$ son los coeficientes de resistencia del fuselaje, las alas y el empenaje aislados, respectivamente; $\Delta c'_{xf(\text{ala})}$ y $\Delta c'_{xf(\text{emp})}$, la resistencia adicional del fuselaje debida a la interferencia con el ala y con el empenaje, respectivamente; $S_{\text{máx.t}}$, $\sum S'_{\text{ala}}$, $\sum S'_{\text{emp}}$, el área de la sección máxima transversal del fuselaje, las semialas y el empenaje (tomando en consideración los sectores ocupados por el fuselaje), respectivamente; S, el área característica tomada para el vehículo volante como un todo enterizo; ΔS_{ala} (ΔS_{emp}), el área de la parte convencional del ala (empenaje) situada debajo del fuselaje; S'_{ala} (S'_{emp}), el área del ala (empenaje) teniendo en cuenta el área debajo del fuselaje; $K_{1.\text{ala}}$ ($K_{1.\text{emp}}$), el coeficiente de interferencia del ala (empenaje); k_1, k_2, los coeficientes de remanso del flujo; c_{y_a}, el coeficiente de la fuerza de sustentación del vehículo volante; α, el ángulo de ataque; $(\Delta c_{x\alpha})_f$, $(\Delta c_{x\alpha})_{\text{ala}}$, $(\Delta c_{x\alpha})_{\text{emp}}$, las resistencias adicionales del fuselaje, las alas y el empenaje, respectivamente, condicionadas por las fuerzas de succión («reactivas» o «de empuje») para $\alpha \neq 0$, teniendo en cuenta su interferencia mutua y la deflexión de los timones.

Los tres primeros sumandos en la fórmula (11.56) determinan el coeficiente de la resistencia con la fuerza de sustentación nula, el sumando $c_y\alpha$, la parte fundamental de la resistencia inducida, mientras que los restantes, la parte adicional de dicha resistencia.

A velocidades subsónicas de vuelo en lugar del sumando $c_{y_a}\alpha$ se utiliza la expresión para el coeficiente de la resistencia inducida c_{xi}, que es la suma de los coeficientes de la resistencia inducida de las semialas horizontales del ala y del empenaje. Si las alas y el empenaje del vehículo volante tienen borde de ataque aguzado, su fuerza de succión es igual a cero y, por ello, $(\Delta c_{x\alpha})_{\text{ala}} = (\Delta c_{x\alpha})_{\text{emp}} = 0$. Por regla, la fuerza de succión del fuselaje es muy pequeña y podemos estimar que $(\Delta c_{x\alpha})_f \approx 0$. En los vehículos volantes, con área comparativamente pequeña de los timones, la resistencia inducida provocada por su deflexión es despreciablemente pequeña.

11.69. Si las alas o el empenaje se encuentran en la parte cilíndrica del fuselaje, entonces, como muestran las investigaciones, su resistencia queda constante. Cuando las alas, el empenaje, así como diferentes superestructuras, se encuentran

en los sectores en ensanchamiento del fuselaje, la presión elevada provocada por ellos conduce al aumento de la resistencia. También crece la resistencia al disponerse dichos elementos en las partes del fuselaje que se ahusan, cuando la baja presión tras ellos se propaga por el fuselaje y reduce su presión de base. Esto se expresa con particular claridad durante el desprendimiento del flujo tras el ala, empenaje o cualesquiera de las superestructuras.

11.70. La «regla de las áreas» se basa en los datos experimentales que muestran que la resistencia de la combinación «fuselaje — ala» es aproximadamente igual a la de un fuselaje aislado (sólido equivalente) que tenga, a lo largo del eje longitudinal, la misma distribución de áreas de la sección transversal que la combinación indicada.

La regla de las áreas se emplea con el fin de obtener tal composición del vehículo volante que condicione la menor resistencia en la región de las velocidades transónicas. Para ello, después de determinar la configuración del sólido de revolución con la resistencia mínima, eligen la flecha de las alas, del empenaje y, al mismo tiempo, disminuyen correspondientemente las dimensiones transversales del fuselaje de forma que el principio de distribución de las secciones transversales del vehículo volante sea igual que en el sólido equivalente.

11.71. Aduzcamos las dependencias para calcular las derivadas de la estabilidad de la combinación «fuselaje — empenaje». Las derivadas de rotación

$$\left.\begin{aligned} c_y^{\omega_z} &= c_{y\mathrm{f}}^{\omega_z} + c_{y\,\mathrm{emp}}^{\omega_z} S_{\mathrm{emp}}/S_{\mathrm{máx.t}};\\ m_z^{\omega_z} &= m_{z\mathrm{f}}^{\omega_z} + m_{z\,\mathrm{emp}}^{\omega_z} S_{\mathrm{emp}}/S_{\mathrm{máx.t}}, \end{aligned}\right\} \quad (11.57)$$

donde las derivadas para el empenaje

$$\left.\begin{aligned} c_{y\,\mathrm{emp}}^{\omega_z} &= (K_{\mathrm{emp}} + K_{\mathrm{f}})\, c_{y\,\mathrm{emp}}^{\alpha} \sqrt{k_1}\, (\bar{x}_{\mathrm{c.g}})_{\mathrm{emp}};\\ m_{z\,\mathrm{emp}}^{\omega_z} &= -(K_{\mathrm{emp}} + K_{\mathrm{f}})\, c_{y\,\mathrm{emp}}^{\alpha} \sqrt{k_1}\, (\bar{x}_{\mathrm{c.g}})_{\mathrm{emp}}\, (\bar{x}_{\mathrm{p}})_{\mathrm{emp}}. \end{aligned}\right\} \quad (11.58)$$

Tomemos el coeficiente de remanso $k_1 = \mathrm{M}_1^2/\mathrm{M}_\infty^2 \approx 1$ (M_1 es el número de Mach para el flujo delante del empenaje), en tanto que las distancias desde la punta hasta el centro de gravedad del área del empenaje $x_{\mathrm{c.g}}$ y el centro de presión x_{p} son iguales (véase la fig. 11.13): $x_{\mathrm{c.g}} = x_{\mathrm{p}} = x_{\mathrm{emp}} + x_{\mathrm{A}} + b_{\mathrm{A}}/2$. La CAM del ala aislada $b_{\mathrm{A}} = (2/3)b = (2/3)\,(s_m - r_{\mathrm{máx.t}})\ \mathrm{tg}\ \chi = 2{,}142$ m.

La distancia desde la punta hasta el comienzo de la CAM $x_{\mathrm{A}} = z_{\mathrm{A}}\ \mathrm{tg}\ \chi = (1/3)\,(s_m - r_{\mathrm{máx.t}})\ \mathrm{tg}\ 55° = 1{,}071$ m; hasta el empenaje $x_{\mathrm{emp}} = x_{\mathrm{c}} - x_{\mathrm{m}} - b = 2{,}287$ m. Teniendo en cuenta estos valores $(\bar{x}_{\mathrm{p}})_{\mathrm{emp}} = (\bar{x}_{\mathrm{c.g}})_{\mathrm{emp}} = (x_{\mathrm{emp}} + x_{\mathrm{A}} + b_{\mathrm{A}}/2)/x_{\mathrm{c}} = 0{,}3852$.

Según el valor de $r_m = r_{\mathrm{máx.t}}/s_m = 0{,}75/3 = 0{,}25$, de acuerdo con la teoría aerodinámica del sólido delgado, hallamos los coeficientes de interferencia: $K_{\mathrm{ala}} = K_{\mathrm{emp}} = 1{,}208$; $K_{\mathrm{f}} = 0{,}3575$. Para el empenaje aislado [con $\mathrm{M}_\infty = 2$ sus bordes de ataque son supersónicos, ya que $\mu_\infty = \mathrm{arcsen}\,(1/\mathrm{M}_\infty) < \pi/2 - \chi$ $(30° < \pi/2 - 55°)$] obtenemos $c_{y\ \mathrm{emp}}^{\alpha} = 4/\alpha' = 4\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1} = 2{,}309$; $c_{y\,\mathrm{emp}}^{\omega_z} = 1{,}392$; $m_{z\,\mathrm{emp}}^{\omega_z} = -0{,}5364$.

Para el fuselaje:

$$c_{y\mathrm{f}}^{\omega_z} = 2\bar{S}_{\mathrm{s.b}}\,(1 - \bar{x}_{\mathrm{m}}) = 0{,}9565;$$

$$m_{z\mathrm{f}}^{\omega_z} = -2\bar{S}_{\mathrm{s.b}}\left[(1 - \bar{x}_{\mathrm{m}}^2) + \bar{x}_{\mathrm{m}} W_{\mathrm{f}}/(x_{\mathrm{c}} S_{\mathrm{s.b}}) - (1/S_{\mathrm{s.b}} x_{\mathrm{c}}^2) \int\limits_0^{x_{\mathrm{c}}} Sx\,dx\right];$$

$$W_f/(x_c S_{s\cdot b}) = 1 - 2x_c'/(3x_c) = 0{,}7101;$$

$$(1/S_{s\cdot b} x_c^2)\int_0^{x_c} Sx\,dx = x'^2/(4x_c^2) + (1/2)(1 - x'^2/x_c^2) = 0{,}4528;\quad m_{zf}^{\omega_z} = -0{,}2928.$$

Hallemos las derivadas de un sólido de revolución con empenaje:

$$c_y^{\omega_z} = c_{yf}^{\omega_z} + c_{y\,\text{emp}}^{\omega_z} S_{\text{emp}}/S_{\text{máx.t}} = c_{yf}^{\omega_z} + c_{y\,\text{emp}}^{\omega_z}(s_m - r_{\text{máx.t}})\,b/(\pi r_{\text{máx.t}}^2) = 6{,}654;$$

$$m_z^{\omega_z} = m_{zf}^{\omega_z} + m_{z\,\text{emp}}^{\omega_z} S_{\text{emp}}/S_{\text{máx.t}} = -2{,}479.$$

Para el centro de reducción, coincidente con la punta del fuselaje, $m_{z0}^{\omega_z} = m_z^{\omega_z} - c_y^{\omega_z}\bar{x}_m = -5{,}951$, y el correspondiente coeficiente del centro de presión $c_p = x_p/x_c = -m_{z0}^{\omega_z}/c_y^{\omega_z} = 0{,}894$.

Para $\mathbf{M}_\infty = 1{,}5$ los bordes de ataque del ala son subsónicos [ya que $\mu_\infty = \text{arcsen}\,(1/\mathbf{M}_\infty) = 41{,}76° > \pi/2 - \chi = 35°$]. En semejante caso, $c_{y\,\text{emp}}^{\alpha} = 2\pi\,\text{ctg}\,\chi/ /E(k)$. Como $k = \sqrt{1 - (\alpha'\,\text{ctg}\,\chi)^2} = 0{,}6222$ [$0{,}6222 = \text{sen}\,\alpha\,(\alpha = 38{,}48°)$], la integral elíptica $E(k) = 1{,}405$ y las derivadas

$$c_{y\,\text{emp}}^{\alpha} = 3{,}129;\quad c_{y\,\text{emp}}^{\omega_z} = 1{,}887;\quad m_{z\,\text{emp}}^{\omega_z} = -0{,}7839;$$

$$c_y^{\omega_z} = c_{yf}^{\omega_z} + c_{y\,\text{emp}}^{\omega_z} S_{\text{emp}}/S_{\text{máx.t}} = 8{,}679;\quad m_z^{\omega_z} = m_{zf}^{\omega_z} + m_{z\,\text{emp}}^{\omega_z} S_{\text{emp}}/S_{\text{máx.t}} = -3{,}502;$$

$$m_{z0}^{\omega_z} = m_z^{\omega_z} - c_y^{\omega_z}\bar{x}_m = -8{,}03;\quad c_p = -m_{z0}^{\omega_z}/c_y^{\omega_z} = 0{,}9252.$$

Determinamos las derivadas:
para $\mathbf{M}_\infty = 2$

$$c_{z\,\text{emp}+}^{\omega_z} = -c_{y\,\text{emp}}^{\omega_z} = -1{,}392;\quad m_{y\,\text{emp}+}^{\omega_y} = -m_{z\,\text{emp}+}^{\omega_z} = 0{,}5364;$$

$$c_{zf}^{\omega_y} = -c_{yf}^{\omega_z} = -0{,}9565;\quad m_{yf}^{\omega_y} = -m_{zf}^{\omega_z} = 0{,}2938\ (\omega_y = \Omega_y x_c/V_\infty);$$

$$c_z^{\omega_y} = c_{zf}^{\omega_y} + c_{z\,\text{emp}+}^{\omega_y} S_{\text{emp}}/S_{\text{máx.t}} = -6{,}654;$$

$$m_y^{\omega_y} = m_{yf}^{\omega_y} + m_{y\,\text{emp}+}^{\omega_y} S_{\text{emp}}/S_{\text{máx.t}} = 2{,}479;\quad m_{y0}^{\omega_y} = m_y^{\omega_y} - c_z^{\omega_y}\bar{x}_m = 5{,}951;$$

para $\mathbf{M}_\infty = 1{,}5$

$$c_{z\,\text{emp}+}^{\omega_y} = -c_{y\,\text{emp}}^{\omega_z} = -1{,}887;\quad m_{y\,\text{emp}+}^{\omega_y} = -m_{z\,\text{emp}}^{\omega_z} = 0{,}7839;$$

$$c_{zf}^{\omega_y} = -c_{yf}^{\omega_z} = -0{,}9565;\quad m_{zf}^{\omega_y} = -m_{yf}^{\omega_z} = 0{,}2928;$$

$$c_z^{\omega_y} = c_{zf}^{\omega_y} + c_{z\,\text{emp}+}^{\omega_y} S_{\text{emp}}/S_{\text{máx.t}} = -8{,}68;$$

$$m_y^{\omega_y} = m_{yf}^{\omega_y} + m_{y\,\text{emp}+}^{\omega_y} S_{\text{emp}}/S_{\text{máx.t}} = 3{,}501;\quad m_{y0}^{\omega_y} = m_y^{\omega_y} - c_z^{\omega_y}\bar{x}_m = 8{,}03.$$

La derivada de amortiguamiento del balanceo

$$m_x^{\omega_x} = \Delta M_x/(q_\infty S_{\text{emp(c)}} l_{\text{emp}}\omega_x) = -2\varkappa c_{y\,\text{emp}}^{\alpha} K_{\text{emp}} \times$$
$$\times \sqrt{\bar{k}_1}\,(\bar{z}_{\text{c.g}})_{\text{emp}}\,[r_m + (1 - r_m)\,(\bar{z}_p)_{\mp\,\text{emp(f)}}]\,[\omega_x = \Omega_x l_{\text{emp}}/(2V_\infty)]. \qquad (11.59)$$

La distancia desde la punta hasta el centro de gravedad del área del empenaje (teniendo en cuenta la zona ventral) se toma $(z_{\text{c.g}})_{\text{emp}} = (1/3)\,s_m = 1$ m; $\bar{z}_{\text{c.g}} = (z_{\text{c.g}})_{\text{emp}}/l_{\text{emp}} = 1/6$.

Haciendo uso de los datos de la teoría aerodinámica del sólido delgado, según el valor de $r_m = r_{\text{máx.t}}/s_m = 0{,}75/3 = 0{,}25$, hallamos $\overline{(z_p)}_{\varphi\ \text{emp}(f)} = 0{,}535$, calculamos $\varkappa = 1 - e^{-4{,}5 r_m} = 0{,}6753$ y, para $M_\infty = 2$, obtenemos $m_x^{\omega_x} = -0{,}409$.

11.72. Las correspondientes dependencias de cálculo:

$$c_y^{\omega_{zA}} = (c_{yf}^{\omega_z} S_{\text{máx.t}}/S_{\text{emp}} + c_{y\,\text{emp}}^{\omega_z})\, x_c/b_A;$$

$$m_z^{\omega_{zA}} = (m_{zf}^{\omega_z} S_{\text{máx.t}}/S_{\text{emp}} + m_{z\,\text{emp}}^{\omega_z})\,(x_c/b_A)^2, \qquad (11.60)$$

donde $\omega_{zA} = \Omega_z b_A/V_\infty = \omega_z b_A/x_c$.

Para $M_\infty = 2$ calculamos

$c_y^{\omega_{zA}} = 8{,}728$; $m_z^{\omega_{zA}} = -17{,}52$ y la distancia relativa del centro de masas al de presión $\Delta\bar{x}_p = \Delta x_p/b_A = -m_z^{\omega_{zA}}/c_y^{\omega_{zA}} = 2{,}008$.

Para $M_\infty = 1{,}5$ la derivada $m_x^{\omega_x} = -0{,}5286$.

Adoptamos que la derivada de la combinación cruciforme $m_x^{\omega_y} = 0$.

11.73. Analicemos el empenaje aislado, para el cual

$$\lambda_{\text{emp}} = l_{\text{emp}}^2/S_{\text{emp}} = 4\,(s_m - r_{\text{máx.t}})^2/[(s_m - r_{\text{máx.t}})^2 \operatorname{tg}\chi] = 4/\operatorname{tg}\chi = 2{,}801;$$

$$\lambda_{\text{emp}} \operatorname{tg}\chi = (4/\operatorname{tg}\chi)\operatorname{tg}\chi = 4; \quad \alpha'\lambda_{\text{emp}} = 3{,}132.$$

Empleando los datos de la teoría aerodinámica del sólido delgado, de acuerdo con los datos aducidos, hallamos:

$$\alpha' c_y^\alpha = 3{,}488; \quad \alpha' c_{yA}^{\omega_{zA}} = 1{,}95; \quad \alpha' m_{zA}^\alpha = -1{,}876; \quad \alpha' m_{zA}^{\omega_{zA}} = -1{,}438;$$

$$\alpha'^3 c_{yA1}^{\dot{\bar{\alpha}}_A} = -1{,}744; \quad \alpha'^3 c_{yA2}^{\dot{\bar{\alpha}}_A} = 0{,}2069; \quad \alpha'^3 c_{yA1}^{\dot{\omega}_{zA}} = -0{,}5135; \quad \alpha' m_{x1}^{\omega_{x1}} = -0{,}2758;$$

$$\alpha'^3 c_{yA2}^{\dot{\omega}_{zA}} = 0{,}02153; \quad \alpha'^3 m_{zA1}^{\dot{\bar{\alpha}}_A} = 1{,}077; \quad \alpha'^3 m_{zA2}^{\dot{\bar{\alpha}}_A} = -0{,}1293; \quad \alpha'^3 m_{zA2}^{\dot{\omega}_{zA}} = 0{,}4248;$$

$$\alpha'^3 m_{zA1}^{\dot{\omega}_{zA}} = -0{,}02283; \quad \alpha'^2 \left(m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}}\right)_1 = 0{,}06; \quad \alpha'^2 \left(m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}}\right)_2 = -0{,}015.$$

Con arreglo a estos resultados

$$c_y^\alpha = (\alpha' c_y^\alpha)/\alpha' = 3{,}12; \quad c_{yA}^{\omega_{zA}} = (\alpha' c_{yA}^{\omega_{zA}})/\alpha' = 1{,}744;$$

$$m_{zA}^\alpha = (\alpha' m_{zA}^\alpha)/\alpha' = -1{,}678; \quad m_{zA}^{\omega_{zA}} = (\alpha' m_{zA}^{\omega_{zA}})/\alpha' = -1{,}286;$$

$$m_{x1}^{\omega_{x1}} = (\alpha' m_{x1}^{\omega_{x1}})/\alpha' = -0{,}2467;$$

$$c_{yA}^{\dot{\bar{\alpha}}_A} = (1/\alpha'^3)\left[\left(\alpha'^3 c_{yA1}^{\dot{\bar{\alpha}}_A}\right) + M_\infty^2 \left(\alpha'^3 c_{yA2}^{\dot{\bar{\alpha}}_A}\right)\right] = -0{,}9149;$$

$$c_{yA}^{\dot{\omega}_{zA}} = (1/\alpha'^3)\left[\left(\alpha'^3 c_{yA1}^{\dot{\omega}_{zA}}\right) + M_\infty^2 \left(\alpha'^3 c_{yA2}^{\dot{\omega}_{zA}}\right)\right] = -0{,}3328;$$

$$m_{zA}^{\dot{\bar{\alpha}}_A} = (1/\alpha'^3)\left[\left(\alpha'^3 m_{zA1}^{\dot{\bar{\alpha}}_A}\right) + M_\infty^2 \left(\alpha'^3 m_{zA2}^{\dot{\bar{\alpha}}_A}\right)\right] = 0{,}5625;$$

$$m_{zA}^{\dot{\omega}_{zA}} = (1/\alpha'^3)\left[\left(\alpha'^3 m_{zA1}^{\dot{\omega}_{zA}}\right) + M_\infty^2 \left(\alpha'^3 m_{zA2}^{\dot{\omega}_{zA}}\right)\right] = 0{,}2672;$$

$$m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}} = (1/\alpha'^2)\left[\alpha'^2 \left(m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}}\right)_1 + M_\infty^2 \alpha'^2 \left(m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}}\right)_2\right] = 0{,}021.$$

Aquí, los parámetros ω_{zA}, $\dot{\omega}_{zA}$, $\dot{\bar{\alpha}}_A$ y el coeficiente del momento de cabeceo se han calculado por la cuerda b_A; ω_{x1}, $\dot{\omega}_{x1}$, por la mitad de la envergadura $l_{emp}/2$, en tanto que el coeficiente del momento de balanceo, por l_{emp}. El centro de reducción se posiciona en el comienzo de la CAM.

Efectuemos el recálculo de las derivadas para otra posición del centro de gravedad ($x_m = 6$ m). Con este fin hallemos la distancia relativa entre dicho punto y el comienzo de la CAM (véase la fig. 11.13): $\bar{x}_2 = x_2/x_c = (x_{emp} + x_A)/x_c = 0{,}2641$. Pasando a la dimensión característica x_c para ω_z, $\dot{\omega}_z$, $\dot{\bar{\alpha}}$ y m_z, hallamos:

$$c^{\alpha}_{y\,emp} = c^{\alpha}_{y} = 3{,}12; \quad c^{\omega_z}_{y\,emp} = c^{\omega_{zA}}_{yA}(b_A/x_c) + c^{\alpha}_{y}\bar{x}_2 = 1{,}149;$$

$$m^{\alpha}_{z\,emp} = m^{\alpha}_{zA}(b_A/x_c) - c^{\alpha}_{y}\bar{x}_2 = -1{,}137; \quad c^{\dot{\bar{\alpha}}}_{y} = c^{\dot{\bar{\alpha}}_A}_{yA}(b_A/x_c) = -0{,}1704;$$

$$c^{\dot{\omega}_z}_{y} = c^{\dot{\omega}_{zA}}_{yA}(b_A/x_c) + c^{\dot{\bar{\alpha}}_A}_{yA}\bar{x}_2 = -0{,}3036;$$

$$m^{\dot{\bar{\alpha}}}_{z} = m^{\dot{\bar{\alpha}}_A}_{zA}(b_A^2/x_c^2) - c^{\dot{\bar{\alpha}}}_{yA}\bar{x}_2(b_A/x_c) = 0{,}06449;$$

$$m^{\omega_z}_{z} = m^{\omega_{zA}}_{zA}(b_A^2/x_c^2) + \bar{x}_2(b_A/x_c)\left(m^{\dot{\bar{\alpha}}}_{zA} - c^{\dot{\omega}_{zA}}_{yA}\right) - \bar{x}_2^2 c^{\alpha}_{y} = -0{,}4301;$$

$$m^{\dot{\omega}_z}_{z} = m^{\dot{\omega}_{zA}}_{zA}(b_A^3/x_c^3) + \bar{x}_2(b_A^2/x_c^2)\left(m^{\dot{\bar{\alpha}}_A}_{zA} - c^{\dot{\omega}_{zA}}_{yA}\right) - \bar{x}_2^2(b_A/x_c)\,c^{\dot{\bar{\alpha}}_A}_{yA} = 0{,}02354.$$

Para el sector con empenaje

$$c^{\omega_z}_{y\,emp} = (K_{emp} + K_f)\,c^{\omega_z}_{y} = 1{,}799; \quad m^{\omega_z}_{z\,emp} = (K_{emp} + K_f)\,m^{\omega_z}_{z} = -0{,}6733;$$

$$c^{\dot{\omega}_z}_{y\,emp} = (K_{emp} + K_f)\,c^{\dot{\omega}_z}_{y} = -0{,}4753; \quad m^{\dot{\omega}_z}_{z\,emp} = (K_{emp} + K_f)\,m^{\dot{\omega}_z}_{z} = 0{,}03686;$$

$$c^{\dot{\bar{\alpha}}}_{y\,emp} = (K_{emp} + K_f)\,c^{\dot{\bar{\alpha}}}_{y} = -0{,}2668; \quad m^{\dot{\bar{\alpha}}}_{z\,emp} = (K_{emp} + K_f)\,m^{\dot{\bar{\alpha}}}_{z} = 0{,}101$$

Las derivadas del amortiguamiento del balanceo:

$$m^{\omega_x}_{x} = 2\varkappa(K_{emp} + K_f)\,m^{\omega_{x1}}_{x1} = -0{,}5216; \quad m^{\dot{\omega}_x}_{x} = 2\varkappa(K_{emp} + K_f)\,m^{\dot{\omega}_{x1}}_{x1} = 0{,}444.$$

Para el amortiguamiento longitudinal (véase la solución del problema 11.71)

$$m^{\omega_z}_{z} = m^{\omega_z}_{zf} + m^{\omega_z}_{z\,emp}S_{emp}/S_{máx.t} = -3{,}049; \quad m^{\dot{\bar{\alpha}}}_{z} = m^{\dot{\bar{\alpha}}}_{zf} + m^{\dot{\bar{\alpha}}}_{z\,emp}S_{emp}/S_{máx.t};$$

$$m^{\dot{\bar{\alpha}}}_{zf} = -2\bar{S}_{s.b}(1 - \bar{x}_m)^2 = -0{,}4575; \quad m^{\dot{\bar{\alpha}}}_{z} = -0{,}04411;$$

$$m^{\dot{\omega}_z}_{z} = m^{\dot{\omega}_z}_{zf} + m^{\dot{\omega}_z}_{z\,emp}S_{emp}/S_{máx.t}.$$

Según la teoría aerodinámica del sólido delgado

$$m^{\dot{\omega}_z}_{zf} = -2J/(x_c^3 S_{s.b}), \tag{11.61}$$

donde J es el momento de inercia del volumen con relación al eje Ox que pasa por el punto x_m;

$$\dot{m}_{zf}^{\omega_z} = -(2/x_c^3 S_{\text{máx.t}}) \int_{x_{s.b}}^{x_m} x^2 \pi r^2 \, dx = (\bar{x}'^3 - \bar{x}_{s.b}^3)/3 +$$

$$+ \beta_{\text{cono}}^2 (x_c^2/r_{\text{máx.t}}^2) \bar{x}_m^5 [(1-\tilde{x}_m^3)/3 - (1/2)(1-\tilde{x}_m^4) + (1/5)(1-\tilde{x}_m^5)].$$

Para $\bar{x}' = (x_m - x'_{\text{cono}})/x_c = 0{,}08696$; $\bar{x}_{s.b} = (x_c - x_m)/x_c = 0{,}4783$; $\beta_{\text{cono}} = 0{,}75/5 = 0{,}15$; $x_c^2/r_{\text{máx.t}}^2 = 235{,}1$; $\bar{x}_m = 0{,}5217$; $\tilde{x}_m = (x_m - x'_{\text{cono}})/x_m = 0{,}1667$ hallamos $\dot{m}_{zf}^{\omega_z} = -0{,}08654$ y $\dot{m}_z^{\omega_z} = -0{,}06433$.

11.74. Para el vehículo volante que estudiamos

$$c_y^{\omega_z} = c_{yf}^{\omega_z} S_{\text{máx.t}}/S_{\text{ala}} + c_{y\,\text{ala}}^{\omega_z} + c_{y\,\text{emp}}^{\omega_z};$$

$$m_z^{\omega_z} = m_{zf}^{\omega_z} S_{\text{máx.t}}/S_{\text{ala}} + m_{z\,\text{ala}}^{\omega_z} + m_{z\,\text{emp}}^{\omega_z} \quad (\omega_z = \Omega_z x_c V_\infty). \tag{11.62}$$

Aquí, las derivadas están referidas al área de las semialas aisladas, en tanto que el momento de cabeceo se ha determinado por la longitud x_c. Para el sector con el empenaje

$$\left.\begin{aligned} c_{y\,\text{emp}}^{\omega_z} &= (K_{\text{emp}} + K_f)\, c_{y\,\text{emp}}^{\alpha} [(\bar{x}_p)_{\text{emp}} \sqrt{k_2} - (\bar{x}_p)_{\text{ala}} \times \\ &\quad \times (k_2/\sqrt{k_1})(d\varepsilon/d\alpha)_{\text{emp}}]\, S_{\text{emp}}/S_{\text{ala}}; \\ m_{z\,\text{emp}}^{\omega_z} &= -(K_{\text{emp}} + K_f)\, c_{y\,\text{emp}}^{\alpha} [(\bar{x}_p)_{\text{emp}} \sqrt{k_2} - \\ &\quad - (\bar{x}_p)_{\text{ala}} (k_2/\sqrt{k_1})(d\varepsilon/d\alpha)_{\text{emp}}]\, (\bar{x}_p)_{\text{emp}}\, S_{\text{emp}}/S_{\text{ala}}. \end{aligned}\right\} \tag{11.63}$$

Con arreglo a la teoría aerodinámica del sólido delgado, para el valor de $r_{m\,\text{emp}} = r_{\text{máx.t}}/s_{m\,\text{emp}} = 0{,}75/3 = 0{,}25$, hallamos $K_{\text{ala}} = K_{\text{emp}} = 1{,}208$; $K_f = 0{,}3575$.

Para $M_\infty = 1{,}5$ los bordes de ataque son subsónicos, por lo que $c_{y\,\text{emp}}^{\alpha} = 2\pi \operatorname{ctg} \chi/E(k) = 2{,}486$ (véase la solución del problema 11.71).

De la fig. 11.14 hallamos

$(x_p)_{\text{emp}} = x_{\text{emp}} + x_{A\,\text{emp}} + 0{,}5 b_{A\,\text{emp}}$; $x_{\text{emp}} = x_c - x_m - b_{\text{emp}} = 4{,}787$ m; $x_{A\,\text{emp}} = z_{A\,\text{emp}} \operatorname{tg} \chi_{\text{emp}} = (1/3)(s_{m.\text{emp}}) - r_{\text{máx.t}}) \operatorname{tg} \chi_{\text{emp}} = 1{,}071$ m; $b_{A\,\text{emp}} = (2/3) b_{\text{emp}} = (2/3)(s_{m.\text{emp}} - r_{\text{máx.t}}) \operatorname{tg} \chi_{\text{emp}} = 2{,}142$ m; $(x_p)_{\text{emp}} = 6{,}929$ m; $(\bar{x}_p)_{\text{emp}} = (x_p)_{\text{emp}}/x_c = 0{,}3464$; $(x_p)_{\text{ala}} = x_{\text{ala}} - x_{A\,\text{ala}} - 0{,}5 b_{A\,\text{ala}}$; $x_{\text{ala}} = 4{,}3$ m; $x_{A\,\text{ala}} = z_{A\,\text{ala}} \operatorname{tg} \chi_{\text{ala}} = (1/3)(s_{m\,\text{ala}} - r_{\text{máx.t}}) \times \operatorname{tg} \chi_{\text{ala}} = 1{,}417$ m; $b_{A\,\text{ala}} = (2/3) b_{\text{ala}} = (2/3)(s_{m\,\text{ala}} - r_{\text{máx.t}}) \operatorname{tg} \chi_{\text{ala}} = 2{,}833$ m; $(x_p)_{\text{ala}} = 1{,}466$ m; $(\bar{x}_p)_{\text{ala}} = (x_p)_{\text{ala}}/x_c = 0{,}07333$; $S_{\text{emp}}/S_{\text{ala}} = (s_{m\,\text{emp}} - r_{\text{máx.t}})^2 \operatorname{tg} \chi_{\text{emp}}/[(s_{m\,\text{ala}} - r_{\text{máx.t}})^2 \operatorname{tg} \chi_{\text{ala}}] = 0{,}4002$.

De la fig. 11.14, haciendo $\alpha = 0{,}1$, hallamos $y_v = \alpha (x_{c.g})_{\text{emp}} = \alpha (x_p)_{\text{emp}} = 0{,}6929$; $\bar{y}_v = y_v/s_{m\,\text{emp}} = 0{,}231$.

Partiendo del valor de $r_{m\,\text{ala}} = r_{\text{máx.t}}/s_{m\,\text{ala}} = 0{,}75/5 = 0{,}15$ determinamos $(z_v - r_{\text{máx.t}})/(s_{m\,\text{ala}} - r_{\text{máx.t}}) = 0{,}764$; $z_v = 3{,}997$; $\bar{z}_v = z_v/s_{m\,\text{emp}} = 1{,}332$.

Tomando en consideración el valor de $\bar{s}_{m\ \text{emp}} = s_{m\ \text{emp}}/r_{\text{máx.t}} = 3/0{,}75 = 4$ y de $K_{\text{ala}} = K_{\text{emp}} = 1{,}208$ y haciendo $a = 2{,}8$ (en lugar de $a = 4K_{\text{emp}}$), calculamos $i_{\text{emp}} = -2{,}8\,\bar{z}_v\,(\bar{s}_{m\ \text{emp}} - 1)/[(\bar{y}_v^2 + \bar{z}_v^2)\,\bar{s}_{m\ \text{emp}}] = -1{,}531$.
En correspondencia con la teoría aerodinámica del sólido delgado, $\eta_{\text{emp}} = 1 + K_{\text{ala}} i_{\text{emp}} c_{y\ \text{ala}}^{\alpha} S_{\text{ala}}/[8\,(K_{\text{emp}} + K_{\text{f}})\,\pi\,(s_{m\ \text{emp}} - r_{\text{máx.t}})\,(z_v - r_{\text{máx.t}})]$.

A continuación, según el valor de $\bar{r}_{m\ \text{ala}} = 0{,}75/5 = 0{,}15$, determinamos $K_{\text{ala}} = 1{,}12$.

Hallando más adelante $c_{y\ \text{ala}}^{\alpha} = 4/\alpha' = 3{,}578$ y $S_{\text{ala}} = (s_{m\ \text{ala}} - r_{\text{máx.t}})^2 = 18{,}06\ \text{m}^2$, obtenemos $\eta_{\text{emp}} = 0{,}6143$.

En la fig. 11.14 se muestra que para $\text{M}_\infty = 2{,}5$, el empenaje se dispone en el interior del cono de Mach con el vértice en el punto B de desprendimiento del vórtice del ala. Por ello, hay que tomar $\Delta\varepsilon = 1$ y $(d\varepsilon/d\alpha)_{\text{emp}} = 1 - \eta_{\text{emp}} = 0{,}3857$.

Adoptando los coeficientes de remanso $k_1 = k_2 = 1$, obtenemos $c_{y\ \text{emp}}^{\omega_z} = 0{,}4954$; $m_{z\ \text{emp}}^{\omega_z} = -0{,}1716$.

Para el sector del fuselaje con ala

$$c_{y\ \text{ala}}^{\omega_z} = (K_{\text{ala}} + K_{\text{f}})\, c_{y\ \text{ala}}^{\alpha} \sqrt{k_1}\, (\bar{x}_{\text{p}})_{\text{ala}};$$

$$m_{z\ \text{ala}}^{\omega_z} = -(K_{\text{ala}} + K_{\text{f}})\, c_{y\ \text{ala}}^{\alpha} \sqrt{k_1}\, (\bar{x}_{\text{p}})_{\text{ala}}^2. \qquad (11.63')$$

Según el valor de $r_{m\ \text{ala}} = r_{\text{máx.t}}/s_{m\ \text{ala}} = 0{,}75/5 = 0{,}15$, hallamos $K_{\text{ala}} = 1{,}12$; $K_{\text{f}} = 0{,}2055$. Haciendo $(\bar{x}_{\text{p}})_{\text{ala}}$ negativa y teniendo en cuenta que $c_{y\ \text{ala}}^{\alpha} = 3{,}578$; $k_1 \approx 1$, obtenemos $c_{y\ \text{ala}}^{\omega_z} = -0{,}3477$; $m_{z\ \text{ala}}^{\omega_z} = -0{,}0255$.

Para el fuselaje (véase el problema 11.71)

$$c_{y\text{f}}^{\omega_z} = 2\bar{S}_{\text{s.b}}\,(1 - \bar{x}_{\text{m}}) = 0{,}8;$$

$$m_{z\text{f}}^{\omega_z} = -2\bar{S}_{\text{s.b}}\,[(1 - \bar{x}_m)^2 + \bar{x}_m W_{\text{f}}/(x_{\text{c}} S_{\text{s.b}})] - [1/(S_{\text{s.b}} x_{\text{c}}^2)] \int_0^{x_{\text{c}}} [Sx\,dx];$$

$$W_{\text{f}}/(x_{\text{c}} S_{\text{s.b}}) = 1 - 2x_{\text{c}}'/(3x_{\text{c}}) = 0{,}8333;$$

$$[1/(S_{\text{s.b}} x_{\text{c}}^2)] \int_0^{x_{\text{c}}} Sx\,dx = x'^2/(4x_{\text{c}}^2) + (1/2)\,(1 - x'^2/x_{\text{c}}^2) = 0{,}4844; \quad m_{z\text{f}}^{\omega_z} = -0{,}3512.$$

Tomando en consideración que $S_{\text{máx.t}}/S_{\text{ala}} = \pi r_{\text{máx.t}}^2/(s_{m\ \text{ala}} - r_{\text{máx.t}})^2 = \pi 0{,}75^2/(5 - 0{,}75)^2 = 0{,}09779$, hallamos las derivadas totales $c_y^{\omega_z} = 0{,}2259$; $m_z^{\omega_z} = -0{,}2314$ y la distancia relativa hasta el centro de presión $\Delta\bar{x}_{\text{p}} = \Delta x_{\text{p}}/x_{\text{c}} = -m_z^{\omega_z}/c_y^{\omega_z} = 1{,}025$ (el punto de aplicación de la resultante de las fuerzas normales, condicionadas por la rotación, se encuentra tras la sección de cola y dista de ella $1{,}025\ x_{\text{c}} + x_{\text{m}} - x_{\text{c}} = 12{,}5$ m).

Examinemos las derivadas totales:

$$\left.\begin{aligned} c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} &= c_{y\text{f}}^{\dot{\bar{\alpha}}} S_{\text{máx.t}}/S_{\text{ala}} + c_{y\ \text{ala}}^{\dot{\bar{\alpha}}} + c_{y\ \text{emp}}^{\dot{\bar{\alpha}}}; \\ m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} &= m_{z\text{f}}^{\dot{\bar{\alpha}}} S_{\text{máx.t}}/S_{\text{ala}} + m_{z\ \text{ala}}^{\dot{\bar{\alpha}}} + m_{z\ \text{emp}}^{\dot{\bar{\alpha}}}; \end{aligned}\right\} \qquad (11.64)$$

donde para el sector con el empenaje

$$\left.\begin{aligned} c_{y\,\text{emp}}^{\dot{\bar{\alpha}}} &= (K_{\text{emp}} + K_f)\, c_{y\,\text{emp}}^{\alpha}\, (d\varepsilon/d\alpha)_{\text{emp}} \sqrt{k_2}\, (\bar{x}_{\text{p}})_{\text{emp}}\, S_{\text{emp}}/S_{\text{ala}} = 0{,}2081; \\ m_{z\,\text{emp}}^{\dot{\bar{\alpha}}} &= -(K_{\text{emp}} + K_f)\, c_{y\,\text{emp}}^{\alpha}\, (d\varepsilon/d\alpha)_{\text{emp}} \sqrt{k^2}\, (\bar{x}_{\text{p}})_{\text{emp}}^2 S_{\text{emp}}/S_{\text{ala}} = \\ &= -0{,}07208; \end{aligned}\right\} \quad (11.64')$$

Para el sector del fuselaje con ala

$$\left.\begin{aligned} c_{y\,\text{ala}}^{\dot{\bar{\alpha}}} &= (K_{\text{ala}} + K_f)\, c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} \bar{l}_{\text{ala}}; \\ m_{z\,\text{ala}}^{\dot{\bar{\alpha}}} &= -(K_{\text{ala}} + K_f)\, (m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} \bar{l}_{\text{ala}} + \bar{x}_{\text{ala}} c_y^{\dot{\bar{\alpha}}})\, \bar{l}_{\text{ala}}, \end{aligned}\right\} \quad (11.64'')$$

con la particularidad de que para el ala triangular con bordes supersónicos

$$c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = -4/(3\alpha'^2\lambda_{\text{ala}}); \quad m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} = 4/(9\alpha'^2\lambda_{\text{ala}}^2)\, [\dot{\bar{\alpha}} = (d\alpha/dt)\, l_{\text{ala}}/V_\infty].$$

Efectuemos el cálculo: $\lambda_{\text{ala}} = l_{\text{ala}}^2/S_{\text{ala}} = 4\,(s_{m\,\text{ala}} - r_{\text{máx.t}})^2/(s_{m\,\text{ala}} - r_{\text{máx.t}})^2 = 4$; $c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = -0{,}2667$; $m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} = 0{,}02222$; $c_{y\,\text{ala}}^{\dot{\bar{\alpha}}} = -0{,}1502$; $m_{y\,\text{ala}}^{\dot{\bar{\alpha}}} = -0{,}02698$.

Para el fuselaje solitario

$$c_{yf}^{\dot{\bar{\alpha}}} = 2\bar{S}_{\text{s.b}}\,[1 - \bar{x}_{\text{m}} + W_f/(x_{\text{c}} S_{\text{s.b}})] = 2{,}466; \quad m_{zf}^{\dot{\bar{\alpha}}} = -2\bar{S}_{\text{s.b}}\,(1 - \bar{x}_{\text{m}})^2 = -0{,}32.$$

Las correspondientes derivadas totales $c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = 0{,}2991$; $m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} = -0{,}1304$.

La derivada del coeficiente del momento de balanceo

$$\left.\begin{aligned} m_x^{\bar{\omega}_x} = &-2\varkappa_{\text{ala}} c_{y\,\text{ala}}^{\alpha} K_{\text{ala}} \sqrt{k_1}\, (\bar{z}_{\text{c.g}})_{\text{ala}}\, [r_{m\,\text{ala}} + (1 - r_{m\,\text{ala}})\, (\bar{z}_{\text{p}})_{\varphi\,\text{ala}(f)}] - \\ &- 2\varkappa_{\text{emp}} c_{y\,\text{emp}}^{\alpha} K_{\text{emp}} \sqrt{k_2}\, (\bar{z}_{\text{c.g}})_{\text{emp}}\, [r_{m\,\text{emp}} + (1 - r_{m\,\text{emp}})\, (\bar{z}_{\text{p}})_{\varphi\,\text{emp}(f)} \times \\ &\times [1 - (d\varepsilon/d\alpha)_{\text{emp}}]\, (S_{\text{emp(c)}}/S_{\text{ala(c)}})\, (s_{m\,\text{emp}}^2/s_{m\,\text{ala}}^2)\, [\bar{\omega}_x = \Omega_x l_{\text{ala}}/(2V_\infty)]. \end{aligned}\right\} \quad (11.65)$$

Calculamos: $(z_{\text{c.g}})_{\text{ala}} = (1/3)\, s_{m\,\text{ala}} = (1/3)\, 5$; $(\bar{z}_{\text{c.g}})_{\text{ala}} = (z_{\text{c.g}})_{\text{ala}}/b_{\text{ala}} = 1/6$, a continuación, según el valor de $r_{m\,\text{ala}} = r_{\text{máx.t}}/s_{m\,\text{ala}} = 0{,}75/5 = 0{,}15$, con arreglo a la teoría aerodinámica del sólido delgado, determinamos el coeficiente $K_{\text{ala}} = 1{,}12$, $(\bar{z}_{\text{p}})_{\varphi\,\text{ala}(f)} = 0{,}531$ y calculamos $\varkappa_{\text{ala}} = 1 - e^{-4{,}5 r_{m\,\text{ala}}} = 0{,}4908$.

Las magnitudes análogas para el sector con empenaje fueron determinadas en el problema 11.71, con resultado $m_x^{\bar{\omega}_x} = -0{,}4443$.

La derivada

$$\begin{aligned} m_x^{\dot{\bar{\omega}}_x} = 2\varkappa_{\text{ala}} K_{\text{ala}} m_{x\,\text{ala}}^{\dot{\bar{\omega}}_{x\,\text{ala}}} + 2\varkappa_{\text{emp}} K_{\text{emp}} m_{x\,\text{emp}}^{\dot{\bar{\omega}}_{x\,\text{emp}}} \times \\ \times [1 - (d\varepsilon/d\alpha)_{\text{emp}}]\, (S_{\text{emp(c)}}/S_{\text{ala(c)}})\, (s_{m\,\text{emp}}^3/s_{m\,\text{ala}}^3), \end{aligned} \quad (11.65')$$

donde $\dot{\bar{\omega}}_x = \dot{\bar{\omega}}_{x\,\text{ala}} = \dot{\Omega}_x l_{\text{ala}}^2/(4V_\infty^2)$; $m_{x\,\text{emp}}^{\dot{\bar{\omega}}_{x\,\text{emp}}} = \dot{\Omega}_x l_{\text{emp}}^2/(4V_\infty^2)$; m_x, $m_{x\,\text{ala}}$ son los coeficientes del momento de balanceo (sumario y del ala, respectivamente) calculados por el área de las semialas, teniendo en cuenta la zona ventral $S_{\text{ala(c)}}$ y la envergadura $l_{\text{ala}} = 2\,s_{m\,\text{ala}}$; $m_{x\,\text{emp}}$, el coeficiente del momento de balanceo del empenaje, hallado por el área $S_{\text{emp(c)}}$ y la envergadura $l_{\text{emp}} = 2\,s_{m\,\text{emp}}$.

Conforme a la solución del problema 11.73, para el sector con empenaje (con $\text{M}_\infty = 1$), $m_{x1}^{\dot{\bar{\omega}}_{x1}} = 0{,}021$ [el parámetro $\dot{\bar{\omega}}_{x1} = \dot{\Omega}_x l^2/(4V_\infty^2)$; el coeficiente m_{x1} ha sido calculado por la envergadura $l_{\text{emp}} = 2\,s_{m\,\text{emp}}$].

Para el sector del fuselaje con ala $\lambda_{ala} = 4/\mathrm{tg}\,\chi_{ala} = 4$; $\lambda_{ala}\,\mathrm{tg}\,\chi_{ala} = 4$; $\alpha'\lambda_{ala} = 4{,}472$. De acuerdo con la teoría aerodinámica del sólido delgado, para estos datos, hallamos $\alpha'^2\,(m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}})_1 = 0{,}0653$; $\alpha'^2\,(m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}})_2 = -0{,}0075$; $m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}} = 0{,}03874$ y calculamos $m_x^{\dot{\omega}_x} = 0{,}04493$.

Tomamos la derivada de rotación de la combinación cruciforme prefijada $m_x^{\omega_y} = 0$.

11.75. Las derivadas de rotación

$$\left.\begin{aligned} c_y^{\omega_z} &= c_{yf}^{\omega_z}\,(S_{\text{máx.t}}/S_{\text{emp}}) + (K_{\text{emp}} + K_f)\,c_{y\,\text{emp}}^{\omega_z}\sqrt{k_1};\\ m_z^{\omega_z} &= m_{zf}^{\omega_z}\,(S_{\text{máx.t}}/S_{\text{emp}}) + (K_{\text{emp}} + K_f)\,m_{z\,\text{emp}}^{\omega_z}\sqrt{k_1},\end{aligned}\right\} \qquad (11.66)$$

donde $k_1 = \mathrm{M}^2/\mathrm{M}_\infty^2 \approx 1$, en tanto que las derivadas $c_{y\,\text{emp}}^{\omega_z}$, $m_{z\,\text{emp}}^{\omega_z}$ se refieren al empenaje aislado.

Según el valor de $r_m = r_{\text{máx.t}}/s_m = 0{,}75/5 = 0{,}15$ hallamos los coeficientes de interferencia $K_{\text{emp}} = 1{,}12$, $K_f = 0{,}2055$ y determinamos (para el centro de rotación x_m)

$$\left.\begin{aligned} c_{y\,\text{emp}}^{\omega_z} &= c_{y\mathrm{A}}^{\omega_{z\mathrm{A}}}\,(b_\mathrm{A}/x_c) + c_{y\,\text{emp}}^{\alpha}\bar{x}_2;\\ m_{z\,\text{emp}}^{\omega_z} &= m_{z\mathrm{A}}^{\omega_{z\mathrm{A}}}\,(b_\mathrm{A}^2/x_c^2) + \bar{x}_2\,(b_\mathrm{A}/x_c)\,(m_{z\mathrm{A}}^{\alpha} - c_{y\mathrm{A}}^{\omega_{z\mathrm{A}}}) - \bar{x}_2^2 c_{y\,\text{emp}}^{\alpha},\end{aligned}\right\} \qquad (11.66')$$

donde $c_{y\mathrm{A}}^{\omega_{z\mathrm{A}}}$, $m_{z\mathrm{A}}^{\omega_{z\mathrm{A}}}$ son las derivadas del empenaje aislado para el centro de rotación en el comienzo de la CAM; $\omega_{z\mathrm{A}} = \Omega_z b_\mathrm{A}/V_\infty$; $m_{z\mathrm{A}}$, el coeficiente del momento referido a la CAM (b_A).

Para el empenaje

$$\lambda_{\text{emp}} = l_{\text{emp}}^2/S_{\text{emp}} = 4\,(s_m - r_{\text{máx.t}})/[(s_m - r_{\text{máx.t}})^2\,\mathrm{tg}\,\chi] = 4/\mathrm{tg}\,\chi = 1{,}994\ (\mathrm{M}_\infty = 1{,}5);$$

$$\beta\lambda_{\text{emp}} = \sqrt{1 - \mathrm{M}_\infty^2}\,\lambda_{\text{emp}} = 1{,}196\ (\mathrm{M}_\infty = 0{,}8);$$

$$\alpha'\lambda_{\text{emp}} = \sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}\,\lambda_{\text{emp}} = 2{,}229.$$

Para estos parámetros, según la teoría aerodinámica del sólido delgado, hallamos:

con $\mathrm{M}_\infty = 0{,}8$

$$\beta c_y^{\alpha} = 1{,}491;\quad \beta c_{y\mathrm{A}}^{\omega_{z\mathrm{A}}} = 1{,}3;\quad \beta m_{z\mathrm{A}}^{\alpha} = -0{,}6071;\quad \beta m_{z\mathrm{A}}^{\omega_{z\mathrm{A}}} = -0{,}735;$$

con $\mathrm{M}_\infty = 1{,}5$

$$\alpha' c_y = 2{,}781;\quad \alpha' c_{y\mathrm{A}}^{\omega_{z\mathrm{A}}} = 1{,}826;\quad \alpha' m_{z\mathrm{A}}^{\alpha} = -1{,}39;\quad \alpha' m_{z\mathrm{A}}^{\omega_{z\mathrm{A}}} = -1{,}315.$$

Determinamos las derivadas (para $\mathrm{M}_\infty = 0{,}8$):

$$c_y^{\alpha} = (\beta c_y^{\alpha})/\beta = 2{,}485;\quad c_{y\mathrm{A}}^{\omega_{z\mathrm{A}}} = (\beta c_{y\mathrm{A}}^{\omega_{z\mathrm{A}}})/\beta = 2{,}167;$$

$$m_{z\mathrm{A}}^{\alpha} = (\beta m_{z\mathrm{A}}^{\alpha})/\beta = -1{,}012;\quad m_{z\mathrm{A}}^{\omega_{z\mathrm{A}}} = (\beta m_{z\mathrm{A}}^{\omega_{z\mathrm{A}}})/\beta = -1{,}225;$$

$$c_{y\,\text{emp}}^{\omega_z} = 0{,}9038;\quad m_{z\,\text{emp}}^{\omega_z} = -0{,}237.$$

De la solución del problema 11.74, tenemos para el fuselaje $c_{yf}^{\omega_z} = 0{,}8$; $m_{zf}^{\omega_z} = -0{,}3512$. Como $S_{\text{máx.t}}/S_{\text{emp}} = 0{,}04875$, las derivadas sumarias $c_y^{\omega_z} = 1{,}237$; $m_z^{\omega_z} = -0{,}3313$.

De modo análogo determinamos para $M_\infty = 1{,}5$;

$$c_y^\alpha = (\alpha' c_y^\alpha)/\alpha' = 2{,}487; \quad c_{yA}^{\omega_z A} = (\alpha' c_{yA}^{\omega_z A})/\alpha' = 1{,}633;$$

$$m_{zA}^\alpha = (\alpha' m_{zA}^\alpha)/\alpha' = -1{,}243; \quad m_{zA}^{\omega_z A} = (\alpha' m_{zA}^{\omega_z A})/\alpha' = -1{,}176;$$

$$c_{y\,\text{emp}}^{\omega_z} = 0{,}7523; \quad m_{z\,\text{emp}}^{\omega_z} = -0{,}4623; \quad c_y^{\omega_z} = 1{,}036; \quad m_z^{\omega_z} = -0{,}6299.$$

Analicemos las derivadas respecto de $\dot{\bar{\alpha}}$. Según la teoría aerodinámica del sólido delgado, para $M_\infty = 0{,}8$, tenemos;

$$\beta^3 c_{yA1}^{\dot{\bar{\alpha}}A} = 0{,}5228; \quad \beta^3 c_{yA2}^{\dot{\bar{\alpha}}A} = -0{,}6932; \quad \beta^3 m_{yA1}^{\dot{\bar{\alpha}}A} = -0{,}2528; \quad \beta^3 m_{zA2}^{\dot{\bar{\alpha}}A} = 0{,}2967.$$

Conforme a estos datos

$$c_{yA}^{\dot{\bar{\alpha}}A} = (1/\beta^3)\,[(\beta^3 c_{y1}^{\dot{\bar{\alpha}}A}) + M_\infty^2\,(\beta^3 c_{y2}^{\dot{\bar{\alpha}}A})] = 0{,}3664;$$

$$m_{zA}^{\dot{\bar{\alpha}}A} = (1/\beta^3)\,[(\beta^3 m_{zA1}^{\dot{\bar{\alpha}}A}) + M_\infty^2\,(\beta^3 m_{zA2}^{\dot{\bar{\alpha}}A})] = -0{,}2913;$$

$$c_{y\,\text{emp}}^{\dot{\bar{\alpha}}A} = c_{yA}^{\dot{\bar{\alpha}}A}\,(b_A/x_c) = 0{,}1041;$$

$$m_{z\,\text{emp}}^{\dot{\bar{\alpha}}A} = m_{zA}^{\dot{\bar{\alpha}}A}\,(b_A^2/x_c^2) - c_{yA}^{\dot{\bar{\alpha}}A}\bar{x}_2\,(b_A/x_c) = -0{,}03559.$$

Como para el fuselaje (véase la solución del problema 11.74) $c_{yf}^{\dot{\bar{\alpha}}} = 2{,}466$; $m_{zf}^{\dot{\bar{\alpha}}} = -0{,}32$, las derivadas totales $c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = 0{,}2581$; $m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} = -0{,}06277$.

Examinemos las derivadas respecto de $\dot{\omega}_z$. Para $M_\infty = 0{,}8$, según la teoría aerodinámica del sólido delgado, hallamos:

$$\beta^3 c_{yA1}^{\dot{\omega}_z A} = 0{,}2602; \quad \beta^3 c_{yA2}^{\dot{\omega}_z A} = -0{,}4377; \quad \beta^3 m_{zA1}^{\dot{\omega}_z A} = -0{,}1586; \quad \beta^3 m_{zA2}^{\dot{\omega}_z A} = 0{,}2167.$$

Para estos resultados

$$c_{yA}^{\dot{\omega}_z A} = (1/\beta^3)\,[(\beta^3 c_{y1}^{\dot{\omega}_z A}) + M_\infty^2\,(\beta^3 c_{y2}^{\dot{\omega}_z A})] = -0{,}09226;$$

$$m_{zA}^{\dot{\omega}_z A} = (1/\beta^3)\,[(\beta^3 m_{zA1}^{\dot{\omega}_z A}) + M_\infty^2\,(\beta^3 m_{zA2}^{\dot{\omega}_z A}] = -0{,}09219;$$

$$c_{y\,\text{emp}}^{\dot{\omega}_z} = c_{yA}^{\dot{\omega}_z A}\,(b_A/x_c) + c_{yA}^{\dot{\bar{\alpha}}A}\bar{x}_2 = 0{,}01625;$$

$$m_{z\,\text{emp}}^{\dot{\omega}_z} = m_{zA}^{\dot{\omega}_z A}\,(b_A^3/x_c^3) + \bar{x}_2\,(b_A^2/x_c^2)\,(m_{zA}^{\dot{\bar{\alpha}}A} - c_{yA}^{\dot{\omega}_z A}) - \bar{x}_2\,(b_A/x_c)\,c_{yA}^{\dot{\bar{\alpha}}A} = -0{,}005376.$$

Las derivadas para el fuselaje

$$c_{yf}^{\dot{\omega}_z} = 2C_{22}; \quad m_{zf}^{\dot{\omega}_z} = -2D_{22}\;(\dot{\omega}_z = \dot{\Omega}_z x_c^2/V_\infty^2);$$

$$C_{22} = \int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}_{\text{pun}}} A_{22}\bar{x}\,d\bar{x}; \quad D_{22} = \int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}_{\text{pun}}} A_{22}\bar{x}^2\,d\bar{x}, \tag{11.67}$$

donde $\bar{x}=x/x_c$; $\bar{x}_{s.b}=x_{s.b}/x_c$ (la distancia relativa desde el centro de masas hasta la sección de base); $\bar{x}_{pun}=x_{pun}/x_c$ (la distancia hasta la punta del fuselaje; $x_{pun}=$ $=x_m$).

Ya que $A_{22}=r^2/r^2_{máx.\,t}$, tendremos

$$C_{22}=(1/r^2_{máx.\,t})\int\limits_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}_{pun}} r^2\bar{x}\,d\bar{x}=(1/r^2_{máx.\,t})\left(\int\limits_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}'} r^2_{máx.\,t}\bar{x}\,d\bar{x}+\int\limits_{\bar{x}'}^{\bar{x}_m} r^2\bar{x}\,d\bar{x}\right)=$$

$$=(\bar{x}'^2-\bar{x}^2_{s.b})/2+\beta^2_{cono}(x^2_c/r^2_{máx.\,t})\,\bar{x}^4_m\,[(1-\tilde{x}^2_m)/2-(2/3)(1-\tilde{x}^3_m)+$$

$$+(1-\tilde{x}^4_m)/4];\quad D_{22}=(1/r^2_{máx.\,t})\int\limits_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}_m} r^2\bar{x}^2\,d\bar{x}=$$

$$=(1/r^2_{máx.\,t})\left(\int\limits_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}'} r^2_{máx.\,t}\bar{x}^2\,d\bar{x}+\int\limits_{\bar{x}'}^{\bar{x}_m} r^2\bar{x}^2\,d\bar{x}\right)=(\bar{x}'^3-\bar{x}^3_{s.b})/3+$$

$$+\beta^2_{cono}(x^2_c/r^2_{máx.\,t})\,\bar{x}^5_m\,[(1-\tilde{x}^3_m)/3-(1/2)(1-\tilde{x}^4_m)+(1/5)(1-\tilde{x}^5_m)].$$

Introducimos aquí los valores

$$\bar{x}'=(x_m-x'_c)/x_c=0{,}35;\quad \bar{x}_{s.b}=-(x_c-x_m)/x_c=-0{,}4;$$

$$x^2_c/r^2_{máx.\,t}=711{,}1;\quad \beta^2_{cono}=(0{,}75/5)^2=0{,}0225;\quad \bar{x}_m=x_m/x_c=0{,}6;$$

$$\tilde{x}_m=\bar{x}'/\bar{x}_m=(x_m-x'_c)/x_m=0{,}5833;\quad C_{22}=0{,}01567;$$

$$D_{22}=0{,}05001 \text{ y obtenemos } c_{yf}^{\dot{\omega}_z}=2\,C_{22}=0{,}03134;$$

$$m_{zf}^{\dot{\omega}_z}=-2\,D_{22}=-0{,}01468;\quad c_y^{\dot{\omega}_z}=-0{,}02001;\ m_z^{\dot{\omega}_z}=-0{,}007841.$$

Analicemos las derivadas respecto de $\dot{\bar{\alpha}}$ y ω_z para $M_\infty=1{,}5$. De acuerdo con la teoría aerodinámica del sólido delgado, determinamos:

$$\alpha'^3 c_{yA1}^{\dot{\bar{\alpha}}_A}=-1{,}39;\quad \alpha'^3 c_{yA2}^{\dot{\bar{\alpha}}_A}=0{,}4352;\quad \alpha'^3 m_{zA1}^{\dot{\bar{\alpha}}_A}=0{,}8691;\quad \alpha'^3 m_{zA2}^{\dot{\bar{\alpha}}}=-0{,}272;$$

$$c_{yA}^{\dot{\bar{\alpha}}_A}=(1/\alpha'^3)\,[(\alpha'^3 c_{yA1}^{\dot{\bar{\alpha}}_A})+M^2_\infty(\alpha'^3 c_{yA2}^{\dot{\bar{\alpha}}_A})]=-0{,}294;$$

$$m_{zA}^{\dot{\bar{\alpha}}_A}=(1/\alpha'^3)\,[(\alpha'^3 m_{zA1}^{\dot{\bar{\alpha}}_A})+M^2_\infty(\alpha'^3 m_{zA2}^{\dot{\bar{\alpha}}_A})]=0{,}184;$$

$$c_{y\,emp}^{\dot{\bar{\alpha}}}=c_{yA}^{\dot{\bar{\alpha}}_A}(b_A/x_c)=-0{,}08354;$$

$$m_{z\,emp}^{\dot{\bar{\alpha}}}=m_{zA}^{\dot{\bar{\alpha}}_A}(b^2_A/x^2_c)-c_{yA}^{\dot{\bar{\alpha}}_A}\bar{x}_2(b_A/x_c)=-0{,}005174;$$

$$c_y^{\dot{\bar{\alpha}}}=0{,}00949;\quad m_z^{\dot{\bar{\alpha}}}=-0{,}02246;\quad \alpha'^3 c_{yA1}^{\dot{\omega}_{zA}}=-0{,}5107;$$

$$\alpha'^3 c_{yA2}^{\dot{\omega}_{zA}}=0{,}05194;\quad \alpha'^3 m_{zA1}^{\dot{\omega}_{zA}}=0{,}4097;\quad \alpha'^3 m_{zA2}^{\dot{\omega}_{zA}}=-0{,}05244;$$

$$\dot{c}_y^{\omega_{zA}} = (1/\alpha'^3)\,[(\alpha'^3 \dot{c}_{yA1}^{\omega_{zA}}) + M_\infty^2\,(\alpha'^3 \dot{c}_{yA2}^{\omega_{zA}})] = -0{,}2818;$$

$$\dot{m}_{zA}^{\omega_{zA}} = (1/\alpha'^3)\,[(\alpha'^3 \dot{m}_{zA1}^{\omega_{zA}}) + M_\infty^2\,(\alpha'^3 \dot{m}_{zA2}^{\omega_{zA}})] = 0{,}2087;$$

$$\dot{c}_{y\,\mathrm{emp}}^{\omega_{zA}} = \dot{c}_{yA}^{\omega_{zA}}\,(b_A/x_c) + c_{yA}^{\dot{\bar{\alpha}}}\bar{x}_2 = -0{,}141; \quad \dot{m}_{z\,\mathrm{emp}}^{\omega_{zA}} = \dot{m}_{zA}^{\omega_{zA}}\,(b_A^3/x_c^3) +$$

$$+ \bar{x}_2\,(b_A^2/x_c^2)\,(m_{zA}^{\dot{\bar{\alpha}}} - \dot{c}_{yA}^{\omega_{zA}}) - \bar{x}_2^2\,(b_A/x_c)\,c_{yA}^{\dot{\bar{\alpha}}} = 0{,}01027.$$

Haciendo $\dot{c}_{yf}^{\omega_z} = 0{,}03134$; $\dot{m}_{zf}^{\omega_z} = -0{,}01468$, obtenemos para el vehículo volante $\dot{c}_y^{\omega_z} = -0{,}1497$; $\dot{m}_z^{\omega_z} = 0{,}01289$.

Examinemos las derivadas para la velocidad transónica ($M_\infty = 0{,}995$). Con arreglo a la teoría aerodinámica del sólido delgado, para $\lambda_{\mathrm{emp}}\,\mathrm{tg}\,\chi = 4$ y $\eta_{\mathrm{emp}} = \infty$, tenemos:

$$\beta c_y^\alpha/(\beta\lambda_{\mathrm{emp}}) = 1{,}57; \quad \beta m_{zA}^\alpha/(\beta\lambda_{\mathrm{emp}}) = -0{,}75; \quad \beta^3 c_{yA1}^{\dot{\bar{\alpha}}}/(\beta\lambda_{\mathrm{emp}}) = 0{,}74;$$

$$\beta^3 c_{yA2}^{\dot{\bar{\alpha}}}/(\beta\lambda_{\mathrm{emp}}) = -0{,}74; \quad \beta c_{yA}^{\omega_{zA}}/(\beta\lambda_{\mathrm{emp}}) = 1{,}49; \quad \beta m_{zA}^{\omega_{zA}}/(\beta\lambda_{\mathrm{emp}}) = -0{,}95;$$

$$\beta^3 \dot{c}_{yA1}^{\omega_{zA}}/(\beta\lambda_{\mathrm{emp}}) = 0{,}47; \quad \beta^3 \dot{c}_{yA2}^{\omega_{zA}}/(\beta\lambda_{\mathrm{emp}}) = -0{,}47; \quad \beta^3 m_{zA1}^{\dot{\bar{\alpha}}}/(\beta\lambda_{\mathrm{emp}}) = -0{,}42;$$

$$\beta^3 m_{zA2}^{\dot{\bar{\alpha}}}/(\beta\lambda_{\mathrm{emp}}) = 0{,}42; \quad \beta^3 \dot{m}_{zA1}^{\omega_{zA}}/(\beta\lambda_{\mathrm{emp}}) = -0{,}3; \quad \beta^3 \dot{m}_{zA2}^{\omega_{zA}}/(\beta\lambda_{\mathrm{emp}}) = 0{,}3.$$

Según estos valores determinamos las derivadas (para $\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2} = 0{,}09987$):

$$c_y^\alpha = [\beta c_y^\alpha/(\beta\lambda_{\mathrm{emp}})]\,(\beta\lambda_{\mathrm{emp}}/\beta) = 3{,}131; \quad m_{zA}^\alpha = [\beta m_{zA}^\alpha/(\beta\lambda_{\mathrm{emp}})]\,(\beta\lambda_{\mathrm{emp}}/\beta) = -1{,}496;$$

$$c_{yA}^{\dot{\bar{\alpha}}} = (\beta\lambda_{\mathrm{emp}}/\beta^3)\,\{[\beta^3 c_{yA1}^{\dot{\bar{\alpha}}}/(\beta\lambda_{\mathrm{emp}})] + M_\infty^2\,[\beta^3 c_{yA2}^{\dot{\bar{\alpha}}}/(\beta\lambda_{\mathrm{emp}})]\} = 1{,}476;$$

$$c_{yA}^{\omega_{zA}} = [\beta c_{yA}^{\omega_{zA}}/(\beta\lambda_{\mathrm{emp}})]\,(\beta\lambda_{\mathrm{emp}}/\beta) = 2{,}971;$$

$$m_{zA}^{\omega_{zA}} = [\beta m_{zA}^{\omega_{zA}}/(\beta\lambda_{\mathrm{emp}})]\,(\beta\lambda_{\mathrm{emp}}/\beta) = -1{,}894;$$

$$\dot{c}_{yA}^{\omega_{zA}} = (\beta\lambda_{\mathrm{emp}}/\beta^3)\,\{[\beta^3 c_{yA1}^{\dot{\bar{\alpha}}}/(\beta\lambda_{\mathrm{emp}})] + M_\infty^2\,[\beta^3 c_{yA2}^{\dot{\bar{\alpha}}}/(\beta\lambda_{\mathrm{emp}})]\} = 0{,}9372;$$

$$m_{zA}^{\dot{\bar{\alpha}}} = (\beta\lambda_{\mathrm{emp}}/\beta^3)\,\{[\beta^3 m_{zA1}^{\dot{\bar{\alpha}}}/(\beta\lambda_{\mathrm{emp}})] + M_\infty^2\,[\beta^3 m_{zA2}^{\dot{\bar{\alpha}}}/(\beta\lambda_{\mathrm{emp}})]\} = -0{,}8375;$$

$$\dot{m}_{zA}^{\omega_{zA}} = (\beta\lambda_{\mathrm{emp}}/\beta^3)\,\{[\beta^3 \dot{m}_{zA1}^{\omega_{zA}}/(\beta\lambda_{\mathrm{emp}})] + M_\infty^2\,[\beta^3 \dot{m}_{zA2}^{\omega_{zA}}/(\beta\lambda_{\mathrm{emp}}]\} = -0{,}5982.$$

Realizamos el recálculo para el nuevo centro de reducción $x_m = 12$ m:

$$c_{y\,\mathrm{emp}}^{\omega_z} = 1{,}207; \quad m_{z\,\mathrm{emp}}^{\omega_z} = -0{,}2326; \quad c_{y\,\mathrm{emp}}^{\dot{\bar{\alpha}}} = c_{yA}^{\dot{\bar{\alpha}}}\,(b_A/x_c) = 0{,}4194;$$

$$m_{z\,\mathrm{emp}}^{\dot{\bar{\alpha}}} = m_{zA}^{\dot{\bar{\alpha}}}\,(b_A^2/x_c^2) - c_{yA}^{\dot{\bar{\alpha}}}\bar{x}_2\,(b_A/x_c) = -0{,}1162;$$

$$\dot{c}_{yA}^{\omega_{zA}} = \dot{c}_{yA}^{\omega_{zA}}\,(b_A/x_c) + c_{yA}^{\dot{\bar{\alpha}}}\bar{x}_2 = 0{,}4374; \quad \dot{m}_{z\,\mathrm{emp}}^{\omega_z} = \dot{m}_{zA}^{\omega_{zA}}\,(b_A^3/x_c^3) +$$

$$+ \bar{x}_2\,(b_A^2/x_c^2)\,(m_{zA}^{\dot{\bar{\alpha}}} - \dot{c}_{yA}^{\omega_{zA}}) - \bar{x}_2^2\,(b_A/x_c)\,c_{yA}^{\dot{\bar{\alpha}}} = -0{,}03596.$$

Haciendo para el fuselaje aislado

$$c_{yf}^{\omega_z}=0,8;\quad c_{yf}^{\bar{\dot{\alpha}}}=2,466;\quad c_{yf}^{\bar{\dot{\alpha}}}=0,03134;\quad m_{zf}^{\omega_z}=-0,3512;$$

$$m_{zf}^{\bar{\dot{\alpha}}}=-0,32;\quad m_{zf}^{\dot{\omega}_z}=-0,01468,$$

obtenemos las derivadas sumarias:

$$c_y^{\omega_z}=1,639;\quad c_y^{\bar{\dot{\alpha}}}=0,6761;\quad c_y^{\dot{\omega}_z}=0,5813;\quad m_z^{\omega_z}=-0,3259;$$

$$m_z^{\bar{\dot{\alpha}}}=-0,1699;\quad m_z^{\dot{\omega}_z}=-0,04845.$$

Calculemos las derivadas del momento de balanceo. Según la teoría aerodinámica del sólido delgado, para $\beta\lambda_{emp}=1,196$ $(M_\infty=0,8)$ y $\eta_{emp}=\infty$, obtenemos:

$$\beta m_{x1}^{\omega_{x1}}=-0,102;\quad (\beta^2 m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}})_1=-0,05648;\quad (\beta^2 m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}})_2=0,06214,$$

por esto

$$m_{x1\,emp}^{\omega_{x1}}=(\beta m_{x1}^{\omega_{x1}})/\beta=-0,17;\ m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}}=(1/\beta^2)[\,(\beta^2 m_{x2}^{\dot{\omega}_{x1}})_1+M_\infty^2\,(\beta^2 m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}})_2]=-0,09475.$$

En estas expresiones el coeficiente m_{x1} se ha calculado conforme al área del empenaje (teniendo en cuenta la zona ventral) y la envergadura $l=2s_{m\ emp}$; ω_{x1} y $\dot{\omega}_{x1}$ se han determinado conforme a la mitad de la envergadura $[\omega_{x1}=$ $=\Omega_x l/(2V_\infty);\ \dot{\omega}_{x1}=\dot{\Omega}_x l^2/(4V_\infty^2)]$.

Para la combinación «fuselaje — empenaje de dos semialas»

$$(m_{x1}^{\omega_{x1}})_{emp\ 2}=(K_{emp}+K_f)\,m_{x1\,emp}^{\omega_{x1}}. \tag{11.68}$$

El empenaje vertical condiciona una derivada adicional que se puede considerar como dos veces menor que para un par de semialas horizontales:

$$\Delta m_{x1}^{\omega_{x1}}=0,5\,\varkappa\,(K_{emp}+K_f)\,m_{x1\,emp}^{\omega_{x1}}. \tag{11.69}$$

Aquí $\varkappa$ es un coeficiente que cuenta la reducción del momento de balanceo debido a la influencia de las semialas horizontales.

Así, pues, para la combinación "fuselaje-empenaje de tres semialas"

$$m_{x1}^{\omega_{x1}}=(K_{emp}+K_f)\,m_{x1\,emp}^{\omega_{x1}}\,(1+0,5\varkappa). \tag{11,69'}$$

Ya que $r_m=r_{máx.\,t}/s_m=0,75/5=0,15$ y $\varkappa=1-e^{-4,5\,r_m}=0,4908$, $m_{x1}^{\omega_{x1}}=$ $=-0,2806$.

De modo análogo, $m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}}=(K_{emp}+K_f)\,m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}}\,(1+0,5\varkappa)=-0,1564$.

En caso de $M_\infty=0,995$, según la teoría aerodinámica del sólido delgado, para $\eta_{emp}=\infty$ y $\lambda_{emp}\,\mathrm{tg}\,\chi=4$, hallamos $\beta m_{x1}^{\omega_{x1}}/(\beta\lambda_{emp})=-0,099$; $(\beta^2 m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}})_1=$

$= -0{,}071$; $(\beta^2 m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}})_2 = 0{,}071$ y determinamos

$$m_{x1\,\text{emp}}^{\omega_{x1}} = [(\beta m_{x1}^{\omega_{x1}})/(\beta\lambda_{\text{emp}})]\,(\beta\lambda_{\text{emp}}/\beta) = -0{,}1974;$$

$$m_{x1\,\text{emp}}^{\dot{\omega}_{x1}} = (1/\beta^2)\,[(\beta^2 m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}})_1 + M_\infty^2\,(\beta^2 m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}})_2] = -0{,}071;$$

$$m_{x1}^{\omega_{x1}} = (K_{\text{emp}} + K_f)\, m_{x1\,\text{emp}}^{\omega_{x1}}\,(1 + 0{,}5\varkappa) = -0{,}3259;$$

$$m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}} = (K_{\text{emp}} + K_f)\, m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}}\,(1 + 0{,}5\varkappa) = -0{,}1172.$$

Analicemos el movimiento de guiñada. Considerando que las fuerzas transversales se crean sólo por la semiala superior, obtenemos

$$c_z^{\omega_y} = -0{,}5\,c_y^{\omega_z};\quad m_y^{\omega_y} = -0{,}5\,m_z^{\omega_z}. \qquad (11.70)$$

Conforme a los datos aducidos, tenemos:

para $M_\infty = 0{,}8$ — $c_z^{\omega_y} = -0{,}6185$; $m_y^{\omega_y} = 0{,}1814$;
para $M_\infty = 0{,}995$ — $c_y^{\omega_y} = -0{,}8195$; $m_y^{\omega_y} = 0{,}2356$;
para $M_\infty = 1{,}5$ — $c_y^{\omega_z} = -0{,}518$; $m_y^{\omega_y} = 0{,}3114$.

Durante la rotación del vehículo volante alrededor del eje longitudinal el empenaje horizontal puede provocar un momento adicional de guiñada (momento espiral). El coeficiente de este momento con $M_\infty < 1$

$$m_y^{\omega_x} = 0{,}5\,[\Delta m_1\alpha + \Delta m_2\,(c_{x\,\text{per. inc}}^{\alpha}/c_{y\,\text{emp. inc}}^{\alpha})]\,k_1 c_{y\,\text{emp}}^{\alpha}\,(K_{\text{emp}} + K_f)\,\bar{l}_{\text{emp}}, \qquad (11.71)$$

donde $\omega_x = \Omega_x x_c/V_\infty$; $\bar{l}_{\text{emp}} = 2s_m/x_c$.

En correspondencia con la teoría aerodinámica del sólido delgado, para los valores de $\lambda_{\text{emp}} = 1{,}994$, $\chi = \operatorname{arctg}(4/1{,}994) = 63{,}5°$, hallamos el coeficiente $\Delta m_1 = -0{,}42$, mientras que según] el alargamiento $\lambda_{\text{emp}} = 1{,}994$, el valor de $\Delta m_2 = 30$. A continuación, para $\eta_{\text{emp}} = \infty$; $\lambda_{\text{emp}}\operatorname{tg}\chi = 4$ y $\beta\lambda_{\text{emp}} = 1{,}994$ ($M_\infty = 0$) determinamos $c_{y\,\text{emp.inc}} = 2{,}343$ y, con $M_\infty = 0{,}8$, calculamos

$$c_{y\,\text{emp}}^{\alpha} = c_{y\,\text{emp.inc}}^{\alpha}/\beta = c_{y\,\text{emp.inc}}^{\alpha}/\sqrt{1 - M_\infty^2} = 3{,}905.$$

Tomemos el coeficiente de la resistencia (al avance) del perfil para un fluido incompresible

$$c_{x\,\text{per.inc}} = 1{,}86 c_{xf} = 1{,}86\cdot 0{,}64/\mathrm{Re}^{1/2}. \qquad (11.72)$$

Al calcular el número Re según la viscosidad cinemática $\nu = 14{,}4\cdot 10^{-6}$ m²/s, la cuerda $b_A = 5{,}683$ y la velocidad $V_\infty = a_\infty M_\infty = 340\cdot 0{,}8 = 272$ m/s, hallamos que $c_{x\,\text{per.inc}} = 1{,}149\cdot 10^{-4}$ y la razón de las derivadas $c_{x\,\text{per.inc}}^{\alpha}/c_{y\,\text{emp.inc}}^{\alpha} = (1/\alpha)\,c_{x\,\text{per.inc}}^{\alpha}\,\alpha/c_{y\,\text{emp.inc}}^{\alpha} = (1/\alpha)\ 4{,}904\cdot 10^{-5}$.

Haciendo $k_1 \approx 1$ (no hay remanso del flujo en el empenaje), hallamos $m_y^{\omega_x} = 0{,}5435\,(3{,}503\cdot 10^{-3}/\alpha^2 - 1)\,\alpha$. En particular, para $\alpha = 0{,}1$, la derivada $m_y^{\omega_x} = 0{,}03531$.

A velocidades supersónicas

$$m_{y\,\text{emp}}^{\omega_x} = 0{,}5\,m_y^{\omega_{x1}}\,(K_{\text{emp}} + K_f)\,\bar{l}_{\text{emp}}^2, \qquad (11.73)$$

donde para el empenaje horizontal y el punto de reducción x_m

$$m_y^{\omega_{x1}} = m_{yc}^{\omega_{x1}} - c_z^{\omega_{x1}}\,(x_{\text{c.g}} - x_m)/l_{\text{emp}}. \qquad (11.74)$$

De acuerdo con la teoría linealizada

$$c_z^{\omega_{x1}} = 4\pi k^3 \{3E[(k^3+1)E-(1-k^2)K]\}^{-1}; \quad (11.75)$$

$$m_{y\,c}^{\omega_{x1}} = -2\pi k^3 [\lambda_{emp}/16 + 1/(9A)] \{E[k^2+1)E-(1-k^2)K]\}^{-1}, \quad (11.76)$$

donde K y E son integrales elípticas de primero y segundo género con el parámetro $k=[1-(0,25\,\alpha'\lambda_{emp})^2]^{1/2}$; $\omega_{x1}=\Omega_x l_{emp}/(2V_\infty)$; $\omega_x=\Omega_x x_c/V_\infty$; $m_{y\,emp}$ es un coeficiente calculado por la longitud x_c; el momento de guiñada se calcula con relación al centro de gravedad dèl área del empenaje.

Las dependencias aducidas determinan la fuerza transversal adicional y el momento de guiñada a cuenta de las fuerzas de succión en los bordes de ataque subsónicos (con $\alpha'\lambda_{emp} \leqslant 4$). Cuando $\alpha'\lambda_{emp} > 4$ los bordes son supersónicos, por lo que no surgen las fuerzas de succión y el momento de guiñada.

En el problema que examinamos los bordes del empenaje son subsónicos, ya que el ángulo de Mach $\mu_\infty = \arcsen(1/M_\infty) = 41,8°$ es mayor que $\pi/2-\chi = \pi/2-63,5=26,5°$. Para nuestro caso $k=0,8303$; a continuación, según $\alpha = \arcsen 0,8303 = 56,13°$, en las tablas de las integrales elípticas hallamos $K=2,06$; $E=1,248$ y calculamos $c_z^{\omega_{x1}}=1,315$; $m_{yc}^{\omega_{x1}}=-0,3539$.

El centro de gravedad del área del empenaje se dispone a una distancia $(2/3)b_0$ del vértice. Por consiguiente, $x_{c.g}=x_c-(1/3)\,b_0=16,66$ m; $(x_{c.g}-x_m)/l_{emp} = 0,4657$; $m_y^{\omega_{x1}}=-0,9663$; $m_{y\,emp}^{\omega_x}=-0,1601$.

Habiendo una semiala (superior o inferior) también se forma un momento espiral, condicionado por la rotación alrededor del eje longitudinal. La derivada del coeficiente de dicho momento, calculado según el área de dos semialas S_{emp} (teniendo en cuenta la zona ventral) y la longitud del aparato x_c

$$m_{y\,emp}^{\omega_x} = -0,5\,(K_{emp}+K_f)\,c_{y\,emp}^{\alpha}\bar{y}_f\,(\bar{x}_p)_{emp}\sqrt{k_1}\quad (\omega_x=\Omega_x x_c/V_\infty). \quad (11.77)$$

Para $M_\infty = 1,5$ determinamos

$$c_{y\,emp}^{\alpha} = 2\pi\,\mathrm{ctg}\,\chi/E = 2,509; \quad \bar{y}_f = [1/3)(s_m - r_{máx.t}) + r_{máx.t}]/x_c = 0,1083;$$

$$(\bar{x}_p)_{emp} = (x_c - 0,5b_A - x_m)/x_c = 0,2579.$$

Haciendo $k_1 \approx 1$, obtenemos $m_{y\,emp}^{\omega_x} = -0,04644$.

La derivada sumaria $m_y^{\omega_x} = -0,1601 - 0,04644 = -0,2065$.

La derivada espiral, condicionada por el empenaje horizontal,

$$m_x^{\omega_y} = m_{x\alpha}^{\omega_y} + m_{x\beta}^{\omega_y} = m_{x\alpha}^{\omega_y} + m_x^{\beta}\,(\bar{x}_{c.g})_{emp}, \quad (11.78)$$

donde (para $M_\infty = 1,5$)

$$m_{x\alpha}^{\omega_y} = -0,5\,\alpha c_{y\,emp}^{\alpha} K_{emp}\sqrt{k_1}\,(\bar{z}_{c.g})_{emp}\,\bar{l}_{emp}[r_m + (1-r_m)\,(\bar{z}_p)_{\varphi\,emp\,(f)}]; \quad (11.79)$$

$$(\bar{z}_{c.g})_{emp} = [(1/3)(s_m - r_{máx.t}) + r_{mát.t}]/l_{emp} = 0,2167;$$

$(\bar{z}_p)_{\varphi\,emp\,(f)} = 0,524$ (para $r_m = 0,15$, según la teoría aerodinámica del sólido delgado); $m_{x\alpha}^{\omega_y} = -0,09064\,\alpha$.

La otra derivada

$$m_x^{\beta} = m_{x\chi}^{\beta} + m_{x\,s.v}^{\beta}. \quad (11.80)$$

Aquí,

$$m_{x\chi}^{\beta} = -0,5\,\Delta c_{y\,emp}^{\beta} K_{emp}\,[r_m + (1-r_m)\,(\bar{z}_p)_{\varphi\,emp\,(f)}] \quad (11.81)$$

(la semiala horizontal);

$$m_{x\,\text{s.v}}^{\beta} = 0{,}25\varkappa\, \Delta c_{y\,\text{emp}}^{\beta} K_{\text{emp}}\, [r_m + (1 - r_m)(\bar{z}_{\text{p}})_{\varphi\,\text{emp}\,(\text{f})}] \qquad (11.82)$$

(la semiala vertical);

$$\Delta c_{y\,\text{emp}}^{\beta} = 2\alpha\, \text{tg}\, \chi_{1/2}\, c_{y\,\text{emp}}^{\alpha}\, [1 - B_1 + 0{,}5\, B_2 (\text{tg}^{-2} \chi_{1/2} - 1]; \qquad (11.83)$$

$$\text{tg}\, \chi_{1/2} = \text{tg}\, \chi/2 = 1{,}003; \quad \lambda_{\text{emp}}\, \text{tg}\, \chi_{1/2} = 2{,}0; \quad \lambda_{\text{emp}} \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 2{,}229.$$

Haciendo uso de la teoría aerodinámica del sólido delgado, hallamos $B_1 = 0{,}36$; $B_2 = 0{,}17$ y determinamos

$$\Delta c_{y\,\text{emp}}^{\beta} = 3{,}224\,\alpha; \quad m_{x\chi}^{\beta} = -1{,}073\,\alpha; \quad m_{x\,\text{s.v}}^{\beta} = 0{,}2634\,\alpha;$$

$$m_x^{\omega_y} = m_{x\alpha}^{\omega_y} + (m_{x\chi}^{\beta} + m_{x\,\text{s.v}}^{\beta})(\bar{x}_{\text{c.g}})_{\text{emp}} = -0{,}2795\,\alpha.$$

El empenaje vertical crea asimismo un momento espiral:

$$m_{y\beta}^{\omega_y} = -0{,}25\, c_{y\,\text{emp}}^{\alpha} K_{\text{emp}} \sqrt{k_1}\, (\bar{x}_{\text{c.g}})_{\text{emp}}\, [r_m + (1 - r_m)(\bar{z}_{\text{p}})_{\varphi\,\text{emp}\,(\text{f})}]. \qquad (11.84)$$

El coeficiente $m_{x\beta}$ está calculado por el área de todo el empenaje (contando la zona ventral), la envergadura $l_{\text{emp}} = 2s_m$ y su derivada $m_{x\beta}^{\omega_y} = -0{,}0974$. Tomando en consideración este valor, la derivada sumaria $m_{x\beta}^{\omega_y} = -0{,}2793\alpha - 0{,}0974$.

11.76. Las derivadas para un empenaje de tres semialas se determinan según (9.837) — (9.842), (9.844) y (9. 845):

las derivadas estáticas

$$c_y^{\alpha} = c_z^{\beta} = -2\bar{A}; \quad c_y^{\beta} = -c_z^{\alpha} = -4\omega_x B; \qquad (11.85)$$

$$m_x^{\alpha} = m_x^{\beta} = 0; \qquad (11.86)$$

$$m_y^{\alpha} = m_z^{\beta} = 4\omega_x C; \quad m_y^{\beta} = -m_z^{\alpha} = -2\,(B + \bar{A}\bar{x}_{\text{s.b}}); \qquad (11.87)$$

las derivadas de rotación

$$c_y^{\omega_x} = -4\beta B - 8\,\omega_y C; \quad c_y^{\omega_y} = c_z^{\omega_z} = -8\omega_x C; \qquad (11.88)$$

$$c_y^{\omega_z} = -c_z^{\omega_y} = 4\bar{A}\bar{x}_{\text{s.b}}; \quad c_z^{\omega_x} = 4\alpha\, B - 8\,\omega_z C: \qquad (11.89)$$

$$m_x^{\omega_y} = m_x^{\omega_z} = 0; \qquad (11.90)$$

$$\left.\begin{aligned} &m_y^{\omega_x} = 4\alpha C - 8\omega_z D; \quad m_y^{\omega_y} = -4\,(\bar{A}\bar{x}_{\text{s.b}}^2 + C);\\ &m_y^{\omega_z} = -m_z^{\omega_y} = -8\omega_x D; \end{aligned}\right\} \qquad (11.91)$$

$$m_z^{\omega_x} = -4\beta C + 8\omega_y D; \quad m_z^{\omega_z} = -4\,(\bar{A}\bar{x}_{\text{s.b}}^2 + C); \qquad (11.92)$$

las derivadas de las aceleraciones

$$c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = c_z^{\dot{\bar{\beta}}} = 4B; \quad c_y^{\dot{\omega}_z} = -c_z^{\dot{\omega}_y} = 4C; \qquad (11.93)$$

$$c_y^{\dot{\bar{\beta}}} = c_y^{\dot{\omega}_x} = c_y^{\dot{\omega}_y} = c_z^{\dot{\bar{\alpha}}} = c_z^{\dot{\omega}_x} = c_z^{\dot{\omega}_z} = 0; \qquad (11.94)$$

$$m_y^{\dot{\bar{\beta}}} = -m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} = -4\,C; \quad m_y^{\dot{\omega}_y} = m_z^{\dot{\omega}_z} = -4D; \qquad (11.95)$$

$$m_x^{\dot{\bar{\alpha}}} = m_x^{\dot{\bar{\beta}}} = m_x^{\dot{\omega}_y} = m_x^{\dot{\omega}_z} = m_y^{\dot{\omega}_x} = m_y^{\dot{\omega}_z} = m_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = m_z^{\dot{\bar{\beta}}} = m_z^{\dot{\omega}_x} = m_z^{\dot{\omega}_y} = 0. \qquad (11.96)$$

En estas expresiones

$$B=\int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}_{pun}} A\,d\bar{x};\quad C=\int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}_{pun}} A\bar{x}\,d\bar{x};\quad D=\int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}_{pun}} A\bar{x}^2\,d\bar{x}; \qquad (11.97)$$

$$A=\lambda/(\rho_\infty S_{emp})=(2\pi/S_{emp})\,s^2\{[(1+r_s^3)/2]^{4/3}-r_s^2/2\} \qquad (11.98)$$

(para el sector aleteado);

$$A=\lambda/(\rho_\infty S_{emp})=\pi r^2/S_{emp} \qquad (11.99)$$

(para el sector del fuselaje sin empenaje);

$$\bar{A}=(2\pi/S_{emp})\,s_m^2\,\{[(1+r_m^3)/2]^{4/3}-r_m^2/2\} \qquad (11.100)$$

(para la sección de base).

Como $s_m=4$ m; $S_{emp}=b_{emp}\,(s_m-r_{máx.t})=15$ m²; $r_m=r_{máx.t}/s_m=1/4$, $\bar{A}=2{,}504$.

De acuerdo con esto $c_y^\alpha=c_z^\beta=-0{,}1216$.

A continuación, determinamos

$$B=\int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}_{pun}} A\,d\bar{x}=\underbrace{\int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}''} A\,d\bar{x}}_{I_1}+\underbrace{\int_{\bar{x}''}^{\bar{x}'} A\,d\bar{x}}_{I_2}+\underbrace{\int_{\bar{x}'}^{\bar{x}_{pun}} A\,d\bar{x}}_{I_3}=I_1+I_2+I_3.$$

La suma de las dos últimas integrales es igual al volumen relativo del fuselaje en el sector x_{pun}:

$$I_2+I_3=(\pi/S_{emp})\,(\bar{x}'-\bar{x}'')+W_c/(S_{emp}l)=W/(S_{emp}x_c)=$$
$$=[\pi r_{máx.t}^2\,(x'-x'')+(1/3)\,\pi r_{máx.t}^2 x_{máx.t}]/(S_{emp}x_c)=0{,}1189,$$

mientras que la integral $I_1=(2\pi/S_{emp})\int_{-13/27}^{-8/27} s^2\{[(1+1/s^3)/2]^{4/3}-(1/s^2)/2\}\,d\bar{x}$.

En la fig. 11.16 vemos que $s=r_{máx.t}-(s_m-r_{máx.t})\,(x-x'')/b_{emp}=1-(3/5)\,(\bar{x}\cdot 27+8)$; $d\bar{x}=-(5/81)\,ds$. Teniendo esto en cuenta realizamos la integración numérica: $I_1=0{,}239$. Así, pues, $B=I_1+I_2+I_3=-0{,}095$.

Ahora, calculamos

$$C=\int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}_{pun}} A\bar{x}\,d\bar{x}=\underbrace{\int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}''} A\bar{x}\,d\bar{x}}_{I_1'}+\underbrace{\int_{\bar{x}''}^{\bar{x}'} A\bar{x}\,d\bar{x}}_{I_2'}+\underbrace{\int_{\bar{x}'}^{\bar{x}_{pun}} A\bar{x}\,d\bar{x}}_{I_3'}=I_1'+I_2'+I_3',$$

donde

$$I_2'=(\pi/15)\int_{-8/27}^{4/27}\bar{x}\,d\bar{x}=-0{,}006892;\quad I_3'=(\pi/S_{emp})\int_{\bar{x}'}^{\bar{x}_{pun}} r^2\bar{x}\,d\bar{x}.$$

En la fig. 11.16 vemos que $r=(1/10)\,(14-x)$; por lo tanto, $\bar{x}=x/x_c=(1/27)\,(14-10r)$, $d\bar{x}=-(10/27)\,dr$ e $I_3'=0{,}006222$.

La integral

$$I'_1 = (2\pi/S_{\text{emp}}) \int_{-13/27}^{-8/27} s^2 \{[(1+1/s^3)/2]^{4/3} - (1/s^2)/2\} \bar{x}\, d\bar{x}.$$

Con arreglo a los valores de $\bar{x} = [(-5/3)(s-1) - 8](1/27)$ y $d\bar{x} = (-5/81)\, ds$, mediante la integracíon numérica, hallamos $I'_1 = 0{,}0091$. Sumando, obtenemos $C = 0{,}0084$.

Determinamos

$$D = \underbrace{\int_{\bar{x}_{\text{s.b}}}^{\bar{x}_{\text{pun}}} A\bar{x}^2\, d\bar{x} + \int_{\bar{x}_{\text{s.b}}}^{\bar{x}''} A\bar{x}^2\, d\bar{x}}_{I''_1} + \underbrace{\int_{\bar{x}''}^{\bar{x}'} A\bar{x}^2\, d\bar{x}}_{I''_2} + \underbrace{\int_{\bar{x}'}^{\bar{x}_{\text{pun}}} A\bar{x}^2\, d\bar{x}}_{I''_3} = I''_1 + I''_2 + I''_3.$$

Aquí,

$$I''_1 = (2\pi/S_{\text{emp}}) \int_{-13/27}^{-8/27} s^2 \{[(1+1/s^3)/2]^{4/3} - (1/s^2)/2\} \bar{x}^2\, d\bar{x} = 0{,}0035;$$

$$I''_2 = (\pi r^2_{\text{máx.t}}/S_{\text{emp}}) \int_{-8/27}^{4/27} \bar{x}^2\, d\bar{x} = 0{,}002042;$$

$$I''_3 = (\pi/S_{\text{emp}}) \int_{4/27}^{14/27} r^2 \bar{x}^2\, d\bar{x} = -(\pi/15)\,(1/27)^2\,(10/27) \int_{1}^{0} r^2 (14-10r)^2\, dr = 0{,}001633.$$

Como resultado hallamos $D = 0{,}0072$. Con estos datos calculamos:
las derivadas estáticas

$$c_y^\beta = -c_z^\alpha = -4\omega_x B = -1{,}432\,\omega_x; \quad m_y^\alpha = m_z^\beta = 4\omega_x C = -0{,}4048\,\omega_x;$$

$$m_y^\beta = -m_z^\alpha = -2\,(B + \overline{A}\bar{x}_{\text{s.b}}) = 3{,}127;$$

las derivadas de rotación

$$c_y^{\omega_x} = -4\beta B - 8\omega_y C = -1{,}432\beta + 0{,}8096\,\omega_y;$$

$$c_y^{\omega_y} = c_z^{\omega_z} = -8\omega_x C = 0{,}8096\,\omega_x;$$

$$c_y^{\omega_z} = -c_z^{\omega_y} = 4\overline{A\bar{x}}_{\text{s.b}} = -4{,}823;$$

$$c_z^{\omega_x} = 4\alpha B - 8\omega_z C = 1{,}432\,\alpha + 0{,}8096\,\omega_z;$$

$$m_y^{\omega_x} = 4\alpha C - 8\omega_z D = -0{,}4048\alpha - 0{,}371\omega_z;$$

$$m_y^{\omega_y} = -4\,(\overline{A\bar{x}^2_{\text{s.b}}} + C) = -1{,}917;$$

$$m_y^{\omega_z} = -m_z^{\omega_y} = -8\omega_x D = -0{,}371\omega_x;$$

$$m_z^{\omega_x} = 4\beta C + 8\omega_y D = -0{,}4048\beta + 0{,}371\omega_y;$$

$$m_z^{\omega_z} = -4\,(\overline{A\bar{x}^2_{\text{s.b}}} + C) = -1{,}917;$$

las derivadas de las aceleraciones

$$c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = c_z^{\dot{\bar{\beta}}} = -4B = -1{,}432; \quad c_y^{\dot{\omega}_z} = -c_z^{\dot{\omega}_y} = 4C(-0{,}1012) = -0{,}4048;$$

$$m_y^{\dot{\bar{\beta}}} = -m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} = -4C = 0{,}4048; \quad m_y^{\dot{\omega}_y} = m_z^{\dot{\omega}_z} = -4D = -0{,}1855.$$

11.77. Durante el movimiento de cabeceo la coordenada del centro de presión, condicionado por el ángulo de ataque α,

$$(\Delta\bar{x}_p)_\alpha = (\Delta x_p/x_c)_\alpha = -m_z^\alpha/c_y^\alpha = 2(B+\overline{A}x_{s.b})/(2\overline{A}) = -0{,}3384.$$

Conforme a este valor, la distancia desde el centro de masas hasta el de presión $x_p = -0{,}3384 \cdot 27 = -9{,}137$ m (el centro de presión se encuentra tras el centro de masas, o sea, la combinación que analizamos tiene estabilidad estática).

Para el movimiento de guiñada

$$(\Delta\bar{x}_p)_\beta = (\Delta x_p/x_c)_\beta = m_y^\beta/c_z^\beta = 2(B+\overline{A}x_{s.b})/(2\overline{A}) = -0{,}3384,$$

es decir, obtenemos el mismo resultado que para el movimiento de cabeceo.

Para el centro de presión relacionado con ω_z

$$(\Delta\bar{x}_p)_{\omega_z} = (\Delta x_p/x_c)_{\omega_z} = -m_z^{\omega_z}/c_y^{\omega_z} = 4(\overline{A}x_{s.b}^2 + C)/(4\overline{A}x_{s.b}) = -0{,}3975.$$

Cuando el movimiento es de guiñada

$$(\Delta\bar{x}_p)_{\omega_y} = (\Delta x_p/x_c)_{\omega_y} = m_y^{\omega_y}/c_z^{\omega_y} = -4(\overline{A}x_{s.b}^2 + C)/(-4\overline{A}x_{s.b}) = -0{,}3975.$$

Así, pues, al girar la combinación tanto en sentido longitudinal, como en el transversal ($\omega_z \neq 0$; $\omega_y \neq 0$) los centros de presión se disponen tras el centro de masas a igual distancia y, por consiguiente, se observa el amortiguamiento del cabeceo y la guiñada.

Al variar con el tiempo los ángulos α y β ($\dot{\bar{\alpha}} \neq 0$, $\dot{\bar{\beta}} \neq 0$)

$$(\Delta\bar{x}_p)_{\dot{\bar{\alpha}}} = (\Delta x_p/x_c)_{\dot{\bar{\alpha}}} = m_z^{\dot{\bar{\alpha}}}/c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = -4C/(-4B) = -0{,}2827;$$

$$(\Delta\bar{x}_p)_{\dot{\bar{\beta}}} = (\Delta x_p/x_c)_{\dot{\bar{\beta}}} = m_y^{\dot{\bar{\beta}}}/c_z^{\dot{\bar{\beta}}} = -4C/(4B) = -0{,}2827.$$

De este modo, lo mismo que antes, en los casos que examinamos los centros de presión se sitúan tras el centro de masas, es decir, se crea el amortiguamiento de los movimientos de cabeceo y de guiñada.

En el caso $\dot{\omega}_z \neq 0$, $\dot{\omega}_y \neq 0$

$$(\Delta\bar{x}_p)_{\dot{\omega}_z} = (\Delta x_p/x_c)_{\dot{\omega}_z} = -m_z^{\dot{\omega}_z}/c_y^{\dot{\omega}_z} = -4D/(4C) = -0.4583;$$

$$(\Delta\bar{x}_p)_{\dot{\omega}_y} = -(\Delta x_p/x_c)_{\dot{\omega}_y} = m_z^{\dot{\omega}_y}/c_z^{\dot{\omega}_y} = -4D/(-4C) = -0{,}4583.$$

También en este caso, los centros de presión se encuentran tras el centro de masas, es decir, los movimientos que consideramos se acompañan del amortiguamiento.

Examinemos los efectos de Magnus, condicionados por la rotación del vehículo volante a velocidad angular Ω_x, al estar en movimiento, bajo ángulos de ataque y

deslizamiento, para el que las derivadas

$$c_y^{\beta\omega_x} = -c_z^{\alpha\omega_x} = -4B; \quad m_y^{\alpha\omega_x} = m_z^{\beta\omega_x} = 4C. \qquad (11.101)$$

Los correspondientes coeficientes del centro de presión

$$(\Delta\bar{x}_p)_{\beta\omega_x} = (\Delta x_p/x_c)_{\beta\omega_x} = -m_z^{\beta\omega_x}/c_y^{\alpha\omega_x} = -4C/(-4B) = -0{,}2827;$$
$$(\Delta\bar{x}_p)_{\alpha\omega_x} = (\Delta x_p/x_c)_{\alpha\omega_x} = m_y^{\alpha\omega_x}/c_z^{\alpha\omega_x} = 4C/(4B) = 0{,}2827.$$

Como vemos, las fuerzas de Magnus también contribuyen al amortiguamiento con los movimientos de cabeceo y de guiñada.

Las fuerzas y momentos giroscópicos surgen durante la rotación simultánea del vehículo volante alrededor de ciertos ejes y están ligados con las derivadas mixtas:

$$\left.\begin{aligned} &c_y^{\omega_x\omega_y} = c_z^{\omega_z\omega_y} = c_z^{\omega_x\omega_z} = -8C; \\ &m_y^{\omega_x\omega_z} = -m_z^{\omega_y\omega_x} = -8D; \quad m_z^{\omega_z\omega_y} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11.102)$$

Para los coeficientes del centro de presión

$$(\Delta\bar{x}_p)_{\omega_x\omega_y} = -m_z^{\omega_x\omega_y}/c_y^{\omega_x\omega_y} = (8D)/(-8C) = -0{,}4583;$$
$$(\Delta\bar{x}_p)_{\omega_x\omega_z} = m_y^{\omega_x\omega_z}/c_z^{\omega_x\omega_z} = (-8D)/(-8C) = -0{,}4583;$$
$$(\Delta\bar{x}_p)_{\omega_z\omega_y} = -m_z^{\omega_z\omega_y}/c_y^{\omega_z\omega_y} = 0/(-8C) = 0.$$

Como vemos, para las derivadas respecto a $\omega_x\omega_y$ o bien $\omega_x\omega_z$ los centros de presión se disponen tras el centro de masas, en tanto que para la derivada respecto a $\omega_z\omega_y$, los dos centros se hallan en un mismo punto.

11.78. De acuerdo con el método de las masas asociadas, las derivadas de estabilidad en caso de balanceo

$$m_x^{\omega_x} = -4\bar{A}_{33}; \quad m_x^{\dot{\omega}_x} = -4B_{33}, \qquad (11.103)$$

donde

$$\omega_x = \Omega_x x_c/(2V_\infty); \quad \dot{\omega}_x = \dot{\Omega}_x x_c^2/(2V_\infty^2); \quad \bar{A}_{33} = \bar{\lambda}_{33}/(\rho_\infty x_c^2 S_{emp}); \qquad (11.104)$$

$\bar{\lambda}_{33}$ es el coeficiente de las masas asociadas reducidas a la sección de base.

En particular, para el empenaje de tres semialas $(\bar{\lambda}_{33})_{r=0} = 0{,}533\,\rho_\infty s_m^4$.

La influencia del grosor del fuselaje sobre $\bar{\lambda}_{33}$ se puede tener en cuenta con ayuda de cierto coeficiente k_r. Con $r/s_m = 1/4 = 0{,}25$ (para un empenaje de cuatro semialas) hallamos $k_r = 1{,}075$ y

$$\bar{\lambda}_{33} = 0{,}533\rho_\infty s_m^4 k_r = 0{,}573\rho_\infty s_m^4.$$

De modo análogo, para un empenaje de tres alas

$$\bar{\lambda}_{33} = 0{,}533\rho_\infty s_m^4 k_r = 0{,}573\rho_\infty s_m^4.$$

Así, pues, $\bar{A}_{33} = \bar{\lambda}_{33}/(\rho_\infty x_c^2 S_{emp}) = 0{,}01341$ y la derivada $m_x^{\omega_x} = -4\bar{A}_{33} = -0{,}05364$.

Determinamos

$$B_{33}=\int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}''} A_{33}\,d\bar{x}=[0{,}573\rho_\infty/(\rho_\infty x_c^2 S_{emp})]\int_{-13/27}^{-8/27} s^4\,d\bar{x}.$$

Como $s=(s_m-r_{máx.\,t})(x-x'')/b_{emp}=1-(3/5)(27\bar{x}+8)$, $d\bar{x}=-(5/81)\,ds$. Por consiguiente, $B_{33}=-(0{,}573\cdot 5/27^2\cdot 15\cdot 81)\int_4^1 s^4\,ds=0{,}0006618$ y la derivada $m_x^{\dot{\omega}_x}=-4B_{33}=-0{,}002647$.

11.79. Para una combinación de tres semialas en movimiento sin balanceo, las derivadas se determinan con las siguientes dependencias:

movimiento de cabeceo

$$c_y^{\alpha}=-2\bar{A}_{22};\quad m_z^{\alpha}=2(B_{22}+\bar{A}_{22}\bar{x}_{s.b});\tag{11.105}$$

$$c_y^{\omega_z}=4\bar{A}_{22}\bar{x}_{s.b};\quad m_z^{\omega_z}=-4(\bar{A}_{22}\bar{x}_{s.b}^2+C_{22});\tag{11.106}$$

$$c_y^{\dot{\bar{\alpha}}}=-4B_{22};\quad c_y^{\dot{\omega}_z}=4C_{22};\tag{11.107}$$

$$m_z^{\dot{\bar{\alpha}}}=4C_{22};\quad m_z^{\dot{\omega}_z}=-4D_{22};\tag{11.108}$$

movimiento de guiñada

$$c_z^{\beta}=-2\bar{A}_{11};\quad m_y^{\beta}=-2(B_{11}+\bar{A}_{11}\bar{x}_{s.b});\tag{11.109}$$

$$c_z^{\omega_y}=-4\bar{A}_{11}\bar{x}_{s.b};\quad m_y^{\omega_y}=-4(\bar{A}_{11}\bar{x}_{s.b}^2+C_{11});\tag{11.110}$$

$$c_z^{\dot{\bar{\beta}}}=-4B_{11};\quad c_z^{\dot{\omega}_y}=-4C_{11};\tag{11.111}$$

$$m_y^{\dot{\bar{\beta}}}=-4C_{11};\quad m_y^{\dot{\omega}_y}=-4D_{11}.\tag{11.112}$$

En estas dependencias

$$\left.\begin{aligned}&B_{11}=\int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}_{pun}} A_{11}\,d\bar{x};\quad B_{22}=\int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}_{pun}} A_{22}\,d\bar{x};\quad C_{11}=\int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}_{pun}} A_{11}\bar{x}\,d\bar{x};\\&C_{22}=\int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}_{pun}} A_{22}\bar{x}\,d\bar{x};\quad D_{11}=\int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}_{pun}} A_{11}\bar{x}^2\,d\bar{x};\quad D_{22}=\int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}_{pun}} A_{22}\bar{x}^2\,d\bar{x};\end{aligned}\right\}\tag{11.113}$$

$$\omega_y=\Omega_y x_c/(2V_\infty);\quad \omega_z=\Omega_z x_c/(2V_\infty);\quad \dot{\bar{\alpha}}=\dot{\alpha}x_c/(2V_\infty);\quad \dot{\bar{\beta}}=\dot{\beta}x_c/(2V_\infty);$$

$$\dot{\omega}_y=\dot{\Omega}_y x_c^2/(2V_\infty^2);\quad \dot{\omega}_z=\dot{\Omega}_z x_c^2/(2V_\infty^2);$$

$$\bar{x}=x/x_c;\quad \bar{x}_{s.b}=x_{s.b}/x_c;\quad \bar{x}_{pun}=x_{pun}/x_c.$$

Los coeficientes de las masas asociadas

$$A_{11}=\lambda_{11}/(\rho_\infty S_{emp});\quad A_{22}=\lambda_{22}/(\rho_\infty S_{emp}).\tag{11.114}$$

Para la sección de base

$$\bar{A}_{11} = (\lambda_{11})_{s.b}/(\rho_\infty S_{emp}); \quad \bar{A}_{22} = (\lambda_{22})_{s.b}/(\rho_\infty S_{emp}). \tag{11.115}$$

Se ha establecido que

$$\lambda_{11} = 0{,}5\pi\rho_\infty s^2 (1 + r_s^2) \{[2 (1 + r_s^4)]^{1/2} - 0{,}5 (1 + r_s^2)\};$$
$$\lambda_{22} = \pi\rho_\infty s^2 (1 + r_s^2 + r_s^4) \quad (r_s = r/s).$$

Con arreglo a esto

$$A_{11} = (0{,}5\pi/S_{emp}) s^2 (1 + r_s^2) \{[2 (1 + r_s^4)]^{1/2} - 0{,}5 (1 + r_s^2)\};$$
$$A_{22} = (\pi/S_{emp}) s^2 (1 - r_s^2 + r_s^4).$$

Como $r_s = r_{máx.t}/s = 0{,}75/s$; $S_{emp} = (s_m - r_{máx.t})\, b = 36{,}23$ m²; $0{,}5\pi/S_{emp} = 0{,}04333$; $\pi/S_{emp} = 0{,}08667$, $A_{11} = 0{,}04333s^2 (1 + 0{,}5625/s^2) \{[2 (1 + 0{,}3164/s^4)]^{1/2} - 0{,}5 (1 + 0{,}5625\, s^2)\}$; $A_{22} = 0{,}08667\, s^2 (1 - 0{,}5625/s^2 + 0{,}3164/s^4)$.

Para la sección de base ($s = s_m$) tenemos $\bar{A}_{11} = 1{,}001$; $\bar{A}_{22} = 2{,}119$. Con arreglo a estos resultados

$$c_y^\alpha = -2\bar{A}_{22} = -4{,}238; \quad c_y^{\omega_z} = 4\bar{A}_{22}\bar{x}_{s.b} = -3{,}39;$$
$$c_z^\beta = -2\bar{A}_{11} = -2{,}002; \quad c_z^{\omega_y} = -4\bar{A}_{11}\bar{x}_{s.b} = 1{,}602.$$

Analicemos la integral (véase la fig. 11.15):

$$B_{11} = \int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}_{pun}} A_{11}\, d\bar{x} = \underbrace{\int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}_{emp}} A_{11}\, d\bar{x}}_{I_{1.1}^0} + \underbrace{\int_{\bar{x}_{emp}}^{\bar{x}'} A_{11}\, d\bar{x}}_{I_{2.1}^0} + \underbrace{\int_{\bar{x}'}^{\bar{x}_{pun}} A_{11}\, d\bar{x}}_{I_{3.1}^0} = I_{1.1}^0 + I_{2.1}^0 + I_{3.1}^0.$$

Como $s = r_{máx.\,t} + (s_m - r_{máx.\,t})(-x + x_{s.b})/b = 0{,}75 + (5 - 0{,}75)[-\bar{x}\cdot 20 + (8{,}524 - 8)]/8{,}524$, tenemos $ds = -0{,}4986 \cdot 20\, d\bar{x}$ y $d\bar{x} = -0{,}1003\, ds$; por lo tanto,

$$I_{1.1}^0 = 0{,}0433\,(-0{,}1003) \times$$
$$\times \underbrace{\int_5^{0{,}75} s^2 (1 + 0{,}5626/s^2) \{[2 (1 + 0{,}3164/s^4)]^{1/2} - 0{,}5 (1 + 0{,}5625/s^2)\}\, ds}_{A}.$$

La integración numérica nos proporciona $I_{1.1}^0 = 0{,}1929$.

A continuación, determinamos para el sector cilíndrico

$$I_{2.1}^0 = (\pi r_{máx.\,t}^2/S_{emp})(\bar{x}' - \bar{x}_{emp}) = 0{,}01091;$$

para el sector cónico

$$I_{3.1}^0 = W_{cono}/(S_{emp}x_c) = (1/3)\,\pi r_{máx.\,t}^2 x'_{cono}/(S_{emp}x_c) = 0{,}004063.$$

Según los datos obtenidos $B_{11} = 0{,}2079$; después hallamos

$$B_{22} = \int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}_{pun}} A_{22}\, d\bar{x} = \underbrace{\int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}_{emp}} A_{22}\, d\bar{x}}_{I_{1.2}^0} + \underbrace{\int_{\bar{x}_{emp}}^{\bar{x}'} A_{22}\, d\bar{x}}_{I_{2.2}^0} + \underbrace{\int_{\bar{x}'}^{\bar{x}_{pun}} A_{22}\, d\bar{x}}_{I_{3.2}^0} = I_{1.2}^0 + I_{2.2}^0 + I_{3.2}^0.$$

Aquí,

$$I^0_{1.2}=0{,}08667\,(-0{,}1003)\int\limits_5^{0{,}75} s^2\,(1-0{,}5625/s^2+0{,}3164/s^4)\,ds=0{,}3908;$$

$$I^0_{2.2}=I^0_{2.1}=0{,}01091;\quad I^0_{3.2}=I^0_{3.1}=0{,}004063.$$

Así, pues, $B_{22}=0{,}4058$. A continuación, calculamos

$$C_{11}=\int\limits_{\bar{x}_{\text{s.b}}}^{\bar{x}_{\text{pun}}} A_{11}\bar{x}\,d\bar{x}=\underbrace{\int\limits_{\bar{x}_{\text{s.b}}}^{\bar{x}_{\text{emp}}} A_{11}\bar{x}\,d\bar{x}}_{I^1_{1.1}}+\underbrace{\int\limits_{\bar{x}_{\text{emp}}}^{\bar{x}'} A_{11}\bar{x}\,d\bar{x}}_{I^1_{2.1}}+\underbrace{\int\limits_{\bar{x}'}^{\bar{x}_{\text{pun}}} A_{11}\bar{x}\,d\bar{x}}_{I^1_{3.1}}=I^1_{1.1}+I^1_{2.1}+I^1_{3.1}.$$

Después de realizar la sustitución de $\bar{x}=0{,}0262-0{,}1003\,(s-0{,}75)$; $d\bar{x}=-0{,}1003ds$ y realizando la integración, hallamos $I^1_{1.1}=0{,}05648$.

Determinamos:

$$I^1_{2.1}=(\pi r^2_{\text{máx. t}}/S_{\text{emp}})\,(\bar{x}'^2/2-\bar{x}^2_{\text{emp}}/2)=0{,}001507;$$

$$I^1_{3.1}=[\pi x_c^2 r^2_{\text{máx. t}}/(S_{\text{emp}}x'^2)]\int\limits_{7/20}^{12/20}(\bar{x}_{\text{pun}}-\bar{x})^2\,\bar{x}\,d\bar{x}=0{,}000861.$$

Por lo tanto, $C_{11}=0{,}058$.

La integral

$$C_{22}=\int\limits_{\bar{x}_{\text{s.b}}}^{\bar{x}_{\text{pun}}} A_{22}\bar{x}\,d\bar{x}=\underbrace{\int\limits_{\bar{x}_{\text{s.b}}}^{\bar{x}_{\text{emp}}} A_{22}\bar{x}\,d\bar{x}}_{I^1_{1.2}}+\underbrace{\int\limits_{\bar{x}_{\text{emp}}}^{\bar{x}'} A_{22}\bar{x}\,d\bar{x}}_{I^1_{2.2}}+\underbrace{\int\limits_{\bar{x}'}^{\bar{x}_{\text{pun}}} A_{22}\bar{x}\,d\bar{x}}_{I^1_{3.2}}=I^1_{1.2}+I^1_{2.2}+I^1_{3.2}.$$

Aquí,

$$I^1_{1.2}=0{,}08667\,(-0{,}1003)\int\limits_5^{0{,}75} s^2\,(1-0{,}5625/s^2+0{,}3164/s^4)\,[0{,}0262-$$

$$-0{,}1003\,(s-0{,}75)]\,ds=-0{,}09324;\quad I^1_{2.2}=0{,}001507;\quad I^1_{3.2}=0{,}000861.$$

De este modo, $C_{22}=-0{,}09088$. Examinamos la ecuación

$$D_{11}=\int\limits_{\bar{x}_{\text{s.b}}}^{\bar{x}_{\text{pun}}} A_{11}\bar{x}^2\,d\bar{x}=\underbrace{\int\limits_{\bar{x}_{\text{s.b}}}^{\bar{x}_{\text{emp}}} A_{11}\bar{x}^2\,d\bar{x}}_{I^2_{1.1}}+\underbrace{\int\limits_{\bar{x}_{\text{emp}}}^{\bar{x}'} A_{11}\bar{x}^2\,d\bar{x}}_{I^2_{2.1}}+\underbrace{\int\limits_{\bar{x}'}^{\bar{x}_{\text{pun}}} A_{11}\bar{x}^2\,d\bar{x}}_{I^2_{3.1}}=I^2_{1.1}+I^2_{2.1}+I^2_{3.1},$$

donde (véase la pág. 648 para A)

$$I^2_{1.1}=0{,}04333\,(-0{,}1003)\int\limits_5^{0{,}75} s^2\,(1+0{,}5625/s^2)\,A\,[0{,}0262-$$

$$-0{,}1003\,(\mathrm{s}-0{,}75)]^2\,ds=0{,}01918;$$

$$I^2_{2.1} = (\pi r^2_{\text{máx. t}}/S_{\text{emp}})(\bar{x}'^3/3 - \bar{x}_{\text{emp}}/3) = 0{,}0002536;$$

$$I^2_{3.1} = [\pi x_c^2 r^2_{\text{máx. t}}/(S_{\text{emp}} x'^2)] \int\limits_{7/20}^{12/20} (\bar{x}_{\text{pun}} - \bar{x})^2 \bar{x}^2 \, d\bar{x} = 0{,}0003582.$$

El correspondiente valor de $D_{11} = 0{,}01979$.

La integral

$$D_{22} = \int\limits_{\bar{x}_{\text{s.b}}}^{\bar{x}_{\text{pun}}} A_{22}\bar{x}^2 \, d\bar{x} = \underbrace{\int\limits_{\bar{x}_{\text{s.b}}}^{\bar{x}_{\text{emp}}} A_{22}\bar{x}^2 \, d\bar{x}}_{I^2_{1.2}} + \underbrace{\int\limits_{\bar{x}_{\text{emp}}}^{\bar{x}'} A_{22}\bar{x}^2 \, d\bar{x}}_{I^2_{2.2}} + \underbrace{\int\limits_{\bar{x}'}^{\bar{x}_{\text{pun}}} A_{22}\bar{x}^2 \, d\bar{x}}_{I^2_{3.2}} =$$

$$= I^2_{1.2} + I^2_{2.2} + I^2_{3.2};$$

aquí

$$I^2_{1.2} = 0{,}08667\,(-0{,}1003) \int\limits_{5}^{0{,}75} s^2 (1 - 0{,}5625/s^2 + 0{,}3164/s^4) \times$$

$$\times [0{,}0262 - 0{,}1003\,(s - 0{,}75)]^2 \, ds = 0{,}02879;$$

$$I^2_{2.2} = I^2_{2.1} = 0{,}0002536; \quad I^2_{3.2} = I^2_{3.1} = 0{,}0003582.$$

El valor de $D_{22} = 0{,}0294$.

Con estos datos calculamos

$$m_z^{\alpha} = 2\,(B_{22} + \bar{A}_{22}\bar{x}_{\text{s.b}}) = -0{,}991; \quad m_z^{\bar{\omega}_z} = -4\,(\bar{A}_{22}\bar{x}^2_{\text{s.b}} + C_{22}) = -0{,}9926;$$

$$c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = -4B_{22} = -1{,}408; \quad c_y^{\dot{\bar{\omega}}_z} = 4C_{22} = -0{,}3635; \quad m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} = 4C_{22} = -0{,}3635;$$

$$m_z^{\dot{\bar{\omega}}_z} = -4D_{22} = -0{,}176; \quad c_z^{\beta} = -2\bar{A}_{11} = -3{,}3; \quad m_y^{\beta} = -2\,(B_{11} + \bar{A}_{11}\bar{x}_{\text{s.b}}) = 0{,}9528;$$

$$c_z^{\bar{\omega}_y} = -4\bar{A}_{11}\bar{x}_{\text{s.b}} = 2{,}64; \quad m_y^{\bar{\omega}_y} = -4\,(\bar{A}_{11}\bar{x}^2_{\text{s.b}} + C_{11}) = -0{,}8395;$$

$$c_z^{\dot{\bar{\beta}}} = -4B_{11} = -0{,}7344; \quad c_z^{\dot{\bar{\omega}}_y} = -4C_{11} = 0{,}2165;$$

$$m_y^{\dot{\bar{\beta}}} = -4C_{11} = 0{,}2165; \quad m_y^{\dot{\bar{\omega}}_y} = -4D_{11} = -0{,}1152.$$

11.80. La derivada del amortiguamiento durante el balanceo

$$m_x^{\bar{\omega}_x} = k_n k_r \,(m_x^{\bar{\omega}_x})_{\text{emp. hor}}. \qquad (11.116)$$

Para el empenaje horizontal aislado

$$(m_{x1}^{\bar{\omega}_{x1}})'_{\text{emp. hor}} = -(1/32)\,\lambda_{\text{emp}}\pi \quad [\bar{\omega}_{x1} = \Omega_x 2s_m/(2V_\infty)].$$

Haciendo el recálculo para el parámetro $\bar{\omega}_x = \Omega_x x_c/(2V_\infty)$ y la dimensión característica x_c, obtenemos

$$(m_x^{\bar{\omega}_x})_{\text{emp. hor}} = (m_{x1}^{\bar{\omega}_{x1}})'_{\text{emp. hor}}\,(2s_m/x_c)^2 = -(1/32)\,\lambda_{\text{emp}}\pi\,(2s_m/x_c)^2.$$

Como $\lambda_{\text{emp}} = 4/\text{tg}\,\chi = 1{,}994$, $(m_x^{\bar{\omega}_x})_{\text{emp. hor}} = -0{,}04892$.

Para $1/n = 1/3$, según la teoría aerodinámica del sólido delgado, hallamos $k_n = 1{,}35$, y para $r_{\text{máx.t}}/s_m = 0{,}75/5 = 0{,}15$ tendremos $k_r = 1{,}04$. Con arreglo a estos datos $m_x^{\omega_x} = -0{,}06868$.

De acuerdo con $\dot{\omega}_x = \dot{\Omega}_x x_c^2/(2V_\infty^2)$ hallamos la derivada $m_x^{\dot{\omega}_x} = k_n k_r (m_x^{\dot{\omega}_x})_{\text{emp. hor}}$. Para el empenaje horizontal $(m_x^{\dot{\omega}_x})_{\text{emp. hor}} = -(\pi/80)(2s_m/x_c)^3 = -0{,}004906$.

Así, pues, $m_x^{\dot{\omega}_x} = 1{,}35 \cdot 1{,}04\,(-0{,}004906) = -0{,}006888$.

Consideremos las derivadas condicionadas por las fuerzas y momentos de Magnus:

$$c_y^{\beta\omega_x} = -4B_{11}; \quad c_z^{\alpha\omega_x} = 4B_{22}; \tag{11.117}$$

$$m_y^{\alpha\omega_x} = 4C_{22}; \quad m_z^{\beta\omega_x} = 4C_{11}. \tag{11.118}$$

Las derivadas giroscópicas son las siguientes:

$$c_y^{\omega_x\omega_y} = -8C_{11}; \quad c_z^{\omega_z\omega_x} = -8C_{22}; \tag{11.119}$$

$$m_x^{\omega_y\omega_z} = -8(D_{11} - D_{22}); \tag{11.120}$$

$$m_y^{\omega_x\omega_z} = -8D_{22}; \quad m_z^{\omega_x\omega_y} = 8D_{11}. \tag{11.121}$$

Las demás derivadas análogas son iguales a cero. De la solución del problema 11.79, hallamos: $B_{11} = 0{,}1836$; $B_{22} = 0{,}3521$; $C_{11} = -0{,}05412$; $C_{22} = -0{,}09088$; $D_{11} = 0{,}01979$; $D_{22} = 0{,}0294$.

En correspondencia con estos resultados

$$c_y^{\beta\omega_x} = -0{,}7344; \quad c_z^{\alpha\omega_x} = 1{,}408; \quad m_y^{\alpha\omega_x} = -0{,}3635; \quad m_z^{\beta\omega_x} = -0{,}2165;$$

$$c_z^{\omega_z\omega_x} = 0{,}727; \quad m_x^{\omega_y\omega_z} = 0{,}07688; \quad c_y^{\omega_x\omega_y} = 0{,}433; \quad m_y^{\omega_x\omega_z} = -0{,}2352;$$

$$m_z^{\omega_x\omega_y} = 0{,}1583.$$

11.81. Las derivadas para un fuselaje delgado, con alas triangulares y empenaje cruciforme, en movimiento sin balanceo y deslizamiento son

$$c_y^\alpha = -2(\bar{A}_{\text{ala}} + \bar{A}_{\text{emp}}\eta_{\text{emp}});$$

$$m_z^\alpha = 2(B_f + B_{\text{ala}} + B_{\text{emp}}\eta_{\text{emp}} + \bar{A}_{\text{ala}}\bar{x}'_{\text{s.b}} + \bar{A}_{\text{emp}}\bar{x}_{\text{s.b}}\eta_{\text{emp}}); \tag{11.122}$$

$$c_y^{\omega_z} = 4(\bar{A}_{\text{ala}}\bar{x}'_{\text{s.b}} + \bar{A}_{\text{emp}}\bar{x}_{\text{s.b}}\eta_{\text{emp}});$$

$$m_z^{\omega_z} = -4(\bar{A}_{\text{ala}}\bar{x}'^2_{\text{s.b}} + \bar{A}_{\text{emp}}\bar{x}^2_{\text{s.b}}\eta_{\text{emp}} + C_f + C_{\text{ala}} + C_{\text{emp}}\eta_{\text{emp}}); \tag{11.123}$$

$$c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = -4(B_f + B_{\text{ala}} + B_{\text{emp}}\eta_{\text{emp}}); \quad c_y^{\dot{\omega}_z} = 4(C_f + C_{\text{ala}} + C_{\text{emp}}\eta_{\text{emp}}); \tag{11.124}$$

$$m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} = 4(C_f + C_{\text{ala}} + C_{\text{emp}}\eta_{\text{emp}}); \quad m_z^{\dot{\omega}_z} = -4(D_f + D_{\text{ala}} + D_{\text{emp}}\eta_{\text{emp}}), \tag{11.125}$$

donde

$$\omega_x = \Omega_x x_c/(2V_\infty); \quad \dot{\omega}_z = \dot{\Omega}_z x_c^2/(2V_\infty^2); \quad \dot{\bar{\alpha}} = \dot{\alpha} x_c/(2V_\infty).$$

Aquí, como área característica se ha tomado la de las alas S_{ala} y el coeficiente del momento de cabeceo se determina por la longitud x_c; los parámetros $B_{f\,(\text{ala emp})}$,

$C_{f(\text{ala emp})}$, $D_{f\,(\text{ala emp})}$, $A_{\text{ala (emp)}}$ son los siguientes:

$$B=\int_{\bar{x}_i}^{\bar{x}_c} A\,d\bar{x};\quad C=\int_{\bar{x}_i}^{\bar{x}_c} A\bar{x}\,d\bar{x};\quad D=\int_{\bar{x}_i}^{\bar{x}_c} A\bar{x}^2\,d\bar{x}; \qquad (11.126)$$

$$A=\lambda/(\rho_\infty S_{\text{ala}})=(\pi s^2/S_{\text{ala}})(1-r^2/s^2+r^4/s^4) \qquad (11.127)$$

(para sector de fuselaje con el ala o el empenaje);

$$A=\lambda/(\rho_\infty S_{\text{ala}})=\pi r^2 \qquad (11.128)$$

(para el sector del fuselaje sin las semialas).

El coeficiente que caracteriza la eficacia del empenaje se toma $\eta_{\text{emp}}=0{,}6143$ (véase la solución del problema 11.74).

Teniendo en cuenta que el área $S_{\text{ala}}=(s_{m\ \text{ala}}-r_{\text{máx.t}})\,b_{\text{ala}}=(s_{m\ \text{ala}}-r_{\text{máx.t}})^2\ \text{tg}\,\chi_{\text{ala}}=18{,}06\ \text{m}^2$ y el valor de $r_{\text{máx.t}}=0{,}75$ m, $s_{m\ \text{ala}}=5$ m, $s_{m\ \text{emp}}=3$ m, hallamos $\bar{A}_{\text{ala}}=4{,}253$; $\bar{A}_{\text{emp}}=1{,}473$. Así, pues, $c_y^\alpha=-2\,(4{,}251+1{,}473\cdot 0{,}6149)=-10{,}31$.

Como la distancia desde el centro de masas hasta el borde de salida del ala (véanse las figs. 11.14 y 11.17) $x_{\text{s.b}}=x_{\text{ala}}-b_{\text{ala}}=x_{\text{ala}}-(s_{m\ \text{ala}}-r_{\text{máx.t}})\times\times\ \text{tg}\,\chi_{\text{ala}}=0{,}05$ m, en tanto que hasta el borde de salida del empenaje $x_{\text{s.b}}=-(x_c-x_{\text{pun}})=-8$ m, la derivada $c_y^{\omega_z}=-1{,}403$.

Para el parámetro B tenemos la fórmula (véanse las figs. 11.14 y 11.17)

$$B=\int_{\bar{x}_{\text{s.b}}}^{\bar{x}_{\text{pun}}} A\,d\bar{x}=\underbrace{\int_{\bar{x}_{\text{s.b}}}^{\bar{x}''_{\text{emp}}} A\,d\bar{x}}_{B_{\text{emp}}}+\int_{\bar{x}''_{\text{emp}}}^{\bar{x}'_{\text{emp}}} A\,d\bar{x}+\underbrace{\int_{\bar{x}'_{\text{s.b}}}^{\bar{x}''_{\text{ala}}} A\,d\bar{x}}_{B_{\text{ala}}}+\int_{\bar{x}''_{\text{ala}}}^{\bar{x}'} A\,d\bar{x}+\int_{\bar{x}'}^{\bar{x}_{\text{pun}}} A\,d\bar{x}=$$

(las integrales segunda, cuarta y quinta forman B_f)

$$=B_f+B_{\text{ala}}+B_{\text{emp}}.$$

Aquí

$$B_f=(\pi r^2_{\text{máx. t}}/S_{\text{ala}})(\bar{x}'_{\text{s.b}}-\bar{x}''_{\text{emp}})+(\pi r^2_{\text{máx. t}}/S_{\text{ala}})(\bar{x}'-\bar{x}''_{\text{ala}})+$$
$$+[\pi r^2_{\text{máx. t}}x_c^2/(S_{\text{ala}}x_c'^2)]\,[\bar{x}^2_{\text{pun}}(\bar{x}_{\text{pun}}-\bar{x}')-2\bar{x}_{\text{pun}}(\bar{x}^2_{\text{pun}}/2-\bar{x}'^2/2)+(\bar{x}^3_{\text{pun}}/3-x'^3/3)].$$

Como $x''_{\text{emp}}=x_{\text{s.b}}-b_{\text{emp}}=x_{\text{s.b}}-(s_{m\ \text{emp}}-r_{\text{máx. t}})\ \text{tg}\,\chi_{\text{emp}}=-4{,}787$; $x'_{\text{s.b}}=0{,}05$ m; $x''_{\text{ala}}=x_{\text{ala}}=4{,}3$ m; $x'=x_{\text{pun}}-x'_c=7$ m; $x_{\text{pun}}=12$ m, obtenemos $B_f=0{,}04501$.

La tercera integral a la derecha

$$B_{\text{ala}}=(\pi/S_{\text{ala}})\int_{\bar{x}'_{\text{s.b}}}^{\bar{x}''_{\text{ala}}} s^2(1-r^2/s^2+r^4/s^4)\,d\bar{x}.$$

Ya que $s=r_{\text{máx. t}}+(s_{m\ \text{ala}}-r_{\text{máx. t}})(x''_{\text{ala}}-x)/b_{\text{ala}}=5{,}05-20\bar{x}$ y $d\bar{x}=-ds/20$, entonces

$$B_{\text{ala}}=-[\pi/(18{,}06\cdot 20)]\int_5^{0{,}75} s^2(1-r^2/s^2+r^4/s^4)\,ds=0{,}3381.$$

Para el empenaje (primera integral)

$$B_{emp}=\int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}''_{emp}} A\,d\bar{x}=(\pi/S_{ala})\int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}''_{emp}} s^2(1-r^2/s^2+r^4/s^4)\,d\bar{x}.$$

Como $s=r_{máx.\,t}+(s_{m\,emp}-r_{máx.\,t})(-x+x''_{emp})/b_{emp}=0{,}75+0{,}7003\times$ $\times(-20\bar{x}-4{,}787)$ y $d\bar{x}=-0{,}0714\,ds$, tendremos $B_{emp}=0{,}0952$.

En correspondencia con los resultados obtenidos $m_z^{\dot{\alpha}}=0{,}3054$; $c_y^{\dot{\alpha}}=-1{,}766$. El parámetro

$$C=\int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}_{pun}} A\bar{x}\,d\bar{x}=\underbrace{\int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}''_{emp}} A\bar{x}\,d\bar{x}}_{C_{emp}}+\int_{\bar{x}''_{emp}}^{\bar{x}'_{s.b}} A\bar{x}\,d\bar{x}+\underbrace{\int_{\bar{x}'_{s.b}}^{\bar{x}''_{ala}} A\bar{x}\,d\bar{x}}_{C_{ala}}+\int_{\bar{x}''_{ala}}^{\bar{x}'} A\bar{x}\,d\bar{x}+\int_{\bar{x}'}^{\bar{x}_{pun}} A\bar{x}\,d\bar{x}=$$

(la segunda integral y las dos últimas forman C_f)

$$=C_f+C_{ala}+C_{emp},$$

donde

$$C_f=(\pi r^2_{máx.\,t}/S_{ala})\int_{-4{,}787/20}^{0{,}05/20}\bar{x}\,d\bar{x}+(\pi r^2_{máx.\,t}/S_{ala})\int_{4{,}3/20}^{7/20}\bar{x}\,d\bar{x}+$$

$$+[\pi r^2_{máx.\,t}x_c^2/(S_{ala}x_c'^2)]\int_{7/20}^{12/20}(\bar{x}_{pun}-\bar{x})^2\,\bar{x}\,d\bar{x}=0{,}00429,$$

$$C_{ala}=-[\pi/(18{,}06\cdot 20)]\int_{5}^{0{,}75} s^2(1-0{,}75^2/s^2+0{,}75^4/s^4)\,[(1/20)(5{,}05-s)]\,ds=0{,}0218;$$

$$C_{emp}=(\pi/18{,}06)\,0{,}0714\int_{5}^{0{,}75} s^2(1-0{,}75^2/s^2+0{,}75^4/s^4)\times$$

$$\times[(1/14{,}01)(2{,}602+s)]\,ds=-0{,}2027.$$

Con arreglo a estos datos

$$m_z^{\omega_z}=-0{,}4311;\quad c_y^{\dot{\omega}_z}=-0{,}5365;\quad m_z^{\dot{\alpha}}=-0{,}5365.$$

Seguidamente, hallamos

$$D=\int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}_{pun}} A\bar{x}^2\,d\bar{x}=\underbrace{\int_{\bar{x}_{s.b}}^{\bar{x}''_{emp}} A\bar{x}^2\,d\bar{x}}_{D_{emp}}+\int_{\bar{x}''_{emp}}^{\bar{x}'_{s.b}} A\bar{x}^2\,d\bar{x}+\underbrace{\int_{\bar{x}'_{s.b}}^{\bar{x}''_{ala}} A\bar{x}^2\,d\bar{x}}_{D_{ala}}+\int_{\bar{x}''_{ala}}^{\bar{x}'} A\bar{x}^2\,d\bar{x}+\int_{\bar{x}'}^{\bar{x}_{pun}} A\bar{x}^2\,d\bar{x}=$$

(la segunda integral y las dos últimas forman D_f)

$$=D_f+D_{ala}+D_{emp}.$$

Como, aquí,

$$D_t = (\pi r^2_{\text{máx. t}}/S_{\text{ala}}) \int_{-4,787/20}^{0,05/20} \bar{x}^2\, d\bar{x} + (\pi r^2_{\text{máx. t}}/S_{\text{ala}}) \int_{4,3/20}^{7/20} \bar{x}^2\, d\bar{x} +$$

$$+ [\pi r^2_{\text{máx. t}} x_c^2/(S_{\text{ala}} x_c'^2)] \int_{7/20}^{12/20} (\bar{x}_{\text{pun}} - \bar{x})^2\, \bar{x}^2\, d\bar{x} = 0,002929;$$

$$D_{\text{ala}} = -[\pi/(18,06 \cdot 20)] \int_{5}^{0,75} s^2 (1 - 0,75^2/s^2 + 0,75^4/s^4) [(1/20)(5,05 - s)]^2\, ds =$$
$$= 0,002176;$$

$$D_{\text{emp}} = -(\pi/18,06)\, 0,0714 \int_{3}^{0,75} s^2 (1 - 0,75^2/s^2 + 0,75^4/s^4) \times$$
$$\times [(1/14,01)(2,602 + s)]^2\, ds = 0,01421,$$

la derivada $m_z^{\dot{\omega}_z} = -0,055$.

Determinamos las coordenadas relativas de los centros de presión:

$$(\Delta\bar{x}_{\text{p}})_\alpha = (\Delta x_{\text{p}}/x_{\text{c}})_\alpha = -m_z^\alpha/c_y^\alpha = 0,01752; \quad (\Delta\bar{x}_{\text{p}})_{\omega_z} = -m_z^{\omega_z}/c_y^{\omega_z} = -0,07019;$$

$$(\Delta x_{\text{p}})_{\dot{\bar{\alpha}}} = -m_z^{\dot{\bar{\alpha}}}/c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} = -0,2229; \quad (\Delta\bar{x}_{\text{p}})_{\dot{\omega}_z} = -m_z^{\dot{\omega}_z}/c_y^{\dot{\omega}_z} = -0,05351.$$

Como vemos, los centros de presión ligados con ω_z, $\dot{\bar{\alpha}}$, $\dot{\omega}_z$ se encuentran tras el centro de masas, o sea, al haber velocidad angular, así como al variar con el tiempo α y Ω_z, se observa el amortiguamiento longitudinal. Pero la instalación del ala en el cuerpo conduce a la violación de la estabilidad estática longitudinal (de cabeceo) y el centro de presión por α resulta situado delante del centro de masas [el valor de $(\Delta\bar{x}_{\text{p}})_\alpha = 0,01752$ es positivo].

11.82. La derivada del momento de balanceo

$$m_x^{\omega_x} = M_x^{\omega_x}/(2q_\infty S_{\text{ala}} s_{m\ \text{ala}}) = [k_n k_r (m_x^{\omega_x})_{\text{hor}}]_{\text{ala}} +$$
$$+ [k_n k_r (m_x^{\omega_x})_{\text{hor}}]_{\text{emp}}\, \eta_{\text{emp}} (S_{\text{emp}}/S_{\text{ala}}) (s_{m\ \text{emp}})/(s_{m\ \text{ala}}), \tag{11.129}$$

donde $m_x^{\omega_x} = \partial m_x/\partial\omega_x$ $[\omega_x = 2\Omega_x s_{m\ \text{ala}}/(2V_\infty)]$:

$$(m_x^{\omega_x})_{\text{ala hor}} = (\partial m_x/\partial\omega_x)_{\text{ala hor}} \quad [\omega_x = 2\Omega_x s_{m\ \text{ala}}/(2V_\infty)];$$

$$(m_x^{\omega_x})_{\text{emp. hor}} = (\partial m_x/\partial\omega_x)_{\text{emp. hor}} \quad [\omega_x = 2\Omega_x s_{m\ \text{emp}}/(2V_\infty)].$$

Para las semialas horizontales solitarias del ala y el empenaje (véase la solución del problema 9.114)

$$(m_x^{\omega_x})_{\text{ala hor}} = -(1/32)\, \lambda_{\text{ala}}\pi; \quad (m_x^{\omega_x})_{\text{emp. hor}} = -(1/32)\, \lambda_{\text{emp}}\pi. \tag{11.130}$$

Como $\lambda_{\text{ala}} = 4/\text{tg}\,\chi_{\text{ala}} = 4$; $\lambda_{\text{emp}} = 4/\text{tg}\,\chi_{\text{emp}} = 2,801$, $(m_x^{\omega_x})_{\text{ala hor}} = -0,3925$; $(m_x^{\omega_x})_{\text{emp. hor}} = -0,2748$.

El área de las semialas (teniendo en cuenta la zona ventral) $S_{\text{ala}} = s^2_{m\ \text{ala}} \times \text{tg}\,\chi_{\text{ala}} = 25$ m²; $S_{\text{emp}} = s^2_{m\ \text{emp}}\, \text{tg}\,\chi_{\text{emp}} = 12,85$ m², en tanto que el coefi-

ciente de eficacia del empenaje $\eta_{emp} = 0{,}6143$ (véase la solución del problema 11.74).

Según la teoría aerodinámica del sólido delgado, para $1/n = 1/4$, hallamos el valor de $k_n = 1{,}67$ (para el ala y el empenaje) y, para $r/s_{m\ \text{ala}} = 0{,}75/5 = 0{,}15$ y $r/s_{m\ \text{emp}} = 0{,}75/3 = 0{,}25$, determinamos $k_{r\ \text{ala}} = 1$ y $k_{r\ \text{emp}} = 1{,}07$, respectivamente. Tomando en consideración estos datos, $m_x^{\omega_x} = -0{,}7485$.

Analicemos la derivada con $M_\infty = 1{,}5$. Como el ángulo de Mach $\mu_\infty = \arcsen (1/1{,}5) = 41{,}8°$ y $\pi/2 - \chi_{\text{ala}} = \pi/2 - 45 = 45°$, $\pi/2 - \chi_{\text{emp}} = \pi/2 - 55 = 35°$, por consiguiente, las líneas de Mach, trazadas en los vértices del ala y del empenaje, pasarán por dentro de las semialas (del ala) y fuera de los límites de las semialas del empenaje, respectivamente. Con arreglo a esto, el borde de ataque del ala es supersónico y el del empenaje, subsónico.

Para el ala, en correspondencia con la teoría linealizada, la derivada (véase la solución del problema 9.111) $(m_x^{\omega_x})_{\text{ala hor}} = -1/(3\alpha') = -0{,}2981$, en tanto que para el empenaje (véase la solución del problema 9.114)

$$(m_x^{\omega_x})_{\text{emp. hor}} = -\pi\chi_{\text{emp}}\alpha'^2/\{16\,[(1+k^2)\,E-(1-k^2)\,K]\}.$$

Ya que el alargamiento $\lambda_{\text{emp}} = 2{,}801$, $\alpha' = 1{,}118$, $k = \sqrt{1-(0{,}25\alpha'\lambda_{\text{emp}})^2} = 0{,}6222$ y las correspondientes integrales elípticas $K = 1{,}769$, $E = 1{,}405$.

Según estos datos $(m_x^{\omega_x})_{\text{emp. hor}} = -0{,}7943$; $m_x^{\omega_x} = -0{,}7667$.

Examinemos la derivada $m_x^{\dot{\omega}_x}\ [\dot{\omega}_x = 4\dot{\Omega}_x s_{m\ \text{ala}}^2/(2V_\infty^2)]$. De acuerdo con la teoría aerodinámica del sólido delgado (véase la solución del problema 9.115), $(m_x^{\dot{\omega}_x})_{\text{ala hor}} = (m_x^{\dot{\omega}_x})_{\text{emp. hor}} = -0{,}03925$. Conforme a los valores hallados

$$m_x^{\dot{\omega}_x} = [k_n k_r\,(m_x^{\dot{\omega}_x})_{\text{hor}}]_{\text{ala}} + [k_n k_r\,(m_x^{\dot{\omega}_x})_{\text{hor}}]_{\text{emp}} \times$$
$$\times\ \eta_{\text{emp}}\,(S_{\text{emp}}/S_{\text{ala}})\,(s_{m\ \text{emp}}/s_{m\ \text{ala}}) = -0{,}07884.$$

Según la teoría aerodinámica del sólido delgado, la influencia del número de Mach al calcular la derivada se estima mediante la fórmula

$$m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}} = 4/(15\lambda'^3\lambda_{\text{ala}}) \quad [\dot{\omega}_{x1} = 4\dot{\Omega}_x s_{m\ \text{ala}}^2/(4V_\infty^2)].$$

Hablando en rigor, esta fórmula se refiere a la superficie de sustentación con bordes supersónicos. Para la estimación aproximada de la derivada haremos asimismo uso de ella para el empenaje, teniendo en cuenta su efecto más débil sobre el momento de balanceo que el ala y, por lo tanto, su menor influencia en el error al determinar la derivada sumaria.

Realicemos el recálculo de dicha derivada para el parámetro $\dot{\omega}_x = 4\dot{\Omega}_x s_{m\ \text{ala}}^2/(2V_\infty^2)$:

$$m_x^{\dot{\omega}_x} = \{\partial m_x/\partial\,[\dot{\Omega}_x\,(2s_{m\ \text{ala}})^2/(2V_\infty^2)]\}\ 2/2 = m_{x1}^{\dot{\omega}_{x1}}/2 = 2/(15\alpha'^3\lambda_{\text{ala}}); \quad (11.131)$$

determinamos $(m_x^{\dot{\omega}_x})_{\text{ala hor}} = 0{,}02385$; $(m_x^{\dot{\omega}_x})_{\text{emp. hor}} = 0{,}03406$, así como la derivada sumaria $m_x^{\dot{\omega}_x} = 0{,}05136$.

El efecto del número de Mach se manifiesta en la disminución del valor absoluto y la variación del signo de la derivada $m_x^{\dot{\omega}_x}$. Esto último indica la desaparición del amortiguamiento del balanceo relacionado con la derivada $\dot{\omega}_x$.

Capítulo 12

Rozamiento y termotransferencia

Una de las orientaciones científicas de mecánica de los fluidos (gases), más ampliamente desarrolladas, es *la aerodinámica de la capa límite* que estudia el movimiento de un fluido viscoso en una zona limitada cerca de las superficies sometidas a la circulación. La solución de los problemas acerca del movimiento del fluido en la capa límite proporciona la posibilidad de hallar la distribución de los esfuerzos tangenciales (coeficientes de rozamiento locales y medios) y, por consiguiente, las fuerzas y momentos aerodinámicos sumarios, condicionados por la viscosidad del medio, así como calcular la termotransferencia entre la superficie del vehículo volante y el gas que alrededor de él circula. A pequeñas velocidades de vuelo no es obligatorio tomar en consideración los procesos térmicos en la capa límite, ya que su intensidad es pequeña. Pero a grandes velocidades hay que tener en cuenta la termotransferencia y la influencia de las altas temperaturas en la capa límite sobre el rozamiento.

Con arreglo a esto, una serie de preguntas y problemas, aducidos en el presente capítulo, está, ante todo, dedicada a la investigación de los parámetros de la capa límite a velocidades de circulación pequeñas y moderadas, al cálculo de los grosores convencionales de capas límites homogéneas (laminares o turbulentas) sin gradientes, a determinar los coeficientes de rozamiento locales y medios.

Las características locales e integrales de la capa límite dependen de modo notorio del régimen del flujo del fluido en dicha capa, de qué clase de flujo es éste: laminar o turbulento. Es de gran importancia saber controlar el desarrollo de la capa límite, el proceso de transición del flujo laminar al turbulento, ya que al diseñar los vehículos volantes esto permite optimizar su forma en función del problema planteado, elegir correctamente los dispositivos de control, etc.

Con relación a esto, aquí se ofrecen preguntas ligadas con la estabilidad de la capa límite laminar y la influencia de diversos factores sobre ella, así como problemas para calcular los parámetros de la capa límite mixta en las superficies de los sólidos.

Además, se aducen los métodos y los correspondientes cálculos numéricos de la capa límite gradiental, así como se examinan los problemas de la corriente desprendible alrededor de sólidos (p. ej., alas de diversa forma en la planta) y los procedimientos para evitar, en ciertos casos particulares, el desprendimiento (separación) de la corriente.

Singular atención se presta a la investigación de la capa límite y al cálculo de los parámetros del rozamiento y la termotransferencia a velocidades de vuelo hipersónicas. En tal caso, se produce la disociación e ionización del aire, varían todos los parámetros termodinámicos y los coeficientes cinemáticos del gas en la capa límite, en ésta pueden asimismo transcurrir reacciones químicas. Estos fenómenos tienen gran importancia durante la formación de los procesos de rozamiento e intercambio de calor, pero tenerlos en cuenta al calcular la capa límite provoca notorias dificultades. Por ello, al resolver los problemas relacionados con el cálculo de los parámetros de la capa límite a muy altas velocidades de circulación, se emplea un método de ingeniería, sencillo y muy eficaz, basado en la noción llamada *entalpía determinante* (temperatura determinante).

Como es sabido, una superficie obtusa se puede considerar óptima desde el punto de vista del intercambio de calor, pero, con ello, la punta (borde de ataque) obtusa sufre el efecto térmico más intenso. Debido a esto, aquí se reflejan los problemas relacionados con la determinación de flujo térmico (convectivo y de radiación) hacia las secciones obtusas de nariz de sólidos de diversas configuraciones (punta esférica, cara plana). Se ofrecen ejemplos de cálculo en los que se da la

estimación de la influencia de la turbulencia del flujo sobre la termotransferencia tras una onda de choque curvilínea. Además, una serie de preguntas y problemas está dedicada al cálculo de la temperatura en equilibrio de las superficies de los vehículos volantes en diversas condiciones gasodinámicas, incluyendo aquellas que tienen en cuenta la influencia de la difusión en la capa límite.

El material que ofrecemos en este capítulo permite asimilar ciertos fundamentos de la teoría de la capa límite y aprender los procedimientos de resolución de problemas prácticos concretos ligados con el cálculo de los parámetros del rozamiento y la termotransferencia.

Problemas y preguntas

12.1. A velocidades supersónicas de circulación el esfuerzo de rozamiento en un cono puntiagudo en caso de régimen laminar del flujo en la capa límite es $\sqrt{3}$, y con el turbulento 1,176 veces mayor, que el esfuerzo de rozamiento en una placa, es decir, $\tau_{\text{par.cono}} = \sqrt{3}\tau_{\text{par.pl}}$, $c_{fx\ \text{cono}} = \sqrt{3}c_{fx\ \text{pl}}$ (en la capa límite laminar); $\tau_{\text{par.cono}} = 1{,}176\tau_{\text{par.pl}}$, $c_{fx\ \text{cono}} = 1{,}176c_{fx\ \text{pl}}$ (en la capa límite turbulenta).

Establezcan la ligazón entre los coeficientes de rozamiento medios en el cono $c_{f\text{cono}}$ y en la placa $c_{f\text{pl}}$ para los regímenes laminar y turbulento del flujo en la capa límite, suponiendo que los parámetros del flujo no viscoso, es decir, los parámetros en la frontera de la capa límite, son iguales para la placa y el cono. Sin tomar en consideración la influencia de la compresibilidad, determinen la resistencia al rozamiento para las capas límites laminar y totalmente turbulenta en la superficie de un cono puntiagudo (semiángulo en el vértice del cono $\beta_{\text{cono}} = 40°$, altura $h = 5$ m), si se conocen los parámetros del flujo no viscoso $V_{\text{cono}} = V_\delta = 2527$ m/s; $\rho_{\text{cono}} = \rho_\delta = 3{,}237$ kg/m³; $\mu_{\text{cono}} = \mu_\delta = 91{,}72\cdot10^{-6}$ N·s/m². Estos parámetros de movimiento corresponden a la altura $H = 10$ km a una velocidad $V_\infty = 3500$ m/s.

12.2. Determinen el espesor de una capa límite turbulenta δ, así como los espesores convencionales de desplazamiento δ^* y las pérdidas de impulso δ^{**} en la sección $x = 1$ m, contada desde la nariz de una placa plana, alrededor de la cual circula un flujo de aire a la velocidad $V_\infty = V_\delta = 200$ m/s. La viscosidad cinemática $\nu_\delta = 1{,}715\cdot10^{-5}$ m²/s. También se supone que el perfil de velocidades por el espesor de la capa límite turbulenta se caracteriza con la lev

$$V_x/V_\delta = (y/\delta)^{1/k}. \tag{12.1}$$

12.3. En la sección de una capa límite turbulenta, distanciada a $x = 2$ m de la nariz de una placa plana, alrededor de la cual circula un flujo de aire a la velocidad $V_\infty = 50$ m/s, se ha medido el perfil de velocidades longitudinales $V_x(y)$ y calculado el espesor de la pérdida de impulso $\delta^{**} = 0{,}003085$ m. Determinen el coeficiente de rozamiento c_f medio a lo largo de la placa ($L = x = 2$ m).

12.4. Indiquen el lugar de desprendimiento de la capa límite con grandes ángulos de ataque (supercríticos) en alas rectas, trapezoidales y en flecha. ¿Qué medidas se toman para evitar el desprendimiento de la capa límite en los sectores extremos del ala en flecha?

12.5. Una placa plana con superficie termoaislada está en movimiento a la velocidad $V_\infty = V_\delta = 700$ m/s en una atmósfera de aire a la altura $H = 10$ km. Determinen los parámetros locales del rozamiento en el sector de la superficie sometida a la circulación laminar (el esfuerzo y los coeficientes de rozamiento, espesor de la capa límite) a condición de que el número crítico $\text{Re}_{\text{crit}} = 10^5$.

42—01650

Asimismo, hallen el coeficiente medio y la resistencia por rozamiento para dicho sector de la placa, cuyas dimensiones se muestran en la fig. 12.1.

12.6. Hallen los parámetros de la capa límite (coeficiente local de rozamiento; espesor de la capa) en el sector de la circulación turbulenta alrededor de una placa plana (fig. 12.1), así como el coeficiente medio y la fuerza de rozamiento. Las

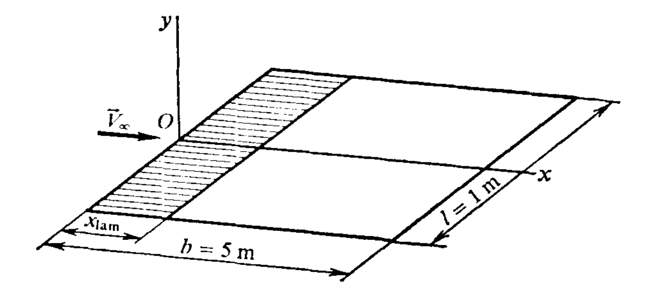


Fig. 12.1. Esquema para calcular la capa límite en una placa

condiciones de circulación del flujo, a la velocidad $V_\infty = V_d = 700$ m/s, alrededor de la placa corresponden a la altura $H = 10$ km. El número crítico $\mathbf{Re}_{crit} = 10^5$.

12.7. Expliquen por qué aumenta la estabilidad de la capa límite laminar en presencia de un gradiente negativo de presión e intensa extracción de calor de la superficie sometida a la circulación.

12.8. ¿Qué factores influyen sobre el aumento de la estabilidad de la capa límite laminar en la superficie obtusa de un vehículo volante a altas velocidades de vuelo?

12.9. ¿Por qué, al investigar el rozamiento y la termotransferencia en una capa límite disociada, es conveniente utilizar como medida de energía la entalpía del gas en lugar de la temperatura?

12.10. Al calcular el rozamiento y la termotransferencia en una capa límite disociada, junto a una pared comparativamente fría, en lugar de la entalpía determinante, con cierta aproximación, es posible emplear el método de la temperatura determinante. Expliquen por qué es esto posible.

12.11. Una placa con superficie termoaislada de una anchura (cuerda) $b = 5$ m y envergadura $l = 1$ m está sometida a la circulación de un flujo supersónico a velocidad $V_\infty = V_6 = 4000$ m/s. Las condiciones de la circulación corresponden a la altura $H = 20$ km. Hallen los coeficientes locales y medio de rozamiento, la distribución de los espesores de la capa límite laminar, así como la fuerza de rozamiento de la placa.

12.12. Para las condiciones del problema 12.11 hallen los coeficientes local y medio de rozamiento, la distribución de los espesores de la capa límite turbulenta, así como la fuerza de rozamiento de la placa.

12.13. Determinen los parámetros de la capa límite (coeficientes local y medio de rozamiento, distribución del espesor de la capa), así como la resistencia por rozamiento para la superficie termoaislada de un cono en movimiento con velocidad $V_\infty = 5000$ m/s a altura $H = 10$ km. La longitud de la generatriz del cono $x_{cono} = 5$ m, la mitad del ángulo en su vértice $\beta_{cono} = 40°$.

12.14. El perfil del ala, cuya forma y dimensiones se muestran en la fig. 12.2, está en movimiento bajo un ángulo de ataque $\alpha = 0$ a velocidad supersónica correspondiente al número $\mathbf{M}_\infty = 2$. Determinen los parámetros de la capa límite laminar en este perfil, para las condiciones de vuelo a una altura $H = 20$ km.

12.15. ¿Para qué condiciones de circulación proporciona resultados satisfactorios el método de la entalpía (temperatura) determinante, al calcular la termotransferencia desde la capa límite hacia la pared?

12.16. Determinen los flujos térmicos en los sectores laminar y turbulento de una corriente alrededor de una placa colocada en un flujo de aire, cuya velocidad es $V_\infty = V_\delta = 4000$ m/s. El número crítico $\mathbf{Re}_{\text{crít}} = 10^6$. Las condiciones de circulación en torno a la placa de $b = 5$ m de anchura y $l = 1$ m de envergadura corresponden a la altura $H=10$ km. La temperatura de la pared se mantiene constante y es igual a $T_{\text{par}} = 300$ K.

12.17. Un vehículo volante en forma de cono está en movimiento a la velocidad $V_\infty = 3500$ m/s y altura $H=10$ km. Determinen el flujo térmico hacia su superficie a condición de que la temperatura de la superficie se mantiene constante e igual a $T_{\text{par}} = 600$ K. La altura del cono $h = 5$ m, el ángulo de semiabertura $\beta_{\text{cono}} = 40°$.

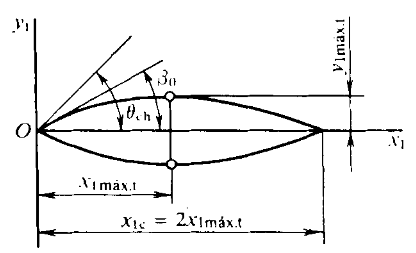


Fig. 12.2. Ecuación del perfil del ala y sus dimensiones:
$y_1 = (y_{1\,\text{máx.t}}/x_{1\,\text{máx.t}})\,(2 - x_1/x_{1\,\text{máx.t}})\,x_1$; $x_{1\,\text{máx.t}} = 1$ m; $y_{1\,\text{máx.t}} = 0{,}04$ m

12.18. Calculen los parámetros del rozamiento y de la termotransferencia en un cono con ángulo de semiabertura $\beta_{\text{cono}} = 10°$, a condición de que el vuelo transcurre a una altura $H = 30$ km a una velocidad correspondiente al número $\mathbf{M}_\infty = 15$ y de que en la superficie del cono se establece una temperatura uniforme de radiación.

12.19. Para dos puntos, situados en la superficie de un cono en las capas límite laminar y turbulenta, respectivamente (véase el problema 12.18), determinen la temperatura en equilibrio de la pared, a condición de que de ella, mediante un dispositivo de refrigeración, se extrae un flujo de calor $q_{\text{ref}} = 1{,}25\cdot 10^5$ J/(m²·s). Suponiendo que la pared está constituida por el aislamiento y el revestimiento con espesor $\delta_{\text{ais}} = 10$ y $\delta_{\text{rev}} = 5$ mm, respectivamente, determinen la temperatura de las superficies exterior T_{rev} e interior T_{int} del revestimiento. Como aislamiento se ha elegido un recubrimiento de cerámica [$\lambda_{\text{ais}} = 2{,}514$ W/(m·K)], en tanto que el revestimiento está fabricado de acero [$\lambda_{\text{rev}} = 45{,}25$ W/(m·K)].

12.20. Determinen el flujo convectivo específico de calor en equilibrio en el punto de remanso total de una nariz esférica de radio $R_{\text{T}} = 0{,}25$ m a una temperatura de la pared $T_{\text{par}} = 1000$ K durante el vuelo a la altura $H = 30$ km y velocidad correspondiente al número $\mathbf{M}_\infty = 15$. El movimiento del gas tras la onda de choque que surge se considera potencial (irrotacional).

12.21. De acuerdo con las condiciones del anterior problema determinen la termotransferencia en el punto de remanso total en la cara plana con radio $R_{\text{T}} = 0{,}25$ m.

12.22. La solución de los problemas 12.20 y 12.21 no tiene en cuenta la influencia de la turbulencia del flujo tras la onda de choque curvilínea sobre la termotransferencia. Pero semejante influencia existe y aumenta a medida que crece la velocidad de movimiento del vehículo volante. Según las condiciones del problema 12.20 determinen el efecto de dicha influencia sobre el flujo específico de calor en el punto de remanso total de la nariz esférica.

12.23. De acuerdo con los datos del problema 12.20, hallen el flujo de calor radiante desde una capa de choque sobrecalentada hacia el punto de remanso total de la nariz esférica y comparen dicho flujo con la termotransferencia convectiva.

12.24. ¿Por qué a velocidades hipersónicas de circulación el proceso de termotransferencia en la capa límite se distingue del proceso de conductividad térmica puramente molecular, que se considera en la gasodinámica corriente? Indiquen los posibles casos límite de termotransferencia en la capa límite disociada.

12.25. ¿A qué condiciones el intercambio de calor en un gas disociado se caracteriza por el equilibrio o por la desviación respecto de éste?

12.26. ¿En qué casos podemos considerar «el equilibrio termodinámico local» de una mezcla de gases que químicamente reacciona al haber gradientes de la concentración?

12.27. Expongan la explicación física de los procesos de termotransferencia en una mezcla de gases que químicamente no reaccionan, así como en el caso cuando los componentes de la mezcla de gases reaccionan entre sí.

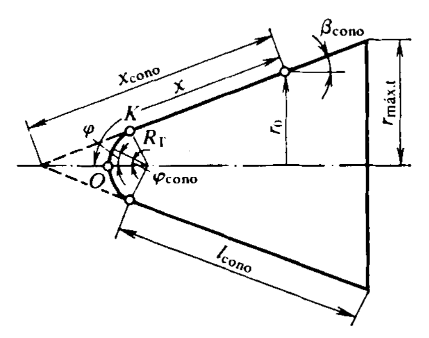


Fig. 12.3. Fuselaje con nariz esférica: $R_T = 1{,}5$ m; $l_{cono} = 5$ m; $\beta_{cono} = 40°$

12.28. ¿Por qué el empleo de materiales no catalíticos para el revestimiento de los vehículos volantes reduce, a grandes velocidades de vuelo, los flujos de calor hacia las superficies, mientras que, a la inversa, la aplicación de catalizadores aumenta dichos flujos?

12.29. Calculen la termotransferencia laminar en un cono romo, con esfera en la nariz, en movimiento a la velocidad $V_\infty = 4000$ m/s y altura $H = 20$ km. Las condiciones de circulación alrededor del cono corresponden a un número de Lewis—Semiónov igual a la unidad (Le = 1). La temperatura de la pared se mantiene constante e igual a $T_{par} = 500$ K. La forma y dimensiones (m) del cono romo se muestran en la fig. 12.3.

12.30. Un vehículo volante de forma cónica con nariz esférica, se mueve a la velocidad $V_\infty = 4000$ m/s y altura $H = 20$ km. Determinen el flujo adicional de calor hacia la superficie sometida a la circulación, condicionado por la difusión en la capa límite. La temperatura de la superficie se mantiene constante e igual a $T_{par} = 500$ K. La forma y las dimensiones (m) del cono se muestran en la fig. 12.3.

12.31. Hallen la temperatura de radiación en equilibrio de la pared en el entorno del punto de remanso total de un vehículo volante cónico, en movimiento a la velocidad $V_\infty = 4000$ m/s y altura $H = 20$ km, a condición de que la termotransferencia se calcula teniendo en cuenta la influencia de la difusión en la capa límite. El material de la pared es una sustancia vítrea (la constante de velocidad de la reacción catalítica para dicha sustancia $k_{par} = 10$ cm/s). La emisividad de la superficie $\varepsilon = 0{,}7$. La forma y las dimensiones (m) del vehículo volante se ofrecen en la fig. 12.3.

Solución de los problemas y respuestas a las preguntas

12.1. Para la placa plana el coeficiente medio de rozamiento se determina de la forma siguiente:

$$c_{f\,pl} = X_{f\,pl}/(q_\delta S_{pl}) = X_{f\,pl}/(q_\delta L b), \tag{12.2}$$

donde

$$X_{f\,\text{pl}}=\int_{(S)}\tau_{\text{par. pl}}\,dS=b\int_0^L\tau_{\text{par. pl}}\,dx \tag{12.3}$$

es la resistencia por rozamiento de la placa plana; L y b, la longitud y la anchura de la placa, respectivamente.

El esfuerzo de rozamiento $\tau_{\text{par.pl}}$ para la capa límite laminar

$$\tau_{\text{par. pl}}=0{,}332\rho_\delta V_\delta^2\,\text{Re}_x^{-1/2}=0{,}332\sqrt{\mu_\delta\rho_\delta V_\delta^3}\,x^{-1/2}. \tag{12.4}$$

Poniendo (12.4) en (12.3) y después de realizar los correspondientes cálculos, obtenemos

$$c_{f\,\text{pl}}=2\,(0{,}332/q_\delta)\sqrt{\mu_\delta\rho_\delta V_\delta^3/L}=2K_{\text{pl}}, \tag{12.5}$$

donde

$$K_{\text{pl}}=(0{,}332/q_\delta)\sqrt{\mu_\delta\rho_\delta V_\delta^3/L}. \tag{12.6}$$

Para el cono

$$c_{f\,\text{cono}}=X_{f\,\text{cono}}/(q_{\text{cono}}/S_{\text{lat}})=X_{f\,\text{cono}}/(q_{\text{cono}}\pi RL), \tag{12.7}$$

donde

$$X_{f\,\text{cono}}=\int_{(S)}\tau_{\text{par. cono}}\,dS=2\pi\int_0^L\tau_{\text{par. cono}}\,r\,dx \tag{12.8}$$

es la resistencia por rozamiento del cono; R, el radio de la base (sección máxima transversal) del cono; L, la longitud de su generatriz; $q_{\text{cono}}=\rho_{\text{cono}}V_{\text{cono}}^2/2$.

Tomando en consideración que $\tau_{\text{par.cono}}=\sqrt{3}\tau_{\text{par.pl}}$ y el valor del radio corriente $r=xR/L$, obtenemos

$$X_{f\,\text{cono}}=(2\sqrt{3}\,\pi R/L)\int_0^L\tau_{\text{par. pl}}\,x\,dx. \tag{12.9}$$

Por lo tanto,

$$c_{f\,\text{cono}}=[2\sqrt{3}/(q_{\text{cono}}L^2)]\int_0^L\tau_{\text{par. pl}}\,x\,dx.$$

Sustituyendo en la última relación $\tau_{\text{par.pl}}$ por (12.4) y efectuando los correspondientes cálculos, hallamos

$$c_{f\,\text{cono}}=(4\sqrt{3}/3)\,(0{,}332/q_{\text{cono}})\sqrt{\mu_{\text{cono}}\rho_{\text{cono}}V_{\text{cono}}^3/L}=(4\sqrt{3}/3)\,K_{\text{cono}}, \tag{12.10}$$

donde

$$K_{\text{cono}}=(0{,}332/q_{\text{cono}})\sqrt{\mu_{\text{cono}}\rho_{\text{cono}}V_{\text{cono}}^3/L}. \tag{12.11}$$

Como según el planteamiento los parámetros del flujo no viscoso en la placa y el cono son iguales, es decir, $V_{\text{cono}}=V_\delta$, $\rho_{\text{cono}}=\rho_\delta$, etc., la ligazón entre $c_{f\,\text{cono}}$ y $c_{f\,\text{pl}}$ para una capa límite laminar, puede ser hallada de la comparación de (12.5) y (12.10), adoptando que $K_{\text{pl}}=K_{\text{cono}}$:

$$c_{f\,\text{cono}}=(2\sqrt{3}/3)\,c_{f\,\text{pl}}. \tag{12.12}$$

Realizando consideraciones análogas y teniendo en cuenta que para *la capa límite turbulenta*

$$\tau_{par.\,pl}=0{,}0289\rho_\delta V_\delta^2 \mathbf{Re}_x^{-1/5}=0{,}0289\sqrt[5]{\rho_\delta^4 V_\delta^9 \mu_\delta}\,x^{-1/5},$$

podemos establecer la siguiente relación entre los coeficientes medios de rozamiento para el cono y la placa:

$$c_{f\ cono}=1{,}045c_{f\ pl}. \qquad (12.13)$$

Para determinar la resistencia por rozamiento del cono hallemos el coeficiente medio de rozamiento $c_{f\ pl}$ según las fórmulas de la placa plana y los parámetros en el cono. Para la capa límite laminar $c_{f\ pl}^{l}=1{,}328/\sqrt{\mathbf{Re}_L}$; para la turbulenta, $c_{f\ pl}^{t}=0{,}074/\sqrt[5]{\mathbf{Re}_L}$, de donde, después de poner todos los datos, $\mathbf{Re}_L = V_{cono}L\rho_{cono}/\mu_{cono}=5{,}821\cdot10^8$. Por consiguiente, $c_{f\ pl}^{l}=5{,}496\cdot10^{-5}$; $c_{f\ pl}^{t}=1{,}307\cdot10^{-3}$.

Para el cono, haciendo uso de (12.12) y (12.13), hallamos

$$c_{f\ cono}^{l}=6{,}346\cdot10^{-5};\quad c_{f\ cono}^{t}=1{,}366\cdot10^{-3}.$$

Conociendo la presión de velocidad $q_{cono}=\rho_{cono}V_{cono}^2/2=10{,}34\cdot10^6$ N/m² y el área de la superficie lateral del cono $S_{lat}=\pi RL=85{,}99$ m², es posible determinar la resistencia por rozamiento del cono. Para la capa límite laminar $X_f^l=c_{f\ cono}^{l}q_{cono}S_{lat}=5{,}642\cdot10^4$ N, para la turbulenta, $X_f^t=c_{f\ cono}^{t}q_{cono}S_{lat}=121{,}4\cdot10^4$ N.

12.2. El espesor de la capa límite turbulenta con el perfil de velocidades, caracterizado por la ley exponencial (12.1),

$$\delta=\bar{B}\,(V_\delta x/\nu_\delta)^{-2/(\bar{k}+3)}x, \qquad (12.14)$$

donde

$$\bar{B}=\{\bar{k}/[(\bar{k}+3)(\bar{k}+2)]\}^{-(\bar{k}+1)/(\bar{k}+3)}\bar{C}^{-2\bar{k}/(\bar{k}+3)};\quad \bar{C}=0{,}917\bar{k}+2{,}343.$$

Los valores de $\bar{B}$ y $\bar{C}$, en función de $\bar{k}$, se aducen a continuación:

$\bar{k}$ . . .	5	6	7	8	9	10
$\bar{C}$ . . .	6,93	7,84	8,74	9,71	10,6	11,5
$\bar{B}$ . . .	0,544	0,445	0,370	0,311	0,274	0,261

Para determinar el exponente $\bar{k}$ se puede emplear la fórmula

$$\bar{k}=2{,}35\,(\log \mathbf{Re}^{**}-1), \qquad (12.15)$$

en la que el número $\mathbf{Re}^{**}=V_\delta\delta^{**}/\nu_\delta$.

Entre los espesores convencionales de desplazamiento δ^* y de las pérdidas de impulso δ^{**}, así como el espesor de la capa límite turbulenta en un líquido incompresible existen las siguientes dependencias:

$$\delta^*=[1/(\bar{k}+1)]\,\delta;\quad \delta^{**}=\{\bar{k}/[(\bar{k}+1)(\bar{k}+2)]\}\,\delta. \qquad (12.16)$$

La solución del problema planteado, empleando las relaciones expuestas más arriba, se realiza según el método de las aproximaciones sucesivas. Como primera aproximación se toma el exponente en la ley de distribución de velocidades $\bar{k}=7{,}46$ y se calculan los correspondientes valores de los coeficientes $\bar{B}$ y $\bar{C}$: $\bar{C}=9{,}184$; $\bar{B}=0{,}3425$.

De acuerdo con (12.14) determinamos el espesor de la capa límite $\delta = 0{,}01526$ m, en tanto que por (12.16) $\delta^{**} = 0{,}001422$ m.

A continuación, determinamos $\mathbf{Re}^{**} = V_\delta \delta^{**}/\nu_\delta = 16580$ y según (12.15) calculamos el valor de $\bar{k} = 7{,}566$ con la segunda aproximación.

Conforme a este $\bar{k}$ precisamos los parámetros de la capa límite: $\bar{C} = 9{,}281$; $\bar{B} = 0{,}3365$; $\delta = 0{,}01546$ m; $\delta^{**} = 0{,}001427$ m; $\delta^* = 0{,}001805$ m. A estos datos corresponde el valor de $\mathbf{Re}^{**} = 16640$. Como el valor obtenido de $\bar{k}$ difiere de modo insignificante ($\sim$0,05 %) del valor con la primera aproximación podemos considerar que $\bar{k} = 7{,}57$ y los parámetros hallados de la capa límite son definitivos.

12.3. Ante todo, hemos de establecer la ligazón entre el coeficiente de rozamiento medio c_f a lo largo de la placa L y el espesor de la pérdida de impulso δ_L^{**} en su extremo. Con este fin, aplicamos *la relación integral de los impulsos* para la capa límite. En el caso de un flujo sin gradiente (la circulación alrededor de una placa plana), la indicada relación toma la forma

$$d\delta^{**}/dx = \tau_{\text{par}}/(\rho_\delta V_\delta^2) \quad \text{o bien} \quad d\delta^{**}/dx = c_{fx}/2. \tag{12.17}$$

Si integramos (12.17) por la coordenada x dentro de los límites desde 0 hasta L, hallamos

$$\delta_L^{**} = 0{,}5 \int_0^L c_{fx}\, dx. \tag{12.18}$$

El coeficiente medio de rozamiento a lo largo de la placa se determina con la siguiente dependencia:

$$c_f = (1/L) \int_0^L c_{fx}\, dx. \tag{12.19}$$

De acuerdo con esto

$$\int_0^L c_{fx}\, dx = c_f L. \tag{12.20}$$

Comparando las relaciones (12.18) y (12.20), hallamos

$$c_f = 2\delta_L^{**}/L. \tag{12.21}$$

Así, pues, el coeficiente medio de rozamiento por la longitud x de la placa puede determinarse como *el producto del espesor de las pérdidas de impulso en el extremo del indicado sector por el coeficiente* $2/x$.

De forma análoga es posible establecer la ligazón entre el coeficiente medio de rozamiento por la superficie del cono puntiagudo $c_{f\,\text{cono}}$ y el espesor de las pérdidas de impulso δ^{**}. Con la circulación supersónica alrededor del cono puntiagudo se observa el flujo sin gradiente. Por consiguiente, en este caso, para la capa límite la relación integral de los impulsos

$$d\delta^{**}/dx + \delta^{**}/x = c_{fx}/2. \tag{12.22}$$

El coeficiente medio de rozamiento por la superficie del cono

$$c_{f\,\text{cono}} = (2\pi/S_{\text{lat}}) \int_0^L c_{fx} r\, dx, \tag{12.23}$$

donde L es la longitud de la generatriz del cono; $S_{lat} = \pi r_{máx.t} L$, la superficie lateral del cono.

Realizando las correspondientes sustituciones se puede reducir la relación (12.23) a la forma

$$c_{f\,cono} = (2/L^2) \int_0^L c_{fx} x\,dx. \qquad (12.24)$$

Después de integrar (12.22) dentro de los límites desde 0 hasta L, hallamos

$$\int_0^L c_{fx} x\,dx = 2\delta_L^{**} L. \qquad (12.25)$$

Poniendo la expresión hallada $\int_0^L c_{fx} x\,dx$ en la relación (12.24), obtenemos

$$c_{f\,cono} = 4\delta_L^{**}/L, \qquad (12.26)$$

donde δ_L^{**} es el espesor de las pérdidas de impulso en la sección de base del cono.

Para las condiciones prefijadas, en correspondencia con estos resultados, el coeficiente medio de rozamiento a lo largo de la placa $c_f = 2\delta_x^{**}/x = 3{,}085 \cdot 10^{-3}$.

12.4. Con grandes ángulos de ataque (supercríticos) la circulación a lo largo del trasdós del ala se acompaña del desprendimiento del flujo, debido a la separa-

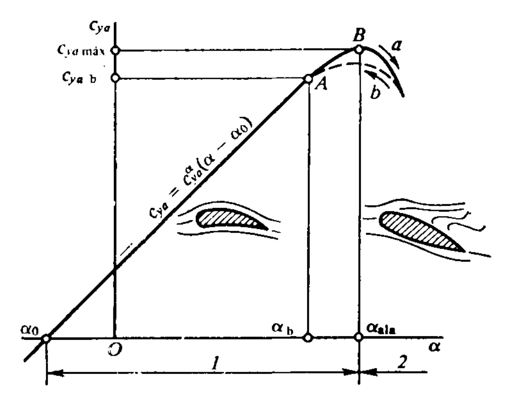


Fig. 12.4. Coeficiente de la fuerza de sustentación del ala:
1, ángulos de ataque en vuelo; *2*, ángulos de ataque transcríticos ($\alpha_{ala} = \alpha_{cr}$)

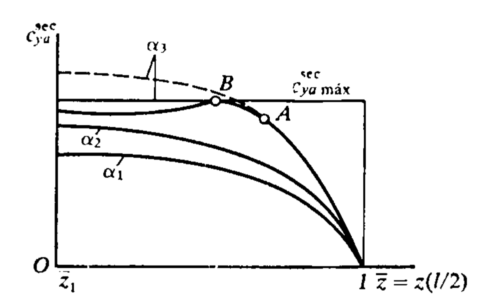


Fig. 12.5. Distribución de la fuerza de sustentación por la envergadura de un ala rectangular

ción de la capa límite con gradientes positivos de la presión. La violación de la dependencia lineal entre el coeficiente de la fuerza de sustentación y el ángulo de ataque (sector AB en la fig. 12.4) certifica el surgimiento del régimen de separación de la capa límite. El coeficiente de la fuerza de sustentación correspondiente al punto A ($c_{ya\,b}$) está condicionado por la aparición de una zona de desprendimiento en el ala debido a lo cual el vuelo del vehículo volante se acompaña de bataneo.

Con ángulos de ataque mayores que el crítico (α_{cr}), el desprendimiento del flujo se propaga por la mayor parte de la superficie del ala y el coeficiente de la fuerza de sustentación disminuye. Es de notar que al aumentar el ángulo de ataque

(en la región de sus valores supercríticos) el coeficiente de la fuerza de sustentación varía por una curva, mientras que al disminuir, por otra (véase los sectores de las curvas *a* y *b* en la fig. 12.4), o sea, hay histéresis de la curva $c_{ya} = f(\alpha)$.

Los valores de α_{cr} y $c_{ya\,\text{máx}}$ dependen en alto grado de las características geométricas del ala y del número **Re**. El lugar de surgimiento del desprendimiento y su posterior desarrollo se determinan por la forma del ala en la planta. Para la sección de un ala aerodinámicamente plana de envergadura infinita con perfil invariable, el coeficiente de la fuerza de sustentación está limitado por el valor $c_{ya\,\text{máx}}^{\text{sec}}$ que para el perfil prefijado depende del número $\mathbf{Re} = V_\infty b/\nu$. En cualquier sección por la envergadura del ala el coeficiente de la fuerza de sustentación c_{ya}^{sec} no puede sobrepasar el valor máximo indicado más arriba.

En las figs. 12.5—12.7 se muestran las distribuciones de c_{ya}^{sec} y $c_{ya\,\text{máx}}^{\text{sec}}$ por la envergadura de las alas recta, trapezoidal y en flecha con distintos ángulos de

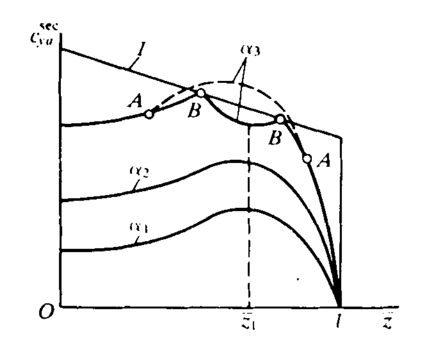


Fig. 12.6. Distribución de la fuerza de sustentación por la envergadura de un ala trapezoidal:

1, función $c_{ya\,\text{máx}}^{\text{sec}} = f(\bar z)$

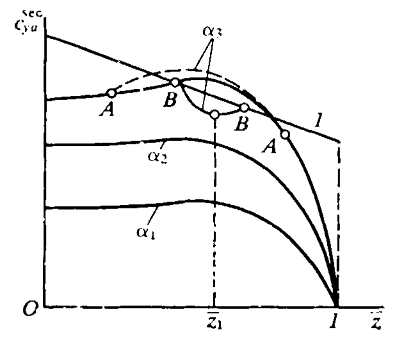


Fig. 12.7. Distribución de la fuerza de sustentación por la envergadura de un ala trapezoidal:

1, dependencia $c_{ya\,\text{máx}}^{\text{sec}} = f(\bar z)$

ataque. En el ala de forma rectangular en la planta $[b(\bar z) = b = \text{const}]$ los coeficientes c_{ya}^{sec} varían aproximadamente por una ley elíptica; en el ala trapezoidal, de forma próxima a la elíptica, c_{ya}^{sec} crece bruscamente junto a las partes del extremo del ala y, a continuación, en la parte de raíz queda invariable; para el ala en flecha es característica la disminución considerable de c_{ya}^{sec} en la parte de raíz, lo que se explica por el decrecimiento de los ángulos reales de ataque en dichas secciones debido al aumento local de la deflexión del flujo.

Al alcanzar cierto ángulo de ataque el desprendimiento de la capa límite comienza en aquella sección del ala donde el valor de c_{ya}^{sec} es el más próximo a $c_{ya\,\text{máx}}^{\text{sec}}$ (sección $\bar z_1$ en las figs. 12.5—12.7). En el ala rectangular el desprendimiento del flujo comienza junto al plano central del ala y se propaga con rapidez por la mayor parte de su envergadura. En el ala trapezoidal el desprendimiento comienza junto a sus secciones de extremo, debido a la rápida disminución de c_{ya}^{sec} en dirección a los extremos del ala (a causa de los pequeños valores de **Re**), así como debido al carácter, descrito más arriba, de c_{ya}^{sec}. En el ala en flecha, como en la recta trapezoidal, el desprendimiento del flujo comienza, asimismo, junto a las secciones de extremo. En las secciones del ala donde hay desprendimiento del flujo, al aumentar el ángulo de ataque, c_{ya}^{sec} crece no proporcionalmente a α.

La distribución de los coeficientes de la fuerza de sustentación por la envergadura de las alas con ángulos de ataque α_3, correspondientes a los regímenes de separación de la capa límite en las superficies superiores (trasdós) de las alas se ofrecen en las figs. 12.5—12.7. En ellas, se muestran a trazos las curvas que existirían durante la circulación adherida, con las líneas gruesas, con la desprendible. Para el ala en flecha es característico el aumento del grosor de la capa límite en sus secciones de extremo a cuenta de la componente de la velocidad a lo largo de la envergadura. Con el fin de evitar el desprendimiento prematuro del flujo se emplean las láminas aerodinámicas que son placas ubicadas en el trasdós del ala y que obstaculizan el derrame de la capa límite hacia los extremos del ala.

También hay que indicar que al montar el ala de diferentes perfiles y utilizando el alabeo geométrico es posible regular la posición de la zona de desprendimiento del flujo en aquélla.

12.5. Según las tablas de la atmósfera normal, para la altura prefijada $H = 10$ km, determinamos los parámetros del aire: $p_\delta = 2{,}65 \cdot 10^4$ Pa; $\rho_\delta = 0{,}4135$ kg/m³; $\mu_\delta = 1{,}458 \cdot 10^{-5}$ Pa·s; $\nu_\delta = 3{,}525 \cdot 10^{-5}$ m²/s; $T_\delta = 223{,}2$ K; $a_\delta = 299{,}5$ m/s; $\mu_{m\delta} = 28{,}96$ kg/kmol.

Hallemos el número de Mach del flujo libre $\mathbf{M}_\delta = V_\delta/a_\delta = 2{,}337$ y calculemos la longitud del sector laminar x_{lam} partiendo de la condición de que $\mathbf{Re}_{\text{crit}} = V_\delta x_{\text{lam}}/\nu_\delta = 10^5$:

$$x_{\text{lam}} = 10^5 \nu_\delta / V_\delta = 0{,}5036 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

La razón de los espesores de la capa límite en el sector laminar

$$\delta_{\text{comp}}/\delta_{\text{inc}} = [1 + \mathbf{M}_\delta^2 (k - 1)/3]\,[1 + \mathbf{M}_\delta^2 (k - 1)/2]^{(n-1)/2}. \qquad (12.27)$$

Aquí, para el fluido incompresible

$$\delta_{\text{inc}} = b\bar{\delta}_{\text{inc}} = 4{,}64\bar{x}^{1/2} b/\mathbf{Re}_b^{1/2}, \qquad (12.28)$$

donde

$$\bar{x} = x/b; \quad \mathbf{Re}_b = V_\delta b/\nu_\delta.$$

Haciendo $b = x_{\text{lam}}$, o sea, a la longitud del sector laminar, obtenemos $\mathbf{Re}_b = \mathbf{Re}_{\text{crit}} = 10^5$ y, por lo tanto, $\delta_{\text{inc}} = 7{,}389 \cdot 10^{-5} \bar{x}^{1/2}$ m.

Suponiendo que $n = 0{,}76$; $k = c_p/c_v = 1{,}4$ y, teniendo en cuenta que $\mathbf{M}_\delta = 2{,}337$, tendremos $\delta_{\text{comp}} = 11{,}69 \cdot 10^{-5} \bar{x}^{1/2}$ m. En el extremo del sector laminar $\bar{x} = 1$ y $\delta_{\text{comp}} = 11{,}69 \cdot 10^{-5}$ m. Para $\mathbf{M}_\delta = 2{,}337$ la razón de los espesores constituye $\delta_{\text{comp}}/\delta_{\text{inc}} = 1{,}582$. Como vemos, la compresibilidad conduce al aumento del espesor de la capa en el ~ 58 %.

Para el esfuerzo de rozamiento tenemos

$$(\tau_{\text{par}})_{\text{comp}}/(\tau_{\text{par}})_{\text{inc}} = [1 + \mathbf{M}_\delta^2 (k - 1)/2]^{(n-1)/2} = 0{,}9153.$$

Con arreglo a este resultado el esfuerzo de rozamiento en el flujo compresible disminuye. Para el fluido incompresible

$$(\tau_{\text{par}})_{\text{inc}} = 0{,}323 \rho_\delta V_\delta^2 \sqrt{1/\mathbf{Re}_x} = 6{,}545 \cdot 10^4/\sqrt{\mathbf{Re}_x} \text{ N/m}^2,$$

donde $\mathbf{Re}_x = V_\delta x/\nu_\delta = 1{,}986 \cdot 10^7 x$, con la particularidad de que $0 < x \leqslant x_{\text{lam}}$.

Así, pues,

$$(\tau_{\text{par}})_{\text{comp}} = [(\tau_{\text{par}})_{\text{com}}/(\tau_{\text{par}})_{\text{inc}}]\,(\tau_{\text{par}})_{\text{inc}} = 5{,}991 \cdot 10^4/\sqrt{\mathbf{Re}_x}.$$

Para el extremo del sector laminar ($x = x_{\text{lam}}$), donde $\mathbf{Re}_x = \mathbf{Re}_{\text{crit}} = 10^5$, tenemos $(\tau_{\text{par}})_{\text{comp}} = 189{,}5$ N/m².

La razón de los coeficientes locales de rozamiento

$$(c_{fx})_{comp}/(c_{fx})_{inc} = (\tau_{par})_{comp}/(\tau_{par})_{inc} = 0{,}9153.$$

Aquí $(c_{fx})_{inc} = 0{,}646/\sqrt{\mathbf{Re}_x} = 2(\tau_{par})_{inc}/(\rho_\delta V_\delta^2)$, por lo que $(c_{fx})_{comp} = 2(\tau_{par})_{comp}/(\rho_\delta V_\delta^2) = [(c_{fx})_{comp}/(c_{fx})_{inc}](c_{fx})_{inc} = 0{,}5913/\sqrt{\mathbf{Re}_x}$.

En paricular, para el extremo del sector laminar $(c_{fx})_{comp} = 0{,}5913/\sqrt{10^5} = 1{,}870 \cdot 10^{-3}$.

El coeficiente medio de rozamiento en el sector laminar

$$(c_f)_{comp} = (c_f)_{inc}\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\delta^2\right)^{(n-1)/2} \quad (12.29)$$

Aquí

$$(c_f)_{inc} = 1{,}292/\sqrt{\mathbf{Re}_b}. \quad (12.30)$$

Como $b = x_{lam}$, $\mathbf{Re}_b = \mathbf{Re}_{crit} = 10^5$ y $(c_f)_{inc} = 4{,}086 \cdot 10^{-3}$, de donde $(c_f)_{comp} = 3{,}740 \cdot 10^{-3}$.

La fuerza de rozamiento que crean los dos lados de la placa

$$X_{f\ lam} = 2c_f q_\delta S_{pl} = 2c_f\,(kp_\delta \mathbf{M}_\delta^2/2)\,lx_{lam} = 3{,}816\ \text{N}.$$

12.6. Determinemos previamente los parámetros de la atmósfera a la altura $H = 10$ km y el número $\mathbf{M}_\delta = 2{,}337$ (véase el problema 12.5). De la solución del problema 12.5 conocemos la longitud del sector laminar $x_{lam} = 0{,}5036 \cdot 10^{-2}$m. Por la largura de la placa x ($x_{lam} < x < b$) la capa límite es turbulenta. Al calcular los parámetros de ésta nos basaremos en la suposición de que el flujo turbulento comienza en el borde de ataque. El coeficiente local de rozamiento turbulento se calcula con la fórmula de Dorodnitsin:

$$\frac{0{,}242}{\sqrt{(c_{fx})_{comp}}} = \sqrt{1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\delta^2}\left\{\log[\mathbf{Re}_x/(c_{fx})_{comp}] - n\log\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\delta^2\right) + 0{,}33\right\}. \quad (12.31)$$

Introduciendo aquí los valores de $\mathbf{M}_\delta = 2{,}337$; $k = 1{,}4$; $n = 0{,}76$, obtenemos

$$0{,}1673/\sqrt{(c_{fx})_{comp}} = \log[\mathbf{Re}_x(c_{fx})_{comp}] + 0{,}0863. \quad (12.32)$$

Con la primera aproximación determinamos $(c_{fx})_{comp}$ por la fórmula

$$(c_{fx})_{comp} = 2K^2/\{z^2[1 + \mathbf{M}_\delta^2(k-1)/2]\}. \quad (12.33)$$

Haciendo aquí $z = 10$ y $K = 0{,}391$, obtenemos $(c_{fx})_{comp} = 0{,}001461$. Después de poner estos valores en el segundo miembro de (12.32) y haciendo $\mathbf{Re}_x = 10^6$, hallamos $0{,}1673/\sqrt{(c_{fx})_{comp}} = 3{,}251$. Con arreglo a esto, con la segunda aproximación, $(c_{fx})_{comp} = 0{,}002648$.

Repetimos la sustitución en el segundo miembro de (12.32) y obtenemos $(c_{fx})_{comp} = 0{,}002273$. Realizamos una aproximación más y hallamos $(c_{fx})_{comp} = 0{,}002361$. Con esto podemos finalizar las aproximaciones. La coordenada del punto de la placa a que corresponde este valor del coeficiente de rozamiento se halla partiendo de la condición de que $\mathbf{Re}_x = V_\delta x/\nu_\delta = 10^6$, de acuerdo con la cual, $x = 0{,}05036$ m.

De modo análogo es posible hallar los valores de $(c_{fx})_{comp}$ en los demás puntos prefijados de la zona turbulenta de circulación en torno de la placa. Los correspon-

dientes valores de los espesores de la capa límite se hallan con la fórmula

$$\bar{\delta}_{comp} = \delta_{comp}/b = (0{,}212\bar{x}/z_{comp})\left[1 + \frac{M_\delta^2(k-1)/2}{1+M_\delta^2(k-1)/2}(1 - 2/z_{comp} - 2/z_{comp}^2)\right]. \quad (12.34)$$

El valor de z_{comp} puede determinarse de (12.33) según el valor de $(c_{fx})_{comp} = 0{,}002361$:

$$z_{comp} = \sqrt{2K^2/\{(c_{fx})_{comp}[1 + M_\delta^2(k-1)/2]\}} = 7{,}867.$$

Teniendo en cuenta que la coordenada adimensional $\bar{x} = x/b = 1{,}007\cdot 10^{-2}$, obtenemos $\bar{\delta}_{comp} = \delta_{comp}/b = 0{,}1611\cdot 10^{-3}$. Por analogía calculamos el espesor para otros puntos de la placa.

Para comparar determinemos el coeficiente de rozamiento y el espesor de la capa a una distancia $x = 0{,}05036$ m del borde de ataque en el caso de un fluido incompresible:

$$0{,}242/\sqrt{(c_{fx})_{inc}} = \log[\mathbf{Re}_x (c_{fx})_{inc}] + 0{,}33. \quad (12.35)$$

Prefijando el valor de $z_{inc} = 10$ hallamos con la primera aproximación $(c_{fx})_{inc} = 2K^2/z_{inc}^2 = 0{,}003058$. Introduciendo este valor en el segundo miembro de (12.35), para $\mathbf{Re}_x = 10^6$ calculamos con la segunda aproximación $(c_{fx})_{inc} = 0{,}004024$. A la última aproximación corresponde el valor $(c_{fx})_{inc} = 0{,}003835$ con ayuda del cual hallamos $z_{inc} = K\sqrt{2/(c_{fx})_{inc}} = 8{,}929$ y el espesor relativo de la capa $\bar{\delta}_{inc} = \delta_{inc}/b = 0{,}212\bar{x}/z_{inc} = 0{,}2374\cdot 10^{-3}$.

Examinemos la aplicación de la ley de la «séptima raíz». El espesor relativo de la capa en un fluido incompresible $\bar{\delta}_{inc} = \delta_{inc}/b = 0{,}37\bar{x}/\mathbf{Re}_x^{1/5}$. Para el número $\mathbf{Re}_x = 10^6$ prefijado y el correspondiente valor de $\bar{x} = x/b = 1{,}07\cdot 10^{-2}$, hallamos $\delta_{inc}/b = 0{,}2351\cdot 10^{-3}$.

El coeficiente local de rozamiento $(c_{fx})_{inc} = 0{,}0598/\mathbf{Re}_x^{1/5} = 0{,}003773$. El coeficiente medio de rozamiento de la placa en el indicado sector $b - x_{lam}$ (véase la fig. 12.1)

$$(c_f)_{inc} = \frac{2X_{f\ inc}}{\rho_\delta V_\delta^2 (b - x_{lam})} = \frac{0{,}0598}{b - x_{lam}}\int_{x_{lam}}^{b}\frac{dx}{\mathbf{Re}_x^{1/5}} = \frac{0{,}075\,(1-\bar{x}_{lam}^{4/5})}{(1-\bar{x}_{lam})\,\mathbf{Re}_b^{1/5}}.$$

Como $\mathbf{Re}_b = V_\delta b/\nu_\delta \approx 10^8$ y $\bar{x}_{lam} = x_{lam}/b \approx 1{,}0\cdot 10^{-3}$, $(c_f)_{inc} = 1{,}88\cdot 10^{-3}$. Tomando en consideración la compresibilidad

$$(c_f)_{comp} = (c_f)_{inc}\,(1 + 0{,}12M_\delta^2)^{-1/2} = 1{,}456\cdot 10^{-3}.$$

La fuerza de rozamiento del sector turbulento de la placa

$$X_{f\ tur} = 2\,(c_f)_{comp} q_\delta S_{pl} = 2\,(c_f)_{comp}\,(kp_\delta\cdot M_\delta^2/2)\,l\,(b - x_{lam}) = 1474\ \text{N}.$$

Sumando esta fuerza con la resistencia por rozamiento en el sector laminar (véase el problema 12.5) obtenemos la fuerza total de rozamiento:

$$X_f = X_{f\ lam} + X_{f\ tur} \approx 1478\ \text{N}.$$

12.7. Al extraer con intensidad el calor de una superficie sometida a circulación, baja la temperatura y aumenta la densidad del gas junto a la pared, debido a lo cual crece la energía cinética de las partículas del gas en las cercanías de la superficie. Sobre las partículas con mayor energía influyen en menor grado las

pulsaciones perturbadoras y, por consiguiente, *el enfriamiento de la superficie contribuye a la estabilización de la capa límite y al aumento de los números críticos* **Re**.

La presencia del gradiente negativo de presión conduce al movimiento acelerado de las partículas y al aumento de su energía cinética. Esto condiciona una mayor resistencia del flujo a los efectos perturbadores, lo que conduce al mezclado transversal menos intenso y, en consecuencia, al «arrastre» del movimiento laminar, o sea, favorece al aumento de la estabilidad de la capa límite laminar.

12.8. En caso de circulación alrededor de la superficie obtusa de un vehículo volante, en el sector del punto crítico de remanso y siguiendo hacia abajo a favor de la corriente, se observa un flujo acelerado gradiental (el gradiente longitudinal de presión es negativo). La aceleración de las partículas provocada por el gradiente negativo de presión y el aumento de su energía cinética condicionan una mayor resistencia del flujo a los efectos perturbadores y el aumento de la estabilidad de la capa límite laminar.

En la superficie obtusa del aparato los números locales **M** son menores que en la aguzada (puntiaguda). En correspondencia con esto, la temperatura de recuperación en la superficie obtusa es menor, en tanto que la densidad y energía cinética del gas junto a la pared crecen, lo que conduce a la estabilización de la capa límite laminar. Además, como ya sabemos, el flujo de calor que va hacia la superficie obtusa es proporcional a $1/\sqrt{R_T}$ (donde R_T es el radio de la punta obtusa esférica) y disminuye al aumentar R_T, mientras que T_δ, crece. Conforme a esto, para la superficie obtusa, el valor de T_{par}/T_δ es menor y el descenso de la temperatura del gas junto a la pared debe acarrear el crecimiento de la estabilidad de la capa límite laminar.

12.9. Para un gas disociado es característico el aumento brusco de los calores específicos debido a que a la energía térmica del gas se adicionan los consumos de energía para su disociación. De acuerdo con esto, en la capa límite disociada la temperatura del gas no puede considerarse como medida de su energía total.

12.10. El método de la temperatura determinante puede también emplearse en la capa límite junto a una pared comparativamente fría, teniendo en cuenta que el aumento del coeficiente de termoemisión, condicionado por la recombinación junto a tal pared, se compensa, aproximadamente, por la disminución de la temperatura de recuperación T_r a cuenta de la disociación en comparación con el valor más alto de T_r para el aire disociado. Así, pues, si al determinar el flujo de calor se desprecia la influencia de la disociación simultáneamente sobre las magnitudes T_r y α, entonces tal flujo de calor $q = \alpha (T_r - T_{par})$ puede ser calculado según el método de la temperatura determinante, incluso al haber disociación en la capa límite.

12.11. En las tablas para la atmósfera normal determinamos los parámetros del aire a la altura $H = 20$ km: $p_\delta = 5{,}529 \cdot 10^3$ Pa; $\rho_\delta = 8{,}891 \cdot 10^{-2}$ kg/m³; $T_\delta = 216{,}6$ K; $a_\delta = 295{,}1$ m/s; $\mu_{m\delta} = 28{,}96$; $\mu_\delta = 1{,}422 \cdot 10^{-5}$ Pa·s; $\nu_\delta = 1{,}599 \cdot 10^{-4}$ m²/s; el número $\mathbf{M}_\delta = V_\delta/a_\delta \approx 13{,}56$.

Hallamos la entalpía determinante:

$$i^* = 0{,}5\,(i_{par} + i_\delta) + 0{,}22\,(i_r - i_\delta). \qquad (12.36)$$

Como, según el planteamiento del problema, la pared tiene termoaislamiento, la entalpía del gas en semejante pared es igual a la de recuperación, o sea,

$$i_{par} = i_r = i_\delta + rV_\delta^2/2. \qquad (12.37)$$

Para el flujo laminar tomemos $r_{lam} = \sqrt{\mathbf{Pr}}$, donde a altas temperaturas el número de Prandtl $\mathbf{Pr} = 0{,}64$. Por ello, $r_{lam} = 0{,}8$. A continuación, empleando los datos aducidos más abajo, determinamos $(c_{p\delta})_{T=216{,}6}$.

Atomicidad del gas	μc_v kJ/(kg·K)	μc_p kJ/(kg·K)
Monoatómico	12,5	20,8
Biatómico	20,8	29,1
Tri y multiatómico	29,1	37,4

Para el aire $c_p = (\mu c_p)/\mu_{m\delta} = 29{,}1/28{,}96 \approx 1005$ J/(kg·K).
De modo que

$$i_\delta = (c_{p\delta})_{T=216,6} T_\delta = 0{,}2177 \cdot 10^6 \text{ J/kg } (0{,}2177 \cdot 10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2).$$

Por consiguiente, empleando (12.37) hallamos $i_r = 6{,}618 \cdot 10^6$ m²/s² ($6{,}618 \times \times 10^6$ J/kg). La enltalpía determinante $i^* = 4{,}826 \cdot 10^6$ J/kg.

Según el valor de i^* y $p_\delta = 5{,}529 \cdot 10^3$ Pa, en las tablas de las funciones gasodinámicas a grandes velocidades y altas temperaturas del flujo de aire, teniendo en cuenta la disociación, hallamos la temperatura determinante $T^* = 2940$ K, así como la masa media molar $\mu_m^* = 26{,}95$.

Calculemos la razón de los espesores de la capa límite en los flujos compresible e incompresible:

$$\delta_{comp}/\delta_{inc} = (T^*/T_\delta)^{(n+1)/2} (\mu_{m\delta}/\mu_m^*)^{1/2} = 10{,}29. \qquad (12.38)$$

Como $\delta_{inc} = 4{,}64 \bar{x}^{1/2} b/\mathbf{Re}_b^{1/2}$, $\bar{x} = x/b$ y el número $\mathbf{Re}_b = V_\delta b/\nu_\delta = 1{,}251 \cdot 10^8$, $\delta_{inc} = 2{,}074 \cdot 10^{-3} \bar{x}^{1/2}$ m. Por lo tanto, $\delta_{comp} = 2{,}134 \cdot 10^{-2} \bar{x}^{1/2}$ m. En el extremo de la placa, donde $\bar{x} = x/b = 1$, $\delta_{comp} = 2{,}134$ cm.

La razón de los coeficientes locales de rozamiento

$$(c_{fx})_{comp}/(c_{fx})_{inc} = (T^*/T_\delta)^{(n-1)/2} (\mu_m^*/\mu_{m\delta})^{1/2} = 0{,}7054. \qquad (12.39)$$

Tomando en consideración que $(c_{fx})_{inc} = 0{,}646 \sqrt{\mu_\delta/(V_\delta \rho_\delta x)} = 0{,}5776 \cdot 10^{-4} \bar{x}^{-1/2}$, hallamos $(c_{fx})_{comp} = 0{,}7054\,(c_{fx})_{inc} = 0{,}4074 \cdot 10^{-4} \bar{x}^{-1/2}$. En particular, en el borde de salida de la placa ($\bar{x} = 1$) $(c_{fx})_{comp} = 0{,}4074 \cdot 10^{-4}$.

La razón de los coeficientes medios de rozamiento

$$(c_f)_{comp}/(c_f)_{inc} = (T^*/T_\delta)^{(n-1)/2} (\mu_m^*/\mu_{m\delta})^{1/2} = 0{,}7054. \qquad (12.39')$$

Ya que $(c_f)_{inc} = 1{,}292/\sqrt{\mathbf{Re}_b} = 1{,}155 \cdot 10^{-4}$, $(c_f)_{comp} = 0{,}7054\,(c_f)_{inc} = = 0{,}8147 \cdot 10^{-4}$.

La resistencia por rozamiento de los dos lados de la placa

$$X_{f\ comp} = 2\,(c_f)_{comp}\, q_\delta S_{pl} = 579{,}8 \text{ N}.$$

Para comparar determinamos la resistencia por rozamiento sin contar la compresibilidad: $X_{f\ inc} = X_{f\ comp}\,(c_f)_{inc}/(c_f)_{comp} = 822$ N.

12.12. Con el fin de resolver el problema hagamos uso de los parámetros del aire a la altura $H = 20$ km, ofrecidos en el problema 12.11. Tomemos el número $\mathbf{Pr} = 0{,}64$ y determinemos el coeficiente de recuperación para el flujo turbulento $r_{tur} = \sqrt{\mathbf{Pr}} = 0{,}8619$, así como la entalpía del gas junto a la pared, igual a la entalpía de recuperación:

$$i_r = i_\delta + r_{tur} V_\delta^2/2 = 7{,}112 \cdot 10^6 \text{ J/kg } (7{,}112 \cdot 10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2),$$

donde el valor de i_δ se ha tomado de la solución del problema 12.11.

La entalpía determinante se calcula con (12.36): $i^* = 5{,}182 \cdot 10^6$ m²/s². En las tablas de las funciones termodinámicas y gasodinámicas a grandes velocidades y altas temperaturas del flujo de aire, según el indicado valor de la entalpía determinante i^* y la presión $p_\delta = 5{,}529 \cdot 10^3$ Pa ($5{,}674 \cdot 10^{-2}$ kg/cm²), hallamos la temperatura determinante $T^* = 3000$ K y la masa media molar $\mu_m^* = 26{,}67$. De acuerdo con estos datos calculamos el espesor de la capa límite contando la disociación:

$$\delta_{comp}/\delta_{inc} = (T^*/T_\delta)^{(n+1)/5} (\mu_{m\delta}/\mu_m^*)^{1/5} = 2{,}564, \qquad (12.40)$$

donde $\delta_{inc} = 0{,}37 \sqrt[5]{\mu_\delta/(V_\delta \rho_\delta)}\, x^{4/5}$; $\delta_{inc}/b = [0{,}37/(\mathbf{Re}_b)^{1/5}]\, \bar{x}^{4/5}$.

El valor de $\mathbf{Re}_b = 1{,}251 \cdot 10^8$ (véase el problema 12.11). Por esta razón $\delta_{inc}/b = 0{,}8887 \cdot 10^{-2} \bar{x}^{4/5}$.

Así, pues, $\delta_{comp} = 2{,}564 \delta_{inc} = 11{,}39 \cdot 10^{-2} x^{4/5}$ m. En particular, en el borde de salida ($\bar{x} = 1$) $\delta_{comp} = 11{,}39 \cdot 10^{-2}$ m.

La razón de los coeficientes de rozamiento local y medio

$$(c_{fx})_{comp}/(c_{fx})_{inc} = (c_f)_{comp}/(c_f)_{inc} = (T^*/T_\delta)^{(n-4)/5} (\mu_m^*/\mu_{m\delta})^{4/5} = 0{,}1703. \qquad (12.41)$$

Aquí, para el fluido incompresible

$$(c_{fx})_{inc} = 0{,}0598 x^{-1/5} [\mu_\delta/(V_\delta \rho_\delta)]^{1/5} = 0{,}1436 \cdot 10^{-2} \bar{x}^{-1/5};$$

$$(c_f)_{inc} = 0{,}075/(\mathbf{Re}_b)^{1/5} = 0{,}1801 \cdot 10^{-2}.$$

La fuerza de la resistencia por rozamiento, creada por los lados superior e inferior de la placa, es igual para el fluido incompresible $X_{f\,inc} = 2\,(c_f)_{inc} q_\delta S_{pl} \approx 12\,820$ N, mientras que para el gas compresible $X_{f\,comp} = X_{f\,inc}\,[(c_f)_{comp}/(c_f)_{inc}] = 2183$ N.

12.13. Con el fin de resolver el problema hagamos uso de los parámetros del aire a la altura $H = 10$ km aducidos en el problema 12.5. Determinemos el número $\mathbf{M}_\infty = V_\infty/a_\infty = 16{,}69$. En las tablas de las funciones correspondientes a las corrientes alrededor de superficies cónicas hallamos los parámetros de un flujo no viscoso en la superficie del cono, que tomamos iguales a los existentes en la frontera externa de la capa límite:

$$V_\delta = V_{r\,cono} = 3651 \text{ m/s}; \quad i_\delta = i_{cono} = 6{,}06 \cdot 10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2;$$

$$p_\delta = p_{cono} = 49{,}5 \text{ kg/cm}^2\ (48{,}39 \cdot 10^5 \text{ Pa}); \ \rho_\delta = \rho_{cono} = 0{,}41 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{m}^4\ (4{,}008 \text{ kg/m}^3);$$

$$T_\delta = T_{cono} = 4090 \text{ K}; \quad S_\delta = S_{cono} = 9610 \text{ m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{K}); \quad \mu_{m\delta} = 27{,}7.$$

Más adelante, de acuerdo con (12.36), calculamos la entalpía determinante i^*. Como según el planteamiento la superficie está termoaislada, la entalpía del gas en la pared es igual a la de recuperación [véase (12.37)]. Haciendo el número $\mathbf{Pr} = 0{,}64$ hallamos el coeficiente de recuperación $r_{lam} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$. Con arreglo a esto $i_{par} = i_r = 11{,}4 \cdot 10^6$ m²/s²; entonces, $i^* = 9{,}89 \cdot 10^6$ m²/s². Conforme a este valor de la entalpía y de la presión $p_\delta = p_{cono} = 49{,}5$ kg/cm² ($48{,}39 \cdot 10^5$ Pa), en las tablas de las funciones termodinámicas y gasodinámicas a grandes velocidades y altas temperaturas del flujo de aire, hallamos la temperatura determinante $T^* = 5475$ K y la masa molar media del aire $\mu_m^* = 25{,}16$.

Según los parámetros del flujo libre en el cono calculamos la capa límite para la placa. La razón de los espesores locales de la capa laminar [véase (12.38)] $\delta_{comp}/\delta_{inc} = 1{,}356$, en tanto que la razón de los coeficientes de rozamiento locales y medios [véase (12.39)] $(c_{fx})_{comp}/(c_{fx})_{inc} = (c_f)_{comp}/(c_f)_{inc} = 0{,}9203$.

Ejecutemos cálculos análogos para la capa límite turbulenta. En tal caso, $r_{tur} = \sqrt[3]{\mathbf{Pr}} = 0{,}8619$ y, por consiguiente, de acuerdo con (12.37) y (12.36), $i_{par} = 11{,}80 \cdot 10^6$ m²/s²; $i^* = 10{,}19 \cdot 10^6$ m²/s². Según este valor de la entalpía y el de la presión $p_\delta = p_{cono} = 49{,}5$ kg/cm² ($48{,}39 \cdot 10^5$ Pa), en las tablas de las funciones termodinámicas y gasodinámicas a grandes velocidades y altas temperaturas del flujo de aire, hallamos la temperatura determinante $T^* = 5600$ K y la masa molar media $\mu_m^* = 25{,}0$.

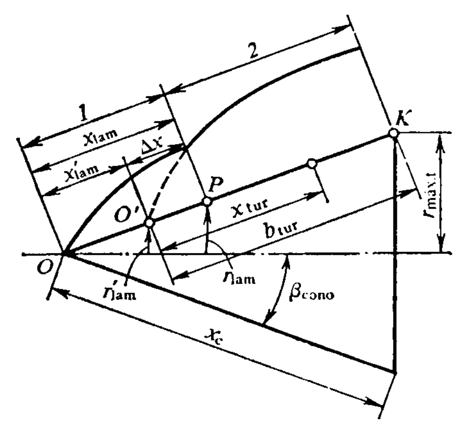


Fig. 12.8. Esquema para calcular la capa límite mixta en un cono:
1 y *2*, capas límites laminar y turbulenta, respectivamente

La razón de los espesores locales de la capa límite turbulenta [véase (12.40) $\delta_{comp}/\delta_{inc} = 1{,}140$. Las razones de los correspondientes coeficientes de rozamiento locales y medios [véase (12.41)] $(c_{fx})_{comp}/(c_{fx})_{inc} = (c_f)_{comp}/(c_f)_{inc} = 0{,}7992$.

Determinamos las regiones de las capas límites laminar y turbulenta en el cono. Con este objeto calculamos el número crítico $\mathbf{Re}_{crit}$. Este número es función de $\mathbf{M}_\delta = V_\delta/a_\delta$ y de la temperatura relativa de la pared $\overline{T}_{par} = T_{par}/T_r$. La velocidad del flujo $V_\delta = 3651$ m/s, en tanto que la del sonido $a_\delta = 1214$ m/s se determina con las dependencias $a = f(p, T)$ para $i_\delta = 6{,}06 \cdot 10^6$ m²/s² y $p_\delta = 49{,}5$ kg/cm² ($48{,}39 \cdot 10^5$ Pa). Así, que $\mathbf{M}_\delta = V_\delta/a_\delta = 3{,}007$. Por este valor de $\mathbf{M}_\delta$ y de la temperatura relativa $\overline{T}_{par} = T_{par}/T_r = 1$, hallamos $\mathbf{Re}_{crit} \approx 3{,}8 \cdot 10^6$.

Ahora podemos calcular la longitud x_{lam} del sector del cono ocupado por la capa límite laminar. El número crítico $\mathbf{Re}_{crit} = V_\delta x_{lam} \rho_\delta/\mu_\delta = 3{,}8 \cdot 10^6$.

Aquí, la viscosidad dinámica

$$\mu_\delta = \mu_\infty (T_\delta/T_\infty)^n = 1{,}458 \cdot 10^{-5} (4090/223{,}2)^{0{,}76} = 13{,}29 \cdot 10^{-5} \text{ Pa·s}.$$

Teniendo asimismo en cuenta que $V_\delta = 3651$ m/s, $\rho_\delta = 0{,}41$ kg·s²/m⁴ (4,008 kg/m³), obtenemos $x_{lam} = [\mu_\delta/(V_\delta \rho_\delta)]\, 3{,}8 \cdot 10^6 = 3{,}451 \cdot 10^{-2}$ m.

En esta longitud de la generatriz la capa límite es laminar, en la restante, turbulenta (fig. 12.8).

En el sector laminar el coeficiente local de rozamiento, reducido a la presión de velocidad y calculado según los parámetros del flujo libre,

$$c_{fx\,cono} = \sqrt{3}\, c_{fx\,pl} = \sqrt{3}\, [(c_{fx})_{comp}/(c_{fx})_{inc}]\, (c_{fx})_{inc} = 1{,}594\, (c_{fx})_{inc}.$$

Para la placa en el flujo incompresible $(c_{fx})_{inc} = 0{,}646 \overline{x}^{-1/2}/\sqrt{\mathbf{Re}_b}$ $(\overline{x} = x/x_{lam})$ donde $\mathbf{Re}_b = V_\delta \rho_\delta x_{lam}/\mu_\delta = \mathbf{Re}_{crit} = 3{,}8 \cdot 10^6$. Con arreglo a esto $(c_{fx})_{inc} = 0{,}3313 \cdot 10^{-3} \overline{x}^{-1/2}$. Entonces, $(c_{fx})_{comp} = 0{,}5281 \cdot 10^{-3} \overline{x}^{-1/2}$.

El correspondiente coeficiente medio de rozamiento

$$c_{f\,cono} = (2/3)\sqrt{3}\, c_{f\,pl} = (2/3)\sqrt{3}\, [(c_f)_{comp}/(c_f)_{inc}]\, (c_f)_{inc} = 1{,}063\, (c_f)_{inc}.$$

Como para la placa $(c_f)_{inc} = 1{,}292/\sqrt{\mathbf{Re}_b} = 0{,}6627 \cdot 10^{-3}$, $c_{f\,cono} = 0{,}7044 \times 10^{-3}$. Este coeficiente se ha reducido a la presión de velocidad $\rho_\delta V_\delta^2/2$ calculado según los parámetros del flujo libre en el cono.

El coeficiente reducido a la presión de velocidad del flujo incidente $c_{f\infty} = c_{f\ \text{cono}}\rho_\delta V_\delta^2/(\rho_\infty V_\infty^2) = 3{,}640\cdot 10^{-3}$. El espesor de la capa límite $\delta_{\text{cono}} = 0{,}578\,\delta_{\text{pl}}$, donde $\delta_{\text{pl}} = (\delta_{\text{comp}}/\delta_{\text{inc}})\,\delta_{\text{inc}}$. Con esto, el espesor δ_{inc} se determina con la dependencia

$$\delta_{\text{inc}}/x_{\text{lam}} = \bar{\delta}_{\text{inc}} = 4{,}64\bar{x}^{1/2}/\sqrt{\mathbf{Re}_b} = 4{,}64\bar{x}^{1/2}/\sqrt{\mathbf{Re}_{\text{crít}}} = 2{,}38\cdot 10^{-3}\bar{x}^{1/2}.$$

Conforme a este resultado $\delta_{\text{pl}} = 1{,}356\delta_{\text{inc}} = 1{,}356\cdot 2{,}38\cdot 10^{-3}\bar{x}^{1/2}x_{\text{lam}} = 11{,}14\cdot 10^{-5}\bar{x}^{1/2}$ m. En el extremo del sector laminar $(\bar{x} = 1)$ $\delta_{\text{pl}} = 11{,}14\cdot 10^{-5}$ m.

Así, pues, en el extremo del sector laminar en el cono $\delta_{\text{cono}} \approx 0{,}578\cdot 11{,}14 \times 10^{-5}$ m $= 6{,}439\cdot 10^{-2}$ mm.

Calculemos los parámetros de rozamiento en el sector turbulento. Como en el punto de transición los espesores de la capa límite laminar y turbulenta son iguales,

$$0{,}578\cdot 4{,}64x_{\text{lam}}\mathbf{Re}_{\text{crít}}^{-1/2}(\delta_{\text{comp}}/\delta_{\text{inc}})_{\text{lam}} = 0{,}523\cdot 0{,}37\Delta x\,\mathbf{Re}_{\Delta x}^{-1/5}(\delta_{\text{comp}}/\delta_{\text{inc}})_{\text{tur}},$$

donde $\Delta x = O'P$ (fig. 12.8) y $\mathbf{Re}_{\Delta x} = V_\delta\Delta x/\nu_\delta = (V_\delta\rho_\delta/\mu_\delta)\,\Delta x = 1{,}101\cdot 10^8\,\Delta x$.

Tomando en consideración que el número crítico $\mathbf{Re}_{\text{crít}} = 3{,}8\cdot 10^6$ y $x_{\text{lam}} = 3{,}451\cdot 10^{-2}$ m, resolviendo la ecuación obtenemos $\Delta x = O'P = 3{,}907\cdot 10^{-3}$ m. Este valor determina el sector desde el punto de transición P hasta el borde de ataque convencional de la placa (punto O' en la fig. 12.8), en el que la capa límite es por completo turbulenta. La coordenada x_{tur} en las correspondientes fórmulas para los parámetros de la capa límite turbulenta se debe contar desde el punto O'. Para el coeficiente local de rozamiento en el cono

$$c_{fx\ \text{cono}} = 1{,}176c_{fx\ \text{pl}} = 1{,}176\,[(c_{fx})_{\text{comp}}/(c_{fx})_{\text{inc}}]\,(c_{fx})_{\text{inc}} = 0{,}9399\,(c_{fx})_{\text{inc}},$$

donde $(c_{fx})_{\text{inc}} = 0{,}0598\bar{x}^{-1/5}/(\mathbf{Re}_{b\ \text{tur}})^{1/5}$ $(\bar{x} = x/b_{\text{tur}})$.

De acuerdo con la fig. 12.8, $b_{\text{tur}} = (O'P) + (PK) = \Delta x + (x_{\text{cono}} - x_{\text{lam}}) = 4{,}969$ m. Con arreglo a esto

$$\mathbf{Re}_{b\ \text{tur}} = V_\delta\rho_\delta b_{\text{tur}}/\mu_\delta = 5{,}471\cdot 10^8;\quad (c_{fx})_{\text{inc}} = 0{,}1069\cdot 10^{-2}\bar{x}^{-1/5}.$$

Así, pues, en el cono $c_{fx\ \text{cono}} = 0{,}1005\cdot 10^{-2}\bar{x}^{-1/5}$. En el extremo del cono $(\bar{x} = 1)$ $c_{fx\ \text{cono}} = 0{,}1005\cdot 10^{-2}$.

El coeficiente medio de rozamiento

$$c_{f\ \text{cono}} = 1{,}045c_{f\ \text{pl}} = 1{,}045\,[(c_f)_{\text{comp}}/(c_f)_{\text{inc}}]\,(c_f)_{\text{inc}} = 1{,}045\cdot 0{,}7992\,(c_f)_{\text{inc}} = 1{,}12\cdot 10^{-3}.$$

Reduzcamos esta magnitud a la presión de velocidad del flujo incidente:

$$c_{f\infty} = c_{f\ \text{cono}}\rho_\delta V_\delta^2/(\rho_\infty V_\infty^2) = 5{,}788\cdot 10^{-3}.$$

El espesor de la capa límite

$$\delta_{\text{cono}} = 0{,}523\delta_{\text{pl}} = 0{,}523\,(\delta_{\text{comp}}/\delta_{\text{inc}})\,\delta_{\text{inc}} = 0{,}5962\delta_{\text{inc}}.$$

A continuación, hallamos

$$\delta_{\text{inc}}/b_{\text{tur}} = 0{,}37\bar{x}^{4/5}/(\mathbf{Re}_{b\ \text{tur}})^{1/5}\quad (\bar{x} = x/b_{\text{tur}}).$$

Como $\mathbf{Re}_{b\ \text{tur}} = 5{,}471\cdot 10^8$, $b_{\text{tur}} = 4{,}969$ m, obtenemos $\delta_{\text{inc}} = 3{,}287 \times 10^{-2}\bar{x}^{4/5}$ m.

Por esto, $\delta_{\text{cono}} = 1{,}960\cdot 10^{-2}\bar{x}^{4/5}$ m. En el extremo del cono $(\bar{x} = 1)$ $\delta_{\text{cono}} = 1{,}96\cdot 10^{-2}$ m.

Determinemos el coeficiente medio de rozamiento para un cono con superficie lateral S_{lat}:

$$c_f = c_{f\,cono}^{lam} S_{lam}/S_{lat} + c_{f\,cono}^{tur\,1} S_{tur\,1}/S_{lat} - c_{f\,cono}^{tur\,2} S_{tur\,2}/S_{lat}.$$

Aquí,

$$c_{f\,cono}^{lam} = c_{f\infty} = 3{,}64\cdot 10^{-3};\quad c_{f\,cono}^{tur\,1} = c_{f\infty} = 5{,}788\cdot 10^{-3}.$$

A continuación, determinamos

$$\mathrm{Re}_{\Delta x} = V_\delta \rho_\delta \Delta x/\mu_\delta = 0{,}4302\cdot 10^6 \quad \text{y hallamos} \quad c_{f,\,cono}^{tur\,2} = 24{,}18\cdot 10^{-3}.$$

Para los correspondientes sectores de la superficie del cono tenemos (fig. 12.8)

$$S_{lam} = \pi r_{lam} x_{lam} = \pi x_{lam}^2 \operatorname{sen} \beta_{cono} = 7{,}654\cdot 10^{-4}\pi;$$

$$S_{tur\,1} = \pi \operatorname{sen} \beta_{cono} (x_c^2 - x_{lam}'^2).$$

Como $x'_{lam} = x_{lam} - \Delta x = 3{,}06\cdot 10^{-2}$ m, $S_{tur\,1} \approx 16{,}07\pi$; $S_{tur\,2} = \pi \operatorname{sen} \beta_{cono} [x_{lam}^2 - (x_{lam} - \Delta x)^2] = 1{,}635\cdot 10^{-4}\pi$.

La superficie lateral del cono $S_{lat} = \pi r_{máx.t} x_c = \pi x_c^2 \operatorname{sen} \beta_{cono} = 16{,}07\pi$. Determinamos el coeficiente medio de rozamiento: $c_f \approx 5{,}788\cdot 10^{-3}$.

La correspondiente fuerza de resistencia

$$X_f = c_f q_\infty S_{lat} = c_f (kp_\infty \mathrm{M}_\infty^2/2)\, \pi x_c^2 \operatorname{sen} \beta_{cono} = 1{,}509\cdot 10^6 \text{ N}.$$

12.14. Determinemos algunas características geométricas del perfil. El ángulo de inclinación de la tangente en un punto tomado al azar

$$\operatorname{tg} \beta = dy_1/dx_1 = (2y_{1máx.t}/x_{1máx.t})(1 - x_1/x_{1máx.t}) = 0{,}08\,(1 - x_1).$$

En el punto del borde de ataque $\operatorname{tg} \beta_0 = (dy_1/dx_1)_{x1=0} = 0{,}08$ ($\beta_0 \approx 4°34'$). En la fig. 12.2 vemos que el elemento del arco $dx = dx_1/\cos \beta = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}\, dx_1$.

Como resultado de la integración, hallamos

$$x = (1/0{,}16)\{\operatorname{tg} \beta_0 \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \beta_0} - \operatorname{tg} \beta \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \beta} +$$
$$+ \ln[(\operatorname{tg} \beta_0 + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \beta_0})/(\operatorname{tg} \beta + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \beta})]\}.$$

P. ej., con $x_1 = 0{,}1$ m ($\operatorname{tg} \beta = 0{,}072$) $x = 0{,}1002$ m.

Haciendo uso de las tablas de la atmósfera normal, según la altura prefijada $H = 20$ km, podemos hallar los parámetros del flujo incidente no perturbado (véase el problema 12.11), así como su velocidad $V_\infty = \mathrm{M}_\infty a_\infty = 590{,}1$ m/s. Calculemos los parámetros del aire en el flujo libre junto al perfil. Para el borde de ataque cuneiforme, según los valores de $\mathrm{M}_\infty = 2$ y $\beta_{cuña} = \beta_0 = 4{,}574°$, en la gráfica $\theta_{ch} = f(\mathrm{M}_\infty, \beta_{cuña})$ hallamos el ángulo de inclinación de la onda de choque $\theta_{ch} = 33{,}9°$. Seguidamente, calculamos los parámetros del flujo tras dicha onda, teniendo en cuenta que el número $\mathrm{M}_{\infty n} = \mathrm{M}_\infty \operatorname{sen} \theta_{ch} = 1{,}116$:

$$V_2'/V_\infty = \cos \theta_{ch}/\cos(\theta_{ch} - \beta_0) = 0{,}952;$$

$$p_2'/p_\infty = [2k/(k+1)]\,\mathrm{M}_{n\infty}^2 - (k-1)/(k+1) = 1{,}285;$$

$$\rho_2'/\rho_\infty = \mathrm{M}_{n\infty}^2/\{1 - (k-1)/(k+1) + [(k-1)/(k+1)]\,\mathrm{M}_{n\infty}^2\} = 1{,}196;$$

$$a_\infty/a_2' = \sqrt{(p_\infty/p_2')(\rho_2'/\rho_\infty)} = 0{,}9646;\quad \mathrm{M}_2' = (V_2'/V_\infty)(a_\infty/a_2')\,\mathrm{M}_\infty = 1{,}8367.$$

Con objeto de calcular los números **M** en otros puntos del perfil emplearemos el método de las características y la correspondiente tabla del flujo isentrópico supersónico de los valores de los ángulos ω (**M**), que se determinan con la ecuación

$\omega_i = \omega_0 + (\beta_0 - \beta_i)$. Aquí el valor de $\omega_0 = 21{,}784°$ se toma en la indicada tabla según el número $M_2' = 1{,}8367$ tras la onda de choque. P. ej., en el punto con coordenada $x_1 = 0{,}1$ m, $\operatorname{tg} \beta_1 = 0{,}072$ ($\beta_1 = 4{,}118°$), el ángulo $\omega_1 = \omega_0 + (\beta_0 - \beta_1) = 22{,}24°$. De acuerdo con este valor, en la mencionada tabla, hallamos el correspondiente número M en la frontera externa de la capa límite $M_{\delta 1} = 1{,}8528$.

De forma análoga calculamos el número $M_{\delta i}$ en otros puntos del perfil. Según los valores hallados de $M_{\delta i}$ determinamos la velocidad relativa:

$$\bar{V}_{\delta i} = V_{\delta i}/V_{\text{máx}} = \{1 - [1 + M_{\delta i}^2 (k-1)/2]^{-1}\}^{1/2}.$$

En particular, para $M_{\delta 1} = 1{,}8528$ la velocidad relativa $\bar{V}_{\delta 1} = 0{,}63805$. Conforme a los datos de las tablas, mediante métodos numéricos, es posible determinar los valores locales de la derivada $d\bar{V}_\delta/dx_1$:

$$(d\bar{V}_\delta/dx_1)_i = (\bar{V}_{\delta(i+1)} - \bar{V}_{\delta(i-1)})/(2h_{x1}),$$

donde el paso $h_{x1} = 0{,}1$ m.

En particular, para el punto 1

$$(d\bar{V}_\delta/dx_1)_1 = (\bar{V}_{\delta 2} - \bar{V}_{\delta 0})/(2h_{x1}) = (0{,}64126 - 0{,}63474)/(2 \cdot 0{,}1) = 0{,}0326 \ 1/\text{m}.$$

Las derivadas en los puntos primero y último se hallan haciendo uso de las diferencias finitas. Más adelante, empleando los datos sobre las primeras derivadas, determinamos las segundas derivadas $d^2\bar{V}_{\delta i}/dx_1^2$.

Para calcular los parámetros de la capa límite laminar, hay que integrar la ecuación diferencial:

$$d\lambda/d\xi = M_1(\lambda) N_1(\xi) + M_2(\lambda) N_2(\xi),$$

donde

$$\xi = \int_0^x (p_\delta/p_0')\, dx \quad [d\xi = (p_\delta/p_0')\, dx];$$

$$M_1(\lambda) = \lambda (213{,}12 - 1{,}92\lambda - 0{,}2\lambda^2)/(213{,}12 - 5{,}76\lambda - \lambda^2);$$

$$M_2(\lambda) = (7257{,}6 - 1336{,}32\lambda + 37{,}92\lambda^2 + 0{,}8\lambda^3)/(213{,}12 - 5{,}76\lambda - \lambda^2);$$

$$N_1(\xi) = 4\bar{V}_\delta \bar{V}_\delta'/(1 - \bar{V}_\delta^2) + \bar{V}_\delta''/\bar{V}_\delta';$$

$$N_2(\xi) = \bar{V}_\delta' \bar{V}_\delta/(1 - \bar{V}_\delta^2) + \bar{V}_\delta'/\bar{V}_\delta = \bar{V}_\delta'/[\bar{V}_\delta (1 - \bar{V}_\delta^2)];$$

$$\bar{V}_\delta' = d\bar{V}_\delta/d\xi; \quad \bar{V}_\delta'' = d^2\bar{V}_\delta/d\xi^2.$$

Transformemos esta ecuación respecto de la variable x_1:

$$d\lambda/dx_1 = M_1(\lambda) N_1(\xi)/(dx_1/d\xi) + M_2(\lambda) N_2(\xi)/(dx_1/d\xi);$$

$$N_1(x_1) = N_1(\xi)/(dx_1/d\xi) = 4\bar{V}_\delta (d\bar{V}_\delta/dx_1)/(1 - \bar{V}_\delta^2) + [(d^2\bar{V}_\delta/d\xi^2)/(d\bar{V}_\delta/d\xi)]\, d\xi/dx_1;$$

$$N_2(x_1) = N_2(\xi)/(dx_1/d\xi) = (d\bar{V}_\delta/dx_1)/[\bar{V}_\delta (1 - \bar{V}_\delta^2)].$$

Aguí,

$$\bar{d}V_\delta = (dV_\delta/dx_1)\, dx_1/d\xi = (d\bar{V}_\delta/dx_1) \cos\beta\, (p_0'/p_\delta);$$
$$d^2\bar{V}/d\xi^2 = (d/d\xi)(d\bar{V}_\delta/d\xi) = (d/dx_1)(d\bar{V}_\delta/d\xi)(dx_1/dx)\, dx/d\xi;$$
$$(d/dx)(d\bar{V}_\delta/d\xi) = (d/dx_1)\,[(d\bar{V}_\delta/dx_1)\cos\beta\,(p_0'/p_\delta)] =$$
$$= (d^2\bar{V}_\delta/dx_1^2)\cos\beta\,(p_0'/p_\delta) + (d\bar{V}_\delta/dx_1)\,[(d/dx_1)(\cos\beta)] \times$$
$$\times (p_0'/p_\delta) + (d\bar{V}_\delta/dx_1)\cos\beta\,[(d/dx_1)(p_0'/p_\delta)].$$

Las derivadas (d/dx_1) (cos β) y (d/dx_1) (p_0'/p_δ) se calculan de la siguiente manera. Como tg $\beta = 0{,}08\ (1 - x_1)$, $d\beta/dx_1 = -0{,}08 \cos^2\beta$. Por lo tanto, d $(\cos\beta)/dx_1 =$ $= 0{,}04 \cos\beta \operatorname{sen} 2\beta$.

La derivada

$$(d/dx_1)\,(p_0'/p_\delta) = (d/dx_1)\,[(1 - \bar{V}_\delta^2)^{-k(k-1)}] =$$
$$= [2k/(k-1)]\,(p_0'/p_\delta)\,\bar{V}_\delta\,(d\bar{V}_\delta/dx_1)/(1 - \bar{V}_\delta^2).$$

Así, pues,

$$(d/dx_1)(d\bar{V}_\delta/d\xi) = \cos\beta\,(p_0'/p_\delta)\,\{d^2\bar{V}_\delta/dx_1^2 + 0{,}04 \operatorname{sen} 2\beta\, d\bar{V}_\delta/dx_1 +$$
$$+ [2k/(k-1)]\,[\bar{V}_\delta/(1-\bar{V}_\delta^2)]\,(d\bar{V}_\delta/dx_1)^2\};$$
$$[(d^2\bar{V}_\delta/d\xi^2)/(d\bar{V}_\delta/d\xi)]\, d\xi/dx_1 = (d^2\bar{V}_\delta/dx_1^2)/(d\bar{V}_\delta/dx_1) + 0{,}04 \operatorname{sen}^2\beta +$$
$$+ [2k/(k-1)]\,[\bar{V}_\delta/(1-\bar{V}_\delta^2)]\, d\bar{V}_\delta/dx_1$$

Tomando en consideración que con $k = 1{,}4$ el valor de $2k/(k-1) = 7$, hallamos

$$N_1(x_1) = \frac{4\bar{V}_\delta\,(d\bar{V}_\delta/dx_1)}{1-\bar{V}_\delta^2} + \frac{d^2\bar{V}_\delta/dx_1^2}{d\bar{V}_\delta/dx_1} + 0{,}04 \operatorname{sen} 2\beta + \frac{7\bar{V}_\delta}{1-\bar{V}_\delta^2}\,\frac{d\bar{V}_\delta}{dx_1}\,.$$

De modo que, con el fin de determinar los parámetros de la capa límite laminar, tenemos la ecuación diferencial

$$d\lambda/dx_1 = \mathbf{M}_1(\lambda)\, N_1(x_1) + \mathbf{M}_2(\lambda)\, N_2(x_1), \tag{12.42}$$

en la que N_1 (x_1) y N_2 (x_1) se calculan en cada punto del perfil del modo siguiente:

$$N_1(x_1) = [11\bar{V}_\delta/(1-\bar{V}_\delta^2)]\, d\bar{V}_\delta/dx_1 + 0{,}04 \operatorname{sen} 2\beta +$$
$$+ (d^2\bar{V}_\delta/dx_1^2)/(d\bar{V}_\delta/dx_1); \quad N_2(x_1) = (d\bar{V}_\delta/dx_1)/[\bar{V}_\delta\,(1-\bar{V}_\delta^2)].$$

Utilizando los datos obtenidos para las funciones N_1 y N_2 efectuamos la integración numérica de la ecuación (12.42) y determinamos los valores de λ para cada uno de los puntos elegidos. Con ello, la condición inicial de integración es el valor de $\lambda = 0$ para $\xi = 0$ $(x_1 = 0)$. Ejecutamos la integración, p. ej., según el método de las diferencias finitas con un paso $h_{x1} = 0{,}1$ m.

Ya que al calcular $\Delta\lambda$ se emplea la fórmula de integración numérica de la fila inclinada, teniendo en cuenta las diferencias finitas de tercer orden, por lo menos hay que tener cuatro valores de la derivada $d\lambda/dx_1$. Al comenzar los cálculos sólo tenemos un valor de la derivada en el punto λ_0', determinado con (12.42) a condición de que para $x_1 = 0$ el valor de $\lambda = 0$. Para calcular los valores que faltan es posible utilizar, en particular, el procedimiento de aproximaciones sucesivas, consistente en la especificación de los valores obtenidos de las funciones y de sus derivadas en los primeros puntos. Los cálculos se realizan en el orden siguiente.

Efectuamos la primera aproximación: $\Delta\lambda_0 = h_{x1}\lambda_0'$; $\lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda_0$; a continuación, la segunda: $\Delta\lambda_0 = h_{x1}(\lambda_0' + 0{,}5\,\Delta\lambda_0')$; $\lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda_0$; $\Delta\lambda_1 = h_{x1}(\lambda_0' + 0{,}5\,\Delta\lambda_0')$; $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_1$; después de ésta, la tercera:

$$\Delta\lambda_0 = h_{x1}[\lambda_0' + 0{,}5\,\Delta\lambda_0' - (1/12)\,\Delta^2\lambda_0']; \quad \lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda_0;$$
$$\Delta\lambda_1 = h_{x1}[\lambda_1' + 0{,}5\,\Delta\lambda_1' - (1/12)\,\Delta^2\lambda_0']; \quad \lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_1;$$
$$\Delta\lambda_2 = h_{x1}[\lambda_2' + 0{,}5\,\Delta\lambda_1' + (5/12)\,\Delta^2\lambda_0']; \quad \lambda_3 = \lambda_2 + \Delta\lambda_2;$$

y, por fin, la cuarta:

$$\Delta\lambda_0 = h_{x1}[\lambda_0' + 0{,}5\,\Delta\lambda_0' - (1/12)\,\Delta^2\lambda_0' + (1/24)\,\Delta^3\lambda_0']; \quad \lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda_0;$$
$$\Delta\lambda_1 = h_{x1}[\lambda_1' + 0{,}5\Delta\lambda_1' - (1/12)\,\Delta^2\lambda_0' - (1/24)\,\Delta^3\lambda_0']; \quad \lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_1;$$
$$\Delta\lambda_2 = h_{x1}[\lambda_2' + 0{,}5\,\Delta\lambda_2' - (1/12)\,\Delta^2\lambda_1' - (1/24)\,\Delta^3\lambda_0']; \quad \lambda_3 = \lambda_2 + \Delta\lambda_2.$$

Más adelante los cálculos se realizan de la siguiente manera. Por los elementos de la fila inclinada determinamos

$$(\Delta\lambda_n)_I = h_{x1}[\lambda_n' + 0{,}5\,\Delta\lambda_{n-1}' + (5/12)\,\Delta^2\lambda_{n-2}' + (3/8)\,\Delta^3\lambda_{n-3}'];$$
$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + (\Delta\lambda_n)_I,$$

en tanto que con la ecuación (12.42) se halla λ_{n+1}'. Ahora, conociendo λ_{n+1}', podemos calcular las diferencias finitas $\Delta\lambda_n'$, $\Delta^2\lambda_{n-1}'$, $\Delta^3\lambda_{n-2}'$, y precisar $\Delta\lambda_n$ utilizando la fila quebrada:

$$(\Delta\lambda_n)_{II} = h_{x1}[\lambda_n' + 0{,}5\,\Delta\lambda_n' - (1/12)\,\Delta^2\lambda_{n-1}' - (1/24)\,\Delta^3\lambda_{n-2}'].$$

En particular, $\lambda = 0{,}2965$ para el punto $x_1 = 0{,}1$ y $\lambda = 5{,}719$ para $x_{20} = 2$ m.

Habiendo calculado λ podemos pasar al cálculo del esfuerzo local y el correspondiente coeficiente de rozamiento:

$$\tau_{\text{par}} = \bar{V}_\delta V_{\text{máx}} \sqrt{\mu_\delta\rho_\delta V_{\text{máx}}\,(d\bar{V}_\delta/dx_1)\cos\beta} \times$$
$$\times (1 - \bar{V}_\delta^2)^{-0{,}5[n+(k+1)/(k-1)]}\,(2 + \lambda/6)/\sqrt{\lambda};$$
$$c_{fx} = 2\tau_{\text{par}}/(\rho_\delta V_\delta^2) = [2/(\bar{V}_\delta V_{\text{máx}})] \times$$
$$\times \sqrt{(\mu_\delta/\rho_\delta)\,V_{\text{máx}}\,(d\bar{V}_\delta/dx_1)\cos\beta}\;(1 - \bar{V}_\delta^2)^{-0{,}5[n+(k+1)/(k-1)]}\,(2 + \lambda/6)/\sqrt{\lambda},$$

donde $V_{\text{máx}} = a_\infty\sqrt{2/(k-1) + \mathrm{M}_\infty^2} = 885{,}2$ m/s.

La viscosidad dinámica

$$\mu_{\delta i} = \mu_\infty (T_{\delta i}/T_\infty)^{0{,}76} = \mu_\infty [1{,}8\,(1 - \bar{V}_{\delta i}^2)]^{0{,}76}. \qquad (12.42')$$

Para $x_1 = 0{,}1$ m esta viscosidad $\mu_{\delta 1} = 1{,}494\cdot 10^{-5}$ Pa·s, y para $x_{20} = 2$ m, ella es igual $\mu_{\delta 20} = 1{,}342\cdot 10^{-5}$ Pa·s.

La densidad

$$\rho_{\delta i} = (\rho_{\delta i}/\rho_0')\,\rho_0' = (\rho_{\delta i}/\rho_0')\,(\rho_0'/\rho_2')\,(\rho_2'/\rho_\infty)\,\rho_\infty, \qquad (12.42'')$$

donde

$$\rho_{\delta i}/\rho_0' = (1 - \bar{V}_\delta^2)^{1/(k-1)} = (1 - V_\delta^2)^{2{,}5}; \quad \rho_2'/\rho_0' = \rho_{\delta 0}/\rho_0' = (1 - \bar{V}_{\delta 0}^2)^{1/(k-1)} =$$
$$= 0{,}2755; \quad \rho_2'/\rho_\infty = 1{,}196; \quad \rho_\infty = 8{,}89097\cdot 10^{-2}\ \text{kg/m}^3.$$

P. ej., en el punto $x_1 = 0{,}1$ m la densidad $\rho_{\delta 1} = 0{,}1045$ kg/m³, en tanto que en el $x_{20} = 2$ m, ella es igual a $\rho_{\delta 20} = 0{,}0735$ kg/m³. En esos mismos puntos los cálculos proporcionan los coeficientes de rozamiento $c_{fx1} = 5{,}021\cdot 10^{-3}$ y $c_{fx20} = 2{,}57\cdot 10^{-3}$. Para comparar podemos hallar los valores de c_{fxi} que se obtienen

sin tener en cuenta el gradiente longitudinal de velocidad:

$$c_{fxi}^{\lambda=0} = 0{,}646\,[1 + M_{\delta i}^2\,(k-1)/2]^{(n-1)/2}\,\sqrt{Re_x},$$

donde $Re_x = \bar{V}_{\delta i}\rho_{\delta i}x/\mu_{\delta i} = V_{máx}\bar{V}_{\delta i}\rho_{\delta i}x/\mu_{\delta i}$.

En particular, para $x_1 = 0{,}1$ m el número $Re_x = 0{,}396\cdot10^6$, el coeficiente $c_{fxi}^{\lambda=0} = 0{,}962\cdot10^{-3}$.

12.15. Como muestran las investigaciones teóricas la aplicación del método de la entalpía (temperatura) determinante, al calcular la termotransferencia, ofrece los resultados más satisfactorios *para las placas con superficie isotérmica*. Resultados admisibles se obtienen asimismo para flujos caracterizados por pequeños gradientes de los parámetros.

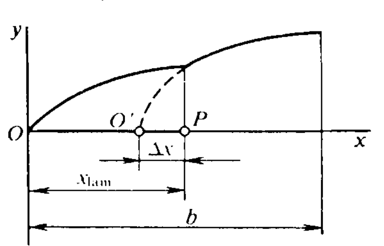


Fig. 12.9. Capa límite mixta en una placa

12.16. Para $H = 10$ km determinamos en las tablas de la atmósfera normal los parámetros del aire que, simultáneamente son los de la frontera de la capa límite de la placa (véase el problema (12.5). A continuación, hallamos el número $M_\infty = M_\delta = V_\delta/a_\delta = 13{,}35$ y determinamos la extensión del sector laminar $x_{lam} = 0{,}008813$ m (fig. 12.9), haciendo uso del valor del número crítico $Re_{crít} = 10^6 = V_\delta\rho_\delta x_{lam}/\mu_\delta$.

Más adelante, con (12.36), hallamos la entalpía determinante y, con (12.37), la entalpía de recuperación que entra en (12.36), con la particularidad de que $i_r = i_\delta + rV_\delta^2/2$, donde $i_\delta = c_{p\delta}T_\delta = 0{,}2244\cdot10^6$ m²/s² y $r_{lam} = \sqrt{Pr}$ para el flujo laminar y $r_{tur} = \sqrt[3]{Pr}$, para el turbulento.

Tomemos el número $Pr = 0{,}64$. Entonces, para el flujo laminar $r_{lam} = 0{,}8$ e $i_r = 6{,}624\cdot10^6$ m²/s², mientras que para el turbulento, $r_{tur} = \sqrt[3]{0{,}64} = 0{,}8619$ e $i_r = 7{,}12\cdot10^6$ m²/s².

Para calcular i^* es preciso conocer la entalpía del gas a la temperatura de la pared $i_{par} = c_{p\,par}T_{par} = 0{,}3015\cdot10^6$ m²/s². De acuerdo con estos datos para la capa límite laminar $i^* = 1{,}671\cdot10^6$ m²/s².

Conociendo $p_\delta = 2{,}65\cdot10^4$ Pa (0,2701 kg/cm²) e $i^* = 1{,}671\cdot10^6$ m²/s², en las tablas de las funciones termodinámicas y gasodinámicas a grandes velocidades y altas temperaturas del flujo de aire, hallamos $T^* = 1515$ K, $\mu_m^* = 28{,}96$.

Para la capa límite turbulenta $i^* = 1{,}78\cdot10^6$ m²/s². Según este valor de i^* y de la presión $p_\delta = 2{,}65\cdot10^4$ Pa (0,2701 kg/cm²), en las tablas mencionadas más arriba, determinamos $T^* = 1612$ K, $\mu_m^* = 28{,}96$.

El coeficiente medio de rozamiento en el sector laminar [véase (12.39')] $(c_f)_{comp}/(c_f)_{inc} = 0{,}7947$, en tanto que en el turbulento [(véase (12.41)], $(c_f)_{comp}/(c_f)_{inc} = 0{,}2777$.

Analicemos la termotransferencia en el sector laminar de la capa límite. En él el coeficiente medio de rozamiento:

$$(c_f)_{comp} = [(c_f)_{comp}/(c_f)_{inc}]\,(c_f)_{inc},$$

donde $(c_f)_{inc} = 1{,}292/\sqrt{Re_{x\,lam}} = 1{,}292/\sqrt{Re_{crít}} = 1{,}292\cdot10^{-3}$, de donde $(c_f)_{comp} = 1{,}027\cdot10^{-3}$.

El correspondiente número medio de Stanton $St = [(c_f)_{comp}/2]\,Pr^{-2/3} = 0{,}6914\cdot10^{-3}$; el flujo específico de calor $q = St\rho_\delta V_\delta\,(i_r - i_{par}) = 7{,}23$ MW/m² y la termotransferencia total $Q_{lam} = qS_{lam} = qx_{lam}l = 63{,}72$ kW.

Examinemos el sector turbulento. Determinemos la longitud convencional de la placa en la que la capa límite es turbulenta. Partiendo de la ecuación

$$4{,}64x_{\text{lam}}\,(\mathbf{Re}_{\text{crít}})^{-1/2}\,(\delta_{\text{comp}}/\sigma_{\text{inc}})_{\text{lam}} = 0{,}37\;\Delta x\;\mathbf{Re}_{\Delta x}^{-1/5}\,(\delta_{\text{comp}}/\delta_{\text{inc}})_{\text{tur}},$$

la razón de los espesores de las capas se hallan utilizando (12.38) y (12.40):

$$(\delta_{\text{comp}}/\delta_{\text{inc}})_{\text{lam}} = 5{,}393; \quad (\delta_{\text{comp}}/\delta_{\text{inc}})_{\text{tur}} = 2{,}005.$$

Poniendo los datos y resolviendo la ecuación aducida, obtenemos $\Delta x \approx 0{,}004$ m.

Ahora se puede calcular el coeficiente medio de rozamiento:

$$c_f = c_f^{\text{tur 1}}S_{\text{tur 1}}/S_{\text{pl.tur}} - c_f^{\text{tur 2}}S_{\text{tur 2}}/S_{\text{pl.tur}},$$

donde $c_f^{\text{tur 1}} = (c_f)_{\text{comp}}^{\text{tur 1}} = [(c_f)_{\text{comp}}/(c_f)_{\text{inc}}]\,(c_f)_{\text{inc}}$; $(c_f)_{\text{inc}} = 0{,}075/(\mathbf{Re}_{b1})^{1/5}$.

Como $b_1 = b - x_{\text{lam}} + \Delta x = 4{,}995$ m, obtenemos $\mathbf{Re}_{b1} = V_\delta b_1/\nu_\delta = 5{,}668\cdot10^8$, por lo que $(c_f)_{\text{inc}} = 1{,}332\cdot10^{-3}$.

Así, pues, $c_f^{\text{tur 1}} = 0{,}3699\cdot10^{-3}$. Después, hallamos

$$c_f^{\text{tur 2}} = (c_f)_{\text{comp}}^{\text{tur 2}} = [(c_f)_{\text{comp}}/(c_f)_{\text{inc}}]\,(c_f)_{\text{inc}},$$

donde $(c_f)_{\text{inc}} = 0{,}075/(\mathbf{Re}_{\Delta x})^{1/5} = 0{,}075/(V_\delta\,\Delta x/\nu_\delta)^{1/5} = 5{,}542\cdot10^{-3}$.

Por lo tanto, $c_f^{\text{tur 2}} = 1{,}539\cdot10^{-3}$. Con arreglo a estos datos

$$c_f = c_f^{\text{tur 1}}\,(b - x_{\text{lam}} + \Delta x)/(b - x_{\text{lam}}) - c_f^{\text{tur 1}}\,\Delta x/(b - x_{\text{lam}}) = 0{,}369\cdot10^{-3}.$$

El número medio de Stanton $\mathbf{St} = (c_f/2)\,\mathbf{Pr}^{-2/3} = 0{,}2484\cdot10^{-3}$, el flujo específico de calor $q = \mathbf{St}\rho_\delta V_\delta\,(i_r - i_{\text{par}}) = 2{,}801$ MW/m² y la correspondiente termotransferencia sumaria

$$Q_{\text{tur}} = qS_{\text{pl.tur}} = q\,(b - x_{\text{lam}})\,l = 13{,}98 \text{ MW}.$$

El flujo total de calor hacia uno de los lados de la placa

$$Q = Q_{\text{lam}} + Q_{\text{tur}} = 14{,}04 \text{ MW}.$$

12.17. Con las tablas de la atmósfera normal determinamos los parámetros del aire a la altura $H = 10$ km (véase el problema 12.5). A la altura prefijada y a la velocidad de vuelo corresponde el número $\mathbf{M}_\infty = V_\infty/a_\infty = 11{,}68$.

En las tablas de los flujos cónicos supersónicos hallamos los parámetros del flujo no viscoso en la superficie del cono, los que tomamos como los de la frontera externa de la capa límite:

$$V_\delta = V_{\delta\,\text{cono}} = 2527 \text{ m/s};\; i_\delta = i_{\text{cono}} = 3{,}16\cdot10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2;$$

$$p_\delta = p_{\text{cono}} = 15 \text{ kg/cm}^2\ (147{,}2\cdot10^4 \text{ Pa});\; \rho_\delta = \rho_{\text{cono}} = 0{,}33 \text{ kg s}^2/\text{m}^4\ (3{,}237 \text{ kg/m}^3)$$

$$T_\delta = T_{\text{cono}} = 2630 \text{ K};\; S_\delta = S_{\text{cono}} = 8960 \text{ m}^2/(\text{s}^2\cdot\text{K});\; \mu_{m\delta} = 28{,}91;$$

$$a_\delta = 968 \text{ m/s}.$$

Según la velocidad $V_\delta = 2527$ m/s y la velocidad del sonido $a_\delta = 968$ m/s determinamos el número local de Mach: $\mathbf{M}_\delta = V_\delta/a_\delta = 2{,}61$. Acto seguido calculamos la entalpía determinante con la fórmula (12.36). A la temperatura de la pared $T_{\text{par}} = 600$ K, la entalpía del gas que entra en la mencionada fórmula $i_{\text{par}} = c_{p\text{par}}\,T_{\text{par}} = 0{,}603\cdot10^6$ m²/s².

Examinemos la capa límite laminar. Suponiendo que el número $\mathbf{Pr} = 0{,}64$ hallamos $r_{\text{lam}} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$ y obtenemos

$$i_r = i_\delta + r_{\text{lam}}V_\delta^2/2 = 5{,}714\cdot10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2; \quad i^* = 2{,}443\cdot10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

De acuerdo con este valor de i^* y el de la presión $p_\delta = 15$ kg/cm² (147,2 × × 10⁴ Pa), según el diagrama $i - p$ y la dependencia $\mu_m = f(p, T)$ calculamos $T^* = 2150$ K, $\mu_m^* = 28,96$. Para la capa turbulenta $r_{tur} = \sqrt[3]{Pr} = 0,862$; por consiguiente,

$$i_r = i_\delta + rV_\delta^2/2 = 5,912 \cdot 10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2; \quad i^* = 2,487 \cdot 10^6 \ m^2/\text{s}^2.$$

Con arreglo al diagrama $i - p$ y a la dependencia $\mu_m = f(p, T)$, según i^* y $p_\delta = 15$ kg/cm² (147,2·10⁴ Pa), hallamos $T^* = 2155$ K; $\mu_m^* = 28,96$.

Calculamos los coeficientes medios de rozamiento para la placa haciendo uso de los parámetros del flujo libre en el cono. De acuerdo con (12.39′) y (12.41), la razón de los coeficientes de rozamiento para la capa límite laminar $(c_f)_{comp}/(c_f)_{inc} = 1,025$ y para la turbulenta, $(c_f)_{comp}/(c_f)_{inc} = 1,139$.

Ahora, determinemos la extensión de la capa límite laminar. Sobre la base de datos experimentales se ha establecido la siguiente dependencia entre el número crítico $\mathbf{Re}_{crít}$ y el factor de temperatura $\overline{T}_{par} = T_{par}/T_r$:

$$\mathbf{Re}_{crít}/(\mathbf{Re}_{crít})_{\overline{T}_{par}=1} = (\overline{T}_{par})^{-2/3},$$

donde $(\mathbf{Re}_{crít})_{\overline{T}_{par}=1}$ es el número crítico de Reynolds con $\overline{T}_{par} = T_{par}/T_r = 1$.

Según el valor de $\mathbf{M}_\delta = 2,61$, con ayuda de la dependencia experimental $\mathbf{Re}_{crít} = f(\mathbf{M}, \overline{T})$, hallamos $(\mathbf{Re}_{crít})_{\overline{T}_{par}=1} \approx 4 \cdot 10^6$ y calculamos el valor de $\overline{T}_{par} = T_{par}/T_r = 0,158$ [donde la temperatura $T_r = 3805$ K se ha determinado con ayuda del diagrama $i - p$ por el valor de $i_r = 5,714 \cdot 10^6$ m²/s² y $p_\delta = 15$ kg/cm² (147,2·10⁴ Pa)]. Por lo tanto, $\mathbf{Re}_{crít} \approx 13,7 \cdot 10^6$. La extensión del sector laminar se halla con la ecuación $\mathbf{Re}_{crít} = V_\delta \rho_\delta x_{lam}/\mu_\delta$. Aquí, la viscosidad dinámica $\mu_\delta = 9,172 \cdot 10^{-5}$ Pa·s. Teniendo asimismo en cuenta que $\rho_\delta = 3,237$ kg/m³ y $V_\delta = 2527$ m/s, obtenemos $13,7 \cdot 10^6 = 2527 \cdot 3,237\, x_{lam}/(9,172 \cdot 10^{-5})$, de donde $x_{lam} = 0,1536$ m.

El coeficiente medio de rozamiento en el sector laminar

$$c_{f\,cono} = (2/3)\sqrt{3}\,c_{f\,pl} = (2/3)\sqrt{3}\,[(c_f)_{comp}/(c_f)_{inc}]\,(c_f)_{inc},$$

donde $(c_f)_{inc} = 1,292/\sqrt{\mathbf{Re}_{crít}} = 0,349 \cdot 10^{-3}$, por lo que $c_{f\,cono} = 0,4131 \cdot 10^{-3}$.

El número medio de Stanton

$$\mathbf{St} = (c_{f\,cono}/2)\,\mathbf{Pr}^{-2/3} = 0,2781 \cdot 10^{-3}$$

y el correspondiente flujo térmico específico

$$q = \mathbf{St}\rho_\delta V_\delta\,(i_r - i_{par}) = 11,63 \text{ MW/m}^2.$$

La termotransferencia total en el sector laminar $Q_{lam} = qS_{lam} = q\pi r_{lam} x_{lam} = 0,5538$ MW.

Determinamos la coordenada del punto O' en el cono que es el comienzo de la capa límite turbulenta (véase la fig. 12.8). Aducimos la ecuación

$$0,578 \cdot 4,64 x_{lam} \mathbf{Re}_{crít}^{-1/2}\,(\delta_{comp}/\delta_{inc})_{lam} = 0,523 \cdot 0,37\,\Delta x\,\mathbf{Re}_{\Delta x}^{-1/5}\,(\delta_{comp}/\delta_{inc})_{tur}.$$

Aquí, $\mathbf{Re}_{\Delta x} = V_\delta \rho_\delta\,\Delta x/\mu_\delta = 0,8918 \cdot 10^8\,\Delta x$; $(\delta_{comp}/\delta_{inc})_{lam}$ y $(\delta_{comp}/\delta_{inc})_{tur}$ son las razones de los espesores locales para las capas límites laminar (12.38) y turbulenta (12.40), respectivamente:

$$(\delta_{comp}/\delta_{inc})_{lam} = 0,8368; \quad (\delta_{comp}/\delta_{inc})_{tur} = 0,9320.$$

Resolviendo la ecuación, obtenemos $\Delta x = 0,7565 \cdot 10^{-2}$ m.

El coeficiente medio de rozamiento en el sector turbulento

$$c_{f\,\text{cono}}^{\text{tur 1}} = 1{,}045c_{f\ \text{pl}} = 1{,}045\ [(c_f)_{\text{comp}}/(c_f)_{\text{inc}}]\ (c_f)_{\text{inc}},$$

donde $(c_f)_{\text{inc}} = 0{,}075/(\mathbf{Re}_{b\ \text{tur}})^{1/5}$.

De acuerdo con la fig. 12.8, $b_{\text{tur}} = \Delta x + (x_{\text{cono}} - x_{\text{lam}})$.

Introduciendo aquí $x_{\text{cono}} = h/\cos\beta_{\text{cono}} = 6{,}527$ m, hallamos $b_{\text{tur}} = 6{,}381$ m. Con arreglo a esto, $\mathbf{Re}_{b\ \text{tur}} = V_\delta\rho_\delta b_{\text{tur}}/\mu_\delta = 5{,}691\cdot10^8$; entonces $(c_f)_{\text{inc}} = 1{,}33 \times \times 10^{-3}$. Por esto, $c_{f\,\text{cono}}^{\text{tur 1}} = 1{,}584\cdot10^{-3}$.

El coeficiente medio de rozamiento turbulento en el sector Δx

$$c_{f\,\text{cono}}^{\text{tub 2}} = 1{,}045\,[(c_f)_{\text{comp}}/\,(c_f)_{\text{inc}}]\,(c_f)_{\text{inc}},\ \text{donde}\ (c_f)_{\text{inc}} = 0{,}075/\,(\mathbf{Re}_{\Delta x})^{1/5}.$$

Como $\mathbf{Re}_{\Delta x} = V_\delta\rho_\delta\,\Delta x/\mu_\delta = 0{,}6746\cdot10^6$, $c_{f\,\text{cono}}^{\text{tur 2}} = 6{,}094\cdot10^{-3}$.

El coeficiente medio de rozamiento en el sector turbulento

$$c_{f\ \text{cono}} = c_{f\,\text{cono}}^{\text{tur 1}} S_{\text{tur 1}}/S_{\text{lat.tur}} - c_{f\,\text{cono}}^{\text{tur. 2}} S_{\text{tur 2}}/S_{\text{lat.tur}},$$

donde

$$S_{\text{tur 1}} = \pi\,\text{sen}\,\beta_{\text{cono}}\,(x_{\text{cono}}^2 - x_{\text{lam}}'^2).$$

Ya que $x_{\text{cono}} = h/\cos\beta_{\text{cono}} = 6{,}257$ m y $x'_{\text{lam}} = x_{\text{lam}} - \Delta x = 0{,}146$ m, $S_{\text{tur1}} = = 27{,}37\ \pi$ m². Seguidamente hallamos $S_{\text{tur2}} = \pi\,\text{sen}\,\beta_{\text{cono}}\,(x_{\text{lam}}^2 - x_{\text{lam}}'^2) = = 0{,}001464\ \pi$ m². La superficie lateral $S_{\text{lat.tur}} \cong S_{\text{lat}} = \pi r_{\text{máx.t}} x_{\text{cono}} = = \pi\,\text{sen}\,\beta_{\text{cono}} x_{\text{cono}}^2 = 27{,}38\pi$ m².

Por lo tanto, $c_{f\ \text{cono}} = 1{,}583\cdot10^{-3}$. El correspondiente número de Stanton $\mathbf{St} = (c_{f\ \text{cono}}/2)\ \mathbf{Pr}^{-2/3} = 1{,}066\cdot10^{-3}$.

El flujo específico de calor $q = \mathbf{St}\rho_\delta V_\delta\ (i_r - i_{\text{par}}) = 46{,}29$ MW/m².

La termotransferencia total en el sector turbulento $Q_{\text{tur}} = q\ (S_{\text{tur1}} - S_{\text{tur2}}) = = 3978$ MW. El flujo sumario de calor hacia el cono $Q = Q_{\text{lam}} + Q_{\text{tur}} = 3979$ MW.

12.18. En las tablas de la atmósfera normal determinamos los parámetros del aire a la altura $H = 30$ km: $p_\infty = 1{,}197\cdot10^3$ Pa; $\rho_\infty = 1{,}841\cdot10^{-2}$ kg/m³; $T_\infty = = 226{,}5$ K; $a_\infty = 301{,}7$ m/s; $\nu_\infty = 8{,}013\cdot10^{-4}$ m²/s; $\mu_\infty = 1{,}475\cdot10^{-5}$ Pa·s. La velocidad del flujo no perturbado $V_\infty = \mathbf{M}_\infty a_\infty = 4526$ m/s.

Para calcular el rozamiento y la termotransferencia, ante todo, hay que hallar los parámetros del flujo no viscoso en la corriente alrededor del cono, que en adelante se toman iguales a los de la frontera externa de la capa límite. Según los valores de $1/\mathbf{M}_\infty = 0{,}0667$ y $\beta_{\text{cono}} = 10°$, en las tablas de los flujos cónicos supersónicos, hallamos $V_{\text{cono}}/V_\infty = 0{,}979$; $\rho_\infty/\rho_{\text{cono}} = 0{,}245$; $T_\infty/T_{\text{cono}} = 0{,}350$; $\bar{p}_{\text{cono}} = = 0{,}0679$.

Por lo tanto,

$$V_{\text{cono}} = V_\delta = 4431\ \text{m/s};\quad p_{\text{cono}} = p_\delta = \bar{p}_{\text{cono}} q_\infty + p_\infty = 0{,}1347\cdot10^5\ \text{Pa};$$

$$\rho_{\text{cono}} = \rho_\delta = 7{,}514\cdot10^{-2}\ \text{kg/m}^3;\quad T_{\text{cono}} = T_\delta = 647{,}2\ \text{K};$$

$$\mathbf{M}_{\text{cono}} = \mathbf{M}_\delta = \mathbf{M}_\infty\,(V_\delta/V_\infty)\sqrt{T_\infty/T_\delta} = 8{,}688;$$

$$\mu_{\text{cono}} = \mu_\delta = \mu_\infty\,(T_\delta/T_\infty)^{0,76} = 3{,}276\cdot10^{-5}\ \text{Pa·s};$$

$$c_{p\ \text{cono}} = c_{p\delta} = c_p\,(T_\delta/T)^{\varphi} = 1055\ \text{J/(kg·K)}.$$

Aquí se ha tomado $\varphi = 0{,}06$, $c_p = 1005$ J/(kg·K) para $T = 288$ K.

Calculamos los parámetros del rozamiento y de la termotransferencia para dos puntos de la superficie del cono, uno de los cuales se encuentra en la capa límite laminar ($\mathbf{Re}_x = 5\cdot10^6$) y, otro, en la turbulenta ($\mathbf{Re}_x = 10^8$).

Capa límite laminar ($\mathbf{Re}_x = 5 \cdot 10^6$). *Primera aproximación.* Adoptamos $i_{par} = i_r$, $r_{lam} = 0{,}85$ y calculamos $i_\delta = c_{p\delta} T_\delta = 0{,}6828 \cdot 10^6$ J/kg; $i_r = i_\delta + r_{lam} V_\delta^2/2 = 9{,}027 \cdot 10^6$ J/kg.

En correspondencia con estos datos la entalpía determinante [véase (12.36)] $i^* = 6{,}691 \cdot 10^6$ J/kg. Según el valor de la entalpía $i^* = 6{,}691 \cdot 10^6$ J/kg y el de la presión $p_\delta = 0{,}1347 \cdot 10^5$ Pa (0,1347 kg/cm²), en el diagrama $i - p$, hallamos la temperatura determinante $T^* = 3425$ K, así como los siguientes parámetros determinantes:

$$c_p^* = 4000 \text{ J/(kg·K)}; \quad \lambda^* = 1{,}119 \text{ W/(m·K)};$$

$$\mu^* = 9{,}81 \cdot 10^{-5} \text{ N·s/m}^2; \quad \rho^* = 1{,}148 \cdot 10^{-2} \text{ kg/m}^3.$$

La razón de los coeficientes medios de rozamiento

$$c_{fx}^*/c_{fx\,\text{inc}} = \sqrt{(\rho^*/\rho_\delta)(\mu^*/\mu_\delta)} = 0{,}6764.$$

El coeficiente local de rozamiento en el cono

$$c_{fx\,\text{cono}}^* = \sqrt{3}\,(c_{fx}/c_{fx\,\text{inc}})\, c_{fx\,\text{inc}}^{\text{pl}},$$

donde $c_{fx\,\text{inc}}^{\text{pl}} = 0{,}664/\sqrt{\mathbf{Re}_x} = 0{,}2969 \cdot 10^{-3}$ es el coeficiente de rozamiento calculado según la fórmula para la placa plana.

Por lo tanto, $c_{fx\,\text{cono}}^* = 0{,}3478 \cdot 10^{-3}$. El número de Prandtl, calculado conforme a los parámetros determinantes, $\mathbf{Pr}^* = c_p^* \mu^*/\lambda^* = 0{,}3507$. El valor local del número de Stanton $\mathbf{St}_x^* = 0{,}5 c_{fx\,\text{cono}}^* \mathbf{Pr}^{*-2/3} = 0{,}3497 \cdot 10^{-3}$.

Con el fin de determinar la temperatura de radiación en equilibrio $T_{par} = T_e$ en el punto prefijado del cono hagamos uso de la ecuación del balance térmico

$$\mathbf{St}_x^* \rho_\delta V_\delta (i_r - i_{par}) = \varepsilon \sigma T_{par}^4. \tag{12.43}$$

Prefijemos una serie de valores de i_{par}, por éstos y p_δ, mediante los correspondientes diagramas $i - p$, hallamos los correspondientes valores de la temperatura T_{par} y calculamos los flujos específicos convectivos de calor q_{conv} [el primer miembro de (12.43)] y los flujos de calor de radiación q_{rad} [segundo miembro de (12.43)]. La temperatura en equilibrio de la pared se calcula partiendo de la condición $q_{conv} = q_{rad}$. En el cálculo tomamos $\varepsilon = 0{,}8$; $\sigma = 5{,}670 \cdot 10^{-8}$ W/(m²·K⁴).

Como resultado de los cálculos adoptamos con la primera aproximación $T_{e1} = T_{par} = 2035$ K, lo que corresponde a los valores $i_{par} = 2{,}35 \cdot 10^6$ J/kg, $q_{conv} = 7{,}774 \cdot 10^5$ J/(m²·s), $q_{rad} = 7{,}779 \cdot 10^5$ J/(m²·s).

La segunda aproximación:

$$r_{lam}^* = \sqrt{\mathbf{Pr}^*} = \sqrt{0{,}3507} = 0{,}5922; \quad i_{par} = 2{,}35 \cdot 10^6 \text{ J/kg};$$

$$i_r = i_\delta + r_{lam}^* V_\delta^2/2 = 6{,}496 \cdot 10^6 \text{ J/kg}; \quad i^* = 2{,}795 \cdot 10^6 \text{ J/kg}.$$

En las tablas de las funciones termodinámicas y gasodinámicas a grandes velocidades y altas temperaturas del flujo de aire, según $i^* = 2{,}795 \cdot 10^6$ J/kg y $p_\delta = 0{,}1347 \cdot 10^5$ Pa, hallamos:

$$T^* = 2330 \text{ K}; \quad c_p^* = 1850 \text{ J/(kg·K)}; \quad \lambda^* = 0{,}1466 \text{ W/(m·K)};$$

$$\mu^* = 7{,}112 \cdot 10^{-5} \text{ N·s/m}^2; \quad \rho^* = 1{,}913 \cdot 10^{-2} \text{ kg/m}^3.$$

La razón de los coeficientes locales de rozamiento $c_{fx}^*/c_{fx\,\text{inc}} = 0{,}7434$. El coeficiente local de rozamiento en el cono

$$c_{fx\,\text{cono}}^* = 0{,}3823 \cdot 10^{-3}; \quad \mathbf{Pr}^* = 0{,}8975; \quad \mathbf{St}_x^* = 0{,}2054 \cdot 10^{-3}.$$

Empleando la ecuación del balance térmico (12.43), con la segunda aproximación, hallamos la temperatura de radiación de la pared $T_{par} = T_{e2} = 1630$ K. Como T_{e2} difiere considerablemente de T_{e1} (20%) es preciso continuar las aproximaciones. La cuarta aproximación puede considerarse definitiva, ya que como resultado de ella, hallamos $T_{e4} = T_{par} = 1871$ K.

Capa límite turbulenta ($\mathbf{Re}_x = 10^8$). Al determinar la temperatura en equilibrio de la pared, la sucesividad de los cálculos es la misma que para la capa límite laminar.

Para la primera aproximación tomamos $r_{tur} = 0{,}90$; $i_{par} = i_r$; con ello,

$$i_r = i_\delta + r_{tur}V_\delta^2/2 = 9{,}518\cdot10^6 \text{ J/kg}; \quad i^* = 7{,}044\cdot10^6 \text{ J/kg}.$$

De acuerdo con este valor de la entalpía i^* y la presión p_δ, con ayuda de las tablas de las funciones termodinámicas y gasodinámicas a grandes velocidades y altas temperaturas del flujo de aire, hallamos $T^* = 3500$ K; $c_p^* = 4050$ J/(kg·K); $\lambda^* = 1{,}169$ W/(m·K); $\mu^* = 1{,}001\cdot10^{-4}$ N·s/m²; $\rho^* = 1{,}108\cdot10^{-2}$ kg/m³.

A continuación, calculamos:

$$c_{fx}^*/c_{fx\ inc} = (\mu^*/\mu_\delta)^{1/5}(\rho^*/\rho_\delta)^{4/5} = 0{,}2703;$$

$$c_{fx\ inc}^{pl} = 0{,}0578/\mathbf{Re}_x^{1/5} = 1{,}452\cdot10^{-3};$$

$$c_{fx\ cono}^* = 1{,}176\,(c_{fx}^*/c_{fx\ inc})\,c_{fx\ inc}^{pl} = 0{,}4616\cdot10^{-3};$$

$$\mathbf{Pr}^* = c_p^*\mu^*/\lambda^* = 0{,}3467; \quad \mathbf{St}_x^* = 0{,}5c_{fx\ cono}^*\mathbf{Pr}^{*-2/3} = 0{,}4677\cdot10^{-3}.$$

Resolviendo la ecuación del balance térmico (12.43) hallamos, con la primera aproximación, la temperatura de radiación en equilibrio $T_{e1} = 2208$ K.

Los resultados de los posteriores cálculos muestran que en el caso que consideramos para determinar la mencionada temperatura podemos limitarnos a la cuarta aproximación, con la que obtenemos el valor de $T_{e4} = T_{par} = 2100$ K.

12.19. En el caso que examinamos de termotransferencia estacionaria, la ecuación del balance térmico

$$\varepsilon\sigma T_{par}^4 = \alpha_x(T_r' - T_{par}), \tag{12.43'}$$

donde $T_r' = T_r[1 - q_{ref}/(\alpha_x T_r)]$ es la temperatura reducida de recuperación.

Capa límite laminar ($\mathbf{Re}_x = 5\cdot10^5$). *Primera aproximación.* El cálculo de la temperatura en equilibrio de la pared se realiza según el método de las aproximaciones sucesivas, con la particularidad de que con la primera aproximación $\alpha_x = \alpha_x^*$ y T_r se hallan con arreglo a los datos del antetior problema [$\mathbf{St}_x^* = 0{,}2242\cdot10^{-3}$; $c_p^* = 2750$ J/(kg·K); $i_r = 9{,}537\cdot10^6$ J/kg]. Efectuamos los cálculos: $\alpha_x = \alpha_x^* = \mathbf{St}_x^*\rho_\delta V_\delta c_p^* = 205{,}3$ W/(m²·K); $T_r = 4475$ K (según $i_r = 9{,}537\cdot10^6$ J/kg y $p_\delta = 0{,}1347\cdot10^5$ Pa se determina mediante el diagrama $i - p$).

La temperatura reducida de recuperación

$$T_r' = 4475\,[1 - 1{,}25\cdot10^5/(205{,}3\cdot4475)] = 3866 \text{ K}.$$

La temperatura en equilibrio de la pared $T_{e1} = 1757$ K se halla con la ecuación del balance térmico (12.43') que es ventajoso representarla en la forma

$$T_r' = (\varepsilon\sigma/\alpha_x^*)\,T_e^4 + T_e. \tag{12.44}$$

Aquí, T_r', α_x^*, ε y σ son magnitudes conocidas.

Segunda aproximación. En el diagrama $i - p$, según $T_{e1} = 1757$ K y $p_\delta = 0{,}1347\cdot10^5$ Pa, hallamos $i_{par} = 1{,}98\cdot10^6$ J/kg y, además, calculamos:

$$r_{lam}^* = \sqrt{\mathbf{Pr}^*} = 0{,}8724; \quad i_r = i_\delta + r_{lam}^*V_\delta^2/2 = 9{,}247\cdot10^6 \text{ J/kg};$$

$T_r = 4380$ K (se halla según $i_r = 9{,}247\cdot10^6$ J/kg y $p_\delta = 0{,}1347\cdot10^5$ Pa en el diagrama $i - p$); $i^* = 3{,}216\cdot10^6$ J/kg [véase (12.36)].

En las tablas termodinámicas, conforme a $i^* = 3{,}216\cdot10^6$ J/kg y p_δ, determinamos:

$$T^* = 2540 \text{ K};\ c_p^* = 2500 \text{ J/(kg·K)};\ \lambda^* = 0{,}243 \text{ W/(m·K)};$$
$$\mu^* = 7{,}603\cdot10^{-5} \text{ N·s/m}^2;\ \rho^* = 1{,}736\cdot10^{-2} \text{ kg/m}^3.$$

Después de esto, hallamos:

$$\mathbf{Pr}^* = c_p^*\mu^*/\lambda^* = 0{,}7822;\quad c_{fx}^*/c_{fx\ \text{inc}} = \sqrt{(\rho^*/\rho_\delta)(\mu^*/\mu_\delta)} = 0{,}7322;$$
$$c_{fx\ \text{cono}}^* = \sqrt{3}\ (c_{fx}^*/c_{fx\ \text{inc}})\ c_{fx\ \text{inc}} = 0{,}3765\cdot10^{-3};$$
$$\mathbf{St}_x^* = 0{,}5c_{fx\ \text{cono}}^*\mathbf{Pr}^{*-2/3} = 0{,}2217\cdot10^{-3};$$
$$\alpha_x^* = \mathbf{St}_x^*\rho_\delta V_\delta c_p^* = 184{,}5 \text{ W/(m}^2\text{·K)};\quad T_r' = T_r[1 - q_{\text{ref}}/(\alpha_x^* T_r)] = 3702 \text{ K}.$$

A continuación, con la ecuación (12.44) determinamos la temperatura en equilibrio de la pared: $T_{e2} = 1691$ K. La correspondiente entalpía $i_{\text{par}} = 1{,}94 \times \times 10^6$ J/kg.

Tercera aproximación:

$r_{\text{lam}}^* = \sqrt{0{,}7822} = 0{,}8844$; $i_r = 9{,}365\cdot10^6$ J/kg; $T_r = 4410$ K (se determina en el diagrama $i - p$ según los valores de $i_r = 9{,}365\cdot10^6$ J/kg y $p_\delta = 0{,}1347\cdot10^5$ Pa); $i^* = 3{,}221\cdot10^6$ J/kg; $T^* = 2530$ K; $\rho^* = 1{,}717\cdot10^{-2}$ kg/m³; $c_p^* = 2500$ J/(kg·K); $\lambda^* = 0{,}2430$ W/(m·K); $\mu^* = 7{,}603\cdot10^{-5}$ N·s/m²; $\mathbf{Pr}^* = 0{,}7822$; $c_{fx}^*/c_{fx\ \text{inc}} = = 0{,}7282$; $c_{fx\ \text{cono}}^* = 0{,}3745\cdot10^{-3}$; $\mathbf{St}_x^* = 0{,}2206\cdot10^{-3}$; $\alpha_x^* = 183{,}6$ W/(m²·K); $T_r' = 3729$ K; $T_{e3} = 1694$ K [se calcula con (12.44)].

Este valor de la temperatura en equilibrio ($T_e = 1694$ K) se considera definitivo, es decir, mediante la refrigeración se ha conseguido reducir la temperatura de la pared en 177 K.

Capa límite turbulenta ($\mathbf{Re}_x = 10^8$). El orden de cálculo de la temperatura en equilibrio de la pared para la capa límite turbulenta es análogo al que atañe a la laminar.

Primera aproximación. Los valores de α_x^* y T_r se calculan de acuerdo con los datos del problema anterior.

$$[\mathbf{St}_x^* = 0{,}3708\cdot10^{-3};\ c_p^* = 2800 \text{ J/(kg·K)};\ i_r = 9{,}568\cdot10^6 \text{ J/kg}].$$

Calculamos: $\alpha_x^* = \mathbf{St}_x^*\rho_\delta V_\delta c_p^* = 345{,}7$ W/(m²·K);
$T_r = 4475$ (se determina con ayuda del diagrama $i - p$, según los valores de $i_r = 9{,}568\cdot10^6$ J/kg y $p_\delta = 0{,}1347\cdot10^5$ Pa).

La temperatura reducida de recuperación

$$T_r' = 4475\,[1 - 1{,}25\cdot10^5/(345{,}7\cdot4475)] = 4113 \text{ K}.$$

La temperatura en equilibrio $T_{e1} = 2003$ K se calcula con la ecuación (12.44).

Segunda aproximación. En correspondencia con $T_{e1} = 2003$ K y $p_\delta = 0{,}1347 \times \times 10^5$ Pa, según el diagrama $i - p$, hallamos $i_{\text{par}} = 2{,}288\cdot10^6$ J/kg y calculamos (siendo $\mathbf{Pr}^* = 0{,}7445$ el mismo que en el anterior problema): $r_{\text{tur}}^* = \sqrt[3]{0{,}7445} = = 0{,}9063$; $i_r = 9{,}580\cdot10^6$ J/kg; $T_r = 4490$ K (se determina mediante el diagrama $i - p$, según $i_r = 9{,}580\cdot10^6$ J/kg y $p_\delta = 0{,}1347\cdot10^5$ Pa); $i^* = 3{,}443\cdot10^6$ J/kg; $T^* = 2625$ K; $\rho^* = 1{,}682\cdot10^{-2}$ kg/m³; $c_p^* = 2800$ J/(kg·K); $\lambda^* = 0{,}2849$ W/(m·K); $\mu^* = 7{,}652\cdot10^{-5}$ N·s/m²; $\mathbf{Pr}^* = 0{,}7520$; $c_{fx}^*/c_{fx\ \text{inc}} = 0{,}3578$; $c_{fx\text{cono}}^* = 0{,}6110\cdot10^{-3}$; $\mathbf{St}_x^* = 0{,}3694\cdot10^{-3}$; $\alpha_x^* = 344{,}4$ W/(m²·K); $T_r' = 4127$ K.

Seguidamente, con la ecuación (12.44) calculamos la temperatura en equilibrio

de la pared $T_{e2} = 2004$ K. Podemos considerar que este valor es definitivo. Por lo tanto, en el punto dado de la capa límite turbulenta la refrigeración permite bajar la temperatura de la superficie en 96 K.

Calculemos la temperatura de las superficies del revestimiento exterior T_{rev} e interior T_{int}. Como en caso de la termotransferencia estacionaria ni el aislamiento ni el revestimiento se calientan más arriba de la temperatura que corresponde al intercambio de calor uniforme, por ellas pasará una misma cantidad de calor

$$\lambda_{ais} (\partial T/\partial y)_{ais} = \lambda_{rev} (\partial T/\partial y)_{rev} = q_{ref}. \tag{12.45}$$

Si suponemos que los valores de las termoconductibilidades del material del aislamiento y el revestimiento son constantes, como resultado de la integración por el espesor del aislamiento y revestimiento obtenemos las relaciones

$$T_{rev} = T_{par} - q_{ref}\delta_{ais}/\lambda_{ais} \quad \text{y} \quad T_{int} = T_{rev} - q_{ref}\delta_{rev}/\lambda_{rev}, \tag{12.46}$$

que permiten calcular las temperaturas correspondientes al planteamiento del problema.

Analicemos un punto de la superficie del cono situado en la región de *la capa límite laminar* ($\mathbf{Re}_x = 5\cdot10^6$; $x = 0{,}492$ m). La temperatura de la superficie exterior del revestimiento $T_{rev} = 1694 - (1{,}25\cdot10^5\cdot0{,}01)/2{,}514 = 1197$ K; de modo análogo, la temperatura de la superficie interior $T_{int} = 1197 - (1{,}25\cdot10^5\cdot0{,}005)/45{,}25 = 1183$ K. De aquí se desprende que para el revestimiento metálico la temperatura de su superficie interior poco difiere ($\sim$14 K) de la correspondiente a la superficie exterior.

Para el punto de la superficie del cono situado en la región de *la capa límite turbulenta* ($\mathbf{Re}_x = 10^8$, $x = 9{,}839$ m), las correspondientes temperaturas del revestimiento

$$T_{rev} = 2004 - (1{,}25\cdot10^5\cdot0{,}01)/2{,}514 = 1507 \text{ K};$$

$$T_{int} = 1507 - (1{,}25\cdot10^5\cdot0{,}005)/45{,}25 = 1493 \text{ K}.$$

12.20. Determinemos los parámetros de la atmósfera a la altura $H = 30$ km (véase el problema 12.18) y la velocidad del flujo no perturbado $V_\infty = \mathbf{M}_\infty a_\infty = 4526$ m/s. Para el cálculo del flujo específico de calor en el punto crítico de la nariz esférica empleamos la dependencia

$$q_0 = 0{,}763\mathbf{Pr}^{-2/3} (\tilde{\lambda}\rho_0\mu_0')^{1/2} (i_r - i_{par}) (\overline{\rho}_{par}\overline{\mu}_{par})^{1/10}, \tag{12.47}$$

en la que el número de Prandtl $\mathbf{Pr} = 0{,}71$.

El gradiente adimensional de velocidad en el punto crítico de la esfera, para las condiciones dadas de vuelo, se determina con la dependencia semiempírica obtenida sobre la base de la fórmula perfeccionada de Newton $\overline{p} = \overline{p}_0 \cos^2 \varphi$: $\overline{\lambda} = 2R_T\tilde{\lambda}/V_\infty = 1{,}15$.

De acuerdo con esto, el gradiente de velocidad

$$\tilde{\lambda} = (\partial V_x/\partial x)_{\substack{x=0\\y=0}} = \overline{\lambda}V_\infty/(2R_T) = 1{,}041\cdot10^4 \text{ 1/s}.$$

Los parámetros del flujo tras la parte normal de la onda de choque, hallados con ayuda de aproximaciones sucesivas, así como los parámetros del punto crítico del sólido, son los siguientes:

$$p_2 = 3{,}366\cdot10^5 \text{ Pa};\ \rho_2 = 1{,}717\cdot10^{-1} \text{ kg/m}^3;\ T_2 = 5180 \text{ K};$$

$$i_2 = 10{,}35\cdot10^6 \text{ J/kg};\ S_2 = 11{,}42\cdot10^3 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)};\ p_{02} = 3{,}750\cdot10^5 \text{ Pa};$$

$$\rho_{02} = 2{,}011\cdot10^{-1} \text{ kg/m}^3;\ i_{02} = 10{,}47\cdot10^6 \text{ J/kg};\ T_{02} = 5270 \text{ K}.$$

La viscosidad dinámica del aire para las condiciones existentes en el punto crítico del sólido se determinan con la relación

$$\mu/\mu_\infty = (T/T_\infty)^n, \tag{12.48}$$

en correspondencia con la cual

$$\mu_{02} = \mu_\infty (T_{02}/T_\infty)^{0,7} = 1{,}335\cdot 10^{-4} \text{ Pa·s}.$$

La entalpía $i_{par} = 1{,}05\cdot 10^6$ J/kg se halla en el diagrama $i - p$, según $p_{02} = 3{,}75\cdot 10^5$ Pa y $T_{par} = 1000$ K, mientras que $(\bar{\rho}_{par}\bar{\mu}_{par})^{-1} = 0{,}5667$ (datos experimentales), después de lo cual con (12.47) calculamos el flujo específico de calor en el punto crítico de la nariz esférica: $q_0 = 5{,}049\cdot 10^6$ W/m².

El coeficiente de termoemisión

$$\alpha = q_{par}/(T_r - T_{par}) = 1{,}182\cdot 10^3 \text{ W/(m}^2\text{·K)}.$$

12.21. Los parámetros de termotransferencia en el punto crítico de la cara pueden determinarse habiendo hallado el radio equivalente de la esfera R_T^e con el que la curvatura de la onda de choque en el eje es, aproximadamente, igual a la curvatura de la onda delante del frente:

$$R_T^e = R_T (\bar{R}_{ch})_{pl}/(\bar{R}_{ch})_{esf}, \tag{12.49}$$

donde R_T es el radio de la cara; $(\bar{R}_{ch})_{pl} = (R_{ch}/R_T)_{pl}$; $(\bar{R}_{ch})_{esf} = (R_{ch}/R_T)_{esf}$, los radios relativos de curvatura de la onda de choque antes de la cara plana y de la superficie esférica, respectivamente.

Los valores de $(\bar{R}_{ch})_{esf}$ y $(\bar{R}_{ch})_{pl}$ pueden ser hallados como resultado de la investigación de la circulación no viscosa alrededor de la punta obtusa, de acuerdo con la conocida relación de las densidades $\bar{\rho} = \rho_\infty/\rho_{ch}$ tras la parte normal de la onda de choque. Para las condiciones prefijadas $\rho_\infty = 1{,}841\cdot 10^{-2}$ kg/m³; $\rho_{ch} = 1{,}717\cdot 10^{-1}$ kg/m³ (se determina como resultado del cálculo de los parámetros tras la onda de choque normal). Por lo tanto, $\bar{\rho} = \rho_\infty/\rho_{ch} = 0{,}1072$ (o bien $1/\bar{\rho} = 9{,}328$), mientras que $(\bar{R}_{ch})_{esf} = 1{,}18$ y $(\bar{R}_{ch})_{pl} = 4{,}88$.

En correspondencia con estos resultados el radio equivalente $R_T^e = 0{,}25 \times 4{,}88/1{,}18 = 1{,}034$ m, es decir, mayor que el radio de la esfera 4,136 veces. Hay que señalar que el gradiente de velocidad en la superficie sometida a circulación es proporcional a $1/R_T$. Así, pues, este gradiente de velocidad $\tilde{\lambda}$ para la cara es la misma cantidad de veces menor que el de la esfera. Por ello, según (12.47) el flujo específico de calor se reduce $\sqrt{4{,}136} = 2{,}034$ veces y constituye unos $2{,}482\cdot 10^6$ W/m² (o sea, $q_{0c} \approx 0{,}4916\, q_{0\,esf}$).

El flujo específico de calor en el punto de remanso total de la cara plana determínase asimismo con la relación empírica

$$q_{0c} = (0{,}55 \pm 0{,}05)\, q_{0\,esf}, \tag{12.50}$$

de acuerdo con la cual dicho flujo de calor es, aproximadamente, igual a la mitad de su valor en el punto crítico de una esfera con el mismo radio que en la cara.

12.22. El más importante parámetro que determina la influencia de la turbulencia (vorticidad) sobre la termotransferencia es el número **Re** calculado según el radio de la esfera y las características gasodinámicas en el punto crítico:

$$\mathbf{Re} = R_T\rho_{02}\sqrt{i_r}/\mu_{02}, \tag{12.51}$$

con la particularidad de que a grandes velocidades la entalpía de recuperación se puede tomar $i_r \approx 0{,}5\ V_\infty^2$. Con arreglo a esto, **Re** $= 1{,}205 \cdot 10^6$ [en (12.51) $\rho_{02} = 2{,}011 \cdot 10^{-1}$ kg/m³; $\mu_{02} = 1{,}335 \cdot 10^{-4}$ Pa·s se han tomado de la solución del problema (12.20)].

La razón entre el flujo de calor q_{03}, calculado teniendo en cuenta la influencia del efecto vorticial, y a su valor q_0, hallado al despreciar la turbulencia, puede ser determinada aproximadamente según el número **Re**, calculado más arriba con ayuda de datos experimentales: $q_{03}/q_0 \approx 1{,}03$.

12.23. A velocidades muy grandes de vuelo el aumento de la temperatura tras la onda de choque provoca la variación de las propiedades físicas del aire. En particular, éste deja de ser transparente y, por consiguiente, se convierte en una fuente de flujo de calor de radiación dirigida hacia la superficie. La opacidad del aire está condicionada, fundamentalmente, por un considerable aumento de la concentración en él del óxido nítrico a altas temperaturas.

Sobre la base de datos experimentales se ha establecido la siguiente dependencia empírica para el flujo de calor irradiado en el punto crítico:

$$q_{\mathrm{irr}} = 8{,}883 \cdot 10^{10}\ R_{\mathrm{T}}\ (V_\infty/10^4)^{8,5}\ (\rho_{\infty\mathrm{H}}/\rho_{\infty\mathrm{T}})^{1,6}, \qquad (12.52)$$

donde R_{T} está dado en m; V_∞, m/s; $\rho_{\infty\mathrm{H}}/\rho_{\infty\mathrm{T}}$ es la razón de las densidades a la altura dada H y el nivel del mar.

Empleando esta dependencia, para las condiciones prefijadas, hallamos $q_{\mathrm{irr}} = 3{,}176 \cdot 10^4$ W/m².

La razón de los flujos $q_{\mathrm{irr}}/q_0 = 3{,}176 \cdot 10^4/(5{,}049 \cdot 10^6) = 6{,}29 \cdot 10^{-3}$ es pequeña. Es de indicar que el flujo radiante toma valores relativamente mayores a pequeñas alturas.

12.24. Una de las peculiaridades del proceso de termotransferencia en la capa límite, a velocidades de circulación muy grandes, consiste en que los átomos e iones que surgen como resultado de la disociación e ionización del gas participan en el transporte de calor al difundir en la región con concentración atómica e iónica menor. La difusión que va acompañada de la recombinación de los átomos e iones, conduce a un desprendimiento adicional de calor.

Con ello, los componentes del gas que difunden, debido a la presencia del gradiente de concentración, transportando la entalpía son fuentes de un flujo de energía que, a determinadas condiciones, puede superar el flujo de calor a cuenta de la termoconductividad. Además del transporte de sustancia, condicionado por la concentración variable, se forman flujos de difusión provocados por los gradientes de temperatura (termodifusión) y de presión (barodifusión). Estas dos componentes del flujo de difusión no tienen notoria importancia y, por ello, al estudiar la termoconductividad en el flujo de gas que circula alrededor del sólido, no se toman en consideración. La ionización del aire siendo los números $\mathbf{M}_\infty < 20 \ldots 25$ puede, asimismo, no tenerse en cuenta.

Analicemos diversos casos posibles de termotransferencia en la capa límite.

Si la temperatura junto a la pared es inferior al límite de difusión, la concentración de átomos es nula y el intercambio de calor, en el caso límite de equilibrio termodinámico, se caracteriza por la termoconductividad molecular.

El flujo real en la capa límite disociada se caracteriza por la presencia del gradiente de concentración de los átomos y las moléculas y la falta de equilibrio de las reacciones químicas. En tal caso, el proceso de termotransferencia en la capa límite puede notoriamente diferir del proceso de la termoconductividad molecular. Junto con la termotransferencia molecular el transporte de calor transcurre a cuen-

ta de la energía química desprendida durante la recombinación. Para semejante proceso son característicos los siguientes casos límites.

En el primer caso límite, caracterizado por una velocidad infinitamente grande de recombinación, en cada punto de la capa límite se establece el equilibrio termodinámico y la termotransferencia por difusión en ella está condicionada por la presencia del perfil de concentraciones en equilibrio. En condiciones reales los flujos, próximos a semejante capa límite hipotética «en equilibrio», surgen cuando la velocidad de difusión es despreciablemente pequeña en comparación con la de la disociación y recombinación (durante la ionización lo dicho se refiere, asimismo, a las reacciones electrónicas).

En el segundo caso límite (cuando el gas está fuertemente disociado), caracterizado por pequeñas velocidades de recombinación, todo el calor se transmite a cuenta de la difusión. Esto puede suceder, prácticamente, en el flujo, si el tiempo de la reacción química es grande en comparación con el tiempo característico de movimiento de las partículas. Tales flujos se denominan *congelados* (*invariantes*). En semejantes corrientes los átomos, formados durante la difusión, difunden en dirección de la pared fría y, a continuación, allí se recombinan. La energía que con ello se libera depende de las propiedades catalíticas de la pared y que se manifiestan por los diversos valores de la velocidad de la reacción catalítica de recombinación. Es de suponer que todos los procesos reales de termotransferencia yacen entre los dos casos límites mencionados.

12.25. Si el gas se calienta con suficiente lentitud y regularidad a presión constante, el grado de disociación, que es función de la temperatura y presión, alcanza un valor en equilibrio, lo que caracteriza el posible proceso de termotransferencia. Si el calentamiento es inuniforme, aunque transcurra con lentitud, surgen gradientes tanto de temperatura como de concentración, lo que provoca la aparición de flujos de calor a cuenta de la termoconductividad y la difusión, respectivamente. Debido al efecto de la difusión el gas siempre se encuentra en estado desequilibrado, lo que influye sobre el intercambio de calor.

También se caracterizan por semejante falta de equilibrio aquellos procesos en el gas, cuya temperatura se eleva uniformemente con rapidez por todo el volumen. Esto está condicionado porque la velocidad de formación de los átomos supera la de su desaparición y la mezcla se aproxima al estado en equilibrio a velocidad finita, dependiente de la presión, temprartura y concentración de los átomos.

12.26. Si las velocidades de las reacciones químicas son grandes en comparación con las de los procesos de difusión, la composición química es cercana a la que se encuentra en equilibrio a la temperatura local. Este es, precisamente, el caso de «equilibrio local termodinámico». Si la indicada condición no se cumple el proceso de termotransferencia se caracteriza por la falta de equilibrio.

12.27. En las mezclas de gases que entre sí no reaccionan el calor se transmite, en lo fundamental, mediante las colisiones entre las moléculas (termoconductividad molecular). Al mismo tiempo la termotransferencia transcurre también por la difusión térmica, pero el valor del correspondiente flujo de calor es pequeño en comparación con la termoconductividad y en los casos prácticos, por regla, se desprecia.

Cuando los componentes de la mezcla de gas reaccionan entre sí (mezcla reactiva) aparece un flujo adicional de calor (termotransferencia de difusión) a cuenta de la entalpía química de las moléculas que difunden, debido a la presencia de un gradiente de concentración en la mezcla. Semejantes gradientes surgen a causa de que la composición del gas (tanto en equilibrio, como en desequilibrio) varía con la temperatura. P. ej., en el gas que absorbe calor a cuenta de la disociación con

aumento de la temperatura, el calor se transporta cuando la molécula disocia en la región de alta temperatura y, seguidamente, difunde en dirección al sector de baja temperatura (ya que en éste es menor la concentración de moléculas disociadas). A baja temperatura en el gas se produce la recombinación, debido a lo cual se desprende el calor que, con anterioridad, se absorbió durante la disociación.

12.28. Cuando el revestimiento de un vehículo volante se hace de materiales no catalíticos (caso límite de una reacción catalítica infinitamente lenta; el factor de tal reacción $k_{par} \to 0$) la concentración de átomos en la capa límite disociada en la pared es la misma que en la frontera externa de la capa. Entonces, a cuenta de la difusión, el flujo de átomos es nulo, no hay termotransferencia por difusión y el flujo de calor hacia la superficie sólo surge debido a la termoconductividad.

En el caso de la pared catalítica ($k_{par} \to \infty$; velocidad infinitamente grande de recombinación) los átomos alcanzan la superficie incluso al ser nula la concentración en ella. Con ello, se desprende la mayor cantidad de calor, condicionada por la recombinación de los átomos en moléculas.

Estos resultados indican que es necesario tener en cuenta la velocidad finita de recombinación y la posibilidad de disminución de la termotransferencia mediante el empleo de revestimientos de material no catalítico. Con semejante revestimiento las pequeñas velocidades de recombinación, propias del medio aéreo, varían de modo insignificante, lo que condiciona mayor absorción de calor a cuenta de la disociación y, debido a esto, la disminución del flujo de calor hacia la pared.

12.29. En las tablas de la atmósfera normal hallamos los parámetros del aire a la altura $H = 20$ km (véase el problema 12.11), calculamos el número $\mathbf{M}_\infty$ y la entalpía i_∞ : $\mathbf{M}_\infty = V_\infty/a_\infty = 13{,}56$; $i_\infty = c_pT_\infty = 0{,}2177 \cdot 10^6$ m²/s².

A continuación, calculamos los parámetros del aire inmediatamente después de la parte normal de la onda de choque, teniendo en cuenta la disociación. Para este fin, con la primera aproximación, tomamos la razón de las velocidades tras la onda de choque y delante de ella $V_2/V_\infty = 0{,}15$ (esta razón es algo menor que $V_2/V_\infty = 0{,}17$ tras la onda de choque normal sin tomar en consideración las transformaciones físico—químicas del aire). Según este valor de V_2/V_∞ determinamos la presión tras la onda de choque: $p_2/p_\infty = 1 + k_\infty \mathbf{M}_\infty^2 (1 - V_2/V_\infty) = 219{,}8$.

Por lo tanto, $p_2 = 219{,}8\, p_\infty = 1{,}215 \cdot 10^6$ Pa. La entalpía tras la onda $i_2 = i_\infty + (V_\infty^2/2) [1 - (V_2/V_\infty)^2] = 8{,}038 \cdot 10^6$ m²/s².

Según los valores de $p_2 = 1{,}215 \cdot 10^6$ Pa (12,4 kg/cm²) y la entalpía $i_2 = 8{,}038 \cdot 10^6$ m²/s², con ayuda del diagrama $i - p$, calculamos la temperatura tras la onda de choque $T_2 = 4525$ K, mientras que con las dependencias $\mu_m = f(p, T)$, la masa molar del aire $\mu_{m2} = 25{,}73$. Seguidamente se puede determinar el nuevo valor de la velocidad $V_2/V_\infty = (\mu_{m\infty}/\mu_{m2})(T_2/T_\infty)\, p_\infty/p_2 = 0{,}1070$ y hallar el resto de los correspondientes parámetros.

Con la tercera aproximación se obtienen resultados satisfactorios: $p_2 = 13{,}0$ kg/cm² ($1{,}275 \cdot 10^6$Pa); $\rho_2 = 0{,}8558$ kg/m³; $T_2 = 4585$ K; $\mu_{m2} = 25{,}62$; $i_2 = 8{,}13 \cdot 10^6$ J/kg; $S_2 = 10{,}5 \cdot 10^3$ J/(kg·K) [$10{,}5 \cdot 10^3$ m²/(s²·K)]; $V_2 = 0{,}103 \times V_\infty = 412$ m/s; $a_2 = 1344$ m/s; $\mu_2 = 14{,}03 \cdot 10^{-5}$ Pa·s.

Ahora, hallemos los parámetros en el punto de remanso total de la nariz esférica (el punto O en la fig. 12.3). Según los valores de $S_2 = 10{,}5 \cdot 10^3$ m²/(s²·K) y de la entalpía $i_0 = i_\infty^2 + V_\infty^2/2 = 8{,}218 \cdot 10^6$ m²/s², mediante los diagramas de las funciones termodinámicas del aire, calculamos $p_0' = 15$ kg/cm² ($14{,}72 \cdot 10^5$ Pa); $T_0' = 4620$ K; $\rho_0' = 0{,}1$ kg·s²/m⁴ (0,981 kg/m³).

Después calculamos la viscosidad dinámica:

$$\mu_0' = \mu_\infty (T_0'/T_\infty)^{0{,}76} = 14{,}54 \cdot 10^{-5} \text{ Pa·s}.$$

El gradiente de velocidad en el punto de remanso

$$\tilde{\lambda} = (dV_x/dx)_{x=0} = (1/R_T)\sqrt{2(p_0' - p_\infty)/\rho_0'} = 1153 \ 1/\mathrm{s}.$$

El flujo específico de calor en dicho punto

$$q_0 = 0{,}5\mathbf{Pr}^{-2/3}\sqrt{2\rho_0'\mu_0'\tilde{\lambda}}\,(i_r - i_{par}),$$

donde $i_{par} = c_{p\,par}T_{par}$.

A su vez,

$$c_{p\,par} = c_{p\,\infty}(T_{par}/T_\infty)^{0,1} = 1093 \ \mathrm{J/(kg\cdot K)},$$

por lo que $i_{par} = 0{,}5465\cdot 10^6$ m²/s².

La entalpía de recuperación es la misma que la de remanso $i_r = i_0 = 8{,}218 \times \times 10^6$ m²/s².

Haciendo el número **Pr** = 0,64 hallamos $q_0 = 2{,}962\cdot 10^6$ J/(m²·s) (2,962 MW/m²).

En cierto punto de la nariz esférica con ángulo polar φ (véase la fig. 12.3) el flujo específico de calor $q_x = q_0\,(q_x/q_0)$, donde la relación

$$q_x/q_0 = \underbrace{2\varphi \operatorname{sen}\varphi\,[\cos^2\varphi + (p_\infty/p_0')\operatorname{sen}^2\varphi]}_{D_1} D^{-1/2}(\varphi).$$

La función

$$D(\varphi) = (1 - p_\infty/p_0')(4\varphi\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi)\operatorname{sen}^3\varphi + \\ + [(3p_\infty/p_0' + 1)](\varphi^2 + \operatorname{sen}^2\varphi - \varphi\operatorname{sen}2\varphi). \quad (12.53)$$

Aquí, con buena aproximación $p_\infty/p_0' = 1/(k\mathbf{M}_\infty^2)$ y con $\mathbf{M}_\infty = 13{,}56$, la anterior relación puede ser despreciada. Entonces,

$$D(\varphi) = (4\varphi\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi)\operatorname{sen}^3\varphi + \varphi^2 + \operatorname{sen}^2\varphi - \varphi\operatorname{sen}2\varphi.$$

Tomando, en particular, $\varphi = 50°$ (extremo del sector esférico), hallamos

$$D(50°) = 1{,}15; \quad D_1 \approx 2\varphi\operatorname{sen}\varphi\cos^2\varphi = 0{,}552.$$

Conforme a esto, $q_{50}/q_0 = 0{,}5145$, de donde $q_{50} = q_0 0{,}5145 = 1{,}522$ MW/m².

El flujo sumario de calor hacia la nariz esférica

$$Q_{esf} = 2\pi R_T^2 q_0 \int_0^\varphi (q_x/q_0)\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = 2\pi R_T^2 q_0 J^\varphi. \quad (12.54)$$

La integración de (12.54) se efectúa según el método numérico. Para ello, con paso constante del argumento $\Delta\varphi = 5°$ (0,0873 rad) se calculan los correspondientes valores de la razón q_x/q_0 y la función subintegral $f = (q_x/q_0)\operatorname{sen}\varphi$. Empleando la fórmula de la integración aproximada, hallamos $J^\varphi = 0{,}269$.

Así, pues, de acuerdo con (12.54), el flujo sumario de calor hacia la nariz esférica, $Q_{esf} = 11{,}26$ MW.

Calculamos la termotransferencia en la superficie cónica. En cierto punto con coordenada x tomada al azar (véase la fig. 12.3) la razón de los flujos específicos de calor

$$q_x/q_0 = 2[\cos^2\varphi_{cono} + (p_\infty/p_0')\operatorname{sen}^2\varphi_{cono}] \times \\ \times \varphi_{cono}\cos\varphi_{cono}\bar{x}_{cono}/\sqrt{D(\varphi_{cono}) + G(\bar{x}_{cono})},$$

donde $\bar{x}_{cono} = x_{cono}/R_T$; $G(\bar{x}_{cono}) = (16/3)[\cos^2\varphi_{cono} + (p_\infty/p_0')\operatorname{sen}^2\varphi_{cono}](\bar{x}^3_{cono} - - \operatorname{tg}^3\varphi_{cono})\varphi_{cono}\cos^2\varphi_{cono}$.

La función D (φ_{cono}) se calcula con (12.53) para $\varphi = \varphi_{cono} = 50°$. Además, en el caso que analizamos $M_\infty \gg 1$, o sea,

$$G(\bar{x}_{cono}) = (16/3)\cos^2\varphi_{cono}(\bar{x}^3_{cono} - \mathrm{tg}^3\varphi_{cono})\,\varphi_{cono}\cos^2\varphi_{cono}.$$

El flujo total de calor hacia la superficie lateral del cono

$$Q_{cono} = 2\pi R_T^2 \,\mathrm{sen}\,\beta_{cono} q_0 \int_{\bar{x}_{cono\,1}}^{\bar{x}_{cono\,2}} (q_x/q_0)\,\bar{x}_{cono}\,d\bar{x}_{cono} = 2\pi R_T^2\,\mathrm{sen}\,\beta_{cono} q_0 \bar{X}. \quad (12.55)$$

La integral en (12.55) puede representarse en la forma siguiente:

$$\bar{X} = \int_{\bar{x}_{cono\,1}}^{\bar{x}_{cono\,2}} (A\bar{x}_{cono}/\sqrt{B + C\bar{x}^3_{cono}})\,\bar{x}_{cono}\,d\bar{x}_{cono}, \quad (12.56)$$

donde, para $\varphi_{cono} = 50°$, los valores de $A = 2\varphi_{cono}\cos^3\varphi_{cono} = 0{,}463$; $B = D(\varphi_{cono}) - (16/3)\,\varphi_{cono}\,\mathrm{sen}^3\varphi_{cono}\cos\varphi_{cono} = -0{,}192$; $C = (16/3) \times \varphi_{cono}\cos^4\varphi_{cono} = 0{,}794$.

Integrando dentro de los límites de $\bar{x}_{cono\,1} = \mathrm{tg}\,\varphi_{cono} = 1{,}19$ y $\bar{x}_{cono} = \mathrm{tg}\,\varphi_{cono} + l_{cono}/R_T = 4{,}52$, hallamos $\bar{X} = 2{,}91$.

Así, pues, el flujo de calor hacia la superficie lateral del cono, de acuerdo con (12.55), $Q_{cono} = 78{,}3$ MW, mientras que el flujo sumario de calor hacia el cono romo $Q = Q_{esf} + Q_{cono} = 89{,}56$ MW.

12.30. Con el fin de hallar el flujo adicional de calor, condicionado por la difusión en la capa límite, hay que emplear los datos hallados al resolver el problema 12.29. En su solución obtuvimos el flujo de calor de la corriente caliente incidente de gas hacia la pared sin tener en cuenta la difusión en la capa límite. Designemos dicho flujo de calor con $q_{Le=1}$. Si se toma en consideración la difusión, el flujo de calor hacia la pared

$$q = q_{Le=1}\,[1 + (\mathrm{Le}^{2/3}\varphi - 1)\,i_D/(i_r - i_{par})], \quad (12.57)$$

donde

$$\varphi = [1 + 0{,}5\mathrm{Sc}^{-2/3}\sqrt{2\rho_0'\mu_0'\bar{\lambda}}/(\rho_{par}k_{par})]^{-1} \quad (12.58)$$

es el factor catalítico que se determina por la constante k_{par} de la velocidad de la reacción catalítica en el gas dependiente, a su vez, del material de la pared; **Le** y **Sc**, los números de Lewis—Semiónov y de Schmidt, respectivamente. La variable i_D es la entalpía de disociación

$$i_d = u_d(\alpha_\delta - \alpha_{par}), \quad (12.59)$$

donde u_d es la energía característica de disociación; α_δ y α_{par}, los grados de disociación en la frontera de la capa límite y en la pared, respectivamente.

Examinemos los dos casos límite de termotransferencia en la capa límite. El primero de ellos se caracteriza por la velocidad infinitamente pequeña de recombinación en la pared no catalítica, con la que la constante de velocidad de la reacción $k_{par} \to 0$. Con ello, como se desprende de (12.58), el factor catalítico $\varphi \to 0$. De aquí se deduce, que

$$q = q_{Le=1}\,[1 - i_D/(i_r - i_{par})]. \quad (12.60)$$

En el segundo caso la velocidad de recombinación se considera infinitamente grande, es decir, $k_{par} \to \infty$ (la pared es catalítica y favorece a una reacción infinitamente rápida). De (12.58) sigue que, en tal caso, $\varphi \to 1$ y

$$q = q_{Le=1}\,[1 + (Le^{2/3} - 1)\, i_D/(i_r - i_{par})]. \qquad (12.61)$$

Calculemos los flujos de calor (12.60) y (12.61) en el entorno del punto de remanso total. Para una estimación aproximada de la entalpía, hacemos uso de la dependencia

$$i_D = i_0 - i_{\alpha=0}. \qquad (12.62)$$

A la temperatura $T_0' = 4620$ K en el punto de remanso total hallamos la entalpía del aire no disociado:

$$i_{\alpha=0} = c_{p\,\infty}\,(T_0'/T_\infty)^{0,1} T_0' = 6{,}305 \cdot 10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

Como $i_0 = 8{,}218 \cdot 10^6$ m²/s², la entalpía de disociación $i_D = 1{,}913 \cdot 10^6$ m²/s². Con arreglo a este valor, $q_0 = 0{,}7506\, q_{(Le=1)0}$.

El resultado obtenido muestra que el empleo de material no catalítico para la pared conduce a la disminución del flujo de calor en el 25 %, aproximadamente. Cuando la pared es catalítica $\varphi = 1$. Para este caso, hagamos el número de Lewis—Semiónov $\mathbf{Le} = 1{,}45$. De acuerdo con él $q_0 \approx 1{,}07 q_{(Le=1)0}$.

De este modo, el empleo de las paredes de material catalítico, que condiciona una velocidad de recombinación infinitamente grande, conduce al aumento del flujo de calor en el 7 %, debido a la difusión. Cuando la velocidad de recombinación es finita, para el cálculo del flujo de calor hay que emplear la fórmula (12.57).

La razón entre la cantidad de calor q, desprendida a velocidad de recombinación finita, y el flujo de calor $q_{k_{par}\to\infty}$, cuando la catálisis es infinitamente rápida

$$q/q_{k_{par}\to\infty} = [1 + (Le^{2/3}\varphi - 1)\,\tilde{i}_D]/[1 + (Le^{2/3} - 1)\,\tilde{i}_D], \qquad (12.63)$$

donde $\tilde{i}_D = i_D/(i_r - i_{par})$.

Examinemos el material de la pared en forma de una sustancia vítrea para la que el factor $k_{par} = 10$ cm/s. En el punto de remanso total, en la pared refrigerada la densidad $\rho_{par} = \rho_\infty\,(p_0'/p_\infty)\,T_\infty/T_{par} = 10{,}26$ kg/m³.

Empleando otros datos, obtenidos al resolver el problema 12.29, así como haciendo el número de Schmidt $\mathbf{Sc} = 0{,}49$, hallamos $\varphi = 0{,}6898$. Tomando en consideración que $\tilde{i}_D = i_D/(i_r - i_{par}) = 0{,}2494$, tendremos $q/q_{k_{par}\to\infty} = 0{,}9074$.

Así, pues, en los casos reales en que para la pared se emplean materiales que condicionan velocidades finitas de recombinación la termotransferencia es menor que en caso de catálisis infinitamente rápida, pero es evidente que será mayor que cuando la pared sea no catalítica.

12.31. En la solución del problema 12.29 tenemos los siguientes valores de los parámetros en la frontera de la capa, en el entorno del punto de remanso total: $p_0' = 14{,}72 \cdot 10^5$ Pa (15 kg/cm²); $T_0' = 4620$ K; $\rho_0' = 0{,}981$ kg/m³ (0,1 kg·s²/m⁴); $\mu_0' = 14{,}54 \cdot 10^{-5}$ Pa·s; $i_0 = i_r = 8{,}218 \cdot 10^6$ m²/s². El correspondiente gradiente de velocidad en dicho punto $\tilde{\lambda} = 1153$ 1/s.

La temperatura de radiación en equilibrio T_e se determina de la ecuación del balance de calor

$$\alpha_x\,(i_r - i_e)/(c_p)_e = \varepsilon\sigma T_e^4, \qquad (12.65)$$

en la que el coeficiente de termoemisión

$$\alpha_x = [(c_p)_e/(i_r - i_e)\, q_{Le=1}]\,[1 + (Le^{2/3}\varphi - 1)\,\tilde{i}_D] \qquad (12.65)$$

se calcula conforme al flujo específico de calor

$$q_{\mathrm{Le}=1} = 0{,}5\mathbf{Pr}^{-2/3}\sqrt{2\rho_0'\mu_0'\tilde{\lambda}}\,(i_r - i_e) \qquad (12.66)$$

y el coeficiente catalítico

$$\varphi = [1 + 0{,}5\mathbf{Sc}^{-2/3}\sqrt{2\rho_0'\mu_0'\tilde{\lambda}}/(\rho_e k_{\mathrm{par}})]^{-1}. \qquad (12.67)$$

En la ecuación (12.64) $\sigma = 5{,}67\cdot10^{-8}$ es la constante de Stefan—Boltzman, $W/(m^2\cdot K^4)$; $(c_p)_e$, el calor específico, $J/(kg\cdot K)$; i_e, la entalpía, J/kg; ρ_e, la densidad del gas en la pared a la temperatura en equilibrio, kg/m^3.

A continuación, tenemos

$$\tilde{i}_D = i_D/(i_r - i_e); \qquad (12.68)$$

$$i_D = u_d\,(\alpha_\delta - \alpha_e) = 3\cdot10^7\,(\alpha_\delta - \alpha_e), \qquad (12.69)$$

donde α_δ y α_e son los grados de disociación a las temperaturas T_0' y T_e, respectivamente.

Por lo tanto,

$$\tilde{i}_D = 3\cdot10^7\,(\alpha_\delta - \alpha_e)/(i_r - i_e). \qquad (12.70)$$

Los grados de disociación se determinan con las relaciones

$$p/p_\infty = (\rho/\rho_\infty)\,(T/T_\infty)\,(1+\alpha), \quad p/p_\infty = (\rho/\rho_\infty)\,(T/T_\infty)\,\mu_{\mathrm{m}\,\infty}/\mu_{\mathrm{m}},$$

con las que calculamos $\alpha = (\mu_{\mathrm{m}\,\infty}/\mu_{\mathrm{m}}) - 1$, donde $\mu_{\mathrm{m}\,\infty}$ y μ_{m} son las masas medias molares del aire a T_∞ y T, respectivamente.

De acuerdo con esto, en la frontera de la capa

$$\alpha_\delta = (\mu_{\mathrm{m}\,\infty}/\mu_{\mathrm{m}\delta}) - 1, \qquad (12.71)$$

en tanto que en la pared

$$\alpha_e = (\mu_{\mathrm{m}\,\infty}/\mu_{\mathrm{m}e}) - 1. \qquad (12.72)$$

Aquí, el valor de $\mu_{\mathrm{m}\,\infty}$ se toma en las tablas de la atmósfera normal para la altura $H = 20$ km.

De este modo obtenemos un sistema de ecuaciones para determinar la temperatura de radiación en equilibrio constituida por las dependencias (12.64)—(12.67); (12.70)—(12.72), así como las relaciones

$$\left.\begin{array}{l}(c_p)_e = c_p\,(p_0', T_e);\ i_e = i_e\,(p_0', T_e);\\ \mu_{\mathrm{m}\,e} = \mu_{\mathrm{m}\,e}\,(p_0', T_e);\ \rho_e = p_0'\,(R_0 T_e/\mu_{\mathrm{m}\,e}).\end{array}\right\} \qquad (12.73)$$

Las ecuaciones de este sistema se pueden reducir a tres:

$$T_e^4\,(A_1/\varepsilon\sigma)\,(i_r - i_e)\,[1 + (\mathbf{Le}^{2/3}\varphi - 1)\,\tilde{i}_D];$$

$$\tilde{i}_D = 3\cdot10^7\,(\mu_{\mathrm{m}\,\infty}/\mu_{\mathrm{m}\delta} - \mu_{\mathrm{m}\,\infty}/\mu_{\mathrm{m}\,e})/(i_r - i_e); \quad \varphi = (1 + A_2/\rho_e)^{-1};$$

donde $A_1 = 0{,}5\mathbf{Pr}^{-2/3}\sqrt{2\rho_0'\mu_0'\tilde{\lambda}}$; $A_2 = 0{,}5\mathbf{Sc}^{-2/3}\sqrt{2\rho_0'\mu_0'\tilde{\lambda}/k_{\mathrm{par}}}$.

Calculamos los valores de A_1 y A_2 haciendo los números de Prandtl $\mathbf{Pr} = 0{,}64$, de Lewis—Semiónov $\mathbf{Le} = 1{,}45$ y de Schmidt $\mathbf{Sc} = 0{,}49$:

$$A_1 = 0{,}3861\ \mathrm{J\cdot s/m^4}; \quad A_2 = 4{,}614\ \mathrm{kg/m^3}.$$

Tomando $\varepsilon = 0{,}7$; $\sigma = 5{,}67\cdot10^{-8}$ $W/(m^2\cdot K^4)$, así como teniendo en cuenta que $i_r = i_0 = 8{,}218\cdot10^6$ m^2/s^2, $\mu_{\mathrm{m}\,\infty} = 28{,}96$ y $\mu_{\mathrm{m}\delta} = 25{,}64$, el sistema de ecua-

ciones aducido se puede representar en la forma

$$\left.\begin{aligned} &T_e^4 = 9{,}727\cdot 10^6\,(8{,}218\cdot 10^6 - i_e)\,[1 + (1{,}281\varphi - 1)\,\tilde{i}_D];\\ &\tilde{i}_D = 3\cdot 10^7/\,(8{,}218\cdot 10^6 - i_e)\,(1{,}13 - 28{,}96/\mu_{m\,e});\\ &\varphi = (1 + 4{,}614/\rho_e)^{-1};\quad i_e = i_e\,(p_0',\ T_e);\\ &\mu_{m\,e} = \mu_{m\,e}\,(p_0',\ T_e);\quad p_e = 177\mu_{m\,e}/T_e. \end{aligned}\right\} \qquad (12.74)$$

Este sistema de ecuaciones se resuelve según el método de aproximaciones sucesivas. Para la primera aproximación prefijamos la temperatura $T_e < T_0 = 4620$ K, igual, p. ej., a $T_e = 2700$ K. Con ayuda del diagrama $i - p$ y la dependencia $\mu_m = f\,(p,\ T)$, según el mencionado valor de T_e y la presión $p_0' = 14{,}72 \times 10^5$ Pa (15 kg/cm²), determinamos la entalpía $i_e = 3{,}28\cdot 10^6$ m²/s², así como la masa media molar $\mu_{me} = 28{,}90$. Después, hallamos $\tilde{i}_D = 0{,}7763$; $\rho_e = 1{,}894$ kg/m³; $\varphi = 0{,}291$.

Poniendo en (12.74) los valores de i_e, $\tilde{i}_D$, φ determinamos $T_{eI} = 2228$ K.

Como la diferencia entre las temperaturas prefijada y calculada es considerable, hay que realizar una serie de aproximaciones. Los cálculos nos muestran que se obtienen resultados satisfactorios en la cuarta aproximación ($i_e = 2{,}72\cdot 10^6$ m²/s²; $\mu_{m\,e} = 28{,}96$):

$$\tilde{i}_D = 0{,}7086;\quad \rho_e = 2{,}184\ \text{kg/m}^3;\quad \varphi = 0{,}3213;\quad T_{eIV} = 2363\ \text{K}.$$

La diferencia entre T_{eIV} y su valor en la anterior aproximación constituye el 0,7 %, aproximadamente, y el valor hallado puede considerarse definitivo.

Capítulo 13

Aerodinámica del medio enrarecido

Las nociones y definiciones teóricas de aerodinámica examinadas más arriba se basan en la hipótesis de continuidad del medio gaseoso. No obstante, al aumentar la altura de vuelo, debido a la disminución de la densidad del aire, crece el recorrido libre de las moléculas. El objeto de aerodinámica del medio enrarecido consiste en la investigación de las corrientes con considerables longitudes del recorrido libre comparables, en particular, con el espesor de la capa límite. Para este régimen de corriente ya no son aplicables las relaciones gasodinámicas del medio continuo y es preciso emplear la teoría cinética que investiga el movimiento del gas mediante *la mecánica molecular*. Las conclusiones más importantes de esta teoría y los métodos del cálculo aerodinámico, aducidos en este capítulo, se basan en el esquema discreto de la estructura del gas. En correspondencia a este esquema se analizan los regímenes del flujo molecular libre y de la corriente con deslizamiento, las correspondientes dependencias para calcular la presión, el esfuerzo de rozamiento y la energía de las partículas incidentes y reflejadas. Al formular las preguntas y los problemas se toman en consideración diversos esquemas de reflexión de las moléculas y una propiedad física tan importante del gas enrarecido como *la acomodación*. De acuerdo con esto, se determinan la presión y el esfuerzo de rozamiento, las fuerzas aerodinámicas sumarias, así como la termotransferencia en el flujo molecular libre que circula alrededor del vehículo volante. Los cálculos numéricos concretos de los parámetros gasodinámicos se ofrecen con el ejemplo de circulación alrededor (a lo largo) de las formas más difundidas de los vehículos volantes o de sus elementos, tales como la superficie plana (perfil), cono redondo, esfera y cilindro.

Problemas y preguntas

13.1. Un ala en forma de placa delgada con cuerda $L = 5$ m está en movimiento a la velocidad $V_\infty = 3000$ m/s en la atmósfera de la Tierra a la altura $H = 100$ km. Caractericen el régimen de circulación alrededor de esta ala.

13.2. Un vehículo volante que tiene la forma de una placa delgada con cuerda $L = 10$ m desciende por la atmósfera de la Tierra a la velocidad $V_\infty = 5000$ m/s. Determinen la altura límite de descenso para la que el régimen de circulación alrededor de la placa corresponde a la corriente molecular libre del aire.

13.3. ¿En qué casos se realiza el esquema de reflexión especular de las moléculas por la superficie sometida a la circulación y cuándo es más probable la reflexión difusa?

13.4. La velocidad media del movimiento caótico de las moléculas en un gas $\bar{c}_t = 832$ m/s. Hallen la velocidad más probable de las moléculas y la correspondiente velocidad del sonido a condición de que $k = c_p/c_v = 1{,}4$.

13.5. ¿De qué depende la presión en la superficie sometida a circulación durante la interacción de las moléculas con ella?

13.6. ¿Qué condiciona el surgimiento del esfuerzo de rozamiento cuando las moléculas interaccionan con la pared?

13.7. Determinen la presión y el esfuerzo de rozamiento sobre un perfil en los puntos con coordenadas $x = 2{,}5$ m y $7{,}5$ m, cuando alrededor de él circula un

flujo molecular libre ($k = c_p/c_v = 1{,}4$) a la velocidad $V_\infty = 7000$ m/s. Las condiciones de circulación corresponden al vuelo a la altura $H = 160$ km, a la reflexión total difusa y al valor del coeficiente de acomodación $\eta = 1$. La forma y las dimensiones (m) del perfil se muestran en la fig. 13.1.

13.8. Muestren que con la reflexión especular de las moléculas de la superficie sometida a la circulación el coeficiente de acomodación $f = 0$.

13.9. ¿Cómo varía el coeficiente de presión $\bar{p}_f$ en el área delantera de la superficie sometida a la circulación al aumentar el coeficiente de acomodación?

13.10. Una placa está en movimiento bajo un ángulo de ataque $\alpha = 10°$ en la atmósfera aérea enrarecida, a la altura $H = 100$ km, a la velocidad $V_\infty = 3000$ m/s. Determinen la presión y el esfuerzo de rozamiento sobre dicha placa a condición de que, aproximadamente, el 90 % de las moléculas se refleja de forma difusa, el resto, de modo especular. El material de la placa es acero o aluminio con la superficie maquinada, para la que la tempertaura $T_{\text{par}} \approx 300$ K y el coeficiente de acomodación térmica $\eta = 0{,}7$.

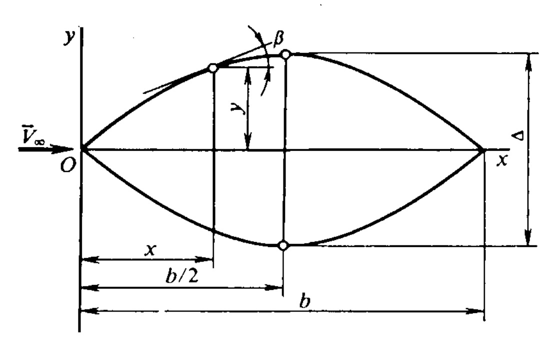


Fig. 13.1. Ecuación y dimensiones del perfil: $y = 2\,(\Delta/b)\,x\,(1 - x/b)$; $\Delta = 5$ m; $b = 10$ m;

Fig. 13.2. Perfil romboidal: $\Delta = 2$ m; $b = 8$ m; $l = 4$ m

13.11. Según el planteamiento del problema 13.10 calculen la energía de las partículas incidentes y reflejadas, así como determinen la resistencia, la fuerza de sustentación y los correspondientes coeficientes aerodinámicos.

13.12. Empleando los datos del problema 13.10 calculen los flujos térmicos en una placa, así como la temperatura en equilibrio de su superficie. La cuerda de la placa $L = 5$ m, la envergadura $l = 2$ m.

13.13. Un ala de perfil romboidal está en movimiento en la atmósfera de la Tierra a la altura $H = 160$ km y a la velocidad $V_\infty = 4000$ m/s bajo el ángulo de ataque $\alpha = 0$. Determinen la resistencia al avance a condición de que el coeficiente de acomodación $f = 1$. La forma y las dimensiones (m) del ala se muestran en la fig. 13.2.

13.14. Un cono de altura $h = 5$ m con ángulo en el vértice $\beta_{\text{cono}} = 15°$ efectúa un vuelo en la atmósfera a la altura $H = 200$ km y a la velocidad $V_\infty = 4500$ m/s bajo un ángulo de ataque $\alpha = 0$. Calculen la resistencia aerodinámica a condición de que la reflexión de las moléculas es por completo difusa, mientras que el coeficiente térmico de acomodación $\eta = 1$.

13.15. Un vehículo volante en forma de un cilindro redondo de $R_T = 2$ m y de largura $l = 5$ m, se mueve en el sentido de la normal al eje longitudinal a la altura $H = 100$ km con la velocidad $V_\infty = 4000$ m/s. Calculen la resistencia aerodinámica a condición de que el coeficiente de acomodación del impulso $f = 1$ y coeficiente térmico de acomodación $\eta = 1$.

13.16. Comparen los coeficientes de resistencia al avance de un cono y una ojiva parabólica con igual alargamiento $\lambda_{\text{máx.t}} = 2$ y sección máxima transversal a condición de la reflexión especular de las moléculas por la superficie lisa. La generatriz parabólica está prefijada con la ecuación $\bar{r} = \bar{x}(2 - \bar{x})$, en la que $\bar{r} = r/r_{\text{máx.t}}$, $\bar{x} = x/x_{\text{máx.t}}$ (véase la fig. 10.6).

13.17. Determinen el coeficiente de resistencia c_x de un cono con ángulo en el vértice $\beta_{\text{cono}} = 30°$, si tomamos los siguientes esquemas de interacción entre las partículas de aire y la superficie: reflexión especular (elástica); reflexión difusa; mixta (reflexión especular y difusa simultáneamente); los esquemas newtonianos de reflexión de choque y elástica. El vuelo transcurre bajo el ángulo de ataque $\alpha = 0$ a la altura $H = 100$ km y a la velocidad correspondiente al número $\mathbf{M}_\infty = V_\infty/\mathring{a}_i = 2$ (a_i es la velocidad del sonido en la atmósfera). El coeficiente de acomodación del impulso $f = 0{,}8$.

13.18. Determinen el rendimiento aerodinámico de un ala en forma de placa que realiza un vuelo a la altura $H = 160$ km bajo el ángulo de ataque $\alpha = 30°$. Analicen los casos correspondientes a los valores del coeficiente de acomodación $f = 0$; 0,8 y 1, a condición de que el número $\mathbf{M}_\infty = 3$. Comparen los valores obtenidos con los que corresponden a los esquemas de reflexión de choque y elástica.

13.19. Un vehículo volante de forma esférica está en movimiento a la primera velocidad cósmica a una altura $H = 100$ km. Determinen el flujo de calor hacia la superficie, así como la temperatura en equilibrio de la pared a condición de que el coeficiente térmico de acomodación $\eta = 0{,}7$ y la emisividad de la superficie $\varepsilon = 0{,}8$. Semejantes flujos de calor como la radiación solar y terrestre, así como el calor emitido por la maquinaria no se tienen en cuenta. La pared está bien refrigerada.

Solución de los problemas y respuestas a las preguntas

13.1. En las tablas de la atmósfera normal determinamos los parámetros del aire a la altura $H = 100$ km: $p_i = 3{,}186 \cdot 10^{-2}$ Pa; $\rho_i = 5{,}549 \cdot 10^{-7}$ kg/m³; $T_1 = 196{,}6$ K, la longitud del recorrido libre de las moléculas $l = 1{,}439 \cdot 10^{-1}$ m.

Para calcular el número **Kn** empleamos la dependencia

$$\mathbf{Kn} = l/\delta, \qquad (13.1)$$

donde δ es el espesor de la capa límite en el extremo de la placa y que se calcula con la expresión

$$\delta = 4{,}64\ L/\sqrt{\mathbf{Re}_L}. \qquad (13.2)$$

Aquí,

$$\mathbf{Re}_L = \rho_i V_i L/\mu_i. \qquad (13.3)$$

Con el fin de hallar μ_i empleamos la fórmula $\mu_i = \mu_H (T_i/T_H)^{0{,}76}$. Introduciendo aquí el valor de $\mu_H = 1{,}789 \cdot 10^{-5}$ Pa·s y de $T_H = 288{,}2$ K hallamos $\mu_i = 1{,}337 \cdot 10^{-5}$ Pa·s.

Teniendo en cuenta el valor de $L = 5$ m y de $V_\infty = 3000$ m/s, obtenemos $\mathbf{Re}_L = 622{,}6$; $\delta = 0{,}9298$ m. Por lo tanto, $\mathbf{Kn} = 0{,}1548$. Con arreglo a la teoría cinética de los gases, para $0{,}1 < \mathbf{Kn} < 1$ la circulación se caracteriza por el deslizamiento. Así, pues, conforme al valor obtenido del número de Knudsen ($\mathbf{Kn} = 0{,}1548$) el flujo alrededor de la placa se determina por el régimen de deslizamiento.

13.2. Al régimen de *flujo molecular libre* corresponden los números **Kn** $= l/\delta > 10$ (donde l es la longitud del recorrido libre de la molécula; δ, el espesor de la capa límite junto al borde de salida de la placa, calculado según las relaciones habituales para un medio continuo). Dicho número se determina con $L = 10$ m y $V_\infty = 5000$ m/s:

$$\mathbf{Kn} = 5{,}903\sqrt{\mu_i/p_i}\,. \qquad (13.4)$$

Tomando aquí el valor mínimo de **Kn** = 10, hallamos $1{,}694 = \sqrt{\mu_i/p_i}$.

Prefijemos el valor mínimo de μ_i en la gama de alturas $0 \leqslant H \leqslant 200$ km. Este valor corresponde a la temperatura del aire en la estratosfera $T_i = 216{,}7$ K. En este caso, el valor de p_i es el mínimo y la correspondiente altura, la máxima. Con semejante valor de la altura es más verídica la suposición acerca del flujo molecular libre. Haciendo $T_H = 288{,}2$ K, $\mu_H = 1{,}789 \cdot 10^{-5}$ Pa·s, hallamos $\mu_i = 1{,}441 \cdot 10^{-5}$ Pa·s.

Tomando esto en consideración $1{,}694 = \sqrt{1{,}441 \cdot 10^{-5}/p_i}$ y la correspondiente presión $p_i = 5{,}023 \cdot 10^{-6}$ Pa. En las tablas de la atmósfera normal hallamos $H \geqslant 400$ km.

13.3. El esquema de reflexión especular de las moléculas por la superficie se realiza cuando ésta es muy lisa y está inclinada bajo pequeño ángulo de ataque. No obstante, incluso de una superficie pulida, sólo una pequeña parte de las moléculas se refleja de modo especular. El más probable es el esquema de reflexión difusa, el que supone la presencia de rugosidades y rendijas, cuyas dimensiones son comparables con las dimensiones transversales de las moléculas. En este esquema, como resultado de los choques con la superficie, las moléculas le transmiten toda su cantidad de movimiento y energía, al penetrar en la rendija o al encontrarse entre los salientes de las rugosidades. Al pasar un pequeño intervalo de tiempo ellas se reflejan en sentido arbitrario.

13.4. Para calcular la más probable velocidad de las moléculas empleamos la dependencia $\bar{c}_m = \bar{c}_i\sqrt{\pi/4}$. Poniendo en ella el valor de $\bar{c}_i = 832$ m/s, obtenemos $c_m = 737{,}3$ m/s. Según el valor de $\bar{c}_i$ se puede hallar también la velocidad del sonido: $a_i = \bar{c}_i\sqrt{\pi k/8} = 616{,}9$ m/s.

13.5. La presión provocada por la interacción de las moléculas incidentes y reflejadas por la pared se determina por la cantidad de movimiento transmitido por estas moléculas en sentido normal hacia la pared. De forma numérica, una molécula condiciona una presión igual a la cantidad de movimiento mv (donde m es la masa de las moléculas; v, la componente normal de la velocidad). La presión total se obtiene sumando las presiones de todas las moléculas en interacción con la pared.

13.6. Como con el esquema de interacción difusa la molécula incidente pierde por completo la componente tangencial de la cantidad de movimiento, igual a mu (donde u es la componente tangencial de la velocidad), precisamente esto condiciona el efecto de rozamiento y el surgimiento del correspondiente esfuerzo tangencial. Sumando el efecto de todas las moléculas por unidad de tiempo, obtenemos el valor del esfuerzo de rozamiento. En el caso del mencionado esquema de interacción durante la reflexión es igualmente probable cualquier dirección de las moléculas que abandonan la pared y, por ello, ellas no crean esferzo de rozamiento. Así, pues, el rozamiento está condicionado sólo por la interacción difusa de las moléculas incidentes con la superficie.

13.7. En las tablas de la atmósfera normal hallamos $p_i = 4{,}11 \cdot 10^{-4}$ Pa; $\rho_i = 1{,}118 \cdot 10^{-9}$ kg/m³; $T_i = 1207$ K; $\bar{c}_i = 954{,}7$ m/s. La velocidad más proba-

ble, correspondiente al valor hallado de $\bar{c}_i$, $c_m = 846{,}1$ m/s ,la velocidad del sonido $a_i = 707{,}9$ m/s. El número de Mach, calculado a esta velocidad del sonido, $\mathbf{M}_\infty = V_\infty/a_i = 9{,}888$. Ahora calculamos la variable

$$\bar{x}^2 = \mathrm{sen}^2\, \beta \mathbf{M}_\infty^2 k/2, \quad (13.5)$$

donde β es el ángulo de inclinación al perfil en el punto prefijado y que se calcula con la ecuación $\mathrm{tg}\, \beta = dy/dx = (2\Delta/b)\,(1 - 2x/b)$.

Como la coordenada del punto prefijado $x = 2{,}5$ m, $\mathrm{tg}\, \beta = 0{,}5$. Para el punto en el sector de cola ($x = 7{,}5$ m), $\mathrm{tg}\, \beta = -0{,}5$. De acuerdo con esto, $\bar{x}^2 = 13{,}69$; $\bar{x} = 3{,}699$.

Con los datos obtenidos calculamos el coeficiente de presión en el lado de ataque de la superficie, condicionado por la colisión con las moléculas incidentes. Como el valor de $\bar{x} = 3{,}699$ es suficientemente grande, para semejante cálculo, con buena aproximación, se puede utilizar la dependencia

$$\bar{p}_{if} = 2p_{if}/(\rho_i V_\infty^2) = 2\, \mathrm{sen}^2\, \beta\, [1 + 1/(2\bar{x}^2)]. \quad (13.6)$$

Para el punto que consideramos ($\bar{x} = 3{,}699$ y $\mathrm{sen}^2\, \beta = 0{,}2$) $\bar{p}_{if} = 0{,}4146$. La correspondiente presión absoluta $p_{if} = \bar{p}_{if}\rho_i V_\infty^2/2 = 1{,}136\cdot 10^{-2}$ Pa.

El coeficiente de presión debido a las moléculas reflejadas

$$\bar{p}_{rf} = (\mathrm{sen}^2\, \beta/\bar{x})\, \sqrt{\pi T_r/T_i}, \quad (13.7)$$

donde, para valores suficientemente grandes de $\bar{x}$ se puede tomar

$$T_r/T_i = (5 + k\mathbf{M}_\infty^2)\,(k - 1)/(k + 1). \quad (13.8)$$

Poniendo aquí los datos, obtenemos $T_r/T_i = 23{,}65$; $\bar{p}_{rf} = 0{,}4661$. La correspondiente presión absoluta $p_{rf} = \bar{p}_{rf}\rho_i V_\infty^2/2 = 1{,}277\cdot 10^{-2}$ Pa.

El coeficiente total de presión, condicionado por el efecto de las moléculas incidentes y reflejadas, $\bar{p}_f = \bar{p}_{if} + \bar{p}_{rf} = 0{,}8807$. La correspondiente presión absoluta $p_f = p_{if} + p_{rf} = 2{,}413\cdot 10^{-2}$ Pa.

El coeficiente de presión en el punto de la pared trasera de la superficie (con $\bar{x} > 2$) con suficiente aproximación se considera igual a cero ($\bar{p}_{ib} = \bar{p}_{rb} = 0$). Por lo tanto, son iguales a cero las respectivas presiones absolutas.

Calculemos el coeficiente y el esfuerzo de rozamiento. Para el punto en el lado de ataque el coeficiente de rozamiento (con $\bar{x} > 2$) puede tomarse igual a $(c_{if})_f = \mathrm{sen}\, 2\beta = 0{,}8$, el correspondiente esfuerzo de rozamiento $\tau_{if} = (c_{if})_f\, \rho_i V_\infty^2/2 = 2{,}191\cdot 10^{-2}$ Pa.

Para el punto en el lado trasero $(c_{if})_b = 0$ y, por consiguiente, el correspondiente esfuerzo de rozamiento $\tau_{ib} = 0$.

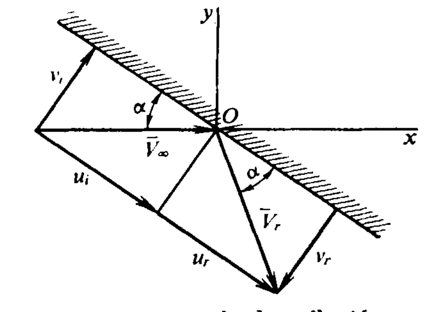


Fig. 13.3. Esquema de la reflexión especular de las moléculas

13.8. De acuerdo con el esquema de reflexión especular de las moléculas (fig. 13.3) la componente tangencial de la velocidad no varía en valor y dirección, mientras que la componente normal, conservando su valor, cambia su dirección por la inversa. Con arreglo a esto $p_i = p_r = p$ y $\tau_i = \tau_r = \tau$. Poniendo estos

valores en las expresiones para los coeficientes de acomodación, obtenemos

$$f_n = (p_i - p_r)/(p_i - p_{\text{par}}) = 0; \quad f_\tau = (\tau_i - \tau_r)/\tau_i = 0.$$

13.9. Para analizar la influencia de la acomodación sobre la variación del coeficiente de presión, hagamos uso de la expresión $\bar{p}_f = 2\,(2 - f)\,\text{sen}^2\,\beta$ obtenida para la pared fría ($T_{\text{par}} < T_i$) y los valores de $\bar{x} > 2$. Como se deduce de la expresión, con el aumento del coeficiente de acomodación el valor de $\bar{p}_f$ disminuye. Desde el punto de vista físico semejante efecto se explica por la disminución del número de moléculas que, después de reflejarse especularmente, crean un impulso adicional (fuerza «reactiva») y contribuyen a la subida de la presión.

13.10. En las tablas de la atmósfera normal, para la altura $H = 100$ km, hallamos $p_i = 3{,}186\cdot 10^{-2}$ Pa; $\rho_i = 5{,}549\cdot 10^{-7}$ kg/m³; $T_i = 196{,}6$ K, así como la aceeración de la fuerza de la gravedad $g = 9{,}505$ m/s². A estos valores de los parámetros corresponden la velocidad del sonido $a_i = \sqrt{kp_i/\rho_i} = 283{,}6$ m/s y el número de Mach $\mathbf{M}_\infty = V_\infty/a_i = 10{,}58$, con el cual se calcula $\bar{x}^2 = \text{sen}^2\,\alpha \mathbf{M}_\infty^2 k/2 = 2{,}362$; $\bar{x} = 1{,}537$.

Determinamos la razón de las temperaturas de las moléculas incidentes y reflejadas empleando la fórmula

$$T_r/T_i = (T_{\text{par}}/T_i)\,[(1 - \eta)\,E_i k_2/(2mN_i RT_{\text{par}} k_1) + \eta], \tag{13.9}$$

en la que

$$E_i = (1/2)\,mN_i\,\{V_\infty^2 + RT_i\,[4 + 1/(\varphi + 1)]\}; \tag{13.10}$$

$$\varphi = e^{-\bar{x}^2}\,[\pm \bar{x}\sqrt{\pi}\,(1 \pm \text{erf}\,\bar{x})]^{-1}; \tag{13.11}$$

$$k_2 = 1 + [(1/E_i)\,(5 - 3k)/(k - 1)]\,(mRT_i/2)\,N_i; \tag{13.12}$$

$$k_1 = (k + 1)/[4\,(k - 1)]. \tag{13.13}$$

En (13.11) el signo «+» se refiere al lado delantero de la superficie, el «—», al posterior. La función erf $\bar{x}$, que entra en la expresión para φ, se determina según la variable $\bar{x}$. Calculamos:

$$\varphi = e^{-2{,}362}\,[\pm 1{,}537\sqrt{\pi}\,(1 \pm 0{,}9702)]^{-1}; \quad RT_i = 55650 \text{ m}^2/\text{s}^2;$$
$$RT_{\text{par}} = 84920 \text{ m}^2/\text{s}^2;$$
$$E_i/(2mN_i RT_{\text{par}}) = (1/4)\,[1/(RT_{\text{par}})]\,\{V_\infty^2 + RT_i\,[4 + 1/(\varphi + 1)]\}.$$

Tomando el signo «+» obtenemos para el lado delantero $E_i/(2mN_i RT_{\text{par}}) = 27{,}31$, en tanto que para el lado posterior (con el signo «—»), $E_i/(2mN_i RT_{\text{par}}) = 26{,}13$.

La razón $E_i/(2mN_i RT_i) = E_i/[(2mN_i RT_{\text{par}})\,(T_{\text{par}}/T_i)]$ tiene para el lado delantero el valor 41,69 y para el posterior, 39,88.

Ahora, respectivamente, calculemos para los lados delantero y posterior: $k_2 = 1{,}012$ y $k_2 = 1{,}012$. Como el parámetro $k_1 = 1{,}5$, teniendo en cuenta los demás datos obtenidos, las razones de las temperaturas son las siguientes: para el lado delantero de la superficie $T_r/T_i = 9{,}504$, para el posterior, $T_r/T_i = 9{,}139$.

El coeficiente de presión condicionado por la interacción con las moléculas incidentes y reflejadas,

$$\bar{p} = 2\,(p_i + p_r)/(\rho_i V_\infty^2) = \text{sen}^2\,\alpha\,\{(2 - f)\,[\pm e^{-\bar{x}^2}/(\bar{x}\sqrt{\pi}) + (1 + 0{,}5\bar{x}^{-2})\,(1 \pm \text{erf}\,\bar{x})] + [f/(2\bar{x}^2)]\sqrt{T_{\text{par}}/T_i} \times [e^{-\bar{x}^2} \pm \bar{x}\sqrt{\pi}\,(1 + \text{erf}\,\bar{x})]\}. \tag{13.14}$$

De acuerdo con $\bar{x} = 1{,}537$ hallamos $\operatorname{erf}\bar{x} = 0{,}9702$, $e^{-\bar{x}^2} = 0{,}09423$. Con estos datos determinamos para el lado delantero $\bar{p}_f = 0{,}119$ y para el posterior, $\bar{p}_b = 1{,}432\cdot 10^{-4}$.

El esfuerzo de rozamiento

$$c_f = 2\tau/(\rho_i V_\infty^2) = f \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha\,[\pm\, e^{-\bar{x}^2}/(\bar{x}\sqrt{\pi}) + (1 \pm \operatorname{erf}\bar{x})]. \tag{13.15}$$

Después de poner en (13.15) los datos hallamos para el lado delantero (signo «+») $(c_f)_f = 0{,}3086$ y para el posterior (signo «—»), $(c_f)_b = -7{,}371\cdot 10^{-4}$.

Para comparar determinamos los coeficientes de presión y rozamiento en el caso de la reflexión total difusa ($f = 1$). El coeficiente de presión

$$\bar{p}_{f(b)} = \operatorname{sen}^2\alpha\,\{\pm\, e^{-\bar{x}^2}/(\bar{x}\sqrt{\pi}) + (1 + 0{,}5\bar{x}^{-2})(1 \pm \operatorname{erf}\bar{x}) + [1/(2\bar{x}^2)]\sqrt{T_{\text{par}}/T_i}\,[e^{-\bar{x}^2} \pm \bar{x}\sqrt{\pi}\,(1 \pm \operatorname{erf}\bar{x})]\}.$$

Conforme a esta relación en el lado delantero (signo «+») $\bar{p}_f = 0{,}116$ y en el posterior (signo «—»), $\bar{p}_b = 1{,}489\cdot 10^{-4}$.

El coeficiente de rozamiento

$$c_f = \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha\,[\pm\, e^{-\bar{x}^2}/(\bar{x}\sqrt{\pi}) + (1 \pm \operatorname{erf}\bar{x})].$$

Poniendo en esta última relación los datos, hallamos en el lado delantero $(c_f)_f = 0{,}3429$ y en el posterior, $(c_f)_b = -8{,}19\cdot 10^{-4}$. La comparación de los parámetros obtenidos nos muestra que con la falta de acomodación los coeficientes de rozamiento crecen, el coeficiente de presión en el lado delantero disminuye insignificantemente, mientras que en el posterior, aumenta.

13.11. De la solución del problema 13.10 conocemos $\bar{x} = 1{,}537$; $RT_i = 5{,}565\cdot 10^4$ m²/s²; $V_\infty = 3000$ m/s; $\rho_i = 5{,}549\cdot 10^{-7}$ kg/m³; $T_r/T_i = 9{,}504$ (para el lado delantero) y $T_r/T_i = 9{,}139$ (para el lado posterior).

Con el fin de calcular la energía de las moléculas incidentes empleamos la expresión

$$E_i = (1/4)\sqrt{2/\pi}\,\rho_i \sqrt{RT_i}\,[e^{-\bar{x}^2} \pm \bar{x}\sqrt{\pi}\,(1 \pm \operatorname{erf}\bar{x})] \times \{V_\infty^2 + RT_i\,[4 + 1/(\varphi - 1)]\}, \tag{13.16}$$

en la que el signo «+» se refiere al lado delantero y el «—», al posterior.

Según (13.11), para el lado delantero, en la anterior expresión $\varphi = 1{,}765\cdot 10^{-2}$ y para el posterior, $\varphi = -1{,}161$. Como resultado de los cálculos obtenemos $(E_i)_f = 1{,}323\cdot 10^3$ W/m² (lado delantero) y $(E_i)_b = 3{,}025$ W/m² (lado posterior).

La energía de las moléculas reflejadas se determina con la fórmula

$$E_r = \sqrt{2/\pi}\,\rho_i R T_i\,(T_r/T_i)\sqrt{RT_i}\,[e^{-\bar{x}^2} \pm \bar{x}\sqrt{\pi}\,(1 \pm \operatorname{erf}\bar{x})]. \tag{13.17}$$

Realizamos los cálculos tomando en consideración que para el lado delantero $T_r/T_i = 9{,}504$ y para el posterior, $T_r/T_i = 9{,}139$. Como resultado, para el lado delantero $(E_r)_f = 3{,}013\cdot 10^2$ W/m² y para el posterior, $(E_r)_b = 0{,}7204$ W/m². Con arreglo a la solución del problema 13.10 tenemos datos acerca de los coeficientes de presión y rozamiento en la placa en el caso cuando se tiene en cuenta el carácter mixto de la reflexión (el coeficiente de acomodación del impulso $f = 0{,}9$) y el coeficiente de acomodación térmica $\eta = 0{,}7$. Los valores de los coeficientes de presión y rozamiento son los siguientes:

$$\bar{p}_f = 2(p_i + p_r)/(\rho_i V_\infty^2) = 0{,}119; \quad \bar{p}_b = 2(p_i + p_r)/(\rho_i V_\infty^2) = 1{,}432\cdot 10^{-4};$$
$$(c_f)_f = 2\tau_f\,(\rho_i V_\infty^2) = 0{,}3086; \quad (c_f)_b = 2\tau_f/(\rho_i V_\infty^2) = -7{,}371\cdot 10^{-4}.$$

De acuerdo con estos valores calculamos los coeficientes aerodinámicos y las correspondientes fuerzas, tomando en consideración que la anchura de la placa (cuerda) $L = 5$ m, mientras que su longitud (envergadura) $l = 2$ m.

El coeficiente de resistencia para el lado delantero $c_{xf} = 2X_f/(\rho_i V_\infty^2 S_{\text{ala}}) = \bar{p}_f \operatorname{sen} \alpha + (c_f)_f \cos \alpha = 0{,}3246$ y la correspondiente fuerza $X_f = c_{xf}\rho_i V_\infty^2 S_{\text{ala}}/2 = 8{,}105$ N.

El coeficiente análogo para el lado posterior $c_{xb} = 2X_b/(\rho_i V_\infty^2 S_{\text{ala}}) = \bar{p}_b \operatorname{sen} \alpha + (c_f)_b \cos \alpha = -7{,}01 \cdot 10^{-4}$ y la fuerza $X_b = c_{xb}\rho_i V_\infty^2 S_{\text{ala}}/2 = -1{,}751 \cdot 10^{-2}$ N.

El coeficiente sumario de resistencia $c_x = c_{xf} - c_{xb} = 0{,}3253$ y la respectiva fuerza $X = X_f - X_b = 8{,}122$ N.

Calculamos el coeficiente de la fuerza de sustentación para el lado delantero de la placa:

$$c_{yf} = 2Y_f/(\rho_i V_\infty^2 S_{\text{ala}}) = \bar{p}_f \cos \alpha - (c_f)_f \operatorname{sen} \alpha = 6{,}452 \cdot 10^{-2}.$$

Este mismo coeficiente para el lado posterior

$$c_{yb} = 2Y_b/(\rho_i V_\infty^2 S_{\text{ala}}) = \bar{p}_b \cos \alpha - (c_f)_b \operatorname{sen} \alpha = 2{,}712 \cdot 10^{-4}.$$

Los correspondientes valores de la fuerza de sustentación son los siguientes:

$$Y_f = c_{yf}\rho_i V_\infty^2 S_{\text{ala}}/2 = 1{,}611 \text{ N}; \quad Y_b = c_{yb}\rho_i V_\infty^2 S_{\text{ala}}/2 = 6{,}772 \cdot 10^{-3} \text{ N}.$$

El coeficiente sumario de la fuerza de sustentación $c_y = c_{yf} - c_{yb} = 6{,}425 \times 10^{-2}$ y su valor $Y = Y_f - Y_b = 1{,}604$ N. El rendimiento aerodinámico $K = c_y/c_x = 0{,}1975$.

13.12. Para calcular el flujo específico de calor hacemos uso de la expresión

$$q = (\eta\rho_i/2)\sqrt{RT_i/(2\pi)}\,(k_2\{V_\infty^2 + RT_i[4 + 1/(\varphi + 1)]\} - 4RT_{\text{par}}k_1)[e^{-\bar{x}^2} \pm \bar{x}\sqrt{\pi}(1 \pm \operatorname{erf} \bar{x})], \quad (13.18)$$

en la que para el lado delantero se toma el signo «+», para el posterior, «—».

En la solución del problema 13.10 tenemos $\rho_i = 5{,}549 \cdot 10^{-7}$ kg/m³; $\eta = 0{,}7$; $RT_i = 5{,}565 \cdot 10^4$ m²/s²; $RT_{\text{par}} = 8{,}492 \cdot 10^4$ m²/s²; $\bar{x} = 1{,}537$; $\operatorname{erf} \bar{x} = 0{,}9702$; $e^{-\bar{x}^2} = 0{,}09423$; $k_1 = 1{,}5$, así como los valores de $\varphi = 1{,}756 \cdot 10^{-2}$; $k_2 = 1{,}012$ (para el lado delantero) y $\varphi = -1{,}161$; $k_2 = 1{,}012$ (para el lado posterior).

Poniendo en (13.18) los datos determinamos el flujo específico de calor dirigido hacia el lado delantero de la superficie $q_f = 886{,}4$ W/m² y el correspondiente valor de $Q_f = q_f S_{\text{ala}} = 8864$ W. El flujo específico de calor que va hacia el lado posterior, conforme a (13.18), es $q_b = 2{,}022$ W/m², mientras que la correspondiente termotransferencia $Q_b = q_b S_{\text{ala}} = 20{,}22$ W.

El flujo específico sumario de calor dirigido hacia la placa $q = q_f + q_b = 888{,}4$ W/m² y la termotransferencia total $Q = Q_f + Q_b = qS_{\text{ala}} = 8884$ W.

La temperatura de equilibrio de la pared

$$T_e = [k_2 T_i/(4k_1)][2\bar{x}_\infty^2 + 4 + 1/(\varphi + 1)]. \quad (13.19)$$

en la que $\bar{x}_\infty^2 = M_\infty^2 k/2 = 78{,}36$.

Tomando este valor para el lado delantero de la superficie $T_{ef} = 5361$ K y para el posterior, $T_{eb} = 5122$ K.

13.13. Con ayuda de las tablas de la atmósfera normal determinamos los parámetros del aire a la altura $H = 160$ km: $p_i = 4{,}11 \cdot 10^{-4}$ Pa; $g = 9{,}331$ m/s²; $\rho_i = 1{,}118 \cdot 10^{-9}$ kg/m³; $T_i = 1207$ K; $\bar{c}_i = 954{,}7$ m/s.

Según el valor de $\bar{c}_i$ hallamos la velocidad del sonido $a_i = \bar{c}_i \sqrt{\pi k/8} = 707{,}9$ m/s y el correspondiente número de Mach $M_\infty = V_\infty/a_i = 5{,}651$. A continuación, determinamos el valor de $\bar{x}^2 = \text{sen}^2\,\beta M_\infty^2 k/2$. Aquí el ángulo β se halla de la condición $\text{tg}\,\beta = \Delta/b = 0{,}25$. De acuerdo con esto $\text{sen}\,\beta = 0{,}2425$ y $\bar{x}^2 = 1{,}315$; $\bar{x} = 1{,}147$.

Como el perfil es simétrico y está instalado bajo el ángulo de ataque $\alpha = 0$, el valor de los coeficientes de resistencia para los planos delantero y posterior del perfil son iguales y, para todo el perfil, dicho coeficiente es dos veces mayor que para una sola superficie.

El coeficiente de resistencia, condicionado por la interacción de las moléculas incidentes de la superficie delantera,

$$c_{xif} = \text{tg}\,\beta\,\{e^{-\bar{x}^2}/(\bar{x}\sqrt{\pi}) + [1 + \text{sen}^2\beta/(2\bar{x}^2)]\,(1 + \text{erf}\,\bar{x})\}, \qquad (13.20)$$

Según $\bar{x} = 1{,}147$ determinamos $\text{erf}\,\bar{x} = 0{,}8952$ y $e^{-\bar{x}^2} = 0{,}2685$. Con estos datos, para el lado delantero del perfil, $c_{xif} = 0{,}5172$ y para el posterior

$$c_{xib} = \text{tg}\,\beta\,\{-e^{-\bar{x}^2}/(\bar{x}\sqrt{\pi}) + [1 + \text{sen}^2\beta/(2\bar{x}^2)]\,(1 - \text{erf}\,\bar{x})\} = -5{,}425\cdot 10^{-3}. \qquad (13.20')$$

El coeficiente total de resistencia, condicionado por el efecto de las moléculas incidentes sobre las superficies delantera y posterior, $c_{xi} = c_{xif} - c_{xib} = 0{,}5226$. Las partículas reflejadas crean también fuerza de resistencia, cuyo coeficiente

$$c_{xr} = [(1/2)\,\text{sen}^2\beta\,\text{tg}\,\beta/\bar{x}^2]\,\sqrt{T_r/T_i}\,[e^{-\bar{x}^2} \pm \bar{x}\sqrt{\pi}\,(1 \pm \text{erf}\,\bar{x})], \qquad (13.21)$$

donde el signo «+» se refiere al lado delantero y el «—», al posterior.

La razón T_r/T_i se halla con la fórmula

$$T_r/T_i = [1 + kM_\infty^2/4 + 0{,}25/(\varphi + 1)]\,(k_2/k_1), \qquad (13.22)$$

en la que $\varphi = e^{-\bar{x}^2}\,[\pm\,\bar{x}\sqrt{\pi}\,(1 \pm \text{erf}\,\bar{x})]^{-1}$;

$$k_2 = 1 + [(1/E_i)\,(5 - 3k)/(k - 1)]\,mRT_iN_i/2; \quad k_1 = (k + 1)/[4\,(k - 1)].$$

Realizamos los cálculos: $\varphi = e^{-1{,}315}\,[\pm 1{,}147\sqrt{\pi}\,(1 \pm 0{,}8952)]^{-1}$; $RT_i = 3{,}296\cdot 10^5$ m²/s².

Simultáneamente hallamos la razón $2E_i/(mRT_iN_i) = (RT_i)^{-1}\,\{V_\infty^2 + RT_i \times [4 + 1/(\varphi + 1)]\}$. Haciendo aquí para el lado delantero $\varphi = 6{,}975\cdot 10^{-2}$, obtenemos $2E_i/(mRT_iN_i) = 53{,}49$, para el lado posterior, $(\varphi = -1{,}26)$, $2E_i/(mRT_iN_i) = 48{,}69$.

Con arreglo a estos datos, para el lado delantero $k_2 = 1{,}037$ y para el posterior, $k_2 = 1{,}041$.

Como el parámetro $k_1 = 1{,}5$, tomando en consideración los otros valores hallados, la razón de las temperaturas para el lado delantero $T_r/T_i = 8{,}579$, para el lado posterior, $T_r/T_i = 7{,}787$.

Ahora, ya es posible calcular los coeficientes de resistencia para el lado delantero $c_{xrf} = 6{,}747\cdot 10^{-2}$ y para el posterior, $c_{xrb} = 8{,}655\cdot 10^{-4}$.

El coeficiente total de resistencia a cuenta de las moléculas reflejadas $c_{xr} = c_{xrf} - c_{xrb} = 0{,}0666$. El coeficiente sumario de resistencia del sólido sometido a circulación $c_x = c_{xi} + c_{xr} = 0{,}5892$, la correspondiente fuerza aerodinámica, $X = 0{,}5c_x\rho_iV_\infty^2S_{\text{ala}} = 0{,}1686$ N.

13.14. Con ayuda de las tablas de la atmósfera normal determinamos los parámetros del aire a la altura $H = 200$ km: $p_i = 1{,}628\cdot 10^{-4}$ Pa; $\rho_i = 3{,}668 \times 10^{-10}$ kg/m³; $T_i = 1404$ K; $\bar{c}_i = 1063$; $g_i = 9{,}22$ m/s². Al valor hallado de $\bar{c}_i$ corresponde $a_i = \bar{c}_i\sqrt{\pi k/8} = 788{,}2$ m/s.

Según la velocidad prefijada V_∞ y el valor de a_i calculamos el número de Mach: $\mathbf{M}_\infty = V_\infty/a_i = 5{,}709$. Teniendo en cuenta que según el planteamiento $\beta_{\text{cono}} = 15°$, hallamos $\bar{x}^2_{\text{cono}} = \operatorname{sen}^2 \beta_{\text{cono}} \mathbf{M}^2_\infty k/2 = 1{,}528$; $\bar{x}_{\text{cono}} = 1{,}236$. Conforme a estos valores $\bar{x}^2_\infty = \mathbf{M}^2_\infty k/2 = 22{,}81$; $\bar{x}_\infty = 4{,}776$.

Empleando $\bar{x}_{\text{cono}} = 1{,}236$, hallamos $\operatorname{erf} \bar{x}_{\text{cono}} = 0{,}9195$, $e^{-\bar{x}^2_{\text{cono}}} = 0{,}217$ y, a continuación, calculamos $\varphi = e^{-\bar{x}^2_{\text{cono}}} [\bar{x}_{\text{cono}} \sqrt{\pi} (1 + \operatorname{erf} \bar{x}_{\text{cono}})]^{-1} = 0{,}0516$ y la razón $2E_i/(mN_iRT_i) = (RT_i)^{-1} \{V^2_\infty + RT_i [4 + 1/(\varphi + 1)]\}$, donde $RT_i = 3{,}789 \cdot 10^5$ m²/s². Después de las correspondientes sustituciones en esta relación, obtenemos $2E_i/(mN_iRT_i) = 58{,}38$.

Así, pues, de acuerdo con (13.12) el coeficiente $k_2 = 1 + [(1/E_i)(5 - 3k)/ \times \times (k - 1)] (mRT_iN_i/2) = 1{,}034$.

Tomando en consideración que según (13.13) $k_1 = 1{,}5$, hallamos la razón de las temperaturas: $T_r/T_i = [1 + k\mathbf{M}^2_\infty/4 + 0{,}25 (\varphi + 1)] (k_2/k_1) = 8{,}72$. Poniendo aquí los resultados obtenidos, calculamos el coeficiente de la fuerza de resistencia que actúa sobre el lado delantero de la superficie:

$$c_{xf} = c_{xif} + c_{xrf} = (e^{-\bar{x}^2_{\text{cono}}}/\bar{x}_{\text{cono}}) [1/\sqrt{\pi} + \operatorname{sen} \beta_{\text{cono}}/2\bar{x}_\infty) \sqrt{T_r/T_i}] + \\ + (1 + \operatorname{erf} \bar{x}_{\text{cono}}) \{1 + 1/(2\bar{x}^2_\infty) + [\operatorname{sen} \beta_{\text{cono}}/(2\bar{x}_\infty)] \sqrt{\pi T_r/T_i}\} = 2{,}347.$$

El coeficiente de la fuerza de resistencia que actúa sobre la sección de base de la superficie, con grandes valores de $\bar{x}_\infty$ ($\bar{x}_\infty > 2$), se puede tomar igual a cero ($c_{xb} = c_{xib} + c_{xrb} = 0$). Por lo tanto, el coeficiente sumario de la resistencia del cono $c_x = c_{xf} + c_{xb} = c_{xf} = 2{,}347$, mientras que la correspondiente fuerza aerodinámica $X = c_x \rho_i V^2_\infty S_{\text{máx.t}}/2$. Conforme a que $S_{\text{máx.t}} = \pi r^2_{\text{máx.t}} = \pi (h \operatorname{tg} \beta)^2 = 5{,}639$ m², dicha fuerza $X = 4{,}915 \cdot 10^{-2}$ N.

13.15. De la solución del problema 13.10 tenemos $p_i = 3{,}186 \cdot 10^{-2}$ Pa; $\rho_i = 5{,}549 \cdot 10^{-7}$ kg/m³; $T_i = 196{,}6$ K; $a_i = 283{,}6$ m/s y el correspondiente número de Mach $\mathbf{M}_\infty = V_\infty/a_i = 14{,}1$. Según este número calculamos $\bar{x}^2_\infty = \mathbf{M}^2_\infty k/2 = 139{,}2$; $\bar{x}_\infty = 11{,}8$.

Tomamos que la razón de temperaturas T_r/T_i es igual para todos los puntos de la superficie e igual a su valor en el punto con el ángulo de inclinación de la tangente $|\beta| = 45°$, a la que corresponde el valor de $\bar{x}^2 = \operatorname{sen}^2 \beta \mathbf{M}^2_\infty k/2 = 69{,}58$; $\bar{x} = 8{,}342$.

Como el valor hallado de $\bar{x}$ es suficientemente grande, en la ecuación (13.22) es posible hacer $\varphi \approx 0$ y en la fórmula (13.12), $k_2 \approx 1$. Considerando que $k_1 = 1{,}5$, determinamos la razón $T_r/T_i = 47{,}22$. Ésta se tiene en cuenta al calcular el coeficiente sumario de resistencia del cilindro:

$$c_x = (\sqrt{\pi}\, e^{-\bar{x}^2_\infty/2}/\bar{x}^2_\infty) \{\mathbf{I}_0 (\bar{x}^2_\infty/2) + (\bar{x}^2_\infty + 1/2) [\mathbf{I}_0 (\bar{x}^2_\infty/2) + \\ + \mathbf{I}_1 (\bar{x}^2_\infty/2)]\} + [\pi^{3/2}/(4\bar{x}_\infty)] \sqrt{T_r/T_i}. \qquad (13.23)$$

Para grandes valores del argumento $\bar{x}^2_\infty$ las funciones modificadas de Bessel pueden calcularse con ayuda de las siguientes dependencias:

$$\mathbf{I}_0 (\bar{x}^2_\infty/2) = (e^{\bar{x}^2_\infty/2}/\sqrt{\pi \bar{x}^2_\infty}) \{1 + 1/(4\bar{x}^2_\infty) + 9/[2(4\bar{x}^2_\infty)^2] + \ldots\}; \qquad (13.24)$$

$$\mathbf{I}_1 (\bar{x}^2_\infty/2) = (e^{\bar{x}^2_\infty/2}/\sqrt{\pi \bar{x}^2_\infty}) \{1 - 3/(4\bar{x}^2_\infty) - 15/[2(4\bar{x}^2_\infty)^2] - \ldots\}. \qquad (13.25)$$

Después de poner aquí los correspondientes datos, obtenemos:

$$I_0(\bar{x}_\infty^2/2)=1{,}002e^{69{,}58}/(11{,}8\sqrt{\pi});\quad I_1(\bar{x}_\infty^2/2)=0{,}9946e^{69{,}58}(11{,}/8\sqrt{\pi});$$
$$c_x=2{,}822.$$

La correspondiente fuerza aerodinámica $X = c_x\rho_i V_\infty^2 S/2 = c_x\rho_i V_\infty^2 2R_T l/2 = 250{,}5$ N.

13.16. Consideremos la fórmula general para el cálculo del coeficiente de resistencia de un sólido de revolución con generatriz curvilínea en caso de la reflexión especular de las moléculas por la superficie. De la fig. 13.4 se desprende que el flujo elemental de masa $dm = 2\pi\rho_i V_\infty r dr = 2\pi\rho_i r r' dx$, donde ρ_i es la densidad del aire a la altura prefijada; $r' = dr/dx$.

Para la interacción especular el ángulo de reflexión β es igual al de incidencia β. La variación general del sentido de la velocidad con relación al eje del sólido se determina con el ángulo 2β. Esta variación del sentido provoca el cambio de la cantidad de movimiento de las moléculas al reflejarse de un sector de área $2\pi r dr$, al que corresponde la resistencia al avance $dX = 2\pi\rho_i V_\infty^2(1-\cos 2\beta)\, r r' dx$.

Después de integrar esta expresión, a condición de que $1 - \cos 2\beta = 2\,\mathrm{sen}^2\,\beta = 2(r')^2/[1+(r')^2]$, obtenemos

$$X=4\pi\rho_i V_\infty^2\int_0^{x_{\text{máx. }t}}\{r(r')^3/[1+(r')^2]\}\,dx.$$

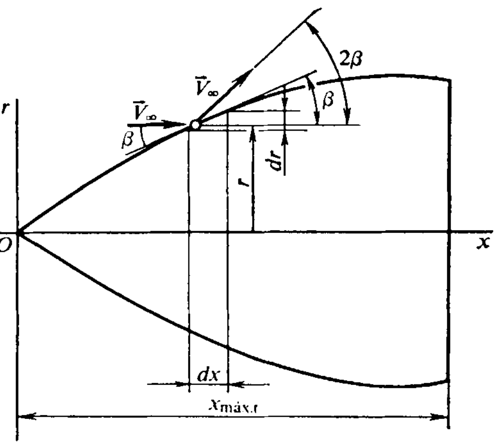


Fig. 13.4. Esquema para calcular la resistencia durante la reflexión especular

Esta misma fuerza puede expresarse con el coeficiente de resistencia $X = c_x(\rho_i V_\infty^2/2)\,\pi r^2_{\text{máx.t}}$ y, a continuación, hallar la expresión para este coeficiente:

$$c_x=16\lambda_{\text{máx. }t}\int_0^1\{\bar{r}(r')^3/[1+(r')^2]\}\,dx. \tag{13.26}$$

Para un sólido parabólico de revolución $\bar{r}=\bar{x}(2-\bar{x})$, en tanto que la derivada $r' = dr/dx = (1/\lambda_{\text{máx.t}})(1-\bar{x})$. Tomando esto en consideración, como resultado de la integración, obtenemos

$$c_x=(c_x)_p=\{\lambda^4_{\text{máx. t}}/2+\lambda^2_{\text{máx. t}}/4-(\lambda^6_{\text{máx. t}}/2+\lambda^4_{\text{máx. t}}/2)\times$$
$$\times\ln[1+(1/\lambda_{\text{máx. t}})^2]\}\,16\lambda^{-2}_{\text{máx. t}}. \tag{13.27}$$

Para un cono la ecuación de la generatriz $\bar{r}=\bar{x}$ y la derivada $r' = 1/(2\lambda_{\text{máx.t}})$. Por esto,

$$c_x=(c_x)_{\text{cono}}=\lambda^{-2}_{\text{máx. t}}\{1+[1/(2\lambda_{\text{máx. t}})]^2\}^{-1}. \tag{13.28}$$

Como para el cono $\lambda_{\text{máx.t}} = (1/4)[(1/\mathrm{sen}^2\,\beta_{\text{cono}})-1]$, tendremos $(c_x)_{\text{cono}} = 4\,\mathrm{sen}^2\,\beta_{\text{cono}}$.

45—01650

Después de poner en (13.28) $\lambda_{\text{máx.t}} = 2$ ($\beta_{\text{cono}} = 14°$), hallamos $(c_x)_p = 0{,}2928$; $(c_x)_{\text{cono}} = 0{,}2341$.

13.17. Con el esquema especular de reflexión (véase la fig. 13.3) la componente tangencial de la velocidad se conserva por completo ($u_i = u_r$), mientras que la componente normal varía en dirección, pero queda constante en valor ($v_i = -v_r$). Para este esquema de reflexión el coeficiente de acomodación del impulso $f = 0$.

Con la reflexión difusa, las moléculas, al chocar con la pared, penetran en las rendijas o bien en el espacio entre salientes y se absorben por completo por la pared, transmitiéndole su impulso y energía. Después de cierto intervalo de tiempo, aquéllas son reflejadas por la pared en sentido arbitrario y a cierta velocidad (fig. 13.5). Hay que tener en cuenta, que todo sentido de reflexión es igualmente probable. Para semejante reflexión el coeficiente de acomodación del impulso $f = 1$.

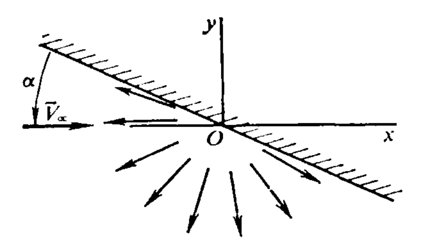


Fig. 13.5. Esquema de la reflexión difusa de las moléculas

En la práctica se observa el esquema de la reflexión mixta, con el que la mayor parte de las moléculas se refleja de forma difusa y la menor, de forma especular. En semejante caso el coeficiente de acomodación del impulso corresponde a la condición $0 < f < 1$. Como el esquema mixto es el más general, obteniendo las respectivas dependencias para él, es posible, a continuación, en el caso de reflexión especular o totalmente difusa, hallar de estas dependencias los resultados necesarios tomando $f = 0$ o bien $f = 1$, respectivamente.

Calculemos el coeficiente de resistencia del cono para el caso general de reflexión. En las tablas de la atmósfera normal determinamos los parámetros del aire a la altura de $H = 100$ km: $p_i = 3{,}186 \cdot 10^{-2}$ Pa; $\rho_i = 5{,}549 \cdot 10^{-7}$ kg/m³; $T_i = 196{,}6$ K. La correspondiente velocidad del sonido (véase el problema 13.10) $a_i = 283{,}6$ m/s.

Para las condiciones prefijadas calculamos:

$$\bar{x}^2_{\text{cono}} = \operatorname{sen}^2 \beta_{\text{cono}} M^2_\infty k/2 = 0{,}7; \quad \bar{x}_{\text{cono}} = 0{,}8367; \quad \bar{x}^2_\infty = M^2_\infty k/2 = 2{,}8; \quad \bar{x}_\infty = 1{,}673.$$

Determinamos la función φ para la superficie delantera del cono y para la sección de base, aprovechando la expresión (13.11). Para ello, según $\bar{x}_{\text{cono}} = 0{,}8367$ hallamos $\operatorname{erf} \bar{x}_{\text{cono}} = 0{,}7632$, de acuerdo con $\bar{x}_\infty = 1{,}673$ — $\operatorname{erf} \bar{x}_\infty = 0{,}9822$ y los correspondientes valores de $e^{-\bar{x}^2_{\text{cono}}} = 0{,}4966$, $e^{-\bar{x}^2_\infty} = 0{,}06081$.

Empleando los valores hallados, calculamos para la superficie delantera $\varphi_f = 0{,}1899$ y para la sección de base $\varphi_b = -1{,}152$.

Después de esto calculamos el valor de $RT_i = 5{,}565 \cdot 10^4$ m²/s² y las razones para el lado delantero $2E_i/(mN_iRT_i) = (RT_i)^{-1} \{V^2_\infty + RT_i [4 + 1/(\varphi + 1)]\} = 10{,}62$ y para el posterior, $2E_i/(mN_iRT_i) = 3{,}202$, respectivamente.

Poniendo los datos obtenidos en (13.12) calculamos el coeficiente k_2 para la superficie delantera ($k_2 = 1{,}188$) y para la sección de base ($k_2 = 1{,}625$).

Haciendo $k_1 = 1{,}5$ hallamos la razón de las temperaturas para la superficie delantera [según (13.22)] $T_r/T_i = 2{,}067$ y para la posterior, $T_r/T_i = 0{,}8182$.

En el caso de la reflexión mixta el coeficiente de presión en la superficie delantera del cono, condicionado por la interacción de las moléculas incidentes y refle-

jadas,

$$\bar{p}_f = \bar{p}_{if} + \bar{p}_{rf} = \operatorname{sen}^2 \beta_{\text{cono}} \{(2-f)[e^{-\bar{x}^2_{\text{cono}}}/(\bar{x}_{\text{cono}} \sqrt{\pi}) + (1+0{,}5/\bar{x}^2_{\text{cono}})(1+\operatorname{erf} \bar{x}_{\text{cono}})] + [f/(2\bar{x}^2_{\text{cono}})] \sqrt{T_r T_i} \times \\ \times [e^{-\bar{x}^2_{\text{cono}}} + \bar{x}_{\text{cono}} \sqrt{\pi}(1+\operatorname{erf} \bar{x}_{\text{cono}})]\}, \quad (13.29)$$

y el esfuerzo de rozamiento

$$(c_f)_f = f \operatorname{sen} \beta_{\text{cono}} \cos \beta_{\text{cono}} [e^{-\bar{x}^2_{\text{cono}}}/(\bar{x}\sqrt{\pi}) + (1+\operatorname{erf} \bar{x}_{\text{cono}})]. \quad (13.30)$$

El coeficiente de resistencia para el área elemental de la superficie del cono (fig. 13.6) $dc_{xf} = \bar{p}_f \operatorname{sen} \beta_{\text{cono}} + (c_f)_f \cos \beta_{\text{cono}}$ y el coeficiente sumario de resistencia

$$c_{xf} = \int_{\bar{S}} [\bar{p}_f \operatorname{sen} \beta_{\text{cono}} + (c_f)_f \cos \beta_{\text{cono}}] \, d\bar{S}, \quad (13.31)$$

donde $\bar{S} = S/S_{\text{máx. t}}$.

Para el cono aguzado $d\bar{S} = dS/S_{\text{máx. t}} = 2\pi r\, dr/(\pi r^2_{\text{máx. t}} \operatorname{sen} \beta_{\text{cono}}) = d\bar{r}^2/\operatorname{sen} \beta_{\text{cono}}$.

Después de poner los valores del coeficiente de presión (13.29) y del esfuerzo de rozamiento (13.30) en (13.31) y de integrar, obtenemos

$$c_{xf} = \operatorname{sen}^2 \beta_{\text{cono}} \{(2-f)[e^{-\bar{x}^2_{\text{cono}}}/(\bar{x}\sqrt{\pi}) + (1+0{,}5/\bar{x}^2_{\text{cono}})(1+\operatorname{erf} \bar{x}_{\text{cono}})] + \\ + [f/(2\bar{x}^2_{\text{cono}})] \sqrt{T_r/T_i} [e^{-\bar{x}^2_{\text{cono}}} + \bar{x}_{\text{cono}} \sqrt{\pi}(1+\operatorname{erf} \bar{x}_{\text{cono}})]\} + \\ + f \cos^2 \beta_{\text{cono}} [e^{-\bar{x}^2_{\text{cono}}}/(\bar{x}_{\text{cono}} \sqrt{\pi}) + (1+\operatorname{erf} \bar{x}_{\text{cono}})]. \quad (13.32)$$

Para la sección de base la magnitud $(c_f)_b$ no influye sobre el valor del coeficiente de resistencia del cono, ya que ella coincide en sentido con el plano de la

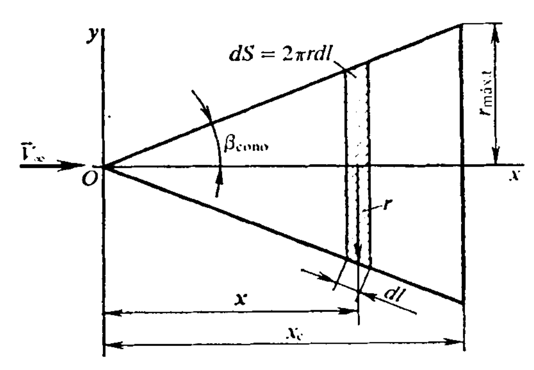


Fig. 13.6. Esquema del cono para calcular la circulación molecular libre

base que es normal al eje del cono. Por consiguiente, el coeficiente c_{xb} sólo depende del coeficiente de presión, condicionado por la interacción con la superficie de las moléculas incidentes y reflejadas y que puede ser hallado de la expresión (13.6), en la que se debe tomar $\beta = \pi/2$ y sustituir $\bar{x}$ por $-\bar{x}_\infty$.

El coeficiente de la fuerza que actúa sobre la sección de superficie de base es igual, en semejante caso, al coeficiente de presión:

$$c_{x\mathrm{b}} = c_{x\,\mathrm{s.b}} = \bar{p}_b = (2-f)\,[-e^{-\bar{x}_\infty^2}/(\bar{x}_\infty\sqrt{\pi}) + (1+0{,}5/\bar{x}_\infty^2)\,(1-\operatorname{erf}\bar{x}_\infty)] + \\ + [f/(2\bar{x}_\infty^2)]\sqrt{T_r/T_i}\,[e^{-\bar{x}_\infty^2} - \bar{x}_\infty\sqrt{\pi}\,(1-\operatorname{erf}\bar{x}_\infty)]. \qquad (13.33)$$

El coeficiente sumario de resistencia del cono, tomando en consideración que sobre la sección de base actúa la fuerza de empuje,

$$c_x = c_{xf} - c_{x\,\mathrm{s.b}}. \qquad (13.34)$$

Para las condiciones planteadas en el problema determinamos los valores de los coeficientes:

$$c_{xf} = 1{,}678 + 1{,}534f; \quad c_{x\,\mathrm{s.}b} = 9{,}168\cdot 10^{-4} + 8{,}383\cdot 10^{-4}f;$$
$$c_x = 1{,}677 + 1{,}533f.$$

En el caso de reflexión especular de las moléculas del aire en dichas fórmulas hay que hacer $f = 0$. Entonces, $c_{xf} = 1{,}678$ y $c_{x\,\mathrm{s.b}} = 9{,}168\cdot 10^{-4}$. El correspondiente valor de $c_x = c_{xf} - c_{x\,\mathrm{s.b}} = 1{,}677$. Para la relfexión difusa total el coeficiente $f = 1$, por lo tanto, $c_{xf} = 3{,}212$; $c_{x\,\mathrm{s.b}} = 1{,}755\cdot 10^{-3}$; $c_x = c_{xf} = c_{x\,\mathrm{s.b}} = 3{,}21$. Durante la reflexión mixta, de acuerdo con el planteamiento del problema, hacemos $f = 0{,}8$. Los correspondientes valores de los coeficientes son los siguientes: $c_{xf} = 2{,}905$; $c_{x\,\mathrm{s.b}} = 1{,}587\cdot 10^{-3}$; $c_x = 2{,}903$.

Con arreglo a la teoría de las colisiones de Newton, la fuerza de resistencia se determina con la pérdida total de la cantidad de movimiento de las partículas en el área de la sección transversal máxima. Como examinamos la circulación alrededor de un cono bajo el ángulo de ataque $\alpha = 0$, su área máxima es $\pi r_{\mathrm{máx.t}}^2$, mientras que durante la circulación a su alrededor de un flujo de moléculas libres a una velocidad V_∞, la fuerza de resistencia que actúa $X = \rho_\infty V_\infty^2 \pi r_{\mathrm{máx.t}}^2$. Por consiguiente, el coeficiente de resistencia $c_x = 2X/(\rho_\infty V_\infty^2 \pi r_{\mathrm{máx.t}}^2) = 2$.

Conforme al esquema newtoniano de la reflexión elástica, después de la colisión las partículas continúan su movimiento a lo largo de la pared, es decir, se desvían en el ángulo de encuentro de las moléculas con la pared. Con ello, la componente normal de la velocidad se amortigua y la tangente queda invariable. Para este esquema de la variación de la cantidad de movimiento por la normal al área elemental dS por unidad de tiempo es igual a $\rho_\infty V_n\,(V_n - 0)\,dS = \rho_\infty V_n^2 dS$, donde $V_n = V_\infty$ sen β_{cono} es la componente normal de la velocidad.

De aquí, el valor del coeficiente de presión $\bar{p}_{\mathrm{cono}} = 2\,(\rho_\infty V_n^2)/(\rho_\infty V_\infty^2) = 2\mathrm{sen}^2\,\beta_{\mathrm{cono}}$. Como para el cono $c_x = \bar{p}_{\mathrm{cono}}$,

$$c_x = 2\ \mathrm{sen}^2\,\beta_{\mathrm{cono}} = 0{,}5. \qquad (13.35)$$

En los esquemas newtonianos de reflexión analizados no hay interacción entre las moléculas y la sección de base del cono y, por lo tanto, $c_{x\,\mathrm{s.b}} = 0$. Para calcular el valor de c_x con el esquema newtoniano de reflexión especular hagamos uso de la expresión (13.28). Después de poner en ella el valor de $\lambda_{\mathrm{máx.t}} = 1/(2\ \mathrm{tg}\ \beta_{\mathrm{cono}}) = 0{,}866$, obtenemos que $c_x = 1$.

La diferencia de los valores obtenidos durante el cálculo según las fórmulas (13.35) y (13.28) encuentra su explicación en que en el primer caso no se toma en consideración el efecto de las moléculas reflejadas de la superficie. Si comparamos los valores de los coeficientes de resistencia con la reflexión especular de las moléculas, calculados por las dependencias (13.28) y (13.32), en la que hacemos $f = 1$,

obtendremos iguales resultados si en la segunda dependencia tomamos $\bar{x} > 2$ y, correspondientemente, erf $\bar{x} \approx 1$ y $e^{-\bar{x}^2} \approx 0$. Con menores valores de $\bar{x}$ el valor del coeficiente c_x, calculado con la dependencia (13.32), resulta ser mayor. Esto se explica porque en la fórmula (13.28) no se tiene en cuenta el carácter real de la interacción de las moléculas con la superficie del cono.

13.18. En las tablas de la atmósfera normal se determinan los parámetros del aire a la altura prefijada $H = 160$ km: $p_i = 4{,}11 \cdot 10^{-4}$ Pa; $\rho_i = 1{,}118 \cdot 10^{-9}$ kg/m³; $T_i = 1207$ K; $\bar{c}_i = 954{,}7$ m/s.

De acuerdo con el valor conocido de $\bar{c}_i$ calculamos la velocidad del sonido: $a_i = \bar{c}_i \sqrt{\pi k/8} = 707{,}9$ m/s. Con el valor de $M_\infty = 3$, el ángulo de ataque $\alpha = 30°$ y $k = 1{,}4$, calculamos los parámetros $\bar{x}^2 = \text{sen}^2\, \alpha M_\infty^2 k/2 = 1{,}575$, $\bar{x} = 1{,}255$.

Haciento $T_{\text{par}} = T_r$, de (13.22) determinamos la razón:

$$T_r/T_i = [1 + kM_\infty^2/4 + 0{,}25/(\varphi + 1)]\,(k_2/k_1).$$

Para hallar el valor de φ empleamos la fórmula (13.11). Según el valor de $\bar{x} = 1{,}255$ hallamos erf $\bar{x} = 0{,}9242$ y $e^{-\bar{x}^2} = 0{,}207$. Para la superficie delantera de la placa $\varphi_f = 0{,}04836$ y para la posterior, $\varphi_b = -1{,}228$.

Seguidamente, calculamos $RT_i = 3{,}296 \cdot 10^5$ m²/s² y, a continuación, determinamos para los lados delantero y posterior $2E_i/(mN_iRT_i) = 18{,}63$ y $13{,}29$, respectivamente.

Empleando los datos hallados, con la dependencia (13.12), calculamos los valores del coeficiente k_2 para los lados delantero y posterior, respectivamente: $k_2 = 1{,}107$ y $1{,}151$.

Por consiguiente, la razón de las temperaturas [según (13.22)] para el lado delantero, tomando en consideración el valor de $k_1 = 1{,}5$, será $T_r/T_i = 3{,}239$, mientras que para el posterior, $T_r/T_i = 2{,}342$.

Calculemos los valores de los coeficientes de presión debidos al efecto de las moléculas incidentes y reflejadas para las superficies delantera y posterior del ala, respectivamente:

$$\bar{p}_f = \text{sen}^2\alpha\,\{(2-f)\,[e^{-\bar{x}^2}/(\bar{x}\sqrt{\pi}) + (1 + 0{,}5/\bar{x}^2)(1 + \text{erf}\,\bar{x})] + [f/(2\bar{x}^2)]\sqrt{T_r/T_i}\,[e^{-\bar{x}^2} + \bar{x}\sqrt{\pi}(1 + \text{erf}\,\bar{x})]\} = 1{,}314 - 0{,}0457f;$$

$$\bar{p}_b = \text{sen}^2\alpha\,\{(2-f)\,[-e^{-\bar{x}^2}/(\bar{x}\sqrt{\pi}) + (1 + 0{,}5/\bar{x}^2)(1 - \text{erf}\,\bar{x})] + [f/(2\bar{x}^2)]\sqrt{T_r/T_i}\,[e^{-\bar{x}^2} - \bar{x}\sqrt{\pi}(1 - \text{erf}\,\bar{x})]\} = 0{,}003384 + 0{,}00297f.$$

Los correspondientes coeficientes de rozamiento:
para la superficie delantera

$$(c_f)_f = f\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\,[e^{-\bar{x}^2}/(\bar{x}\sqrt{\pi}) + (1 + \text{erf}\,\bar{x})] = 0{,}8734f;$$

para la posterior,

$$(c_f)_b = f\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\,[-e^{-\bar{x}^2}/(\bar{x}\sqrt{\pi}) + (1 - \text{erf}\,\bar{x})] = -0{,}007474f.$$

El coeficiente sumario de resistencia al avance

$$c_x = \bar{p}_f\,\text{sen}\,\alpha + (c_f)_f\cos\alpha - \bar{p}_b\,\text{sen}\,\alpha - (c_f)_b\cos\alpha = 0{,}6618 + 0{,}732f.$$

El coeficiente de la fuerza de sustentación del ala

$$c_y = \bar{p}_f\cos\alpha - (c_f)_f\,\text{sen}\,\alpha - \bar{p}_b\cos\alpha - (c_f)_b\,\text{sen}\,\alpha = 1{,}139 - 0{,}4789f.$$

De aquí, el, rendimiento aerodinámico de la placa delgada $K = c_y/c_x = (1{,}139 - 0{,}4789f)/(0{,}6618 + 0{,}732f)$. Realizando los cálculos para los valores de $f = 0$; 0,8; 1, obtenemos, correspondientemente, $K = 1{,}721$; 0,606 y 0,4736. Semejante carácter de variación del rendimiento del vehículo volante se explica debido a que con la disminución de f el valor de c_f también decrece y esto conduce a la disminución del valor de c_x y al aumento de c_y.

Para el esquema newtoniano de reflexión elástica (véase el problema 13.17) el coeficiente de presión en la superficie inferior $\bar{p} = 2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha$. Los valores correspondientes de los coeficientes aerodinámicos $c_x = 2\,\mathrm{sen}^3\,\alpha$ y $c_y = 2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha \cos\alpha$, mientras que el rendimiento aerodinámico $K = c_y/c_x = \cos\alpha/\mathrm{sen}\,\alpha = \mathrm{ctg}\,\alpha$.

Para las condiciones prefijadas con $\alpha = 30°$, $K = \mathrm{ctg}\,30° = 1{,}73$.

Con el esquema de colisiones de la reflexión newtoniana (véase el problema 13.17), el coeficiente de presión $\bar{p} = 2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha$, mientras que el coeficiente de rozamiento $c_f = 2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha$. Los correspondientes coeficientes aerodinámicos son los siguientes: $c_y = 2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha$; $c_x = 2\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha + 2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha$. El rendimiento aerodinámico $K = c_y/c_x = \cos\alpha\,(\mathrm{sen}\,\alpha - \cos\alpha)$. Para las condiciones del problema, con $\alpha = 30°$, el valor de $K = \cos 30°\,(\mathrm{sen}\,30° - \cos 30°) = -0{,}317$. Semejante considerable disminución del rendimiento aerodinámico del vehículo volante, además de signo negativo, encuentra su explicación por el crecimiento brusco de la componente tangencial de la fuerza aerodinámica superficial.

13.19. En las tablas de la atmósfera normal determinamos los parámetros del aire a la altura de $H = 100$ km: $p_i = 3{,}186\cdot10^{-2}$ Pa; $\rho_i = 5{,}549\cdot10^{-7}$ kg/m³; $T_i = 196{,}6$ K.

En la solución del problema 13.10 obtenemos el valor de la velocidad del sonido $a_i = 283{,}6$ m/s. El correspondiente número de Mach $M_\infty = V_\infty/a_i = 28{,}07$.

El flujo específico de calor en cierto punto con ángulo de inclinación β de la tangente respecto del sentido de la velocidad del flujo

$$q = 0{,}4997\eta\rho_i V_\infty^3\,[1 + 5/(kM_\infty^2)]\,\mathrm{sen}\,\beta = 9{,}834\cdot10^4\,\mathrm{sen}\,\beta\ \ \mathrm{W/m^2}. \qquad (13.36)$$

En el punto de remanso total, para el que $\beta = \pi/2$, dicho flujo de calor $q_0 = 9{,}834\cdot10^4$ W/m².

La termotransferencia en el punto de remanso total puede asimismo determinarse con la fórmula experimental

$$q_0 = 3{,}08\cdot10^{11}\eta\,(\rho_{\infty H}/\rho_{\infty T})\,(V_\infty/V_c)^3, \qquad (13.37)$$

donde V_c es la primera velocidad cósmica; $\rho_{\infty H}$ y $\rho_{\infty T}$, la densidad del aire a la altura H y en las inmediaciones de la Tierra, respectivamente. La razón de las densidades se determina en las tablas de la atmósfera normal: $\rho_{\infty H}/\rho_{\infty T} = \rho_i/\rho_T = 4{,}53\cdot10^{-7}$. Como, según el planteamiento, $V_\infty = V_c$ y $\eta = 0{,}7$, $q_0 = 9{,}767\times10^4$ W/m².

De acuerdo con el flujo de calor conocido es posible determinar la temperatura de radiación de equilibrio de la pared ($T_{\mathrm{par}} = T_e$):

$$T_e = q^{1/4}\,(\varepsilon\sigma)^{-1/4}. \qquad (13.38)$$

Como $\varepsilon = 0{,}8$ y $\sigma = 5{,}698\cdot10^{-8}$ W/(m²·K⁴), $(\varepsilon\sigma)^{-1/4} = 68{,}44$.

De acuerdo con esto $T_e = 68{,}44\,q_0^{1/4} = 1210$ K.

Apéndice

Programas para resolver los problemas en ordenador

Los programas aducidos más adelante para resolver los problemas de aerodinámica, examinados en los correspondientes capítulos, incluyen la descripción del algoritmo, su esquema, así como el programa de cálculo preparado en el lenguaje algorítmico FORTRAN-IV (para los problemas 4.30; 5.30; 7.15; 8.9; 8.11 se emplea la versión conversacional del lenguaje).

4.30. El esquema algorítmico (organigrama) de resolución del problema se muestra en la fig. 4.30-A y consta de las siguientes operaciones (bloques):

1. Introducción de los datos iniciales: los números de Mach M_∞ y M_B, el ángulo β_{ch}, el coeficiente k.

2. Cálculo de los coeficientes intermedios de la ecuación cúbica (véase el cap. 4) $\mathrm{tg}^3\,\theta_{ch} + A\,\mathrm{tg}^2\,\theta_{ch} + B\,\mathrm{tg}\,\theta_{ch} + C = 0$, en la cual $A = (1 - M_\infty^2)\,\{[1 + M_\infty^2\,(k-1)/2]/\mathrm{tg}\,\beta_{ch}\}$; $B = [1 + M_\infty^2\,(k-1)/2]/[1 + M_\infty^2\,(k-1)/2]$; $C = 1\,\{[1 + M_\infty^2\,(k-1)/2]/\mathrm{tg}\,\beta_{ch}\}$. Para hallar $\mathrm{tg}\,\beta_{ch}$ se emplea el subprograma (subrutina) TAN (X).

3. Solución de la ecuación cúbica y determinación de $\mathrm{tg}\,\theta_{ch}$.

4. Cálculo de θ_{ch}. M_D, p'_{0n} y p_0.

5. Impresión de los resultados M_∞, β_{ch}, p_0.

En el programa de resolución del problema se han adoptado las siguientes anotaciones (identificadores):

M, número de Mach (M_∞); K $= k = c_p/c_v$;

MD, número de Mach tras la onda de choque AB (A'B') (M_D);

MB, número de Mach durante la salida del flujo a la atmósfera (M_B);

L, uno de los símbolos que se introducen Y o bien N;

ángulo de la cuña del difusor (β_{ch});

BETTA, BR, ángulo de la cuña del difusor;

P (T) $= p'_{0D}/p_0$; $T = M_\infty$ sen θ_{ch}; $S = 1 + (k-1)\,M_\infty^2/2$;

CALL KARDAN (A, B, C, TG), subprograma para calcular la ecuación cúbica $\mathrm{tg}^3\,\theta_{ch} + A\,\mathrm{tg}^2\,\theta_{ch} + B\,\mathrm{tg}\,\theta_{ch} + C = 0$;

TG $= x$, raíz de la ecuación cúbica;

TETC $=$ arctg x; T1 $= M_\infty$ sen (arctg x);

P02, presión en la salida del difusor (p_B);

P0, presión en la antecámara (p_0);

PAT, presión de remanso para las condiciones tras la onda de choque normal CB (C'B')(p'_{0n}); $P = A^2/3 + B$;

$$Q = 2\,(A/3)^3 - AB/C + C; \quad QQ = (P/3)^3 + (Q/2)^2;$$

$$\mathrm{PPI} = 2\pi/3; \quad V = -Q/[2\sqrt{-(P/3)^3}];$$

$$T = 2\sqrt{-(P/3)}; \quad G = (\arccos V)/3;$$

$$Y_1 = T\cos(G); \quad Y_2 = T\cos(G + \mathrm{PPI}); \quad Y_3 = T\cos(G - \mathrm{PPI}).$$

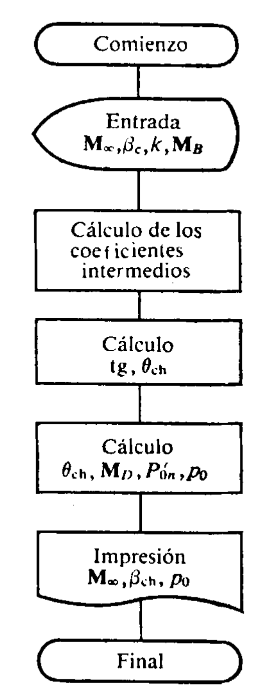


Fig. 4.30-A. Esquema del algoritmo para resolver el problema 4.30

5.30. En correspondencia con el esquema del algoritmo aducido en la fig. 5.30-A, al resolver el problema que examinamos se realizan las siguientes operaciones:

1. Asignación sucesiva de los valores a las magnitudes iniciales T_∞, $k = c_p/c_v$, a_∞, V_A y V_B (velocidades en los puntos prefijados); a los ángulos β_A y β_B (inclinación de los vectores velocidad en los puntos); x_A, y_A, x_B, y_B (coordenadas de los puntos).

Programa de cálculo para resolver el problema 4.30

```
      REAL M,MD,MB,K
      BYTE L
      P(T)=D*(2*D1*T**2-1)**(-1/(K-1))*T**(2*D1)*(D*2/
      (K+1))**(-D1)/(1+D2*T**2)**D1
      CONTINUE
      TYPE 1
      FORMAT(5X,'INTRODUZCAN LOS DATOS INICIALES (POR LOS BLANCOS))'
      /5X,'  MAX BETTA (EN GRAD) K=CP/CV  MB'/5X,¤)
      ACCEPT *,M,BETTA,K,MB
      PAT=1.
      BR=BETTA*3.1415926/180.
      D=(K-1)/(K+1)
      D1=K/(K-1)
      D2=(K-1)/2
      S=1+D2*M**2
      A=(1-M**2)/S/TAN(BR)
      B=(1+(K+1)/2*M**2)/S
      C=1/S/TAN(BR)
      CALL KARDAN(A,B,C,TG)
      TETC=ATAN(TG)
      T1=M*SIN(TETC)
      MD=SQRT(S/(K*T1**2-D2)+(M*COS(TETC))**2/(1+D2*T1**2))
      P02=PAT*(1+D2*MB**2)**D1
      P0=P02/P(T1)/P(MD)
      TYPE10,M,BETTA,P0
   10 FORMAT(//5X,'MAX=',F5.2,', BETTA=',F6.2,'GRAD.,PRESION B',
      'ANTECAMARA=',F7.3,'KG/CM**2.'///)
      TYPE *,'QUIERE CONTINUAR? (Y/N)'
      ACCEPT 3,L
    3 FORMAT(A1)
      IF (L.NE.'Y') GO TO 4
      GO TO 2
    4 CONTINUE
      STOP'  FINAL DEL PROBLEMA
      END

      SUBROUTINE KARDAN (A,B,C,X)
C     X-RAIZ MEDIA DE LA ECUACION CUBICA
C     A,B,C-COEFICIENTES DE LA ECUACION CUBICA
      P=-A**2/3+B
      Q=2*(A/3)**3-A*B/3+C
      QQ=(P/3)**3+(Q/2)**2
      IF((P.LT.0).AND.(QQ.LT.0))GO TO 1
      PRINT 2
    2 FORMAT(2X,'LA ECUACION TIENE RAICES COMPLEJAS')
      GO TO 3
    1 PPI=3.141593*2/3
      T=2*SQRT(-P/3)
      V=-Q/(2*SQRT(-(P/3)**3))
      G=ARCOS(V)/3
      Y1=T*COS(G)
      Y2=T*COS(G+PPI)
      Y3=T*COS(G-PPI)
      X=AMIN1(AMAX1(Y1,Y2),AMAX1(Y2,Y3),AMAX1(Y1,Y3))
      X=X-A/3
    3 RETURN
      END

      FUNCTION TAN(X)
      TAN=SIN(X)/COS(X)
      RETURN
      END

      FUNCTION ARCOS(X)
      IF(X.LT.0) GO TO 1
      ARCOS=ATAN(SQRT(1-X**2)/X)
      GO TO 2
    1 ARCOS=3.1415926+ATAN(SQRT(1-X**2)/X)
    2 CONTINUE
      RETURN
      END
```

2. Cálculo de los números $\mathbf{M}_A$ y $\mathbf{M}_B$ en los puntos A y B. Primero, haciendo uso de la dependencia (5.44), hallamos la razón $V^2_{\text{máx}}/V^2_\infty$ y, a continuación, con (5.45) se calculan los correspondientes valores de los números.

3. Cálculo de las coordenadas x_C, y_C del punto C que yace en la intersección de las características que pasan por los puntos prefijados A y B (para el caso plano):

$$x_C = [y_A - y_B + x_B \operatorname{tg}(\beta_B + \mu_B) - x_A \operatorname{tg}(\beta_A - \mu_A)]/[\operatorname{tg}(\beta_B + \mu_B) - \operatorname{tg}(\beta_A - \mu_A)], \quad y_C = y_A + (x_C - x_A)\operatorname{tg}(\beta_A - \mu_A).$$

Los ángulos μ_A y μ_B, que entran en estas expresiones, se determinan con los números de Mach ($\mathbf{M}_A$, $\mathbf{M}_B$) conocidos en los puntos A y B.

4. Cálculo de los ángulos ω_C y β_C en el punto C. Al emplear la expresión (5.8) se calculan los ángulos ω para los puntos A y B, después se halla el incremento $\Delta\omega_B = \Delta\beta_B = (1/2) \times$

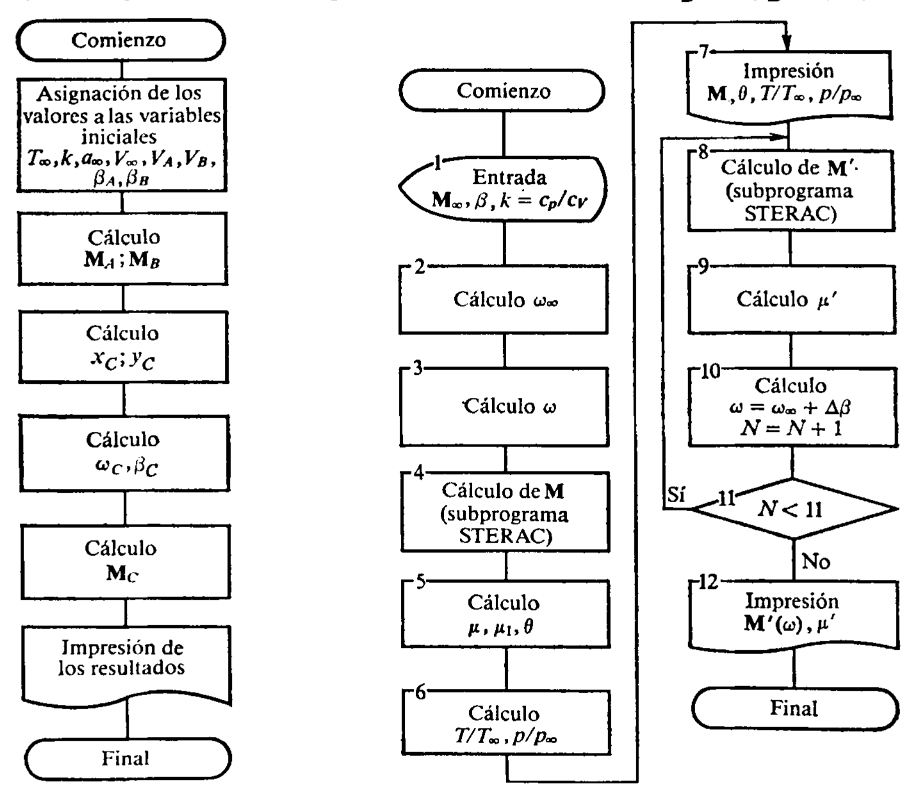


Fig. 5.30-A. Esquema del algoritmo para resolver el problema 5.30

Fig. 7.15-A. Esquema del algoritmo para resolver el problema 7.15

$\times [(\beta_A - \beta_B) + (\omega_A - \omega_B)]$ y los ángulos $\omega_C = \omega_B + \Delta\omega_B$, $\beta_C = \beta_B + \Delta\beta_B$.

5. Cálculo del número $\mathbf{M}_C$. Debido a la ausencia de una dependencia directa entre el número $\mathbf{M}$ y el ángulo ω el cálculo se realiza de acuerdo con (5.8) mediante las aproximaciones sucesivas.

6. Impresión de los resultados. A ésta sólo se sacan las coordenadas del punto C (x_C, y_C), los ángulos ω_C, β_C, así como el número $\mathbf{M}_C$.

En el programa para resolver el problema se han adoptado las siguientes anotaciones (identificadores):

$$\text{T} = T_\infty;\quad \text{A} = a_\infty;\quad \text{V} = V_\infty;\quad \text{BA} = \beta_A;\quad \text{BB} = \beta_B;$$
$$\text{C} = V^2_{\text{máx}}/V^2_\infty;\quad \text{UA} = \mu_A;\quad \text{UB} = \mu_B;\quad \text{XMA} = \mathbf{M}_A;$$
$$\text{XMB} = \mathbf{M}_B;\quad \text{TDA} = \operatorname{tg}(\beta_A - \mu_A);\quad \text{TDB} = \operatorname{tg}(\beta_B + \mu_B);$$
$$\text{W} = \omega;\quad \text{FB} = \Delta\omega_B;\quad \text{XMC} = \mathbf{M}_C.$$

Progama de cálculo para resolver el problema 5.30

```
      PROGRAM MAXC
      REAL K
      RAD=3.14159265/180.
      T=288.
      K=1.4
      A=340.
      V=750.
      VA=800.
      VB=820
      BA=30.*RAD
      BB=32.*RAD
      XA=10.
      XB=12.
      YA=10.
      YB=8.
      UK=K+1.
      OK=K-1.
      C=(2./(K-1)*A*A/(V+V)+1.)*V*V
      XMA=1./SQRT(((K-1.)/2.*(C/(VA*VA)-1.)))
      XMB=1./SQRT(((K-1.)/2.*(C/(VB*VB)-1.)))
      QMA=ATAN((1/XMA)/SQRT(1-(1/XMA)**2))
      QMB=ATAN((1/XMB)/SQRT(1-(1/XMB)**2))
      UA=ATAN(1./XMA/SQRT(1.-1./(XMA**2.)))
      UB=ATAN(1./XMB/SQRT(1.-1./(XMB**2.)))
      DB=BB+UB
      DA=BA-UA
      TDA=SIN(DA)/COS(DA)
      TDB=SIN(DB)/COS(DB)
      XC=(YA-YB+XB*TDB-XA*TDA)/(TDB-TDA)
      YC=(XC-XA)*TDA+YA
      WB=SQRT(UK/OK)*ATAN(SQRT((OK/UK)*(XMB**2-1)))-
      ATAN(SQRT(XMB**2-1.))
      WA=SQRT(UK/OK)*ATAN(SQRT((OK/UK)*(XMA**2-1)))-
      ATAN(SQRT(XMA**2-1.))
      FB=(1./2.)*(BA-BB+WA-WB)
      WC=WB+FB
      VBC=FB
      BC=BB+VBC
      WRITE(7,1) XMA,XMB
 1    FORMAT(1X,'MAX PUNTO A=',F7.4.' MAX PUNTO B='.F7.4)
      WRITE(7,3) XC,YC,WC
 3    FORMAT(1X,' XC=',F6.3,' YC=',F6.3,'OMEGA C=',F6.3, RAD.')
      WRITE(7,4) BC
 4    FORMAT(1X,'BETA C=',F6.3,'RAD'.)
      099=AINT(WC*1000)/1000
      UC=(XMB-XMA)/2
      XMC=XMA+UC
 90   CONTINUE
      09=SQRT(UK/OK)*ATAN(SQRT((OK/UK)*(XMC**2-1)))-
      ATAN(SQRT(XMC**2-1.))
      09=AINT(09*1000.)/1000.
      IF (09-099)333,222,111
222   WRITE(7,2) XMC
 2    FORMAT(1X, ' MAX PUNTO C =',F7.4
      GO TO 100
111   UC=UC/2
      XMC=XMC-UC
      GO TO 90
333   UC=UC/2
      XMC=XMC+UC
      GO TO 90
100   STOP
      END
```

7.15. El esquema algorítmico para resolver el problema se ofrece en la fig. 7.15-A y contiene las siguientes operaciones:

1. Introducción de los datos iniciales: el número M_∞ ,el ángulo de desviación del flujo β, la razón de los calores específicos $k = c_p/c_v$.

2. Cálculo del ángulo $\omega_\infty = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k-1}{k+1}(M_\infty^2-1)} - \operatorname{arctg}\sqrt{M_\infty^2-1}$.

3. Cálculo del ángulo $\omega = \omega_\infty + \beta$.

4. Cálculo del número M en la superficie desviada según la ecuación $\omega = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k-1}{k+1}(M^2-1)} - \operatorname{arctg}\sqrt{M^2-1}$. Para resolver esta ecuación respecto del número M se utiliza el subprograma STERAC.

5. Cálculo de los ángulos de inclinación de las características marginales del abanico de enrarecimiento $\mu = \operatorname{arctg}(1/\sqrt{M^2-1})$, $\mu_\infty = \operatorname{arctg}(1/\sqrt{M_\infty^2-1})$ y del ángulo del abanico de enrarecimiento $\theta = \mu_\infty + \beta - \mu$.

6. Cálculo de las razones $T/T_\infty = [1 + (k-1) M_\infty^2/2]/[1 + (k-1) M^2/2]$ y $p/p_\infty = (T/T_\infty)^{k/(k-1)}$.

7. Impresión de los resultados M, θ, T/T_∞ y p/p_∞.

8. Cálculo del número M′ en las características dentro del abanico de enrarecimiento según la ecuación

$$\omega = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k-1}{k+1}(M'^2-1)} - \operatorname{arctg}\sqrt{M'^2-1}$$

haciendo uso del subprograma STERAC.

9. Cálculo del ángulo de inclinación de las características $\mu' = \operatorname{arctg}(1/\sqrt{M'^2-1})$.

10. y 11. El ciclo de cálculo de las variables M′ y μ' se realiza con la fórmula $\omega = \omega_\infty + \Delta\beta$ con el paso $\Delta\beta = 3°$ desde $\beta = 0°$ hasta $\beta = 30°$.

12. Impresión de los resultados M′ (ω) y μ'. En el programa para la solución del problema se utilizan las siguientes anotaciones (identificadores):

$$M1 = M_\infty;\quad M = M;\quad MZ = M';\quad MJU1 = \mu_\infty;$$
$$MJUZ = \mu';\quad MJU = \mu;\quad BETA = \beta;\quad DBETA = \Delta\beta;$$
$$W = \omega;\quad W1 = \omega_\infty;\quad TETA = \theta;\quad K = k.$$
$$TT1 = T/T_\infty;\quad PP1 = p/p_\infty.$$

8.9 y 8.11. El esquema algorítmico para resolver estos dos problemas está representado en la fig. 8.9-A e incluye las siguientes operaciones:

1. Introducción de los datos iniciales: el número de Mach M_∞, el ángulo de ataque α, la presión p_∞, la razón de los calores específicos $k = c_p/c_v$, la envergadura del ala l, la cuerda de raíz b_{a1a} o bien b_r .

2. Cálculo del ángulo $\mu_\infty = \operatorname{arctg}(1/\sqrt{M_\infty^2-1})$.

3. Cálculo del ángulo $\pi/2 - \chi = \operatorname{arctg}[l/(2b_{a1a})]$ y del de flecha χ.

4. Verificación de la condición. Si $\mu_\infty > (\pi/2 - \chi)$, es decir, los bordes de ataque son subsónicos, el cálculo se efectúa con los bloques 5—11; si $\mu_\infty < (\pi/2 - \chi)$, es decir, los bordes de ataque son supersónicos, el cálculo se realiza con los bloques 12—19.

5—8. Cálculo del coeficiente de presión $\bar{p}$ según la fórmula (8.40) e impresión de $\bar{p}$ (θ). El ángulo θ varía en los márgenes desde 0° hasta $(\pi/2 - \chi)$ con paso $\Delta\theta = 1°$.

Para calcular $E(K1) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - K1^2 \operatorname{sen}^2\varphi}\, d\varphi$, donde $K1 = \sqrt{1-1/n^2}$, se ha confeccionado el subprograma FUNCIÓN E (K1). El subprograma FUNCIÓN TAN (X) realiza la función tg χ.

9. Cálculo de los coeficientes aerodinámicos de la fuerza de sustentación $c_{y_a} = 2\pi\alpha/[E(K1)\operatorname{tg}\chi]$, de la resistencia inducida $c_{xi} = c_{ya}\alpha$, de la fuerza de succión $c_{xT} = c_{y_a}^2 \operatorname{tg}\chi \times \sqrt{1-1/n^2}/(4\pi)$, de la resistencia de ondas de choque $c_{xch} = c_{x_i} - c_{xT}$, del momento $-m_{z_a} = (2/3)\, c_{y_a}$.

Programa de cálculo para resolver el problema 7.15

```
      REAL*4 M,M1,K,BETA,W,MJU,MJU1,MJUZ
      COMMON M,W,K
      TYPE 100
100   FORMAT(10X,' ***INTRODUZCAN LAS SIGUIENTES VARIABLES:***'//
      'A) ANGULO DE DESVIACION DEL FLUJO BETA(EN
      RADIANES)==>'¤)
      ACCEPT 101, BETA
101   FORMAT(F8.5)
      TYPE 102
102   FORMAT('B)NUMERO DE MACH==>'¤)
      ACCEPT 101,M1
      TYPE 103
103   FORMAT('C)RAZON DE LOS CALORES ESPECIFICOS K==>'¤)
      ACCEPT 101,K
      Z=SQRT(M1**2-1.)
      DEL=SQRT((K+1.)/(K-1.))
      W1=DEL*ATAN(Z/DEL)-ATAN(Z)
      W=W1+BETA
      M=M1
      CALL STERAC
      MJU=ATAN(1./SQRT(M**2-1.))
      MJU1=ATAN(1./SQRT(M1**2-1.))
      TETA=MJU1+BETA-MJU
      TT1=(1.+(K-1.)*M1**2/2.)/(1.+(K-1.)*M**2/2.)
      PP1=TT1**(K/(K-1.))
      TYPE*,' M=',M,' TETA=',TETA,' PP1=',PP1,' TT1=',TT1
      N=0
      M=M1
      W=W1
 1    CALL STERAC
      MJUZ=ATAN(1./SQRT(M**2-1.))
      N=N+1
      DBETA=0.052
      W=W+DBETA
      TYPE*,'MZ(',N,')=',M,' MJUZ=',MJUZ
      IF(N.LT.11) GO TO 1
      STOP
      END

      SUBROUTINE STERAC
      REAL*4 M,W,K,M2
      COMMON M,W,K
      WO(Z)=DEL*ATAN(Z/DEL)-ATAN(Z)
      DEL=SQRT((K+1.)/(K-1.))
 1    Z=SQRT(M**2-1.)
      M2=(W-WO(Z))/Z*M*(1.+(K-1.)/2.*M**2)+M
      IF(ABS(M2-M).LT.0.0001) GO TO 2
      M=M2
      GO TO 1
 2    M=M2
      RETURN
      END
```

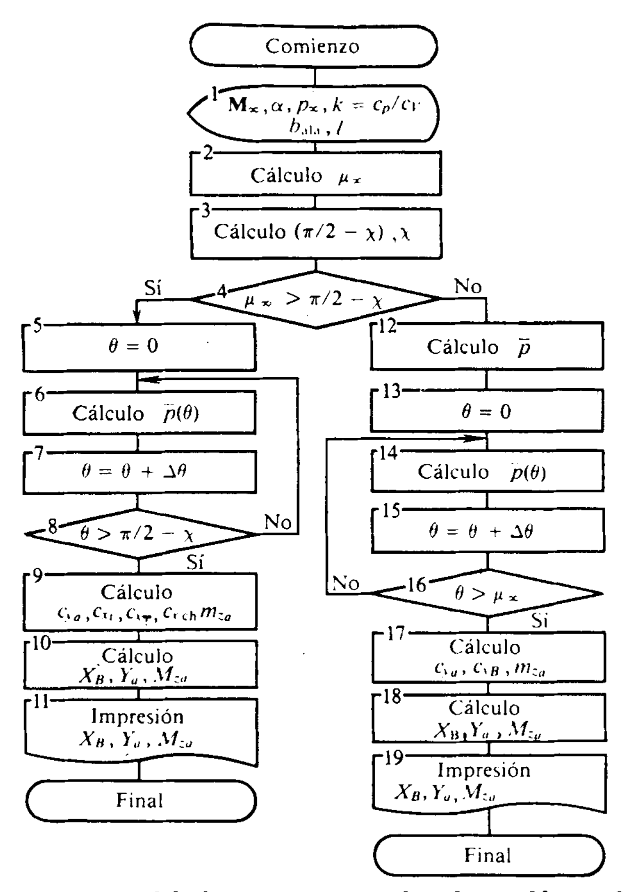


Fig. 8.9-A. Esquema del algoritmo para resolver los problemas 8.9 y 8.11

10. Cálculo de las fuerzas aerodinámicas $X_{ch} = c_{xch} (kp_\infty M_\infty^2/2) (b_r l/2)$, $Y_a = c_{ya} \times$ $\times (kp_\infty M_\infty^2/2) (b_r l/2)$ y del momento $M_{z_a} = m_{z_a} (kp_\infty M_\infty^2/2) (b_r l/2) b_r$.

11. Impresión de los resultados del cálculo X_{ch}, Y_a, M_{z_a}.

12. Cálculo de los coeficientes de presión $\bar{p}$ según la fórmula (8.50) en la región entre el borde de ataque y la línea de Mach, donde $\mu_\infty \leqslant \theta \leqslant (\pi/2 - \chi)$. Aquí se imprime, además, $\bar{p}$.

13—16. Cálculo del coeficiente de presión $\bar{p}$ según la fórmula (8.51) en la región, donde $0 \leqslant \theta \leqslant \mu_\infty$, con paso de variación del ángulo θ, igual a $\Delta\theta = 1°$. La función tg χ se realiza con el subprograma FUNCIÓN TAN (X). Además, aquí se imprime $\bar{p}(\theta)$.

17. Cálculo de los coeficientes aerodinámicos de la fuerza de sustentación $c_{y_a} = 4\alpha/\alpha'$, de la resistencia de ondas de choque $c_{xch} = c_{y_a}\alpha$, del momento $-m_{z_a} = (8/3)(\alpha/\alpha')$.

18. Cálculo de las fuerzas aerodinámicas $Y_a = c_{y_a} (kp_\infty M_\infty^2/2) (b_r l/2)$, $X_{ch} = c_{xch} \times$ $\times (kp_\infty M_\infty^2/2) (b_r l/2)$ y del momento $M_{z_a} = m_{z_a} (kp_\infty M_\infty^2/2) (b_r l/2) b_r$.

19. Impresión de los resultados del cálculo de Y_a, X_{ch}, M_{z_a}.

En el programa para resolver los problemas se han tomado las siguientes anotaciones (identificadores):

ALFA = α; ALFAZ = α'; M1 = M_∞; P1 = p_∞;
K = $k = c_p/c_v$; BKR = b_{ala}; $L = l$; MJU1 = μ_∞;
K1 = $k = \sqrt{1 - 1/n^2}$; HI = χ; TETA = θ;
PK1 = $\bar{p} > 0$; PK2 = $\bar{p} < 0$; CYA = c_{y_a};

Progama de cálculo para resolver los problemas 8.9 y 8.11

```
      REAL.M1,MJU1,K,K1,L,N,MZAM,MZAB
      TYPE 100
      TYPE 1
      ACCEPT 101, ALFA
      TYPE 2
      ACCEPT, 101,M1
      TYPE 3
      ACCEPT 102,P1
      TYPE 4
      ACCEPT 101,K
      TYPE 5
      ACCEPT 101,L
      TYPE 6
      ACCEPT 101, BKR
  1   FORMAT (X,'ANGULO DE ATAQUE(EN RAD.)ALFA=',¤)
  2   FORMAT (X,'NUMERO DE MACH M1=',¤)
  3   FORMAT (X,'PRESION (EN PA) P1=',¤)
  4   FORMAT (X,'RAZON DE LOS CALORES ESPECIFICOS K=',¤)
  5   FORMAT (X,'ENVERGADURA DEL ALA (EN M) L=',¤)
  6   FORMAT (X,'CUERDA DE RAIZ (EN M) BKR=',¤)
 11   FORMAT (X,'PK1=',F8.5,6X,'PK2=',F8.5)
 12   FORMAT (X,'YA=',E12.4,3X,'XB=',E12.4,3X,'MZAB=',E12.4)
 13   FORMAT (X,'*',3X,F5.1,3X'*',3X,'F8.5,3X,'*',3X,F8.5,3X'*')
 14   FORMAT (X,43('*'))
 15   FORMAT (X,'*',3X,'TETA',4X,'*',5X,'PK1',6X,'*',5X,'PK2',
      6X,'*')
100   FORMAT (X,'INTRODUZCAN TODAS LAS VARIABLES EN EL FORMATO
      F6.4,LA PRESION P1 EN EL FORMATO E6.2')
101   FORMAT (F6.4)
102   FORMAT (E6.2)
103   FORMAT(X,'RESULTADOS DEL CALCULO DEL ALA TRIANGULAR
      CON BORDE DE ATAQUE SUPERSONICO')
104   FORMAT (X,' RESULTADOS DEL CALCULO DEL ALA TRIANGULAR
      CON BORDE DE ATAQUE SUBSONICO')
      PI=3.141592
      MJU1=ATAN(1./SQRT(M1**2-1.))
      B=ATAN(L/2/BKR)
      HI=PI/2-B
      T=TAN(HI)
      DTETA=PI/180
      TETA=0
      IF (MJU1.GT.B) GO TO 9
      TYPE 103
      ALFAZ=SQRT(M1**2-1.)
      N=T/ALFAZ
      S=2*ALFA/ALFAZ/SQRT(1.-N**2)
      TYPE 11,S,-S
      TYPE 14
      TYPE 15
      TYPE 14
 10   SIGMA=TAN(TETA)*T
      D=SQRT((N**2-SIGMA**2)/(1.-SIGMA**2))
      RK1=S*(1.-2/PI*ATAN(D/SQRT(1.-D**2)))
      PK2=-PK1
      TYPE 13,TETA*180/PI,PK1,PK2
      TETA=TETA+DTETA
      IF (TETA.LE.MJU1) GO TO 10
      CYA=4*ALFA/ALFAZ
      CXB=CYA*ALFA
      MZAM=-2./3.*CYA
      S=K*P1*M1**2BKR*1/4
      XB=CXB*S
      YA=CYA*S
      MZAB=MZAM*S*BKR
      GO TO 8
  9   TYPE 104
      TYPE 14
      TYPE 15
      TYPE 14
      N=T/SQRT(M1**2-1.)
      K1=SQRT(1.-1./N**2)
      E1=E(K1)
110   SIGMA=TAN(TETA)*T
      PK1=2*ALFA/(E1*T*SQRT(1.-SIGMA**2))
      PK2=-PK1
      TYPE 13,TETA*180/PI,PK1,PK2
      TETA=TETA+DTETA
      IF (TETA.LE.B) GO TO 110
      CYA=2*PI*ALFA/E1/T
      CXI=CYA*ALFA
      CXT=CYA**2*T/4/PI*SQRT(1.-1/N**2)
      CXB=CXI-CXT
      MZAM=-2./3.*CYA
      S=K*P1*M1**2*BKR*L/4
      XB=CXB*S
      YA=CYA*S
      MZAB=MZAM*S*BKR
  8   CONTINUE
      TYPE 14
      TYPE 12,YA,XB,MZAB
      STOP
      END

      FUNCTION E(K1)
      REAL K1
      F(X)=SQRT(1 -(K1*SIN(X))**2)
      S=0.
      N=100
      DX=1.5707963/N
      X=0.
      DO 1 I=1,N
      X=X+DX
      S=S+F(X)*DX
  1   CONTINUE
      E=S
      RETURN
      END

      FUNCTION TAN(X)
      TAN=SIN(X)/COS(X)
      RETURN
      END
```

$$\text{CX1} = c_{xi};\quad \text{CXT} = c_{xT};\quad \text{CXB} = c_{xch};\quad \text{MZAM} = m_{za};$$
$$\text{YA} = Y_a;\quad \text{XB} = X_{ch};\quad \text{MZAB} = \text{M}_{za}.$$

9.53. En correspondencia con el esquema del algoritmo, aducido en la fig. 9.53-A, están previstas las siguientes operaciones de cálculo:

1. Introducción de los datos iniciales l, b_0, M_∞ que se perforan en el indicado orden en una ficha perforada con el formato (F 5.2). De acuerdo con la fig. 9.17 en el programa se ha adoptado $N = M = 5$.

2. Cálculo de los segundos miembros de las ecuaciones (9.359). Los cálculos se realizan con un ciclo como parámetro del cual ha sido elegida la magnitud i que varía desde 1 hasta 25. Con ello, los valores de i corresponden a los números de los puntos de control en la mitad derecha del ala (véase la fig. 9.17). En función de i se determinan los correspondientes valores de

$$p_i = 6 + 5\,[(i-1) \div 5] - i;\quad \nu_i = [(i-1) \div 5],$$

donde el signo "$\div$" determina la operación de división hasta enteros, rechazando el resto. A continuación, para cada punto de control hallamos

$$\zeta_i = [0{,}5l/(N,\ b_0)]\,[0{,}5 + (N - p_i)];$$

$$\xi_i = \begin{cases} \nu_i/M;\ \nu_i = 1,\ 2,\ \ldots,\ M-1; \\ [(\nu_i - 1) + 0{,}5]/M;\ \nu_i = M. \end{cases}$$

Seguidamente se calculan los segundos miembros de las ecuaciones (9.359), que se memorizan en el fichero G1 WX (25), es decir,

$$\Gamma_i^{1\omega x} = -4\pi\zeta_i/\sqrt{1-\text{M}_\infty^2}.$$

Aquí también se calculan los valores de $\Gamma_i^{1\dot{\omega}x} = 4\pi\text{M}_\infty^2\xi_i\zeta_i$, que a continuación se emplean para calcular los segundos miembros de las ecuaciones (9.360). Los valores de $\Gamma_i^{1\dot{\omega}x}$ se memorizan en el fichero G1 WXT (25).

3. Cálculo de los coeficientes a_{ij} y b_{ij}. Estos cálculos se realizan con el ciclo en el que i y j varían sucesivamente desde 1 hasta 25 con un paso igual a 1. Con ello, el valor de i se halla en correspondencia con el número del siguiente punto de control (ciclo externo). La variación de los valores de j se prefija con la sucesividad de utilización de las células de la mitad derecha del ala para tomar en consideración la influencia de los vórtices locales sobre el punto de control prefijado (ciclo interno).

El valor del índice i determina las coordenadas ζ, ξ del punto de control (lo mismo que en el bloque 2). Para calcular los coeficientes a_{ij}, b_{ij} se utilizan los valores de ξ_0^d, ζ_0^d para el punto de control (KT) en el sistema de coordenadas ligado con la célula j-ésima en el lado derecho del ala y el valor de ξ_0^i, en el sistema de coordenadas ligado con la célula simétrica j-ésima en el lado izquierdo del ala. Las indicadas coordenadas KT se calculan con las fórmulas:

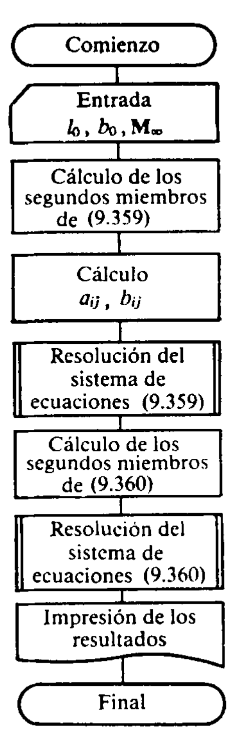


Fig. 9.53-A. Esquema del algoritmo para resolver el problema 9.53

a) para el lado derecho

$$\zeta_0^d = \zeta\,(i) - \zeta\,(j);$$

$$\xi_0^d = \begin{cases} \xi\,(i) - \xi\,(j) + 1/M;\ \ \nu_j = 1,\ 2,\ \ldots,\ M-1; \\ \xi\,(i) - \xi\,(j) + 0{,}5/M;\ \ \nu_j = M; \end{cases}$$

b) para el lado izquierdo

$$\zeta_0^i = \zeta\,(i) + \zeta\,(j);\quad \xi_0^i = \xi_0^d.$$

Con las correspondientes fórmulas se calculan los valores de I_{2+}, I_{2-}, $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$, I_{1-}, I_1, V_f^2, V_a^2, w, V_l, σV_f^2, σV_a^2, σw, σV_l, a_{ij}, b_{ij}.

4. Solución del sistema de ecuaciones (9.359). Este sistema se resuelve empleando el programa estándar SIMQ. Los valores del vector $\Gamma^{1\omega x}$, obtenidos como resultado de la resolución, se memorizan en el fichero G1WX (25).

Programa de cálculo para resolver el problema 9.53

```
      DIMENSION A(25,25),B(25,25),G1WX(25)G1WXT(25)
      REAL L,M8,MI1,MI2,NU,LON
      INTEGER P
      READ(1,2)L,BO,M8
    2 FORMAT(3F5,2)
      M=5
      N=5
      CALCULO DE LOS SEGUNDOS MIEMBROS DE LAS ECUACIONES 9.360
      DO 1 I=1,25
      P=(I-1)/5
      P=6+5*P-I
      DZETA=(0.5*L/N/BOX*(0.5+(N-P))
      G1WX(I)=4*3.1416*DZETA/SQRT(1.-M8*M8)
      NU=(I-1)/5+1
      AKSI=NU/M
      IF(NU.EQ.M)AKSI=((NU-1.)+0,5)/M
    1 G1WXT(I)=4*3.1416*M8*M8*AKSI*DZETA
    C CALCULO DE LOS COEFICIENTES A,B
      PZV=1.
      LON=L/2./N/BO
      DO 40 I=1,25
      DO 40 J=1,25
    C ******. PARA LAS CELULAS EN EL LADO DERECHO
      IP=(I-1)/5
      IP=6+5*IP-1
      INU=(I-1)/5+1
      JP=(J-1)/5
      JP=6+5*JP-J
      JNU=(J-1)/5+1
      T1=0.5*L/N/BO
      DZETI=T1*(0.5+(N-IP))
      AKSII=INU/M
      IF(INU.EQ.M)AKSII=((INU-1.)+0.5)/M
      DZETJP=T1*(0.5+(N-JP))
      AKSIJP=JNU/M
      IF(JNU.EQ.M)AKSIJP=((JNU-1.)+0.5)/M
      DZETO=DZETI-DZETJP
      AKSIO=AKSII-AKSIJP+1./M
      IF(JNU.EQ.M)AKSIO=AKSIO-0.5/M
    C ****************
      KL=0
   41 T=0.5*LON-DZETO
      T1=T*T
      T2=SQRT(AKSIO**2+T1)
      T3=0.5*LON+DZETO
      T4=T3*T3
      T5=SQRT(AKSIO**2+T4)
      PI2=1./T5+AKSIO/T4*(1+AKSIO/T5)
      MI2=1./T2+AKSIO/T1*(1+AKSIO/T2)
      SIGN1=1.
      IF(T.LT.0)SIGN1=-1.
      SIGN2=1.
      IF(T3.LT.0)SIGN2=-1
      COSAL1=T/T2
      COSAL2=T3/T5
      AN=T2
      MI1=1/T1*(1+AKSIO/T2)
      PI1=1/T4*(1+AKSIO/T5)
      IF(KL.EQ.1)GO TO 43
      V2C=(MI2*T+PI2*T3)
      V2P=SIGN1*ALOG(AKSIO/(ABS(T)+T2))+SIGN2*
      ALOG(AKSIO/(ABS(T3)+T5))
      W=(COSAL1+COSAL2)/AN/SQRT(1-COSAL2**2)
      V1C=MI1*T+PI1*T3
    C ********* PARA LAS CELULAS SIMETRICAS EN EL
    C LADO IZQUIERDO
      DZFTO=DZET1+DZETJP
    C ************
      KL=1
      GO TO 41
   43 SIGV2C=(MI2*T+PI2*T3)
      SIGV2P=SIGN1*ALOG(AKSIO/(ABS(T)+T2))+SIGN2*
      ALOG(AKSIO/(ABS(T3)+T5))
      SIGW=(COSAL1+COSAL2)/AN/SQRT(1-COSAL2**2)
      SIGV1C=MI1*T+PI1*T3
    C ************
      B(I,J)=V2C-SIGV2C+V2P-SIGV2P
      A(I,J)=W-SIGW+V1C-SIGV1C
   40 CONTINUE
    C SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES 9.360
      CALL SIMQ(A,G1WX,25,KS)
      IF(KS.NE.1)GO TO 11
   10 WRITE(3,101)
  101 FORMAT(1X,'EL SISTEMA DE ECUACIONES TIENE MATRIZ
      DEGENERADA DE LOS COEFICIENTES')
      STOP 9360
   11 WRITE(3,102)G1WX
  102 FORMAT(1X,'SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES 9.360'
      //5(5(E13.5,5X)/))
    C CALCULO DE LOS SEGUNDOS MIEMBROS DE LAS ECUACIONES 9.361
      DO 20 I=1,25
      S=0
      DO 21 J=1,25
   21 S=S+B(I,J)*G1WX(J)
   20 G1WXT(I)=G1WXT(I)-S
    C SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES 9.361
      CALL SIMQ(A,G1WXT,25,KS)
      IF(KS,EQ.1) GO TO 22
      GO TO 23
   22 WRITE(3,101)
      STOP 9361
   23 WRITE(3,105)G1WXT
  105 FORMAT(1X,'SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES 9.361'
      //5(5(E13.5,5X)/))
      STOP
      END
```

5. Cálculo de los segundos miembros de las ecuaciones (9.360). Estos cálculos se realizan con la fórmula $\dot{\Gamma}_j^{1\omega_x} = \Gamma_j^{1\omega_x} - \sum_{i=1}^{25} b_{ij}\,\Gamma_i^{1\omega_x}$. Los valores obtenidos de los segundos miembros se memorizan en el fichero G1WXT (25).

6. Solución del sistema de ecuaciones (9.360). Éste se resuelve empleando el programa estándar SIMQ. Con ello, los valores hallados del vector $\dot{\Gamma}^{1\omega_x}$ se memorizan en el fichero G1WXT (25).

7. Impresión de los resultados de la solución de los sistemas de ecuaciones (9.359) y (9.360).

En el programa de resolución del problema se han tomado las siguientes anotaciones (identificadores):

$$\mathrm{T} = 0{,}5l_0 - \zeta_0; \quad \mathrm{T1} = T^2; \quad \mathrm{T2} = \sqrt{\xi_{50}^2 + \mathrm{T1}};$$

$$\mathrm{T4} = \mathrm{T3}^2 \quad \mathrm{T5} = \sqrt{\xi_{50}^2 + \mathrm{T4}}; \quad I_{2+} = \mathrm{P12};$$

$$I_{2-} = \mathrm{M12}; \quad \mathrm{sign}_1 = \mathrm{sign}\ (T)\ (\mathrm{SIGN1});$$

$$\mathrm{sign}_2 = \mathrm{sign}\ (T3)\ (\mathrm{SIGN2}); \quad \bar{a} = \mathrm{T2}\ (\mathrm{AN});$$

$$I_{1-} = \mathrm{MI1}; \quad I_{1+} = \mathrm{PI1}; \quad V_l^2 = \mathrm{V2C}; \quad V_a^2 = \mathrm{V2P};$$

$$V_l = \mathrm{VIC}; \quad b_{ij} = B(\mathrm{I},\ \mathrm{J}); \quad Q_{ij} = \mathrm{A}\ (\mathrm{I},\ \mathrm{J}).$$

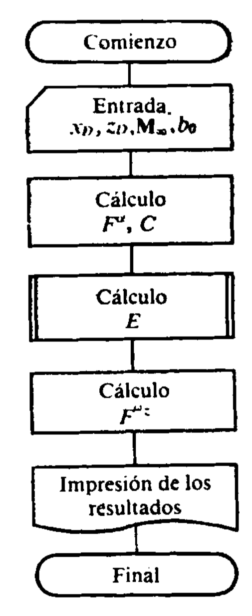


Fig. 9.79-A. Esquema del algoritmo para resolver el problema 9.79

9.79. El algoritmo para la resolución del problema consta de las siguientes operaciones:

1. Introducción de los datos x_D, z_D, b_0, M_∞ sucesivamente de la ficha perforada en la que ellos se aplican en el formato (F5.2).

2. Cálculo de F^α y C con las fórmulas (9.549) y (9.552), respectivamente.

Programa de cálculo para resolver el problema 9.79

```
      REAL M8,Y(11)
      READ(1,11)XD,ZD,BO,M8
   11 FORMAT(4F5.2)
      AL1=SQRT(M8*M8-1)
      AKSI1M=XD/BO/AL1
      DZET1M=ZD/BO
      S1=AKSI1M+DZET1M
      R1=AKSI1M-DZET1M
      FAL=2/3.1416*(SQRT(-1.*S1*DZET1M)+
      AKSI1M*ATAN(SQRT(-1.*DZET1M/S1)))
      C=4.*S1/3.*(SQRT(2.*(R1-S1)*S1)+
      (R1+S1)*ATAN(SQRT((R1-S1)/2./S1)))
      E=0.
      H=(R1-S1)/10
      R=S1
      DO 1 I=1,11
      Y(I)=R*SQRT(S1+R)/SQRT(R1-R)
    1 R=R+H
      CALL QTFE(H,Y,Y,11)
      E=2*Y(11)
      FWZ=AL1/4./3.1416*(2./3.*E+C)
      WRITE(3,10)FWZ
   10 FORMAT(1X,'FWZ=',F13.6)
      STOP
      END
```

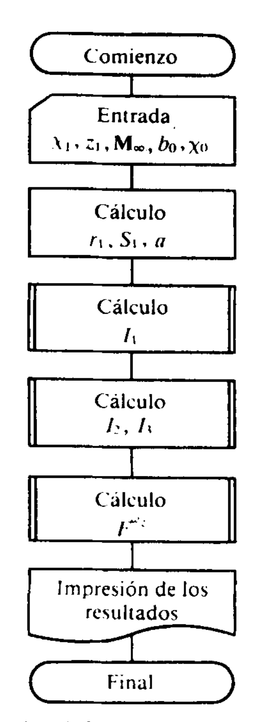


Fig. 9.85-A. Esquema del algoritmo para resolver el problema 9.85

3. Cálculo de la integral E. La determinación de esta integral, prefijada con la expresión (9.551), se resuelve empleando el programa estándar QTFE.

4. Cálculo de $F^{\omega z}$ según la fórmula (9.553).

5. Impresión de los resultados de los valores $F^{\omega z}$.

El correspondiente esquema del algoritmo se ofrece en la fig. 9.79-A.

En el programa para resolver el problema se han introducido las siguientes anotaciones (identificadores):

$$\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = (\mathrm{AL1}); \quad \xi_{1M} = \mathrm{AKSIM};$$

$$\zeta_{1M} = \mathrm{DZET1M}; \quad F^\alpha = \mathrm{FAZ};$$

$$F^{\omega z} = \mathrm{FWZ}; \quad s_1 = \mathrm{S1}; \quad r_1 = \mathrm{R1}.$$

9.85. Examinemos la marcha de la solución del problema que corresponde al esquema algorítmico de la fig. 9.85-A.

1. Introducción de los datos iniciales x_1, z_1, M_∞, b_0, χ_0 de una ficha perforada, en la que se introducen en el orden indicado en el formato (4.F5.2, F7.4).

2. Cálculo de los valores de r_1, s_1, a con las fórmulas (9.601').

3. Cálculo de I_1 con la fórmula $I_1 = I_{11} + I_{12} + I_{13} + I_{14}$. Las integrales I_{11}, I_{12}, I_{13}, I_{14} se determinan empleando el programa estándar QTFE.

4. Cálculo de I_1, I_3 empleando el programa estándar QTFE.

5. Cálculo de $F^{\omega z}$ con la fórmula (9.601).

6. Impresión de los resultados de los valores de I_1, I_2, I_3, $F^{\omega z}$.

En el programa para resolver el problema se han adoptado las siguientes anotaciones (identificadores):

operadores 3—11:

$$\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1}\ (\mathrm{AL1}); \quad \chi_0 = \pi/3\ (\mathrm{X0});$$

$$\mathrm{T1M} = 1 - (1/\mathrm{tg}\ \chi_0)\ \alpha'; \quad \mathrm{T1P} = 1 + (1/\mathrm{tg}\ \chi_0)\ \alpha';$$

$$\xi_{1M} = \mathrm{AKSI1M}; \quad \zeta_{1M} = \mathrm{DZET1M}; \quad r_1 = \mathrm{R1}; \quad s_1 = \mathrm{S1};$$

operadores 14—24:

$$\mathrm{H} = (r_1 - s_1 a)/10; \quad r = s_1 a;$$

$$y_1 = r\ \sqrt{s_1 - ra}/\sqrt{r_1 - r}\ [\mathrm{Y1}]; \quad i = 1,\ 11;$$

$$y1_i = (ra + 2s_1)\ \sqrt{s_1 - ra}/\sqrt{r_1 - r};$$

$$I_1 = \underbrace{2y_{11}}_{I_{11}} + \underbrace{(2/3)\ y_{11}^1}_{I_{12}}\ (\mathrm{I1});$$

operadores 25—36:

$$\mathrm{H} = s_1 a/10; \quad \mathrm{T1} = \sqrt{s_1 - ra};$$

$$\mathrm{T2} = \sqrt{r_1 - r}; \quad \mathrm{T3} = \sqrt{s_1 - r/a};$$

Programa de cálculo para resolver el problema 9.85

```
      REAL M8,Y(20),Y1(20),I1,I2,I3,D3(20,20)
      READ(1,10)X1,Z1,M8,B0,X0
10    FORMAT(4F5.2,F7.4)
C     CALCULO I1
      AL1=SQRT(M8*M8-1)
      X0=3.1416/3
      T1M=1.-1/TAN(X0)*AL1
      T1P=1.+1/TAN(X0)*AL1
      AKSI1M=X1/AL1/B0
      DZET1M=Z1/B0
      R1=AKSI1M-DZET1M
      S1=AKSI1M+DZET1M
      A=T1M/T1P
      H=(R1-S1*A)/20
      R=S1*A+H
      DO 1 I=1,20
      T1=SQRT(S1-R*A)
      T2=SQRT(R1-R)
      Y(I)=R*T1/T2
      Y1(I)=(R*A+2.*S1)*T1/T2
 1    R=R+H
      CALL QTFE(H,Y,Y,20)
      CALL QTFE(H,Y1,Y1,20)
      I1=2*Y(20)+2./3.*Y1(20)
C     ***CALCULO I13,I14
      H=S1*A/20.
      R=H
      DO 2 I=1,20
      T1=SQRT(S1-R*A)
      T2=SQRT(R1-R)
      T3=SQRT(S1-R/A)
      Y(I)=R*(2.*T1-2.*T3)/T2
      Y1(I)=((R/A+2.*S1)*T3-
      (R*A+2.*T1)/T2
 2    R=R+H
      CALL QTFE(H,Y,Y,20)
      CALL QTFE(H,Y1,Y1,20)
      I1=I1+Y(20)-2./3.*Y1(20)
C     ***CALCULO I2,I3
C     ***CALCULO DE LOS VALORES D3(I,M)
      NS=20
      HI=S1/NS
      HM=HI
      NR=R1/HM
      DO 7 I=1,NS
      DO 7 M=1,NR
      IF(M.LE.I*NR/N6)GO TO 9
      D3(I,M)=0.
      KK=M-1
      DO 8 K=1,KK
 8    D3(I,M)=D3(I,M)+D3(I,K)*(SQRT(M-K+1.)-
      SQRT(M-K+0.))
      GO TO 7
 9    D3(I,M)=0.5*(M*HM+I*HI)*AL1
 7    D3(M,I)=D3(I,M)
C     ***CALCULO I2
      H=R1/20.
      R=H
      DO 3 L=1,20
      H1=R*A/20.
      S=H1
      DO 4 J=1,20
      I=H1*J/HI
      M=H*L/HM
      Y(J)=D3(I,M)/SQRT(S1-S)
 4    S=S+H1
      CALL QTFE(H1,Y,Y,20)
      Y1(L)=Y(20)/SQRT(R1-R)
 3    R=R+H
      CALL QTFE(H,Y1,Y1,20)
      I2=Y1(20)
C     ***CALCULO I3
      H=S1*A/20.
      R=H
      DO 5 L=1,20
      H1=(S1-R/A)/20.
      S=R/A+H1
      DO 6 J=1,20
      I=(R/A+H1*J)/HI
      M=H*L/HM
      Y(J)=D3(I,M)/SQRT(S1-S)
 6    S=S+H1
      CALL QTFE(H1,Y,Y,20)
      Y1(L)=Y(20)/SQRT(R1-R)
 5    R=R+H
      CALL QTFE(H,Y1,Y1,20)
      I3=Y1(20)
C     *****
      FWZ=AL1/4./3.1416*I1-
      0.5/3.1416*(I2+I3)
      WRITE(3,11)I1,I2,I3,FWZ
11    FORMAT(1X,'I1=',F10.4/' I2=',
      F10.4/' I3=',F10.4/' FWZ=',
      F10.4)
      STOP
      END
```

operadores 37—50:

$$H = r_1/10; \quad H1 = (ra)/10;$$

$$D3 = -0{,}5\,(r + a)\,\alpha'; \quad s = jH1;$$

$$y_i = D3/\sqrt{s_1 - s}\,[Y\,(J)]; \quad j = 1,\ 11;$$

$$y1_i = y^i_{11}/\sqrt{r_1 - r}\,[Y1\,(I)]; \quad r = iH; \quad I_2 = y1_{11}\,(12).$$

Programa de cálculo para resolver el problema 9.92

```
      REAL M8,Y(21),Y1(21)
      READ(1,3) XA,ZA,M8,B0,X0
    3 FORMAT(4F5.2,F7.4)
      AL1=SQRT(M8*M8-1)
      T1M=1.-1/TAN(X0)*AL1
      T1P=1.+1/TAN(X0)*AL1
      AKSIM1=XA/AL1/B0
      DZETM1=ZA/B0
      A=T1M/T1P
      R1=AKSIM1-DZETM1
      S1=AKSIM1+DZETM1
C     CALCULO PAL
      T=1/3.1416/SQRT(-A)
      T1=S1-R1*A
      T2=SQRT(-R1*A/S1)
      T3=S1*A-R1
      FAL=T*(T1*ATAN(T2)-T3*(ATAN(T2/A)-3.1416/2.))
      DFAL=T*((1-A)*(ATAN(T2)-ATAN(T2/A*A)+3.1416/2.)+
      2.*DZETM1*SQRT(-A/AKSIM1**2-DZETM1**2))
      PAL=4./AL1*DFAL
C     CALCULO FALNT
      T1=M8*M8/4./3.1416/AL1
C     CALCULO AI,DI
      H=R1/20.
      R=0.
      DO 1 I=1,21
      T2=SQRT(S1-R*A)
      T3=SQRT(R1-R)
      Y(I)=R*T2/T3
      Y1(I)=(R*A+2.*S1)*T2/T3
    1 R=R+H
      CALL QTFE(H,Y,Y,21)
      CALL QTFE(H,Y1,Y1,21)
      AI=2.*Y(21)
      DI=2./3.*Y1(21)
      DAI=1/H*(Y(21)-Y(20))
C     CALCULO BI,CI
      H=S1*A/20
      R=S1*A
      DO 2 I=1,21
      T2=SQRT(S1-R/A)
      T3=SQRT(R1-R)
      Y(I)=P*T2/T3
      Y1(I)=(R/A+2.*S1)*T2/T3
    2 R=R+H
      CALL QTFE(H,Y,Y,21)
      CALL QTFE(H,Y1,Y1,21)
      BI=2.*Y(21)
      CI=2./3.*Y1(21)
      DBI=1/H*(Y(21)-Y(20))
      FALNT=T1*(AI+BI+CI+DI)
C     CALCULO DFALNT
      T4=SQRT(-R1/A/S1)
      T5=SQRT(-R1/S1*A)
      T6=3.1416/2.
      DGF=(1-A)/SQRT(-A)*(ATAN(T5)-ATAN(T4)+T6)
      T7=SQRT(S1*R1)
      F=T7+(S1-R1*A)/SQRT(-A)*ATAN(SQRT(-A*R1/S1))
      G=-T7-(S1-R1/A)/SQRT(-1./A)*(ATAN(SQRT(-R1/A/S1))-T6)
      DFALNT=T1*(DAI*(1.+A/3.)+DBI*(1.+1./3.*A)+
      4./3.*((G+F)+S1*DGF))
      PALNT=4./AL1*(DFALNT-M8*M8*AKSIM1/AL1*DFAL-FAL/AL1)
      WRITE(3,11)FALNT,DFALNT,PALNT
   11 FORMAT(1X,'FALNT=',F10.4/1X,'DEALNT=',F10.4/
      1X,'PALNT=',F10.4)
      STOP
      END
```

9.92. El esquema de resolución del problema se muestra en la fig. 9.92-A y contiene las siguientes operaciones:

1. Introducción de los datos iniciales x_A, z_A, $\mathbf{M}_\infty$, b_0, χ_0 con una ficha perforada en la que se introducen en el orden indicado en el formato (4F5.2, F7.4).

2. Cálculo de F^α, $\partial F^\alpha/\partial\xi_M$, p^α según las fórmulas (9.530), (9.618) y (9.618′).

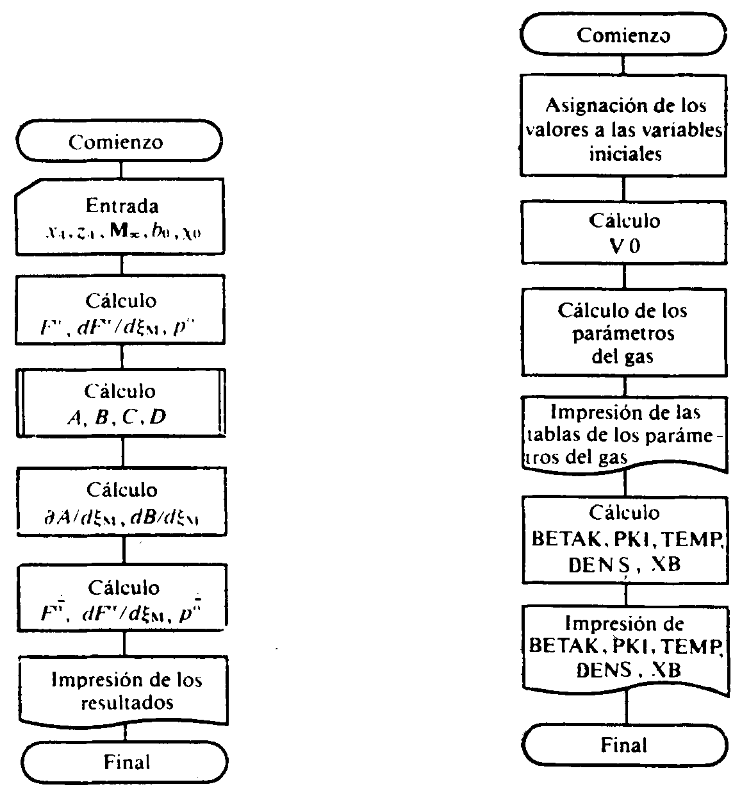


Fig. 9.92-A. Esquema del algoritmo para resolver el problema 9.92

Fig. 10.5-A. Esquema del algoritmo para resolver el problema 10.5

3. Cálculo de las integrales A, B, C, D mediante el empleo del programa estándar de integración numérica QTFE.

4. Cálculo de las derivadas $\partial A/\partial\xi_M$ y $\partial B/\partial\xi_M$ por las fórmulas

$$\frac{\partial A}{\partial\xi_M}=\frac{1}{h}\left(\int_0^{r_1}\frac{r\sqrt{s_1-ra}}{\sqrt{r_1-r}}\,dr-\int_0^{r_1-h}\frac{r\sqrt{s_1-ra}}{\sqrt{r_1-r}}\,dr\right)\quad(h=r_1/20);$$

$$\frac{\partial B}{\partial\xi_M}=\frac{1}{h}\left(\int_{s_1-a}^{0}\frac{r\sqrt{s_1-r/a}}{\sqrt{r_1-r}}\,dr-\int_{s_1a}^{-h}\frac{r\sqrt{s_1-r/a}}{\sqrt{r_1-r}}\,dr\right)\quad(h=s_1a/20).$$

Para calcular $\partial B/\partial\xi_M$, $\partial A/\partial\xi_M$ empleamos los resultados de la integración numérica, obtenidos al calcular A y B en la operación 3.

5. Cálculo de $F^{\dot{\bar{\alpha}}}$, $\partial F^{\dot{\bar{\alpha}}}/\partial\xi_M$, $p^{\dot{\bar{\alpha}}}$ con las fórmulas (9.626), (9.630), (9.631′).

6. Impresión de los resultados de los valores de F^α, $\partial F^\alpha/\partial\xi_M$, p^α, $F^{\dot{\bar{\alpha}}}$, $\partial F^{\dot{\bar{\alpha}}}/\partial\xi_M$, $p^{\dot{\bar{\alpha}}}$.

Programa de cálculo para resolver el problema 10.5

```
      REAL K/1,40/,M/5.0/,M1,IRA/57.29578/
      DATA PI/3.1415926/,ADT/0.5/,HEIGHT/5.0,P0/0.1E05/,TETAK/30./,I/1/
      M1=M*M
      V0=1./SQRT(2./(K-1,)/M1+1,)
      PRINT  77,K,M,TETAK
   70 FORMAT (1X,78(1H-))
   71 FORMAT(' I N I    TETA    I    VR    I    '.
      ' VT    I    A*A    I  DVT/DT    I    ADTN    I')
   77 FORMAT(23X,'CONDICIONES INICIALES:'/,23X,9(1H-),1X,8(1H-)/,
      18X,'INDICE ADIABATICO',11(1H.),'K=',F5.2/,18X,'
      NUMERO DE MACH DEL FLUJO INCIDENTE
      M=',F5.2/,18X,'ANGULO DE INCLINACION DE LA ONDA DE CHOQUE',
      7(1H.),'TETAC=',F5,2//23X,'RESULTADOS DEL CALCULO:'/,23X,10
      (1H-),1X,8(1H-)/)
      PRINT 70
      PRINT 71
      PRINT 70
      AK=(K-1.)/(K+1.)
      TETA=TETAK
      B55=TETA/IRA
      B56=SIN(B55)
      B5=M1*B56*B56
      B7=1.+AK
      B8=1.-AK
      ANU0=((B7*B5-AK)**(-B8/2,/AK))*((B5/B8/(1.+AK*B5/B8))**(B7/2./AK)
      A=(2./(K+1.)+AK*M1)/(2./(K-1.),+M1)
      VR=V0*COS(B55)
      VT=(AK*VR*VR-A)/V0/B56
    5 A1=((K-1,)/2.)*(1.-VR*VR+VT*VT)
   57 FORMAT('*',I2,'*',6(G11.5,'*'))
      P=VT*VT/A1
      ADVTDT=(-VT*COTAN(B55)+VR*(P-2.))/(1.-P)
      ADTN=VT/ADVTDT
      PRINT 57,I,TETA,VR,VT,A1,ADVTDT,ADTN
      P1=ADT/IRA
      VR=VR-VT*P1
      TETA=TETA-ADT
      B55=TETA/IRA
      VT=VT-ADVTDT*P1
      I=I+1
      IF(VT.LT,0.0) GO TO 5
      PRINT 57,I,TETA,VR,VT,A1,ADVTDT,ADTN
      PRINT 70
      VK=VR
      BETAK=TETAK-(I-1)*ADT-ADTN
      BETA=BETAK/IRA
      A10=((1.-VK*VK)/(1.-V0*V0))**(1./(K-1.))
      DENS=ANU0*A10
       PK1=2,*(ANU0*(A10**K)-1.)/K/M1
      TEMP=(1.-VK*VK*(1,+MI*(K-1.)/2.)
      XB=0.5*K*PI*PK1*M1*P0*(HEICHT*TAN(BETA))**2)
      PRINT 4,BETAK,ANU0,VK,DENS,PK1,TEMP,XB
    4 FORMAT(18X,'ANGULO DEL CONO',21(1H.),'BETAK=',F7.4/.18X,'
      RAZON DE LAS PRESIONES',16(1H,),'ANU',F7.4/,18X,'VELOCIDAD
      EN EL CONO',17(1H.),'VK=',F7.4/,18X,'RAZON DE LAS DENSIDADES
      ',12(1H.),'DENS=',F7.4/,18X,'COEFICIENTE DE LA PRESION EN EL
      CONO',4(1H,),'PK1=',F7.4/,18X,'RAZON DE LAS TEMPERATURAS EN EL
      CONO',3(1H.),'TEMP=',F7.4/,18X,'RESISTENCIA DE ONDAS DE CHOQUE
      DEL CONO',6(1H.),'XB=',G11,4/)
      STOP
      END
```

En el programa para resolver el problema se han adoptado las siguientes anotaciones (identificadores):

$$\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1}\ (AL1);\quad T1M = 1 - (1/\operatorname{tg}\chi_0)\,\alpha';$$

$$X0 = \chi_0;\quad T1P = 1 + (1/\operatorname{tg}\chi_0)\,\alpha';\quad AKSIM1 = \xi_{M1};$$

$$DZETM1 = \zeta_{M1};\quad A = a;\quad R1 = r_1;\quad S1 = s_1;\quad PAL = p^{\alpha};$$

$$FAL = F^{\alpha};\quad DFAL = \partial F^{\alpha}/\partial\xi_M;\quad AI = A;\quad DI = D;$$

$$BI = B;\quad CI = C;\quad FALNT = F^{\dot{\bar{\alpha}}};\quad DGF = \partial\,(G + F)/\partial\xi_M;$$

$$DFLANT = \partial F^{\dot{\bar{\alpha}}}/\partial\xi_M;\quad PALNT = p^{\dot{\bar{\alpha}}}.$$

10.5. Para resolver este problema el esquema del algoritmo está representado en la fig. 10.5-A. Con arreglo a este esquema se prevén las siguientes operaciones:

1. Asignación de valores a las variables iniciales k, M_∞ (M); $180/\pi$ (IRA); $\Delta\tilde{\theta}$ (ADT); altura del cono (HEIGHT); presión de remanso p_0 (F0); ángulo de inclinación de la onda de choque θ_{ch} (TETAC).

2. Cálculo de las razones $V_\infty/V_{máx} = \bar{V}_\infty$ (V0).

3 y 4. Ciclo por el número del rayo; cálculo e impresión de la tabla de los parámetros del gas en el rayo, verificación de la condición $\bar{V}_\theta$ (VT) $= 0$.

5. Cálculo del ángulo del cono β_{cono} (BETAK); del coeficiente de presión $\tilde{p}_{cono}$ (PK1); de la razón de temperaturas T_{cono}/T_∞ (TEMP) y las densidades ρ_{cono}/ρ_∞ (DENS); de la resistencia de ondas de choque X_{ch} (XB).

6. Impresión de los resultados de los cálculos.

En el programa para resolver el problema se han tomado las siguientes anotaciones adicionales (identificadores):

$$\Delta T = ADT;\quad h_{cono} = HEIGHT;\quad p_0 = P0;$$

$$\theta_{cono} = TETAK;\quad M^2 = M1;\quad \tilde{V}_\infty = V0;\quad (k-1)/(k+1) = AK;$$

$$\theta_{cono}/57{,}296 = B55;\quad \operatorname{sen}(\theta_{cono}/57{,}296) = B56;$$

$$M^2\operatorname{sen}^2(\theta_{cono}/57{,}296) = B5;\quad 1 + (k-1)/(k+1) = B7;$$

$$1 - (k-1)/(k+1) = B8;\quad p_0'/p_0 = \nu_0 = ANU;$$

$$\tilde{a}^{*2} = A;\quad \tilde{V}_\infty\cos\theta_{cono} = VR;\quad \tilde{V}_{cono\ \theta} = VT.$$

10.48. Examinemos el algoritmo para resolver este problema (fig. 10.48-A).

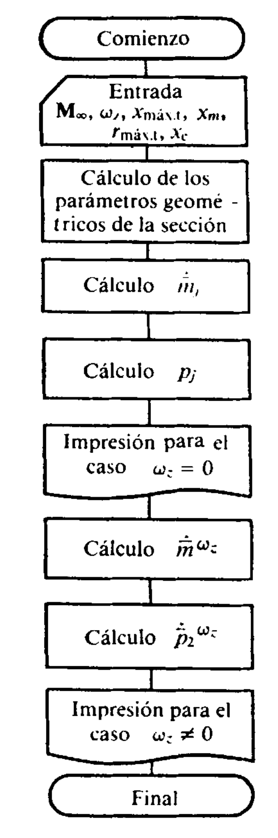


Fig. 10.48-A. Esquema del algoritmo para resolver el problema 10.48

1. Introducción de los datos iniciales M_∞, ω_z, $x_{máx.t}$, x_m, $r_{máx.t}$, x_c con una ficha perforada en la que se aplican con la sucesividad indicada en el formato (6F5.2). En el programa se prefijan la cantidad de las secciones $XN = 16$ en las que se divide el sólido de revolución para el cálculo de la distribución de los dipolos. La introducción de cambios insignificantes en el programa permite variar la cantidad de las secciones que se analizan.

2. Cálculo de los parámetros geométricos de las secciones, es decir, los valores de x_i, r_i, ε_i para cada una de las secciones i-ésimas ($i = 1, XN$). La coordenada x de la i-ésima sección se determina con la fórmula $x_i = [x_c/(XN)]_i$. Los correspondientes valores de r_i se calculan según la ecuación prefijada de la generatriz si $x_i < x_{máx.t}$ y se toman iguales a $r_{máx.t}$ si $x_i \geqslant x_{máx.t}$. Con esto se adopta $\varepsilon_1 = 0$. Los siguientes valores de ε se calculan por la fórmula $\varepsilon_{i+1} = x_i - \alpha' r_i$.

3. Cálculo de los valores de $\dot{\bar{m}}_j$. Para cada sección, cuando $\omega_z = 0$, se hallan variables auxiliares:

$$B = T1\sqrt{T1^2-1} + \ln\left(T1 + \sqrt{T1^2-1}\right);$$

$$A = \left\{ \sum_{i=1}^{j} \dot{\bar{m}}_i \left[\frac{T1T3}{T2} + \ln\left(\frac{T1T3}{T2}\right)\right], \text{ si } j \neq 1; \quad 0, \text{ si } j = 1, \right.$$

donde $T1 = (x_j - \varepsilon_j)/(\alpha' r_j)$; $T1 = x_j - \varepsilon_i$; $T2 = \alpha' r_j$;

$$T3 = \sqrt{\left(\frac{T1}{T2}\right)^2 - 1}.$$

De acuerdo con estos valores $\dot{\bar{m}}_j = (1 - A)/B$, donde A y B se calculan para la correspondiente sección j-ésima.

4. Cálculo de los valores de p_i con la fórmula

$$p_i = \sum_{k=1}^{i} \dot{\bar{m}}_k \sqrt{\frac{x_i - \varepsilon_k}{\alpha' r_i}}.$$

5. Impresión de los resultados x_i, r_i, ε_{i+1}, $\dot{\bar{m}}_i$, p_i para el caso cuando $\omega_z = 0$.

6. Cálculo de los valores de $\dot{\bar{m}}^{\omega_z}$; cuando $\omega_z \neq 0$, para cada sección se determinan las variables auxiliares

$$B = T1\sqrt{T1^2-1} + \ln\left(T1 + \sqrt{T1^2-1}\right); \quad 0, \text{ si } j = 1;$$

$$A = \left\{ \sum_{i=1}^{j} \dot{\bar{m}}_i^{\omega_z} \left(T1\sqrt{T1^2-1}\right) + \ln\left(T1 + \sqrt{T1^2-1}\right), \text{ si } j \neq 1, \right.$$

donde $T1 = (x_j - \varepsilon_i)/(\alpha' r_j)$.

Con arreglo a estas variables hallamos

$$\dot{\bar{m}}_j^{\omega_z} = (X1_j - A)/B,$$

donde $X1_j = (x_j - x_m)/x_c$.

7. Cálculo de los valores de $\bar{p}_2^{\omega_z}$ en la sección j-ésima según la fórmula

$$\bar{p}_2^{\omega_z} = (4/\alpha')\sum \dot{\bar{m}}_i^{\omega_z} \sqrt{[(x_j - \varepsilon_i)/(\alpha' r_j)]^2 - 1}.$$

8. Impresión de los resultados x_i, $X1_j$, $\dot{\bar{m}}_i^{\omega_z}$, $\bar{p}_2^{\omega_z}$ para el caso cuando $\omega_z \neq 0$.

En el programa para resolver el problema se han tomado, adicionalmente, las siguientes anotaciones (identificadores):

$$\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1}\ (\mathrm{AL1}); \quad \mathrm{EPS} = \varepsilon; \quad \mathrm{MNT} = \dot{\bar{m}};$$

$$\mathrm{P(I)} = p; \quad \mathrm{AMZ} = \Omega_z; \quad \mathrm{MNTAMZ} = \dot{\bar{m}}^{\omega_z}$$

$$\text{para } \Omega_z \neq 0; \quad \mathrm{RM} = r_{\text{máx. } t}; \quad \mathrm{XMT} = x_{\text{máx. } t};$$

$$R = r; \quad \mathrm{P2NWZN} = \bar{p}_2^{\omega_z}.$$

Programa de cálculo para resolver el problema 10.48

```
      INTEGER XN
      REAL M8,X(16),R(16),EPS(17),MNTAMZ(16),X1(16),P2NWZN(16),P(16)
      READ(1,10) M8,AMZ,XMT,XM,RM,XK
   10 FORMAT(6F5.2)
      XN=16
      AL1=SQRT(M8*M8-1)
      CALCULO DE LOS VALORES XI,RI,EPS(I)
      HX=XK/XN
      EPS(1)=0
      DO 1 I=1,XN
      X(I)=0.5*I
      IF(X(I),GE.XMT)GO TO 2
      R(I)=RM/XMT*X(I)*(2.-X(I)/XMT)
      GO TO 3
    2 R(I)=RM
    3 K=I+1
    1 EPS(K)=X(I)-AL1*R(I)
C     CALCULO DE LOS VALORES DEL VECTOR MNT
      DO 7 J=1,XN
      IF(J.GT.1)GO TO 4
      A=0
      GO TO 5
    4 A=0
      K=J-1
      DO 6 I=1,K
      T1=X(J)-EPS(I)
      T2=AL1*R(J)
      T3=SQRT((T1/T2)**2-1)
    6 A=A+MNT(I)*(T1/T2*T3+ALOG(T1/T2*T3))
    5 T1=(X(J)-EPS(J))/AL1/R(J)
      B=T1*SQRT(T1*T1-1)+ALOG(T1+SQRT(T1*T1-1))
    7 MNT(J)=(1-A)/B
C     CALCULO DEL VECTOR DE LOS VALORES P(I)
      DO 8 I=1,XN
      P(I)=0
      DO 8 K=1,I
    8 P(I)=P(I)+MNT(K)*SQRT((X(I)-EPS(K))/AL1/R(I))
      WRITE(3,11)
   11 FORMAT(5X,'X(I)',6X,'R(I)',6X,'EPS(I+1)',8X,'MNT(I)',10X,'P(I)'//)
      DO 9 I=1,XN
      K=I+1
    9 WRITE(3,12)X(I),R(I),EPS(K),MNT(I).P(I)
   12 FORMAT(4X,F5.2,5X,F5.2,5X,F10.5,5X,2(F10.5,5X))
C     CASO 2:AMZ NO ES NULO
      DO 20 I=1,XN
   20 X1(I)=(X(I)-XM)/XK
C     CALCULO DE LOS VALORES DEL VECTOR MNTAMZ
      DO 21 J=1,XN
      IF(J.GT.1)GO TO24
      A=0
      GO TO 25
   24 A=0
      K=J-1
      DO 26 I=1,K
      T1=(X(J)-EPS(I))/AL1/R(J)
   26 A=A+MNTAMZ(I)*(T1*SQRT(T1*T1-1)+ALOG(T1+SQRT(T1*T1-1)))
   25 T1=(X(J)-EPS(J))/AL1/R(J)
      B=T1*SQRT(T1*T1-1)+ALOG(T1+SQRT(T1*T1-1))
   21 MNTAMZ(J)=(X1(J)-A)/B
C     CALCULO DEL VECTOR PZNWZN
      DO 30 J=1,XN
      P2NWZN(J)=0
      DO 31 I=1,J
      T1=((X(J)-EPS(I))/AL1/R(J))**2-1
   31 P2NWZN(J)=P2NWZN(J)+MNTAMZ(I)*SQRT(T1)
   30 P2NWZN(J)=4./AL1*P2NWZN(J)
      WRITE(3,34)
   34 FORMAT(1X///4X,'X(I)',10X,'X1(I)',6X,'MNTAMZ(I)'6X,'P2NWZN(I),'//)
      DO 32 I=1,XN
   32 WRITE(3,33)X(I),X1(I),MNTAMZ(I),P2NWZN(I)
   33 FORMAT(3X,F5.2,5X,F10.4,5X,F10.4,5X,F10.4)
      STOP
      END
```

10.50. En correspondencia con el esquema del algoritmo de resolución del problema (fig. 10.50-A) se realizan las siguientes operaciones de calculo:

1. Introducción de los datos iniciales M_∞, $\lambda_{\text{máx.t}}$, $r_{\text{máx.t}}$, $\bar{S}_{\text{s.b}}$, x_m sucesivamente con una ficha perforada en el formato (4F5.2, F7.4).

2. Calculamos los parámetros geométricos y gasodinámicos α', $u_{\text{máx.t}}$, $r_{\text{s.b}}$, $\bar{x}_c$, x_c, $\bar{x}_m$, $u_{\text{s.b}}$, $u'_{\text{s.b}} = u_{\text{s.b}} - 0{,}1$, $u'_{\text{máx.t}} = u'_{\text{máx.t}} - 0{,}1$, $\bar{x}'_{\text{máx.t}}$, $\bar{r}'_{\text{máx.t}}$, $\bar{r}'_{\text{s.b}}$, $r'_{\text{máx.t}}$, $r'_{\text{s.b}}$, $\bar{x}'_{\text{s.b}}$.

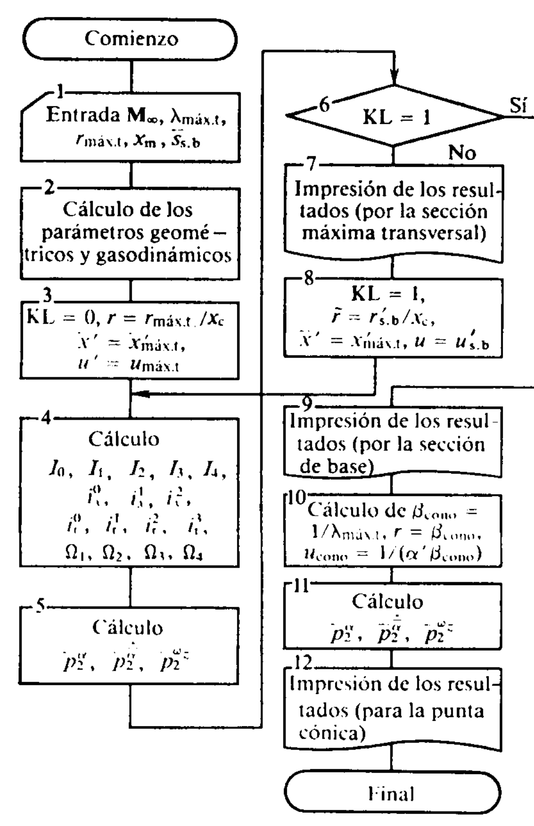


Fig. 10.50-A. Esquema del algoritmo para resolver el problema 10.50

3. Preparación del ciclo (realización doble de los bloques 4, 5). Para el primer cálculo se toman los valores de $\tilde{r}$, $\bar{x}^1$, y u correspondientes a la sección máxima transversal.

4. Cálculo de los valores de I_0, I_1, I_2, I_3, I_4 según (10.131″); i_r^0, i_r^1, i_r^2, i_r^3 según (10.129); i_x^0, i_x^1, i_x^2 según (10.130); Ω_1, Ω_2, Ω_3 según (10.128′), (10.129′), (10.130′), (10.131′).

5. Cálculo de los valores de $\bar{p}_2^{\alpha}$, $\bar{p}_2^{\dot{\alpha}}$, $\bar{p}^{\omega_z}$ con las correspondientes fórmulas (10.127).

6. Comprobación de la condición. Si $KL = 0$, en los bloques 4, 5 se realizaba el cálculo por la sección máxima transversal y el control se transmite a los bloques 7, 8. Si $KL = 1$, en los bloques 4, 5 se realizan los cálculos por la sección de base y el control se transmite al bloque 9.

7. Impresión de los resultados $\bar{p}_2^{\alpha}$, $\bar{p}^{\dot{\alpha}}$, $\bar{p}_2^{\omega_z}$ por la sección máxima transversal.

8. Preparación para la repetición de la realización de los cálculos en los bloques 4, 5 para los parámetros r, $\bar{x}^1$, u, correspondientes a la sección de base.

9. Impresión de los resultados $\bar{p}_2^{\dot{\alpha}}$, $\bar{p}_2^{\alpha}$, $\bar{p}_2^{\omega_z}$ por la sección de base.

10. Cálculo de los valores de β_{cono}, u_{cono}, $\bar{r}$ para la punta cónica.

11. Cálculo de los valores de $\bar{p}_2^{\alpha}$, $\bar{p}_2^{\dot{\alpha}}$, $\bar{p}^{\omega_z}$ según (10.132) para la punta cónica.

12. Impresión de los resultados del cálculo de los parámetros $\bar{p}_2^{\alpha}$, $\bar{p}_2^{\dot{\alpha}}$, $\bar{p}^{\omega_z}$ para la punta cónica.

En el programa para la resolución del problema se han adoptado las siguientes anotaciones (identificadores):

$$\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1}\ \text{(AL1)};\quad \text{UM} = u_{\text{máx. t}};\quad \text{XMT} = x_{\text{máx. t}};$$

$$\text{LM} = \lambda_{\text{máx.t}};\quad \text{T1} = \bar{r}_{\text{s.b}};\quad \text{SNB} = \bar{S}_{\text{s.b}};$$

$$\text{RB} = r_{\text{s.b}};\quad \text{RM} = r_{\text{máx.t}};\quad \text{XNK} = \bar{x}_{\text{cono}};$$

Programa de cálculo para resolver el problema 10.50

```
      REAL M8,LM
      READ(1,10) M8,LM,RM,XM,SNB
   10 FORMAT(4F5.2,F7.4)
C     CALCULO DE LOS VALORES DE LAS DERIVADAS PN2 EN LAS
C     SECCIONES MAXIMA TRANSVERSAL Y DE BASE
      AL1=SQRT(M8*M8-1.)
      UM=2*LM/AL1
      T1=SQRT(SNB)
      RB=T1*RM
      XNK=1+SQRT(1-T1)
      XK=LM*2*RM*XNK
      XMN=XM/XK
      UB='XK/(AL1*RB)
      U1B=UB-0.1
      U1M=UM-0.1
      XMTN1=2-1./U1M/(AL1/2./LM)
      XBN1=2-1./U1B/(AL1/2./LM)
      RMN1=XMTN1*(2.-XMTN1)
      RBN1=XBN1*(2.-XBN1)
      RB1=RBN1*RM
      RM1=RMN1*RM
      RNV=RM1/XK
      XN1=XMTN1
      U=U1M
      KL=0
    1 I0=ALOG(U+SQRT(U*U-1))
      I1=SQRT(U*U-1)
      I2=0.5*I1*U+0.5*I0
      I3=1./3.*I1*(U*U+2)
      I4=0.25*I1*U*(U*U+3./2.)+3./8.*I0
      IMX0=I0
      IMX1=U*I1-I0
      IMX2=U*U*I2-I1
      U2=U*U
      IMR0=I1
      IMR1=U*I1-I2
      IMR2=U2*I1-2*U*I2+I3
      IMR3=U2*U*I1-3*U2*I2+3*U*I3-I4
      AM1=3.1416/XNK/LM/LM*(2.*XN1/U*IMR1-
      3*XN1**2/U/U*IMR2+XN1**3/(U**3)*IMR3)
      AM2=3.1416/(LM**2)*(2.*IMX0-6.*XN1/U*IMX1
      +3*XN1**2/U/U*IMX2)
      AM3=3.1416/(LM**2)*(2*IMR0-6*XN1/U*IMR1+
      3.*XN1**2/U/U*IMR2)
      AM4=3.1416/LM**2/XNK*(2*XN1/U*IMR1-
      6.*XN1**2/U/U*IMR2+3.*XN1**3/U/U/U*IMR3)
      PN2AL=-2.*AL1/3.1416*AM3
      PN2ANT=-2.*AL1/3.1416*(-AM3*XMN+AM4+3.*AM1-M8*M8*AM2/
      AL1*RNV)
      PN2WZ=2.*AL1/3.1416*(-AM3*XMN+AM4+2*AM1)
      IF(KL .EQ.1) GO TO 2
      WRITE(3,3)PN2AL,PN2ANT,PN2WZ
    3 FORMAT(1X,'RESULTADO DE LOS CALCULOS EN LA SECCION
      MAXIMA TRANSVERSAL'//1X,'PN2AL=',F10.4,5X,'PN2ALNT=
      ',F10.4,5X,'PN2WZ=',F10.4///
      RNV=RB1/XK
      XN1=XBN1
      U=U1B
      KL=1
      GO TO 1
    2 WRITE(3,4)PN2AL,PN2ANT,PN2WZ
    4 FORMAT(1X,'RESULTADO DE LOS CALCULOS EN LA SECCION
      DE BASE'//1X,'PN2AL=',F10.4,5X,'PN2ALNT=',F10.4,5X
      'PN2WZ=',F10.4//)
C     CALCULO DE LOS VALORES DE LAS DERIVADAS PN2AL,
      PN2ALNT,PN2WZ
C     PARA LA PUNTA CONICA
      BETK=1./LM
      UK=1./AL1/BETK
      T1=SQRT(UK*UK-1)
      PN2AL=-4.*AL1*BETK**2*T1
      PN2WZ=-PN2AL*XMN
      RNV=BETK
      PN2ANT=4.*BETK**2*(XMN*AL1*T1+M8*M8*RNV*ALOG(UK+T1))
      WRITE(3,5)PN2AL,PN2ANT,PN2WZ
    5 FORMAT(1X,'RESULTADOS DE LOS CALCULOS PARA LA PUNTA
      CONICA'//1X,'PN2AL=',F10.4,5X,'PN2ALNT=',F10.4,5X,
      'PN2WZ=',F10.4)
      STOP
      END
```

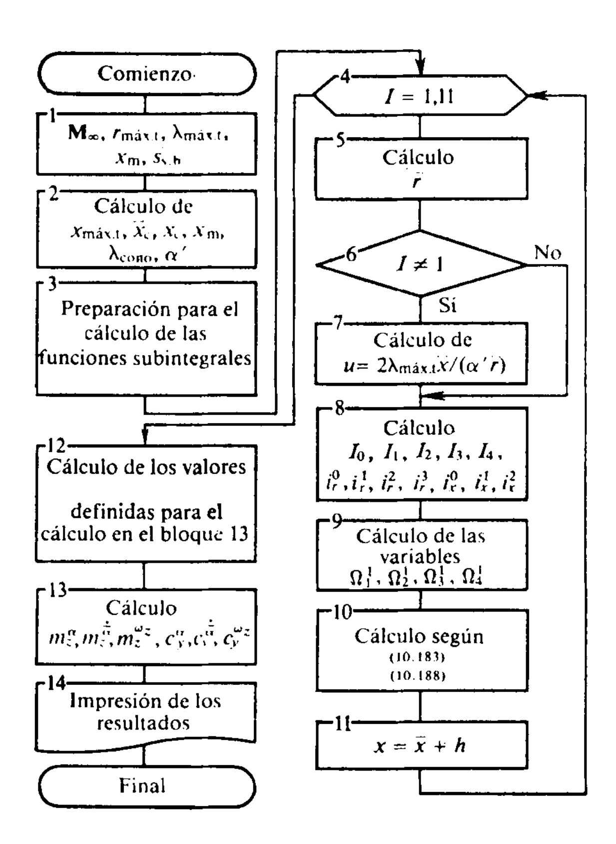


Fig. 10.54-A. Esquema del algoritmo para resolver el problema 10.54

$$\text{XMK} = \bar{x};\quad \text{UB} = u_{\text{s.b}};\quad \text{RB} = r_{\text{s.b}};$$

$$\text{I0} = I_0;\quad \text{I1} = I_1;\quad \text{I2} = I_2;\quad \text{I3} = I_3;\quad \text{I4} = I_4;$$

$$\text{IMX0} = i_x^0;\quad \text{IMX1} = i_x^1;\quad \text{IMX2} = i_x^2;$$

$$\text{IMR0} = i_r^0;\quad \text{IMR1} = i_r^1;\quad \text{IMR2} = i_r^2;$$

$$\text{IMR3} = i_r^3;\quad \text{AM1} = \Omega_1;\quad \text{AM2} = \Omega_2;\quad \text{AM3} = \Omega_3;$$

$$\text{AM4} = \Omega_4;\quad \text{PN2AL} = \bar{p}_2^{\alpha};\quad \text{PN2ANT} = \bar{p}_2^{\dot{\alpha}};$$

$$\text{PN2WZ} = \bar{p}_2^{\omega_z};\quad \text{BETK} = \beta_{\text{cono}};\quad \text{UK} = u_{\text{cono}}.$$

10.54. En la fig. 10.54-A está representado el esquema del algoritmo para la resolución del problema. En correspondencia con este esquema se efectúan las siguientes operaciones de cálculo:

1. Introducción de los datos iniciales M_∞, $r_{\text{máx.t}}$, $\lambda_{\text{máx.t}}$, $\bar{x}_m$, $\bar{s}_{\text{s.b}}$ sucesivamente con ficha perforada en el formato (4F5.2, F7.4).

2. Cálculo $x_{\text{máx. t}}$, $\bar{x}_c$, x_c, $\bar{x}_m$, λ_{cono}, α' con las correspondientes fórmulas (véase el cap. 10).

3. Preparación para el cálculo de los valores de las funciones subintegrales. Se prefijan el paso de integración $h = \bar{x}_c/10$ y el valor inicial de la variable $\bar{x} = 0$. A continuación, se calcula el valor de $u = \lambda_{\text{máx.t}}/\alpha'$, correspondiente al valor de $\bar{x} \to 0$.

4. Comienzo del ciclo por el parámetro I. Se prefija la variación de I desde 1 hasta 11 para calcular las funciones subintegrales en las secciones del fuselaje delgado aguzado ($\bar{x}$ varía desde 0 hasta $\bar{x}_c$ con paso $h = \bar{x}_c/10$).

5. Cálculo de $\bar{r}$ según la ecuación prefijada del sólido de revolución $\bar{r} = \bar{x}(2 - \bar{x})$.

6 y **7.** Cálculo de u para diversas secciones del sólido de revolución ($\bar{x} \neq 0$; $I \neq 1$).

8 y **9.** Cálculo de las variables I_0, I_1, I_2, I_3, I_4 según (10.131″); i_r^0, i_r^1, i_r^2, i_r^3 según (10.129); i_x^0, i_x^1, i_x^2 según (10.130); Ω_1^1, Ω_2^1, Ω_3^1, Ω_4^1 según (10.188′), (10.188″).

10. Cálculo de las funciones subintegrales [véase (10.183)—(10.188)].

11. Cálculo de los valores de $\bar{x} = \bar{x} + h$ para el valor prefijado de los incrementos de h.

12. Determinación numérica de las integrales que entran en las fórmulas (10.183)—(10.188), por medio del empleo del programa estándar correspondiente QTFE.

13. Cálculo de las derivadas buscadas c_y^{α}, $c_y^{\dot{\bar{\alpha}}}$, $c_y^{\omega_z}$, m_z^{α}, $m_z^{\dot{\bar{\alpha}}}$ $m_z^{\omega_z}$ con las fórmulas (10.183)—(10.188).

14. Impresión de los resultados en el bloque 13.

En el programa para resolver el problema se han adoptado las siguientes anotaciones (identificadores):

$$\text{AL1} = \alpha' = \sqrt{\text{M}_\infty^2 - 1}; \quad \text{LM} = \lambda_{\text{máx. t}};$$

$$\text{XMT} = x_{\text{máx.t}}; \quad \text{RM} = r_{\text{máx.t}}; \quad \text{SB} = S_{\text{s.b}};$$

$$\text{XKN} = \bar{x}_{\text{c}}; \quad \text{XMN} = \bar{x}_{\text{m}}; \quad \text{LK} = \lambda_{\text{cono}}; \quad \text{RN} = \bar{r};$$

$$\text{XN} = \bar{x}; \quad \text{I0} = I_0; \quad \text{I1} = I_1; \quad \text{I2} = I_2; \quad \text{I3} = I_3;$$

$$\text{I4} = I_4; \quad \text{IMR0} = i_r^0; \quad \text{IMR1} = i_r^1;$$

$$\text{IMR2} = i_r^2; \quad \text{IMR3} = i_r^3; \quad \text{IMX0} = i_x^0;$$

$$\text{IMX1} = i_x^1; \quad \text{IMX2} = i_x^2; \quad \text{AM11} = \Omega_1^1; \quad \text{AM12} = \Omega_2^1;$$

$$\text{AM13} = \Omega_3^1; \quad \text{AM14} = \Omega_4^1; \quad \text{Y (I)} = J_3, \quad \text{Y1 (I)} = J_4;$$

$$\text{Y2 (I)} = J_1; \quad \text{Y3 (I)} = J_2; \quad \text{Y4 (I)} = K_3; \quad \text{Y5 (I)} = K_4;$$

$$\text{Y6 (I)} = K_1; \quad \text{Y7 (I)} = K_2''; \quad \text{CYAL} = c_y^{\alpha}; \quad \text{CYALNT} = c_y^{\dot{\bar{\alpha}}};$$

$$\text{CYWZ} = c_y^{\omega_z}; \quad \text{MZAL} = m_z^{\alpha}; \quad \text{MZALNT} = m_z^{\dot{\bar{\alpha}}}; \quad \text{MZWZ} = m_z^{\omega_z}.$$

Programa de cálculo para resolver el problema 10.54

```
      REAL M8,LM,LK,Y(11),Y1(11),Y2(11),Y3(11),Y4(11),
      Y5(11),Y6(11),Y7(11)
      READ(1,11) M8,RM,LM,XM,SBN
   11 FORMAT(4F5.2,F7.4)'
      XMT=LM*2*RM
      XKN=1.+SQRT(1-SQRT(SBN))
      XK=XKN*XMT
      XMN=XM/XK
      LK=XK/2./RM
      AL1=SQRT(M8*M8-1)
C     CALCULO DE LOS VALORES DE LAS FUNCIONES SUBINTEGRALES
      XN=0
      H=XNK/10
      U=LM/AL1
      DO 1 I=1,11
      RN=XN*(2-XN)
      IF(I.FQ.1)GO TO 2
      U=2.*LM*XN/AL1/RN
    2 I0=ALOG(U+SQRT(U*U-1))
      I1=SQRT(U*U-1)
      I2=0.5*I1*U+0.5*I0
      I3=1./3.*I1*(U*U+2)
      I4=0.25*I1*U*(U*U+3./2.)+3./8.*I0
      U2=U*U
      IMR0=I1
      IMR1=U*I1-I2
      IMR2=U2*I1-2*U*I2+I3
      IMR3=U2*U*I1-3.*U2*I2+3.*U*I3-I4
      IMX0=I0
      IMX1=U*I1-I0
      IMX2=U2*I2-I1
      XN2=XN*XN
      XN3=XN2*XN
      U3=U2*U
      AM11=2*XN/U*IMR1-3*XN2/U2*IMR2+XN3/U3*IMR3
      AM12=2*IMX0/-6*XN/U*IMX1+3.*XM2/U2*IMX2
      AM13=2.*IMR0-6*XN/U*IMR1+3*XN2/U2*IMR2
      AM14=2.*XN/U*IMR1-6*XN2/U2*IMR2+3.*XN3/U3*IMR3
      Y(I)=RN*AM13
      Y1(I)=RN*AM14
      Y2(I)=AM11*RN
      Y3(I)=AM12*RN*RN
      Y4(I)=Y(I)*XN
      Y5(I)=Y1(I)*XN
      Y6(I)=Y2(I)*XN
      Y7(I)=Y3(I)*XN
    1 XN=XN+H
C     INTEGRACION
      CALL QTFE(H,Y,Y,11)
      CALL QTFE(H,Y1,Y1,11)
      CALL QTFE(H,Y2,Y2,11)
      CALL QTFE(H,Y3,Y3,11)
      CALL QTFE(H,Y4,Y4,11)
      CALL QTFE(H,Y5,Y5,11)
      CALL QTFE(H,Y6,Y6,11)
      CALL QTFE(H,Y7,Y7,11)
C     CALCULO DE LOS VALORES BUSCADOS
      CYAL=4*AL1/LM*Y(11)
      T1=AL1/LM
      CYALNT=-4.*T1*XMN*Y(11)+4.*T1/XKN*Y1(11)+
      12.*T1/XKN*Y2(11)-2.*M8*M8/LK/LM*Y3(11)
      CYWZ=4.*T1/XKN*Y1(11)-4.*T1*XMN*Y(11)+8*T1/XKN*Y2(11)
      MZAL=CYAL*XMN-4.*T1/XKN*Y4(11)
      MZALNT=CYALNT*XMN+4.*T1*XMN/XKN*Y4(11)-4.*T1/XKN/XKN*
      Y5(11)-12.*T1/XKN/XKN*Y6(11)+2.*M8*M8/XKN/LK/LM*Y7(11)
      MZWZ=CYWZ*XMN-4.*T1/XKN/XKN*Y1(11)+4.*T1*XMN/XKN*Y(11)
      -8.*AL1/LK/XKN*Y6(11)
      WRITE(3,10)CYAL,CYALNT,CYWZ,MZAL,MZALNT,MZWZ
   10 FORMAT(1X,'CYAL=',F10.4,5X,'CYALNT=',F10.4,5X,
      'CYWZ=',F10.4,5X//1X,'MZAL=',F10.4,5X,'MZALNT=',
      F10.4,5X,'MZWZ=',F10.4)
      STOP
      END
```

11.12a. El esquema del algoritmo para la resolución de una parte del problema 11.12, ligada con la determinación del coeficiente $\overline{\Delta p}_{f(ala)}$, se muestra en la fig. 11.12a-A y consta de las siguientes operaciones:

1 y 2. Introducción de los datos iniciales: el ángulo α, las derivadas dr/dx, ds/dx, el radio r_{cil}, así como las coordenadas de los puntos en el fuselaje θ y x.

3. Cálculo de las variables r, s, r/s, z/r, z/s y $\overline{\Delta p}_{f(ala)}$ con (11.5).

4. Impresión de los resultados de los cálculos $\overline{\Delta p}_{f(ala)}$.

5. Continuación de los cálculos. En el caso de investigaciones paramétricas el cálculo no se detiene, sino que se introducen otros datos iniciales.

6. Introducción de los datos iniciales α, dr/dx, ds/dx, r_{cil}; se continúa el cálculo.

En el programa se han adoptado las siguientes anotaciones (identificadores):

$$\text{ALFA} = \alpha; \quad \text{DRDX} = dr/dx; \quad \text{DSDX} = ds/dx;$$

$$\text{RC} = r_{cil}; \quad \text{Q} = \theta; \quad \text{X} = x; \quad \text{Z} = z;$$

$$\text{R} = (dr/dx)\,(x/r_{cil}); \quad S = (ds/dx)\,(x/r_{cil});$$

$$\text{RS} = r/s; \quad \text{RZ} = r/z = \cos\theta; \quad \text{ZS} = z/s = (r/s)\cos\theta;$$

$$\text{PTKR1} = 4\alpha\,[(1 - r^4/s^4)\,(ds/dx) +$$

$$+ 2\,(r/s)\,(dr/dx)\,(1 + r^2/s^2 - 2\cos^2\theta)];$$

$$\text{PTKP2} = \sqrt{(1 + r^2/s^2)^2 - 4\,[(r\cos\theta)/s]^2}; \quad \text{PTKP} = \overline{\Delta p}_{f(ala)}.$$

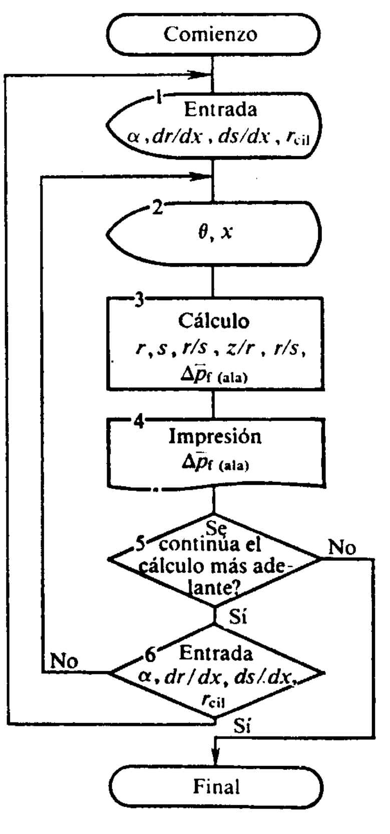


Fig. 11.12a-A. Esquema del algoritmo para resolver el problema 11.12a

11.12b. El esquema del algoritmo para resolver la parte del problema 11.12 dedicada a determinar el coeficiente $\overline{\Delta p}_{ala(f)}$ se ofrece en la fig. 11.12b-A y consta de las siguientes operaciones:

1 y 2. Introducción de los datos iniciales α, dr/dx, ds/dx, r_{cil}, así como las coordenadas x, z (de los puntos en el ala).

Programa de cálculo para resolver el problema 11.12a (determinación del coeficiente $\Delta \bar{p}_{t(\text{ala})}$)

```
      PROGRAM SUHKOS
      LOGICAL*1 T
      REAL Q,X,ALFA,RC,S,Z,DRDX,DSDX
    1 TYPE *,'INTRODUZCAN LOS VALORES PARA EL ANGULO ALFA
      Y LAS DERIVADAS *DRDX,DSDX,Y TAMBIEN RC.'
      TYPE 100
  100 FORMAT(' ALFA=',¤)
      ACCEPT *,ALFA
  101 FORMAT(F10.5)
      TYPE 102
  102 FORMAT(' DRDX=',¤)
      ACCEPT *,DRDX
      TYPE 103
  103 FORMAT(' DSDX=',¤)
      ACCEPT *,DSDX
      TYPE 104
  104 FORMAT(' RC=',¤)
      ACCEPT *,RC
    2 TYPE 105
  105 FORMAT(///,'  INTRODUZCAN Q(EN RADIANES)Y X.')
      TYPE 106
  106 FORMAT(' Q=',¤)
      ACCEPT *,Q
      TYPE 107
  107 FORMAT(' X=',¤)
      ACCEPT *,X
      R=DRDX*X/RC+1
      S=DSDX*X/RC+1
      RS=R/S
      ZR=COS(Q)
      ZS=RS*COS(Q)
      PTKP11=2*RS*DRDX*((1+(RS**2))-(2*(ZR**2)))
      PTKP1=4*ALFA*(DSDX*(1-(RS**4))+PTKP11)
      PTKP2=((1+(RS**2))**2)-(4*(ZS**2))
      IF(PTKP2.LT.0.OR.PTKP2.EQ.0)GO TO 4
      PTKP=PTKP1/(SQRT(PTKP2))
    4 PRINT 108,ALFA,DRDX,DSDX,RC
  108 FORMAT(' DATOS INICIALES===>ALFA=',F10.5,
      ' DRDX=',F10.5,' DSDX=',F10.5,' RC=',F10.5)
      PRINT 109,Q,X
  109 FORMAT(' VARIABLES===>Q',F10.5,
      ' X=',F10.5)
      IF(PTKP2.EQ.0)PRINT *,'INTENTO DE DIVIDIR POR CERO.
      IF(PTKP2.LT.0)PRINT *,'BAJO LA RAIZ SE ENCUENTRA UN
      NUMERO NEGATIVO.'
      PRINT  110,PTKP
  110 FORMAT(' RESULTADO DEL CALCULO==>PTKP=',F10.5)
      PRINT 111
  111 FORMAT(' **************************')
      TYPE *,'CONTINUARA LOS CALCULOS? (Y/N)'
      ACCEPT 112,L
  112 FORMAT (A1)
      IF(L.EQ.'N')GO TO 3
      TYPE *,'INTRODUCIRA ALFA,DRDX,DSDX,RC?(Y/N)'
      ACCEPT 112,L
      IF(L.EQ.'N')GO TO 2
      GO TO 1
    3 PRINT 113
  113 FORMAT(100(' '))
      STOP
      END
```

3. Cálculo de las variables r, s, r/s, r/z, z/s, $\Delta\bar{p}_{ala(f)}$ según (11.6).

4. Impresión de los resultados $\Delta\bar{p}_{ala(f)}$.

5. Continuación de los cálculos. En el caso de investigaciones paramétricas el cálculo no se detiene, sino que se introducen otros datos iniciales.

6. Introducción de los datos iniciales α, r_{cil}, dr/dx, ds/dx; continúa el cálculo.

En el programa de resolución del problema se han adoptado las siguientes anotaciones (identificadores):

$$RZ = r/z;$$

$$\text{PKPT1} = 4\alpha/\sqrt{(1+r^4/s^4)-(z^2/s^2)(1+r^4/z^4)};$$

$$\text{PKPT2} = (ds/dx)\{(1-r^4/s^4)+$$

$$+(r/s)(dr/dx)[2(r^2/s^2-1)+(1-r^2s^2)^2]\};$$

$$\text{PKPT} = \Delta\bar{p}_{ala(f)}.$$

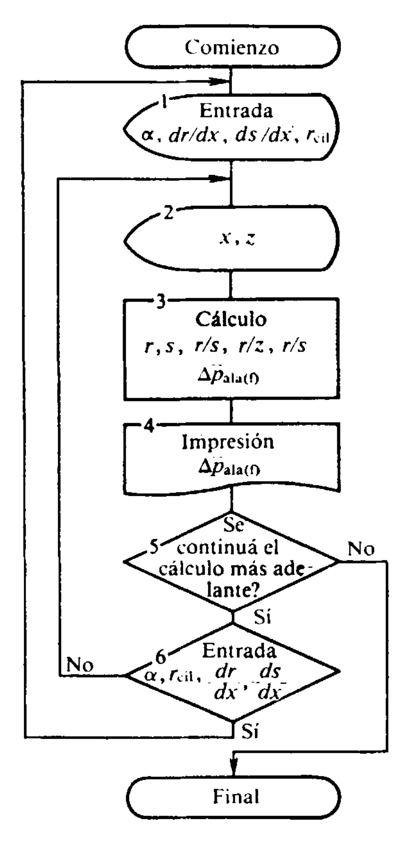


Fig. 11.12b-A Esquema del algoritmo para resolver el problema 11.12b

12.14. A la resolución de este problema precede un cálculo previo de los parámetros de un flujo no viscoso, lo que se realiza con la forma conocida de un perfil aguzado, empleando la teoría de las ondas de choque y las corrientes de enrarecimiento (flujos de Prandtl — Meyer). Para la forma prefijada del perfil del ala y los parámetros del flujo no perturbado la distribución de velocidades en la frontera exterior de la capa límite se puede aproximar en la forma

$$\bar{V}_\delta(x_1) = -0{,}0009x_1^2 + 0{,}03259x_1 + 0{,}6348.$$

Analicemos el algoritmo para la resolución del problema.

1. Adjudicación a los elementos del complejo PRMT, Y, DERY de los valores iniciales: PRMT (1), valor inicial del argumento; PRMT (2), valor final del argumento; PRMT (3), valor inicial del paso de integración; PRMT (4), error máximo tolerable de integración.

2. Resolución de la ecuación diferencial (12.42) utilizando el subprograma HPCG, el que durante su realización emplea, a su vez, el subprograma de cálculo de los segundos miembros FCT y el subprograma de impresión de los resultados OUTP.

3. Cálculo de los segundos miembros de la ecuación (12.42), así como determinación del esfuerzo de rozamiento τ_{par} y el coeficiente local de rozamiento c_{fx}. Las derivadas $d\bar{V}_\delta/dx$ y $d^2\bar{V}_\delta/dx^2$, que entran en las expresiones para las funciones $N_1(x_1)$ y $N_2(x_1)$, se determinan con ayuda de métodos numéricos, en tanto que los valores de μ_δ y ρ_δ necesarios para el cálculo de τ_{par} y c_{fx} se determinan haciendo uso de (12.42'), (12.42'').

4. Impresión de los resultados.

En el programa para resolver el problema se han adoptado las siguientes anotaciones (identificadores):

T, argumento de x_1; Y, variable λ; V, velocidad relativa $\bar{V}_\delta(x_1) = V_\delta/V_{máx}$ [la velocidad máxima en el ejemplo que consideramos $V_{máx} = a_\infty\sqrt{2/(k-1)+\mathbf{M}_\infty^2} = 885{,}3$ m/s]; BETA, ángulo de inclinación de la tangente β_i en el i-ésimo punto del perfil; TAU = τ_{par}; B = $= \mu_{\delta i}\rho_{\delta i}885{,}3\ (d\bar{V}_\delta/dx)\cos\beta_i$;

$$\text{DERY (1)} = d\lambda/dx_1;\quad \text{M1} = \mathbf{M}_1(\lambda);$$

$$\text{M2} = \mathbf{M}_2(\lambda);\quad \text{N1} = N_1(x_1);\quad \text{N2} = N_2(x_1);$$

$$\text{MU} = \mu_\delta;\quad \text{RO} = \rho_\delta;$$

Programa de cálculo para resolver el problema 11.12b (determinación del coeficiente $\Delta\bar{p}_{f(\text{ala})}$)

```
      PROGRAM SUHKOS
      LOGICAL*1 L
      REAL*4 ALFA,DRDX,DSDX,RC,S,Z,Q,X
    1 TYPE *,' INTRODUZCAN LOS VALORES ALFA,RC,DRDX,DSDX,'
      TYPE 100
  100 FORMAT(' ALFA=',¤)
      ACCEPT *,ALFA
      TYPE 102
  102 FORMAT(' RC=',¤)
      ACCEPT *,RC
      TYPE 103
  103 FORMAT(' ,DRDX=',¤)
      ACCEPT *,DRDX
      TYPE 104
  104 FORMAT(' DSDX=',¤)
      ACCEPT *,DSDX
    2 TYPE 105
  105 FORMAT(///,' INTRODUZCAN X,Z')
      TYPE 106
  106 FORMAT('  X=',¤)
      ACCEPT *,X
      TYPE 107
  107 FORMAT('  Z=',¤)
      ACCEPT *,Z
      R=(DRDX*(X/RC))+1
      S=(DSDX*(X/RC))+1
      RS=R/S
      RZ=R/Z
      ZS=Z/S
      PKPT1=(1+(RS**4))-((ZS**2)*(1+(RZ**4)))
      IF(PKPT1.LT.0.OR.PKPT1.EQ.0)GO TO 4
      PKPT2=DSDX*(1-(RS**4))+RS*DRDX*(2*((RS**2)-1)+((1-
      (RZ**2))**2)
      PKPT3=4*ALFA
      PKPT=(PKPT2*PKPT3)/SQRT(PKPT1)
    4 PRINT 108,ALFA,RC,DRDX,DSDX
  108 FORMAT(' DATOS INICIALES==>ALFA=',F10.5,
      ' RC=',F10.5,'DRDX=',F10.5,' DSDX=',F10.5)
      PRINT 109,X,Z
  109 FORMAT('VARIABLES====>X=',F10.5,' Z=',F10.5)
      IF(PKPT1.EQ.0)PRINT *,'INTENTO DE DIVIDIR POR CERO.'
      IF(PKPT1.LT.0)PRINT *,'BAJO LA RAIZ SE ENCUENTRA UN
      NUMERO NEGATIVO.'
      PRINT 110,PKPT
  110 FORMAT(' RESULTADO DEL CALCULO===>PKRT=',F10.5)
      PRINT *,PKPT1,PKPT2,PKPT3
      PRINT 111
  111 FORMAT('************************')
      TYPE *,' CONTINUARA EL CALCULO? (Y/N)'
      ACCEPT 112,L
  112 FORMAT(A1)
      IF(L.EQ.'N')GO TO 3
      TYPE *,'INTRODUCIRA ALFA,DRDX,DSDX,RS? (Y/N)'
      ACCEPT 112,L
      IF(L.EQ.'N')GO TO 2
      GO TO 1
    3 PRINT 113
  113 FORMAT(100(' '))
      STOP
      END
```

Programa de cálculo para resolver el problema 12.14

```
      DIMENSION PRMT(5),Y(1),DEPY(1),AUX(16,1)
      EXTERNAL FCT,OUTP
      COMMON /BL/HP,VP
      NOIM=1
      PRMT(1)=0,0
      PRMT(2)=2,0
      PRMT(3)=0,01
      PRMT(4)=0,08
      DERY(1)=1,0
      Y(1)=0,0
      HP=0,01
      VP=PRMT(1)
      CALL HPCG(PRMT,Y,DERY,NDIM,IHLF,FCT,OUTP,AUX)
      PRINT 114,IHLF
  114 FORMAT(1H,'IHLF=',I2)
      STOP
      END
      SUBROUTINE FCT(T,Y,DERY)
      DIMENSION Y(1),DERY(1)
      REAL M1,M2,N1,N2,MU
      COMMON/C/TAU,CFX
      H=0.01
      V=-0.0009*T*T+0.03259*T+0.6348
      Q1=T+H
      Q2=T+2.0*H
      V1=-0.0009*(Q1**2)+0.03259*Q1+0.6348
      V2=-0.0009*(Q2**2)+0.03259*Q2+0.6348
    3 FORMAT(1H ,5(F20.6))
      S1=T-H
      S2=T-2.0*H
      V11=-0.0009*(S1**2)+0.03259*S1+0.6348
      V22=-0.0009*(S2**2)+0.03259*S2+0.6348
      V1T=(V2-V)/(2.0*H)
      VT=(V1-V11)/(2.0*H)
      V11T=(V-V22)/(2.0*H)
      VTT=(V1T-V11T)/(2.0*H)
      BETA=ATAN(0.08*(1.0-T))
      N1=11.0*VT*V/(1.0-V*V)+0.04*SIN(2.0*BETA)+VTT/VT
      N2=VT/(V*(1.0-V*V))
      M1=Y(1)*(213.12-1.92*Y(1)-0.2*Y(1)*Y(1))/(213.12
     -5.76*Y(1)-Y(1)*Y(1))
      M2=(7257.6-1336.32*Y(1)+37.92*Y(1)*Y(1)+0.8*Y(1)
     Y(1)*Y(1))/(213.12-5,76*Y(1)-Y(1)*Y(1))
      DERY(1)=M1*N1+M2*N2
      MU=(1.45E-06)*((1.8*(1.0-V*V))**0.76)
      RO=(1.0-V*V)**2,5*1.196*0.009062/0.275
      B=MU*RO*885.3*VT*COS(BETA)
      IF(Y(1)) 1,1,2
    2 CONTINUE
      TAU=V*885,2*SQRT(B)*(1./(1.-V*V)**3.375)*(2.0*Y(1),
     6.0)/SQRT(Y(1))
      CFX=2.0*TAU/(RO*V*V*885.3*885.3)
      GO TO 5
    1 TAU=1.0E10
      CFX=0.0
    5 CONTINUE
      RETURN
      END
      SUBROUTINE OUTP(T,Y,DERY,IHLF,NDIM,PRMT)
      DIMENSION Y(1),DERY(1)
      COMMON/G/TAU,CFX
      COMMON/BL/HP,VP
      IF(VP-T) 100,100,150
  100 CONTINUE
      PRINT  4,T,TAU,CFX
    4 FORMAT(1H0,3(E30.6))
  150 CONTINUE
      RETURN
      END
```

Q1 y Q2, valores del argumento $Q_1 = T + H$ y $Q_2 = T + 2H$, respectivamente; H, paso de variación del argumento; S1 y S2, valores del argumento $S_1 = T - H$ y $S_2 = T - 2H$, respectivamente; V1 y V2, correspondientes valores de $V_\delta(x_1)$ en los puntos del perfil $x_1 + H$ y $x_1 + 2H$; V11 y V22, valores de $\bar{V}_\delta(x_1)$ en los puntos $x_1 - H$, $x_1 - 2H$; V1T, derivada $d\bar{V}_\delta/dx_1 = $ (V2 — V)/(2H) en el punto Q1; VT, derivada $dV_\delta/dx_1 = $ (V1 — V11)/(2H) en el punto T; V11T, derivada $d\bar{V}_\delta/dx_1 = $ (V — V22)/(2H) en el punto $S1$; VTT, derivada $d^2\bar{V}_\delta/dx_1^2 = $ (V1T — V11T/(2H) en el punto T.

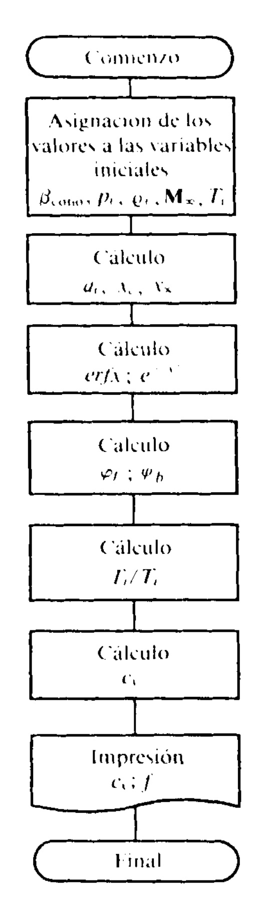


Fig. 13.17-A. Esquema del algoritmo para resolver el problema 13.17

13.17. El esquema del algoritmo para resolver el problema se aduce en la fig. 13.17-A. Esta resolución consta de las siguientes operaciones;

1. Introducción de los datos: ángulo del cono β_{cono}, presión p_i, densidad ρ_i, número $\mathbf{M}_\infty$, temperatura T_∞, límites de variación de los coeficientes de acomodación del impulso (desde 0 hasta 1), del paso previsto 0,01, el valor $\sqrt{\pi}$, el índice adiabático del aire.

2. Cálculo de la velocidad del sonido a_i y de los parámetros $\bar{x}_\infty$, $\bar{x}_{\text{cono}} = \bar{x}_\infty$ sen β_{cono}.

3. Cálculo de las funciones erf $\bar{x}$ y $e^{-\bar{x}^2}$ con ayuda de los subprogramas estándar.

4. Cálculo del coeficiente φ_f y φ_b para los sectores lateral y de base de la superficie del cono, haciendo uso de la dependencia (13.11).

5. Cálculo de la razón de temperaturas T_r/T_i. Para unificar las anotaciones de las dependencias de cálculo se introducen los coeficientes $L(1) = 1$ para el sector lateral y $L(2) = -1$, para el de base de la superficie. Después de hallar el producto RT_i con la expresión (13.10) se determina la razón $2E_i/(mN_1RT_i)$, mientras que con (13.13), el coeficiente k_1, lo que permite con (13.33) hallar el coeficiente k_2 y después con (13.9) la razón de temperaturas.

6. Cálculo de los coeficientes de resistencia c_x. Para que los cálculos sean más cómodos, después de poner en (13.34) las relaciones (13.32) y (13.33), hallamos $c_x = (2 - f)\,[G(1) - G(2)] + f\,[u(1) - u(2)]$, donde el índice 1 se adjudica al sector lateral de la superficie y el 2, al de base. En la expresión aducida

$$G = I \operatorname{sen}^2 \beta_{\text{cono}};\quad u(1) = \text{II}(1)\,\text{III}(1) \operatorname{sen}^2 \beta_{\text{cono}} + \text{IV}(1) \cos^2 \beta_{\text{cono}};$$

$$u(2) = \text{II}(2)\,\text{III}(2) \operatorname{sen}^2 \beta_{\text{cono}};$$

$$\text{I} = e^{-\bar{x}^2}/(\bar{x}\sqrt{\pi}) + [1 + 1/(2\bar{x}^2)]\,(1 + \operatorname{erf}\bar{x});$$

$$\text{II} = e^{-\bar{x}^2} + \bar{x}\sqrt{\pi}\,(1 + \operatorname{erf}\bar{x});\quad \text{III} = \sqrt{T_r/T_i}/(2\bar{x}^2);$$

$$\text{IV}(1) = e^{-\bar{x}^2_{\text{cono}}}/(\bar{x}_{\text{cono}}\sqrt{\pi}) + (1 + \operatorname{erf}\bar{x}_{\text{cono}}).$$

7. Impresión de los resultados del cálculo de c_x con diversos valores del coeficiente de acomodación f.

En el programa para la resolución del problema se han adoptado las siguientes anotaciones (identificadores):

$$\text{B} = \beta_{\text{cono}};\quad \text{P} = p_i;\quad \text{RO} = \rho_i;\quad \text{XM} = \mathbf{M}_\infty;\quad \text{T} = \text{T}_i;$$

$$\text{PP} = \sqrt{\pi};\quad \text{XK} = k;\quad \text{V} = V_\infty;\quad \text{A} = a_\infty;$$

$$\text{X}(1) = \bar{x}_{\text{cono}};\quad \text{X}(2) = \bar{x}_\infty;\quad \text{Y} = \operatorname{erf}\bar{x};$$

$$\text{Z} = e^{-\bar{x}^2};\quad \text{ZK} = k_1;\quad \text{YK} = k_2;$$

$$\text{W} = \varphi;\quad \text{Q} = T_r/T_i.$$

Programa de cálculo para resolver el problema 13.17

```
      DIMENSION F(101),U(2),L(2),S(101),X(2),Y(2),
      YK(2),Z(2),W(2),Q(2),G(2)
      B=0.5236
      P=3.186E-2
      RO=5.549E-7
      XM=2.0
      T=196.6
      DO 4,I=1,101
    4 F(I)=(I-1)/100
      PP=SQRT(3.1415)
      XK=1.4
      A=SQRT(XK*P/RO)
      V=XM*A
      L(1)=1
      L(2)=-1
      X(2)=XM*SQRT(XK*0.5)
      X(1)=X(2)*SIN(B)
      DO 1,I=1,2
      Y(I)=ERF(X(I))
      Z(I)=EXP(-X(I)**2)
      W(I)=Z(I)/L(I)/X(I)/PP/(1+L(I)*Y(I))
      R=9.5*2927
      G(I)=V*V/R/T+4.+1./(W(I)+1.)
      ZK=(XK+1.)/(4.*(XK-1.))
      YK(I)=1.+(5-3.*XK)/G(I)/(XK-1.)
      Q(I)=(1.+XK*XM*XM/4.+1/((W(I)+1.)*4.))*YK(I)/ZK
      G(I)=L(I)*Z(I)/X(I)/PP+(1.+L(I)*Y(I))*(1.+0.5/X(I)/X(I))
      U(I)=0.5/X(I)/X(I)*SQRT(Q(I))
    1 U(I)=U(I)*(Z(I)+X(I)*L(I)*PP*(1.+L(I)*Y(I)))
      G(1)=G(1)*(SIN(B)**2)
      U(1)=SIN(B)**2*U(1)
      U(1)=U(1)+COS(B)**2*(Z(1)/X(1)/PP+1.+Y(1))
      DO 3,I=1,101
      S(I)=(2.-F(I))*(G(1)-G(2))+F(I)*(U(1)-U(2))
    3 PRINT 1111,F(I),S(I)
 1111 FORMAT(X,'O=',E16.7,3X,'CX=',E16.7)
      STOP
      END


      FUNCTION ERF(X)
      EXTERNAL EX
      REAL*8 NAIGUS
      TEG=NAIGUS(0.,X,EX,.1,10,IER)
      ERF=2./SQRT(3.14159)*TEG
      RETURN
      END


      FUNCTION EX(X)
      EX=EXP(-(X*X))
      RETURN
      END
```

Los algoritmos y programas aducidos sirven de ejemplo de aplicación de los ordenadores para resolver problemas aerodinámicos. Ellos pueden dar cierta orientación en cuanto a enunciar y preparar los correspondientes algoritmos a fin de resolver problemas más difíciles que surgen durante el proceso didáctico y los trabajos de investigación científica.

Bibliografía

1. *Аржаников Н. С., Садекова Г. С.* Аэродинамика летательных аппаратов. — М.: Высшая школа, 1983. (*N. S. Arzhánikov, G. S. Sadékova.* Aerodinámica de vehículos volantes.)

2. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом./*Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Любимов А. Н., Русаков В. В.* — М.: Наука, 1964). (*K. I. Babenko, G. P. Voskresenski, A. N. Liubímov, V. V. Rusakov.* Circulación espacial alrededor de sólidos lisos de un gas ideal.)

3. *Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г.* Крыло в нестационарном потоке газа. — М.: Наука, 1971. (*S. M. Belotserkovski, B. K. Skripach, V. G. Tabáchnikov.* El ala en un flujo no estacionario de gas.)

4. *Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К.* Аэродинамические производные летательного аппарата и крыла при дозвуковых скоростях. — М.: Наука, 1975. (*S. M. Belotserkovski, B. K. Skripach.* Derivadas aerodinámicas del vehículo volante y del ala a velocidades subsónicas.)

5. *Бураго Г. Ф., Вотяков В. Д.* Аэродинамика, ч. II. — М.: ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1961. (*G. F. Burago, V. D. Votiakov.* Aerodinámica, p. II.)

6. *Воробьев Н. Ф.* Аэродинамика несущих поверхностей в установившемся потоке. Новосибирск, Наука, 1985. (*Vorobiov N. F.* Aerodinámica de las superficies sustentadoras en un flujo uniforme.)

7. Газодинамические функции/*Иров Ю. Д., Кейль Э. В., Павлухин Б. Н.* и др. — М.: Машиностроение, 1965. (Funciones gasodinámicas. Yu. D. Irov, E. V. Keil, B. N. Pavlujin.)

8. *Гинзбург И. П.* Аэродинамика. — М.: Высшая школа, 1966. (*I. P. Guínsburg.* Aerodinámica.)

9. Атлас газодинамических функций при больших скоростях и высоких температурах воздушного потока/*Кибардин Ю. А., Кузнецов С. И., Любимов А. Н., Шумяцкий Б. Я.* — М.: Госэнергоиздат, 1961. (Atlas de las funciones gasodinámicas a grandes velocidades y altas temperaturas del flujo de aire. *Yu. A. Kibardín, S. I. Kuznetsov, A. N. Liubímov, B. Ya. Shumiatski.*)

10. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, ч. I, II. — М.: Физматгиз, 1963. (N. E. Kochin, I. A. Kíbel, N. V. Roze. Hidromecánica teórica.)

11. *Красильщикова Е. А.* Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. — М.: Гостехиздат, 1962. (E. A. Krasílilschikova. El ala de envergadura finita en un flujo compresible.)

12. *Краснов Н. Ф.* Аэродинамика тел вращения. — М.: Машиностроение, I-е изд., 1958; 2-е изд., 1964. (*N. F. Krasnov.* Aerodinámica de sólidos de revolución.)

13. Аэродинамика ракет/*Краснов Н. Ф., Кошевой В. Н., Данилов А. Н., Захарченко В. Ф.* — М.: Высшая школа, 1968. (Aerodinámica de los cohetes. *N. F. Krasnov, V. N. Koshevói, A. N. Danílov, V. F. Zajárchenko.*)

14. Прикладная аэродинамика. *Краснов Н. Ф., Кошевой В. Н., Данилов А. Н.* и др. — М.: Высшая школа, 1974. (Aerodinámica aplicada. *N. F. Krasnov, V. N. Koshevói, A. N. Danílov.*)

15. *Краснов Н. Ф., Кошевой В. Н.* Управление и стабилизация в аэродинамике. — М.: Высшая школа, 1978. (*N. F. Krasnov, V. N. Koshevói.* Control y estabilización en aerodinámica.)

16. *N. F. Krasnov.* Fundamentals of Theory Aerodynamics of an Airfoil and a wing. Mir Publishers, Moscow, 1985.

17. *N. F. Krasnov.* Aerodynamics 2. Methods of Aerodynamic Calculations. Mir Publishers, Moscow, 1985.

18. *Краснов Н. Ф., Кошевой В. Н., Захарченко В. Ф.* Основы аэродинамического расчета. — М.: Высшая школа, 1984. (*N. F. Krasnov, V. N. Koshevói, V. F. Zajárchenko.* Fundamentos de los cálculos aerodinámicos.)

19. *Кузнецов С. И.* Диаграммы и таблицы течения диссоциирующего воздуха около клина, конуса и выпуклой поверхности. — М.: Оборонгиз, 1962. (*S. I. Kuznetsov.* Diagramas y tablas de flujos de aire en disociación alrededor de la cuña, fuselaje y superficie convexa.)

20. *Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С.* Динамика полета. — М.: Машиностроение,

1973. (*A. A. Lébedev, L. S. Chernobrovkin.* Dinámica de vuelo.)

21. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1970. (*L. G. Loitsianski.* Mecánica de los fluidos.)

22. *Лунев В. В.* Гиперзвуковая аэродинамика. — М.: Машиностроение, 1975. (*V. V. Luniov.* Aerodinámica hipersónica.)

23. *Мартынов А. К.* Прикладная аэродинамика. — М.: Машиностроение, 1972. (*A. K. Martínov.* Aerodinámica aplicada.)

24. *Микеладзе В. Г., Титов В. М.* Основные геометрические и аэродинамические характеристики самолетов и ракет. Справочник. — М.: Машиностроение, 1982. (*V. G. Mikeladtze, V. M. Titov.* Características geométricas y aerodinámicas de aviones y cohetes.)

25. *Мхитарян А. М.* Аэродинамика. — М.: Машиностроение, 1976. (*A. M. Mjitarán.* Aerodinámica.)

26. Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа/Под ред. *О. М. Белоцерковского.* — М.: Изд-во Вычислительного центра АН СССР, 1967. (Circulación alrededor de sólidos obtusos de flujos supersónicos. Dirigido por *O. M. Belotserkovski.*)

27. *Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М.* Метод крупных частиц в газовой динамике.— М.: Наука, 1982. (*O. M. Belotserkovski, Yu. M. Davídov.* Método de grandes partículas en dinámica de los gases.)

28. *Самойлович Г. С., Нетусов В. В.* Сборник задач по гидромеханике. М., Машиностроение, 1986. (*Samoilóvich G. S., Nétusov V. V.* Problemas de hidromecánica.)

29. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике/Под ред. проф. *В. К. Кошкина.* — М.: Машиностроение, 1975. (Fundamentos de termotransferencia en la técnica aeronáutica y coheteril. Dirigido por *V. K. Koshkin.*)

30. *Паттерсон Г. Н.* Молекулярное течение газов. — М.: Физматгиз, 1960. (*G. N. Pátterson.* Flujo molecular de los gases.)

31. Термодинамические функции воздуха для температур от 1000 до 1200 К и давлений от 0, 001 до 1000 атм (графики функций)/*Предводителев А. С., Ступоченко Е. В., Ионов В. П.* и др. — М.: Изд-во АН СССР, 1960. (Funciones termodinámicas del aire para temperaturas desde 1000 hasta 1200 K y presiones desde 0,001 hasta 100 atm (gráficas de las funciones). *A. S. Predvodíteliev, E. V. Stupochenko, V. P. Iónov y otros.*)

32. Таблицы термодинамических функций воздуха (для температур от 6000 до 12000 К и давлений от 0, 001 до 1000 атм)/ *Предводителев А. С., Ступоченко Е. В., Самуйлов Е. В.* и др. — М.: Изд-во АН СССР, 1957. (Tablas de las funciones termodinámicas del aire (para temperaturas desde 6000 hasta 12 000 K y presiones desde 0,001 hasta 1000 atm *A. S. Predvodíteliev, E. V. Stupochenko, E. V. Samuílov y otros.*)

33. Газовая динамика/*Рахматулин Х. А. Сагомонян А. Я., Бунимович А. И., Зверев И. Н.* — М.: Высшая школа, 1965. (Dinámica de los gases. *J. A. Rajmatulin, A. Ya. Sagomoñán, A. I. Bunimóvich, I. N. Zvériev.*)

34. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1965. (*L. I. Sedov.* Métodos de semejanza y dimensionales en mecánica.)

35. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1970. (*L. I. Sedov.* Mecánica del medio continuo.)

36. *Франкль Ф. И., Карпович Е. А.* Газодинамика тонких тел. — М.: Гостехиздат, 1948. (*F. I. Frankl, E. A. Karpóvich.* Gasodinámica de sólidos delgados.)

37. *Христианович С. А.* Обтекание тел газом при больших скоростях. Труды ЦАГИ, № 481, 1940. (*S. A. Jristianóvich.* Circulación alrededor de sólidos de un gas a grandes velocidades.)

38. *Черный Г. Г.* Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. — М.: Физматгиз, 1959. (*G. G. Chorni.* Flujo de un gas a gran velocidad supersónica.)

39. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1969. (*G. Shlíjting.* Teoría de la capa límite.)

40. *Kopal Z.* Tables of Supersonic Flow Around Cones of Large Jaw. Technical Report, N° 5. MIT, 1949.

41. *Kopal Z.* Tables of Supersonic Flow Around Jawing Cones. Technical Report, N° 3, 1947.

42. *Kopal Z.* Tables of Supersonic Flow Around Cones, Technical Report, N° 1, MIT, 1947.

43. Journal of the Aerodinamical Sciences (Journal of the Aerospace Sciences.)

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica; manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.